آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله سوم
۰۶ - ۱۴۰۵	۲۰/شهریور/۱۴۰۵

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۶

ویژگی‌های برنامه راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۰۶-۱۴۰۵

۱- دوره دروس پایه دهم
۲- دوره دروس پایه یازدهم
۳- مطالعه بخشی از دروس پایه دوازدهم
۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه / مرحله	اول ۲۳مرداد	دوم ۶شهریور	سوم ۲۰شهریور	چهارم ۳مهر
دهم	-	✓	✓	✓
یازدهم	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	-	✓	✓	-

- با توجه به موارد فوق دفتر چه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۳ قسمت تشکیل شده است که هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پنل کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.
- آزمون مرحله سوم (همین دفتر چه‌ای که در دست دارید) ادامه پیشروی پایه دهم، یازدهم و دوازدهم است.
- تمامی سرفصل‌های دوازدهم، مجدد از مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی ـ مصطفی کرمی محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: علی افضل‌زاده ـ سروش موئینی ـ مازیار احمدی‌ناو	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراح: کیوان صارمی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب ـ سید عباس حسینی	کیوان صارمی
آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	طراح: سروش موئینی کارشناس علمی: سید عباس حسینی	سعید قندچی ـ سروش موئینی
فیزیک	طراحان: علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری ـ هادی نجفی	رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	طراحان: مهدی براتی ـ یاسر راش ـ پارسا طاهری منزه ـ یاسر عبداللهی ـ آرمین عظیمی ـ سعید فراهانی ـ امیر قاسمی‌پور محمد قهرمانی‌نژاد ـ محسن مجنونی ـ محمد مرادی ـ امیر حسین مسلمی ـ عرفان نریمانی ـ مرتضی نصیرزاده کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده ـ پارسا فراهانی ـ محمدمهدی کریمیان	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفتر چه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفتر چه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پایه دهم

چنان چه پایهٔ دهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۱۵	۱	۱۵	۳۰ دقیقه	ریاضی (۱) فصل ۳ و ۴ صفحهٔ ۴۷ تا ۹۳
هندسه	۱۰	۱۶	۲۵	۲۰ دقیقه	هندسه (۱) فصل ۲ (درس ۳ و ۴) و فصل ۳ صفحهٔ ۳۸ تا ۷۶
فیزیک	۲۰	۲۶	۴۵	۳۰ دقیقه	فیزیک (۱) فصل ۳ و ۴ (تا ابتدای قوانین گازها) صفحهٔ ۵۳ تا ۱۱۷
شیمی	۱۵	۴۶	۶۰	۲۰ دقیقه	شیمی (۱) فصل ۲ صفحهٔ ۴۷ تا ۸۴
مجموع	۶۰ سؤال			۱۰۰ دقیقه	–

آزمون آزمایشی خیلی سبز – رشته ریاضی

پایه دوازدهم – مرحله سوم – ۲ شهریور ۱۴۰۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضی دهم

۱- نقاط $(۲,-۱)$ و $(۲,-۵)$ روی یک سهمی قرار دارند. معادلهٔ محور تقارن این سهمی کدام است؟

۱) $x=۲$
۲) $x=۱$
۳) $x=-۲$
۴) $x=-۱$

۲- محیط یک مستطیل برابر ۸۰ است. بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

۱) ۸۰۰
۲) ۶۰۰
۳) ۴۰۰
۴) ۲۰۰

۳- عدد $\sqrt[۳]{۱۸}$ چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) $\sqrt[۶]{۱۲}$
۲) $\sqrt[۶]{۶}$
۳) $\sqrt[۶]{۱۸}$
۴) $\sqrt[۶]{۹}$

۴- اگر $(\sqrt[۳]{۹})^{k}=۲۴۰\times ۲۷^{-۰/۵}-\frac{۲۷}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۴}$
۲) $-\frac{۷}{۴}$
۳) -۵
۴) -۴

۵- اگر α و β ریشه‌های دوم عدد $A=۲۸-۱۶\sqrt{۳}$ باشند، حاصل عبارت $|\alpha-\beta|-\frac{A}{۴}$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) ۱
۳) $۴\sqrt{۳}-۱$
۴) $۱+۴\sqrt{۳}$

۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}+۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}-۲$
۲) $\sqrt{۵}-۲$
۳) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}{۲}$
۴) $\sqrt{۶}-\sqrt{۵}$

۷- اگر $\sqrt[۳]{x^{۲}}=۳\sqrt[۳]{x}+۱$ باشد، حاصل عبارت $x-\frac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۱۶
۳) ۳۶
۴) ۱۸

۸- برای اعداد ناصفر a، b و c، تساوی $a^{۲}+۱۳b^{۲}+c^{۲}+۶ab=۴bc$ برقرار است. حاصل $\frac{c}{a}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) -۲
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۹- اگر α بزرگ‌ترین و β کوچک‌ترین جواب معادلهٔ $(x+۳)(x-۱)=۱$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\alpha^{۲}}{\beta+۴}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

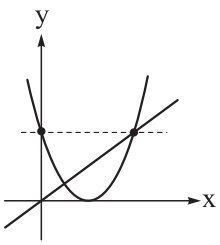
۱۰- بیشترین مقدار عرض نقاط روی سهمی $y = ax^2 + 2ax + 3$، برابر $2a^2$ است. این سهمی از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(-1, \frac{3}{2})$
۲) $(-1, \frac{9}{2})$
۳) $(-2, 6)$
۴) $(-2, \frac{3}{2})$

۱۱- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقطهٔ $(2, c)$ می‌گذرد و خط $y = -1$ بر آن مماس است. اگر نیمساز ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات، این سهمی را در نقطه‌ای به طول -1 قطع کند، عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور y کدام است؟

۱) -1
۲) 1
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

۱۲- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و خط $y = 2x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. حاصل $ac - b$ کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۲۴

۱۳- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = (x+1)(3x^2 + 2ax - a)$ به صورت زیر است:

x		-1		b	
$P(x)$	$-$	∄	$-$	∄	$+$

حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) ۲
۴) ۴

۱۴- مجموع جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $\frac{x-4}{2\sqrt{x}-1} < 0$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۱۰

۱۵- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^2 - 6| > |2x - 6| + |x^2 - 2x|$ شامل چند عدد طبیعی است؟

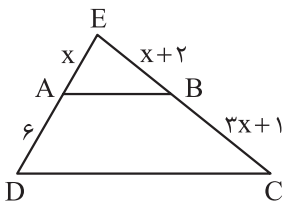
۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

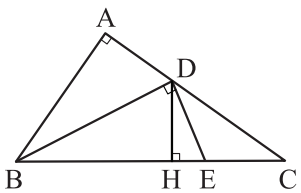
هندسه دهم

۱۶- در شکل زیر، مساحت ذوزنقهٔ ABCD چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



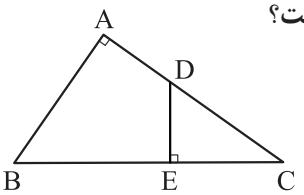
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۱۷- در شکل زیر، مثلث‌های ABC، BDE و DHC قائم‌الزاویه‌اند. اگر $D\hat{B}C = E\hat{D}C$، $AD = ۴$ و $BE = ۱۰$ باشد، طول HE کدام است؟



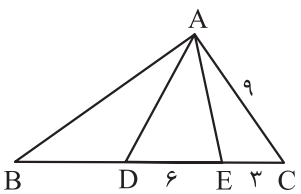
۱) ۱/۲۵
۲) ۲
۳) ۲/۲۵
۴) ۳

۱۸- در شکل زیر، $AB = DC$ و $AD = EC$ است. اگر $BE = ۴$ باشد، طول AD کدام است؟



۱) ۲
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۳

۱۹- در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ BAE است، طول BD کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۲۰- تعداد قطرهای یک چندضلعی، سه برابر تعداد اضلاع آن است. از هر رأس این چندضلعی، چند قطر می‌گذرد؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

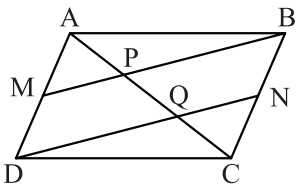
۲۱- طول یک مستطیل سه برابر عرض آن است. از تقاطع نیمسازهای داخلی این مستطیل یک چهارضلعی حاصل می‌شود. محیط مستطیل چند برابر محیط چهارضلعی ایجادشده است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

محل انجام محاسبات

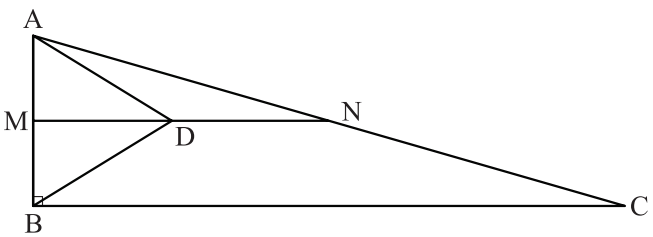
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲- متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل مفروض است. اگر M و N به ترتیب وسط اضلاع AD و BC و $AQ + PC = ۱۸$ باشد، طول PC کدام است؟



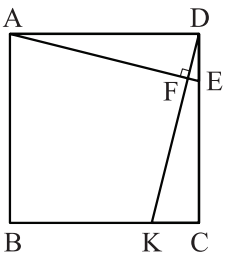
۱) ۷/۵
۲) ۸
۳) ۸/۵
۴) ۹

۲۳- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$ مطابق شکل مفروض است. اگر مثلث ADB متساوی‌الاضلاع، $DN = ۱$، $BC = \sqrt{۳} + ۲$ و MN با BC موازی باشد، مساحت چهارضلعی DNCB کدام است؟



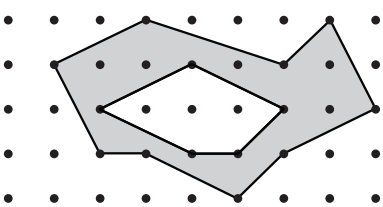
۱) $\frac{\sqrt{۲}+۳}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}+۳}{۴}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۴}$

۲۴- مربع ABCD به طول ضلع ۱۲ مطابق شکل مفروض است. اگر $D\hat{A}E = ۱۵^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی KFEC کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

۲۵- مساحت قسمت رنگی در شکل زیر کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۱/۵
۳) ۱۲
۴) ۱۲/۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دهم

۲۶- متحرکی به جرم $m_1 = ۱۲\ kg$ با تندی v_1 در حرکت است. تندی آن ۲۵ درصد کاهش یافته و انرژی جنبشی آن نیز ۲۵ درصد کاهش یافته است. جرم جسم چند کیلوگرم افزایش یافته است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

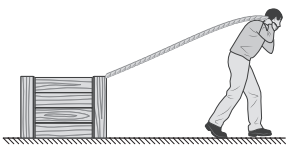
۲۷- در جابه‌جایی جسمی به جرم $۰/۵\ kg$، انرژی پتانسیل گرانشی آن از $۲۰۰\ J$ به $۲۵۰\ J$ می‌رسد. در این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن جسم روی آن برابر چند ژول است؟

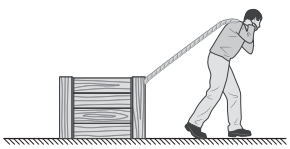
۱) ۵۰ ۲) -۵۰ ۳) ۹۰ ۴) -۹۰

۲۸- در صفحهٔ مختصات، به جسمی نیروی $\vec{F} = ۶\vec{i} - ۸\vec{j}$ برحسب نیوتون، وارد می‌شود. جسم ابتدا $۵۰\ cm$ در جهت محور x و در ادامه $۶۰\ cm$ در جهت محور y جابه‌جا می‌شود. در کل این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ برابر چند ژول است؟

۱) $-۱/۸$ ۲) $۷/۸$ ۳) $۷/۶$ ۴) $-۰/۴$

۲۹- شخصی جسم ساکنی را یک بار با طنابی بلند (شکل الف) و بار دیگر با طنابی کوتاه‌تر (شکل ب) روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌کشد. اگر اندازهٔ نیرویی که شخص وارد می‌کند، در هر دو حالت برابر باشد، پس از جابه‌جایی یکسان جسم، به ترتیب از راست به چپ در کدام شکل، شخص کار بیشتری انجام می‌دهد و در کدام شکل، تندی نهایی جسم بیشتر است؟


(الف)


(ب)

۱) الف ـ الف
۲) الف ـ ب
۳) ب ـ الف
۴) ب ـ ب

۳۰- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی به جرم $۴\ kg$ که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^۲ - ۱۰t + ۵$ است. کار کل انجام‌شده روی جسم در سه ثانیهٔ دوم برابر چند ژول است؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲ ۳) -۲۴ ۴) -۷۲

۳۱- هواپیمایی که در ارتفاع $۱۲۵\ m$ از سطح زمین با تندی $۱۸۰\ km/h$ پرواز می‌کند، بسته‌ای را رها می‌کند. با چشم‌پوشی از نیروی مقاومت هوا، تندی بسته هنگام برخورد به زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) $۱۰\sqrt{۵}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) $۵۰\sqrt{۲}$ ۴) $۵۰\sqrt{۵}$

۳۲- وزنهٔ ۶۰۰گرمی را به نخی به طول $۸۰\ cm$ بسته و از سقف آویزان کرده‌ایم. اگر وزنه را روی دایره‌ای به شعاع نخ از حالت قائم آن‌قدر دور کنیم که زاویهٔ نخ با راستای قائم ۶۰ درجه شود و از این حالت وزنه را رها کنیم، بیشینهٔ انرژی جنبشی وزنه در مسیر، چند ژول می‌شود؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و مقاومت هوا و جرم نخ ناچیز است.)

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۴/۸

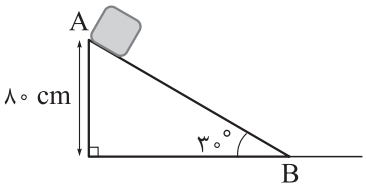
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳- جسمی به جرم $400\,g$ را از سطح زمین با تندی $30\,m/s$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم و جسم حداکثر تا ارتفاع $35\,m$ بالا می‌رود. در این جابه‌جایی ۳۵متری، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن جسم، چند برابر کار انجام‌شده توسط نیروی مقاومت هوا است؟ $(g = 10\,N/kg)$

۱) $-4/5$
۲) $4/5$
۳) $-3/5$
۴) $3/5$

۳۴- در شکل زیر، جسمی به جرم $500\,g$ را از نقطهٔ A رها می‌کنیم. جسم می‌لغزد و با تندی $2/4\,m/s$ به سطح افقی می‌رسد. اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم با فرض ثابت‌بودن چند نیوتون است؟ $(g = 10\,m/s^2)$

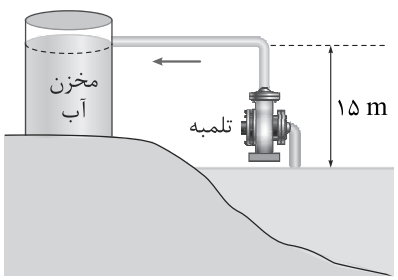


۱) $1/6$
۲) $1/8$
۳) $2/56$
۴) $3/2$

۳۵- تندی خودرویی به جرم $1620\,kg$ در یک جادهٔ افقی در مدت $5\,s$ از $40\,km/h$ به $80\,km/h$ می‌رسد. در این حرکت، توان متوسط موتور این خودرو حداقل چند اسب بخار است؟ $(1\,hp = 750\,W)$

۱) ۶۰
۲) ۸۰
۳) ۶۰۰
۴) ۸۰۰

۳۶- در شکل زیر، توان ورودی تلمبهٔ برقی $5\,kW$ است و در هر دقیقه $1200\,L$ آب با چگالی $\rho = 1\,g/cm^3$ را وارد مخزن می‌کند. بازده این تلمبه، چند درصد است؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) ۶۰
۲) ۶۵
۳) ۷۵
۴) ۸۰

۳۷- آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق آبی، از ارتفاع ۷۲متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۵۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، باید در هر دقیقه چند متر مکعب آب روی توربین بریزد تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به $60\,MW$ برسد؟ (چگالی آب $1000\,kg/m^3$ و $g = 10\,m/s^2$ است.)

۱) 10^4
۲) 10^7
۳) 2×10^4
۴) 2×10^7

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) دماسنج گازی، تفسنج و ترموکوپل به عنوان دماسنج‌های معیار برای اندازه‌گیری گسترهٔ دماهای مختلف پذیرفته شده‌اند.

ب) در ترموکوپل، کمیت دماسنجی، ولتاژ است و گسترهٔ دماسنجی یک ترموکوپل، به جنس دو سیم به کار رفته در آن بستگی دارد.

پ) سطوح صاف با رنگ‌های روشن در مقایسه با سطوح ناصاف و تیره تابش گرمایی کم‌تری دارند.

ت) هر چه ضریب انبساط حجمی مایعی کم‌تر باشد، انتقال گرما به روش همرفت در آن سریع‌تر انجام می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹- مقدار عددی دمای جسمی برحسب درجهٔ سلسیوس و درجهٔ فارنهایت یکسان است. دمای این جسم در SI کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) -۴۰ ۳) ۲۳۳ ۴) ۳۱۳

۴۰- یک بزرگراه از بخش‌های بتونی به طول $۲۰\ m$ ساخته شده است. این بخش‌ها، در دمای $۴۸\ ^\circ F$، بتون‌ریزی و عمل آورده شده‌اند. برای جلوگیری از تاب‌برداشتن بتون در دمای $۱۲۰\ ^\circ F$، مهندسان باید حداقل چه فاصله‌ای برحسب سانتی‌متر را بین این قطعه‌ها در نظر بگیرند؟ $(\alpha_{\text{بتون}} = ۱/۲۵\times۱۰^{-۵}\ K^{-۱})$

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۹ ۳) ۱ ۴) ۱/۸

۴۱- ضریب انبساط طولی آلومینیم $۲/۲۵\times۱۰^{-۵}\ K^{-۱}$ است. در دمای $۲۰\ ^\circ C$ روی یک ورقهٔ تخت آلومینیمی، حفره‌ای دایره‌ای‌شکل ایجاد کرده‌ایم. اگر دمای ورقه را به آرامی به $۸۰\ ^\circ C$ برسانیم، مساحت حفره چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

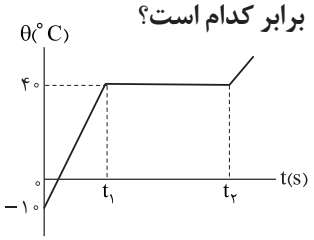
۱) ۲۷/۰، کاهش می‌یابد. ۲) ۲۷/۰، افزایش می‌یابد.

۳) ۳۶/۰، کاهش می‌یابد. ۴) ۳۶/۰، افزایش می‌یابد.

۴۲- در یک دمای معین، چگالی مایعی $۱/۲۵\ g/cm^۳$ است. $۷/۵\ kg$ از این مایع در این دما، چند کیلوژول گرما دریافت کند تا چگالی آن $۲۵kg/m^۳$ تغییر کند؟ (گرمای ویژهٔ مایع $۰/۸\ \frac{J}{g.K}$ و ضریب انبساط حجمی آن $۲\times۱۰^{-۴}K^{-۱}$ است.)

۱) ۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۲۴۰۰

۴۳- جسمی جامد به جرم $۵۰۰\ g$ با آهنگ ثابت، گرما دریافت می‌کند و نمودار دمای آن برحسب زمان به شکل زیر است. اگر گرمای ویژهٔ جسم در حالت جامد $۸۰۰\ \frac{J}{kg.K}$ و گرمای نهان ذوب آن $۷۲\ kJ/kg$ باشد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{۹}{۵}$ ۲) $\frac{۱۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱۴}{۹}$ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴- ظرفی حاوی مقداری آب با دمای $50^{\circ}C$ است. به این ظرف، یک کیلوگرم آب با دمای $90^{\circ}C$ اضافه می‌کنیم. دمای تعادل به $60^{\circ}C$ می‌رسد. اگر روی این آبِ $60^{\circ}C$، یک کیلوگرم دیگر، آبِ $90^{\circ}C$ بریزیم، دمای آب به چند درجهٔ سلسیوس می‌رسد؟ (اتلاف گرما ناچیز است.)

۱) ۶۴ ۲) ۶۶ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

۴۵- درون گرماسنجی $800g$ آب قرار دارد و دمای مجموعه $10^{\circ}C$ است. اگر قطعه یخی به جرم $500g$ و دمای $-10^{\circ}C$ را به آب اضافه کنیم، پس از ایجاد تعادل گرمایی، نیمی از یخ ذوب‌نشده باقی می‌ماند. ظرفیت گرمایی گرماسنج در SI کدام است؟ $(L_F = 3/36\times10^{5}\,J/kg$ و $c_{\text{یخ}} = 2c_{\text{اب}} = 4200\,\frac{J}{kg.^{\circ}C})$

۱) ۵۰۴ ۲) ۶۰۹ ۳) ۵۰۴۰ ۴) ۶۰۹۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دهم

۴۶- کدام مورد دربارهٔ هواکره درست است؟

۱) روند تغییر فشار را می‌توان دلیلی بر لایه‌ای‌بودن آن دانست.

۲) از ارتفاع حدود ۸۰کیلومتری به بعد، علاوه بر اتم‌ها و مولکول‌ها، کاتیون‌ها و آنیون‌ها نیز در هوا وجود دارند.

۳) روند کلی تغییر دما و تغییر فشار در لایهٔ دوم آن، برعکس یکدیگر است.

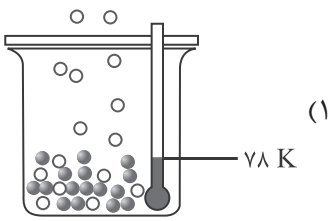
۴) منبع غنی از گازهای هیدروژن، اکسیژن و نیتروژن است.

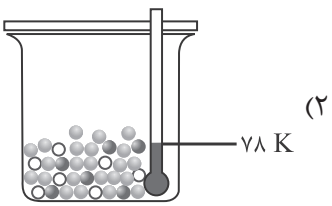
۴۷- اگر رابطهٔ دما نسبت به ارتفاع از سطح زمین در لایهٔ تروپوسفر به صورت $\theta = -۶\Delta h + ۱۴$ باشد و در لایهٔ بعدی (استراتوسفر) به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع، $۲\ ^\circ C$ تغییر دما داشته باشیم، دمای هوا در ارتفاع ۴۰کیلومتری از سطح زمین برابر چند درجهٔ سلسیوس است؟ (ارتفاع لایهٔ تروپوسفر برابر $۱۲\ km$ است.)

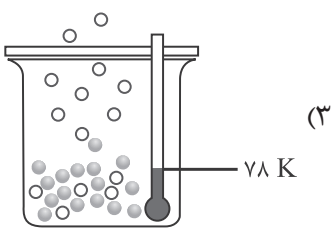
۱) -۱۱۲ ۲) -۲ ۳) -۱۱۴ ۴) -۱۰

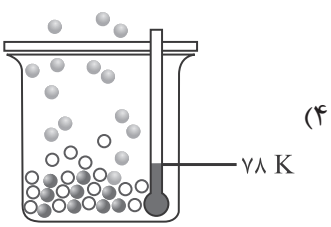
۴۸- اگر مقدار معینی هوای پاک و خشک را تا دمای ۷۸ کلوین سرد کنیم، اجزای سازندهٔ عمدهٔ هوا به کدام شکل در آن وجود دارند؟

$N_۲$
$O_۲$
Ar

۱)


۲)


۳)


۴)


۴۹- در چه تعداد از موارد زیر، نام و فرمول داده‌شده، با هم تطابق دارند؟

- $SO_۳$: گوگرد تری‌اکسید
- $N_۲O$: دی‌نیتروژن اکسید
- CuO: مس (I) اکسید
- $Fe_۲S$: آهن (II) سولفید
- $N_۲O_۳$: دی‌نیتروژن تری‌اکسیژن
- MgO: منیزیم (II) اکسید

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰- در کدام گزینه، درصد حجمی گازهای نجیب در هواکره به درستی مقایسه شده است؟

۱) $Ar > He > Ne > Xe > Rn$
۲) $Ar > Ne > He > Kr > Xe$
۳) $Ar > Ne > Xe > He > Kr$
۴) $He > Ar > Ne > Kr > Xe$

۵۱- با توجه به مطالب کتاب درسی، در مورد ساختار لوویس اکسیدهایی از کربن و گوگرد با فرمول CO_x و SO_y، کدام مورد نادرست است؟

۱) اگر $x = y$ باشد، نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در اکسید گوگرد بیشتر است.
۲) اگر $x + y = ۵$ باشد، در هر دو مولکول، اتم مرکزی الکترون ناپیوندی ندارد.
۳) در همهٔ مولکول‌های ممکن، هر اتم اکسیژن، ۲ پیوند اشتراکی تشکیل داده است.
۴) اگر شمار پیوندهای اشتراکی اکسید گوگرد بیشتر از اکسید کربن باشد، در نام یکی از مولکول‌ها، واژهٔ «مونو» به کار رفته است.

۵۲- درستی و نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- **افزایش $CO_۲$ در آب دریا، موجب تخریب ساختار آهکی برخی کیسه‌تنان و فرسایش ساختار اسکلتی آن‌ها می‌شود.**
- **محلول ترکیب‌های BaO و NO در آب، به ترتیب موجب قرمزشدن و آبی‌شدن کاغذ pH می‌شوند.**
- **افزودن CaO به خاک کشاورزی، موجب رشد بهتر گیاهان و بهبود محصولات کشاورزی می‌شود.**
- **چگالی کربن مونوکسید بیشتر از هوا و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است.**

۱) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۵۳- پس از موازنهٔ معادلهٔ زیر، تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها کدام است؟

$$Ni + NH_۴ClO_۴ \rightarrow Ni_۲O_۳ + NiCl_۳ + H_۲O + N_۲$$

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

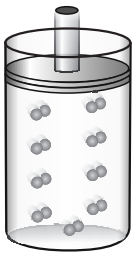
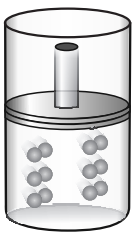
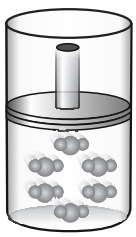
۵۴- کدام مورد، نادرست است؟

۱) با افزایش مقدار کربن دی‌اکسید در هوا، میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد برخلاف مساحت سطح برف در نیمکرهٔ شمالی، افزایش می‌یابد.
۲) در تولید مقدار معینی برق، انرژی خورشیدی، کربن دی‌اکسید کم‌تری نسبت به باد تولید می‌کند.
۳) در برخی از کشورها از اتانول به عنوان سوخت سبز استفاده می‌شود.
۴) در واکنش سوختن کامل ۰/۲ مول اتانول، ۱۳/۴۴ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP مصرف می‌شود.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵- با توجه به جدول زیر که چند نمونهٔ گازی را در شرایط STP نشان می‌دهد، کدام موارد نادرست است؟ (هر ذره معادل ۰/۰۳ مول است؛ $O=16, N=14, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)

شمارهٔ نمونه	۱	۲	۳	۴	۵
گاز	N_2	H_2	O_2	He	CO_2
ظرف محتوی گاز					

الف) در صورت انجام واکنش میان نمونه‌های (۱) و (۲)، ۳/۰۶ گرم آمونیاک تولید می‌شود.

ب) اگر در دمای ثابت، فشار نمونهٔ (۴) به ۲ atm برسد، حجم آن به ۲/۰۱۶ لیتر می‌رسد.

پ) مجموع تعداد اتم‌ها در مخلوط گازهای نمونه‌های (۱) و (۵) برابر $1/6254\times10^{23}$ است.

ت) چگالی گاز نمونهٔ (۳) در شرایط آزمایش به تقریب برابر $1/43\ g.L^{-1}$ است.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) فقط پ
۴) پ ـ ت

۵۶- کدام مورد، نادرست است؟

۱) مولکول‌های اوزون مانع ورود بیش از ۷۵ درصد تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین می‌شوند.

۲) برای کاهش CO_2 تولیدشده در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، آن را با اکسید فلزهای کلسیم و منیزیم واکنش می‌دهند.

۳) در مجموعهٔ واکنش‌های تولید اوزون تروپوسفری، گاز نیتروژن، در همهٔ مراحل نقش واکنش‌دهنده را ایفا می‌کند.

۴) طول موج نور حاصل از سوختن گوگرد، از طول موج رنگ شعلهٔ فلز سدیم کوتاه‌تر است.

۵۷- در شرایطی معین، ۱ مول اوکتان (C_8H_{18}) سوخته و نیمی از اتم‌های کربن آن به کربن مونوکسید و نیم دیگر آن به کربن دی‌اکسید تبدیل می‌شوند. جرم گاز اکسیژن مصرف‌شده در این فرایند چند گرم است؟ ($O=16\ g.mol^{-1}$)

۱) ۳۲۰
۲) ۳۳۶
۳) ۶۴۰
۴) ۶۷۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸- آلوتروپ‌های اکسیژن در چه تعداد از موارد زیر، مشابه هستند؟

- حالت فیزیکی در دما و فشار اتاق
- رنگ کلی در حالت مایع
- نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در مولکول سازنده
- شمار اتم‌ها در نمونه‌هایی به جرم یکسان

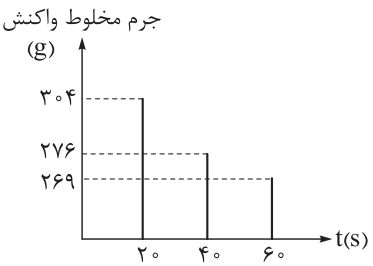
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- اگر در واکنش زیر، به ازای مصرف ۵ گرم از مادهٔ A، ۵۶۰ میلی‌لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP تولید شود، جرم مولی مادهٔ B چند گرم بر مول است؟ $(O = 16\ g.mol^{-1})$

$$2A(s) \rightarrow 2B(s) + O_2(g)$$

۱) ۶۸ ۲) ۸۴ ۳) ۱۳۲ ۴) ۱۶۸

۶۰- مخلوطی از C و SiO_2 به جرم ۳۶۰ گرم در واکنش $SiO_2(s) + 3C(s) \rightarrow SiC(s) + 2CO(g)$ شرکت می‌کند. اگر نمودار تغییرات جرم مخلوط واکنش برحسب زمان به صورت زیر باشد، اختلاف جرم SiC تولیدشده در ۲۰ ثانیهٔ اول با ۲۰ ثانیهٔ سوم واکنش چند گرم است؟ $(Si = 28, O = 16, C = 12 : g.mol^{-1})$



۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز ـ رشته ریاضی

پایه دوازدهم ـ مرحله سوم ـ ۲۰ شهریور ۱۴۰۵

پایه یازدهم

چنان‌چه پایهٔ یازدهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۱۵	۶۱	۷۵	۲۵ دقیقه	حسابان (۱) فصل ۲ صفحهٔ ۳۷ تا ۷۰ فصل ۳ صفحهٔ ۷۱ تا ۹۰
هندسه	۱۰	۷۶	۸۵	۲۰ دقیقه	هندسه (۲) فصل ۲ صفحهٔ ۳۱ تا ۵۸
آمار و احتمال	۱۰	۸۶	۹۵	۲۰ دقیقه	ریاضی (۱) فصل ۷ صفحهٔ ۱۴۱ تا ۱۷۰ آمار و احتمال فصل ۲ صفحهٔ ۳۵ تا ۶۸
فیزیک	۲۰	۹۶	۱۱۵	۳۰ دقیقه	فیزیک (۲) فصل ۲ صفحهٔ ۴۵ تا ۸۲
شیمی	۱۵	۱۱۶	۱۳۰	۲۰ دقیقه	شیمی (۲) فصل ۲ صفحهٔ ۵۱ تا ۹۸
مجموع	۷۰ سؤال			۱۱۵ دقیقه	ـ

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان یازدهم

۶۱- دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{\sqrt{20}-x}}{x-4}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۶۲- دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{ax^2-4x+b}$، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{a+1\}$ است. مجموع مقادیر قابل قبول برای b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

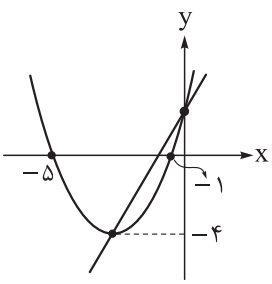
۶۳- اگر $x=\alpha$ جواب معادلهٔ $x-[\frac{1}{2}-2x]=\frac{5}{3}$ باشد، حاصل عبارت $[-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{2}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۳-

۶۴- به ازای چند مقدار صحیح k، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1-x & ; \quad x<4\\ k|x-k^2|+k & ; \quad x\geq 4\end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۵- نمودارهای تابع درجه‌دوم f و تابع خطی g در شکل زیر رسم شده‌اند. مقدار $g^{-1}(7)$ کدام است؟



۱) ۴
۲) $\frac{2}{3}$
۳) ۱
۴) $\frac{5}{3}$

۶۶- اگر $f(x)=x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ باشد، تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x-\sqrt{x} \quad ; \quad x\geq\frac{1}{4}$
۲) $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}-\frac{1}{2} \quad ; \quad x\geq 0$
۳) $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x} \quad ; \quad x\geq 0$
۴) $f^{-1}(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{2} \quad ; \quad x\geq\frac{1}{4}$

۶۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{1}{x}$ مفروض است. اگر $f-g=\{(2,0),(-1,1),(\frac{1}{2},3)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) صفر

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸- دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^{۲}-\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x-\sqrt{x-۱}$ مفروض‌اند. برد تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $[-\frac{۱}{۴},+\infty)$ ۴) $(-\infty,-\frac{۱}{۴}]$

۶۹- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{mx-۱}{۲x-۱}$ مفروض است. اگر $(fof)(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}$ باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

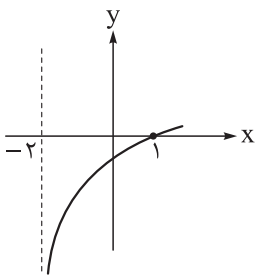
۷۰- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x}$ مفروض‌اند. برد تابع $g^{-۱}of$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[-۱,۳]$ ۴) $[-۳,۱]$

۷۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{۱-k}{۲k-۸})^{x}$ نمایی است. اگر k عددی صحیح باشد، مقدار $f(-k)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۷۲- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۳}(x+a)+b$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a^{۲}-۳b$ کدام است؟



۱) ۷
۲) ۶
۳) ۲
۴) ۱

۷۳- انرژی آزادشدهٔ زلزلهٔ دوم، ۸۰ برابر انرژی آزادشدهٔ زلزلهٔ اول است. اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ باشد، زلزلهٔ دوم تقریباً چند ریشتر از زلزلهٔ اول بزرگ‌تر است؟ $(\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M)$

۱) $\frac{۲۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۹}{۱۵}$

۷۴- اگر $\log_{۸}۹=a$ و $\log_{۲}b=۱+\frac{۳}{۲}a$ باشد، حاصل $\log_{۲۷}(۲b^{۲}+۹)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۵- اختلاف جواب‌های معادلهٔ $x^{\log_{۳}x^{۲}}=\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

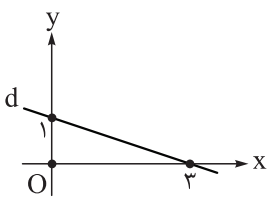
هندسه یازدهم

۷۶- چه تعداد از تبدیل‌های زیر، جهت شکل را تغییر می‌دهند؟

- دوران
- بازتاب
- انتقال
- تجانس

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۷- در شکل زیر اگر خط d را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۹}{۴}$ تصویر کنیم و آن را d' بنامیم، مساحت بین خط d و d' و محورهای مختصات کدام است؟



۱) $\frac{۱۴۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۳۵}{۸}$

۳) $\frac{۷۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۹۵}{۳۲}$

۷۸- دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ مماس‌خارج هستند. فاصلهٔ مرکز تجانس مستقیم دو دایره از مرکز تجانس معکوس آن‌ها کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳

۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۷۹- اگر نقاط $A'(۲,۴)$ و $B'(۷,۱۱)$ به ترتیب دوران‌یافتهٔ نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۸,۳)$ باشند، مجموع طول و عرض مرکز دوران کدام است؟

۱) ۵/۲ ۲) ۵/۴ ۳) ۵/۶ ۴) ۵/۸

۸۰- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH روی ضلع BC، قطعاتی به طول‌های ۲ و ۸ ایجاد می‌کند. اگر این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AH}$ انتقال دهیم، بیشترین فاصلهٔ رأس‌های مثلث اولیه و جدید کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) $۷\sqrt{۲}$

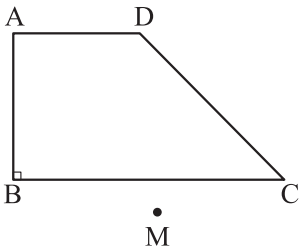
۸۱- در مثلث ABC که میانه‌های آن در نقطهٔ G همرس هستند، داریم $AB = \sqrt{۳}$، $AC = ۳$ و $BC = ۲\sqrt{۳}$. بازتاب G را نسبت به ضلع AC، G' می‌نامیم. اگر نقطهٔ M وسط ضلع BC باشد، نسبت $\frac{GG'}{GM}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲- ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD و نقطهٔ M در خارج آن، مطابق شکل مفروض‌اند. نقطهٔ M را ابتدا نسبت به BC بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ M' حاصل شود و سپس M' را نسبت به DC بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ M'' به دست آید. اگر $M\hat{C}M'' = ۹۰^\circ$، $AD = ۵$ و $BC = ۹$ باشد، طول DC کدام است؟

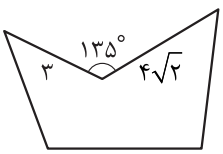


۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

۸۳- چهار نقطهٔ $A(۱,۱)$، $B(۲۵,۴)$، $M(۴,۰)$ و $N(۹,۰)$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند. کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMNB چه‌قدر از $\sqrt{۳۸۶}$ بیشتر است؟

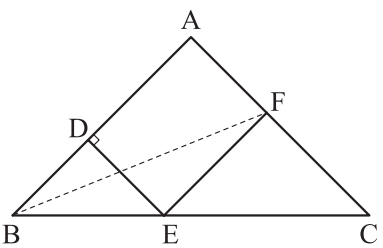
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۸۴- زمینی به شکل زیر داریم و می‌خواهیم بدون آن‌که محیط این زمین و تعداد اضلاع آن تغییر کند، مساحتش را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت کدام است؟



۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۱

۸۵- در شکل زیر D و F دو نقطهٔ ثابت به ترتیب واقع بر AB و AC هستند و نقطهٔ E روی ضلع BC به گونه‌ای انتخاب شده است که خط شکستهٔ DEF کم‌ترین طول ممکن را دارد. اگر $DE = ۳$، $BD = ۲$ و $EF = ۵$ باشد، طول BF کدام است؟



۱) ۶
۲) $۲\sqrt{۱۷}$
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) ۷

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آمار و احتمال

۸۶- در پرتاب دو تاس با هم با کدام احتمال جمع ارقام روشده، فرد و بیشتر از ۶ است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۸۷- خانواده‌ای ۷ فرزند دارند. با کدام احتمال فرزند هفتم، سومین پسر است؟

۱) $\frac{۲۰}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۲۱}{۱۲۸}$

۸۸- اگر در فضای نمونه‌ای $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ احتمال a_i متناسب با i باشد، $P(\{a_۱,a_۳\})$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۸۹- از کیسه‌ای که در آن ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد، مهره‌ها را یکی یکی بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مهرهٔ سوم و ششم به ترتیب سیاه و سفید هستند؟

۱) $\frac{۲۰}{۸۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱۶}{۸۱}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۹۰- بر روی وجه‌های یک تاس ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳ نوشته شده است. این تاس را دو بار می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد متوالی ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۹۱- اگر $P(A)=\frac{۲}{۳}$، $P(B)=\frac{۱}{۲}$ و $P(A\mid B)=\frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $P(B-A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۹۲- در پرتاب ۲ سکه و ۲ تاس با کدام احتمال دو سکهٔ متفاوت و دو تاس یکسان می‌آیند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

۹۳- شانس قبولی علی دو برابر بهنام است. اگر احتمال این‌که فقط علی قبول شود ۰/۳۲ باشد، با کدام احتمال علی قبول می‌شود؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴- تاسی را می‌اندازیم. اگر عدد اول آمد یک سکه، اگر عدد مرکب آمد ۲ سکه و در غیر این صورت ۳ سکه می‌اندازیم. با کدام احتمال تمام پرتاب‌ها «رو» می‌آید؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۹۵- ۶۰ درصد از اعضای باشگاهی مرد هستند. نصف مردان و ۷۵ درصد زنان کارت ویژه دارند. یک عضو کارت ویژه دارد، با کدام احتمال مرد است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک یازدهم

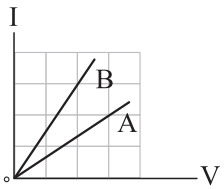
۹۶- روی یک باتری قلمی مقدار $۱۲۰\,mAh$ نوشته شده است. اگر این باتری جریان الکتریکی متوسط $۲۵۰\,\mu A$ را فراهم سازد، چند دقیقه طول می‌کشد تا خالی شود؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۴۸۰۰ ۳) ۲۸۸۰ ۴) ۲۸۸۰۰

۹۷- مقاومت الکتریکی کدام‌یک از مقاومت‌های زیر، به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد؟

۱) ترمیستور ۲) پتانسیومتر ۳) LED ۴) LDR

۹۸- نمودار جریان عبوری از دو مقاومت A و B برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. به دو سر این دو رسانا، به ترتیب اختلاف پتانسیل الکتریکی $۳۰V$ و $۴۰V$ اعمال می‌شود. در این حالت، جریان عبوری از مقاومت A، چند برابر جریان عبوری از مقاومت B است؟

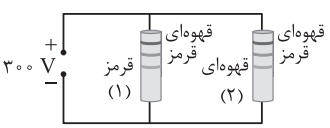


۱) $\frac{۲۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۶}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۹۹- جنس و دمای دو سیم استوانه‌ای A و B یکسان است. اگر طول سیم A، نصف طول سیم B و جرم آن دو برابر جرم سیم B باشد، مقاومت الکتریکی سیم A چند برابر مقاومت الکتریکی سیم B است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۰۰- در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی مقاومت ترکیبی (۱) برابر $۷۵\,W$ باشد، توان مصرفی مجموعه برابر چند وات است؟ (قهوه‌ای:۱ و قرمز:۲ و از تلرانس مقاومت‌های ترکیبی چشم‌پوشی کنید.)



۱) ۷/۵ ۲) ۸۲/۵ ۳) ۷۵۰ ۴) ۸۲۵

۱۰۱- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) مقاومت ویژهٔ رساناهای فلزی با افزایش دما، کاهش می‌یابد.

ب) مقاومت ویژهٔ نیم‌رساناها مانند ژرمانیم و سیلیسیم، با افزایش دما، افزایش می‌یابد.

پ) در برخی موارد مانند جیوه، با کاهش دما، مقاومت ویژه به تدریج کاهش می‌یابد تا به صفر برسد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۲- دو سر یک استوانهٔ مسی به سطح مقطع $۰/۵\,cm^۲$ به اختلاف پتانسیل معینی متصل است. اگر جریان الکتریکی عبوری از استوانه برابر $۰/۴\,A$ باشد، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت درون آن چند نیوتون بر کولن است؟ (مقاومت ویژهٔ مس برابر $۱/۸\times۱۰^{-۸}\,\Omega.m$ است.)

۱) ۱/۴۴ ۲) $۱/۴۴\times۱۰^{-۴}$ ۳) ۲/۲۵ ۴) $۲/۲۵\times۱۰^{-۴}$

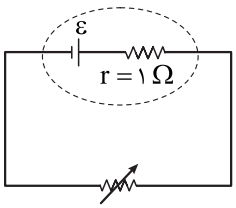
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳- اگر قطر سیم مقاومت یک لامپ بر اثر تبخیر یک درصد کاهش یابد، با فرض ثابت‌ماندن جریان عبوری از لامپ و مقاومت ویژهٔ سیم، توان مصرفی آن تقریباً چگونه تغییر می‌کند؟ (از تغییر طول سیم چشم‌پوشی کنید.)

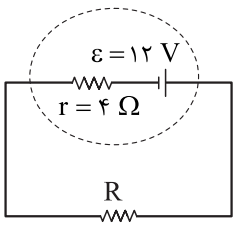
۱) دو درصد کاهش می‌یابد.
۲) یک درصد کاهش می‌یابد.
۳) دو درصد افزایش می‌یابد.
۴) یک درصد افزایش می‌یابد.

۱۰۴- در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا ۵ Ω افزایش می‌یابد و جریان الکتریکی عبوری از آن نصف می‌شود. اگر در ادامه، مقاومت رئوستا باز هم ۵ Ω افزایش یابد، جریان عبوری از آن چند برابر می‌شود؟



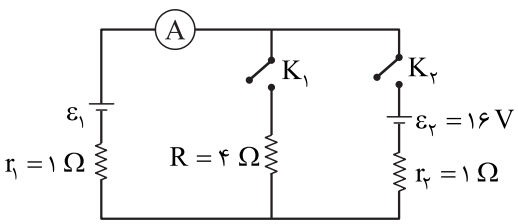
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۷}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۰۵- در مدار شکل زیر، مقاومت R از مقاومت درونی باتری، کم‌تر است. اگر توان خروجی باتری برابر ۸ W باشد، جریان الکتریکی عبوری از آن برابر چند آمپر است؟



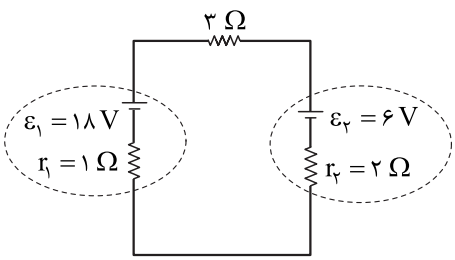
۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

۱۰۶- در مدار شکل زیر، در حالتی که کلید $K_۱$، بسته و کلید $K_۲$، باز است، آمپرسنج آرمانی ۲ A را نشان می‌دهد. اگر کلید $K_۱$، باز و کلید $K_۲$ بسته باشد، آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۶

۱۰۷- در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری (۱) از توان ورودی باتری (۲) چند وات بیشتر است؟

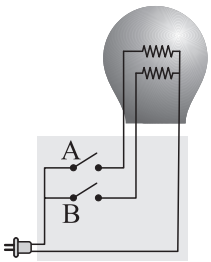


۱) ۱۲
۲) ۴۸
۳) ۶
۴) ۲۸

محل انجام محاسبات

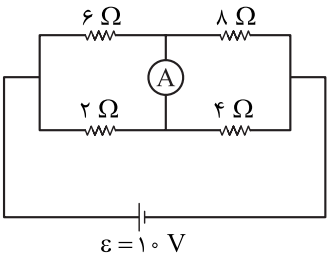
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۸- یک لامپ سه‌راهه که دو رشته دارد، مطابق شکل برای کار در سه توان مختلف ساخته شده است. اگر کم‌ترین و بیشترین توان مصرفی این لامپ به‌ترتیب ۵۰ W و ۱۵۰ W باشد، نسبت مقاومت دو رشتهٔ آن برابر کدام است؟



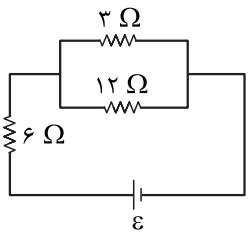
۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۹- در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟



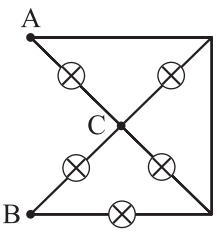
۱) ۰/۴
۲) ۰/۳
۳) ۰/۲
۴) ۰/۱

۱۱۰- در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۶ اُهمی چند برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۳ اُهمی است؟



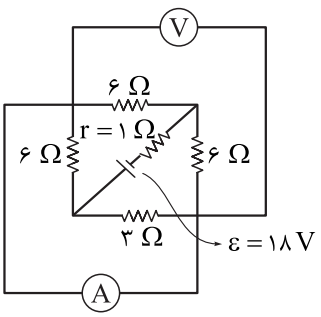
۱) $\frac{۸}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۱۱- در شکل زیر، لامپ‌ها مشابه‌اند. مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B چند برابر مقاومت معادل بین دو نقطهٔ B و C است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۷}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۱۲- در مدار شکل زیر، به ترتیب از راست به چپ، مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، چند آمپر و چند ولت است؟

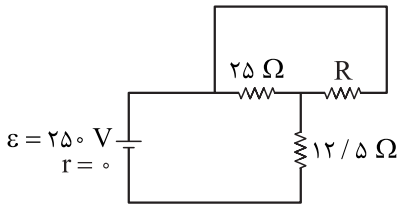


۱) ۱/۵، ۱۲
۲) ۱/۵، صفر
۳) ۰/۵، ۱۲
۴) ۰/۵، صفر

محل انجام محاسبات

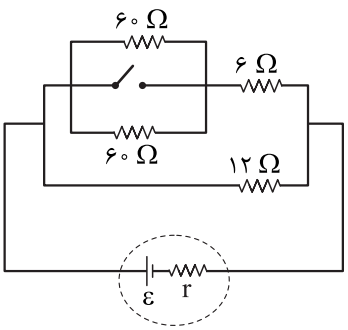
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۳- در مدار شکل زیر، اگر جریان عبوری از مقاومت $۲۵\ \Omega$ برابر $۶\ A$ باشد، انرژی مصرفی مقاومت R در مدت $۳۰\ min$ چند کیلووات ساعت است؟



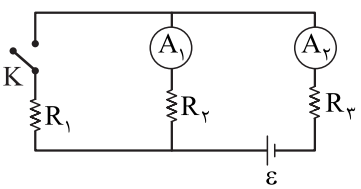
۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۴۵
۳) ۱/۵
۴) ۴/۵

۱۱۴- در مدار زیر، با بستن کلید، توان خروجی باتری تغییر نمی‌کند. مقاومت درونی باتری چند اُهم است؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۳۶

۱۱۵- در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، مقدارهایی که آمپرسنج‌های آرمانی $A_۱$ و $A_۲$ نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟ (مولد آرمانی فرض شود.)



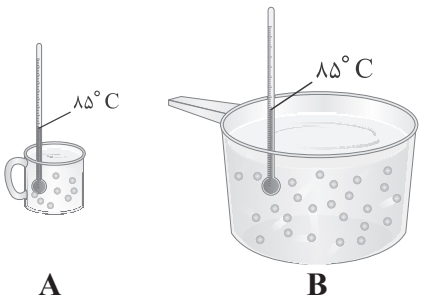
۱) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۳) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۴) تغییر نمی‌کند، تغییر نمی‌کند.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی یازدهم

۱۱۶- با توجه به شکل‌های زیر که دو ظرف A و B حاوی مقادیری آب با دمای یکسان $85\,^{\circ}C$ را نشان می‌دهند، کدام موارد درست است؟



الف) برای این‌که دمای آب در هر دو ظرف به $95\,^{\circ}C$ برسد، گرمای مورد نیاز برای ظرف A، بیشتر از گرمای مورد نیاز برای ظرف B است.

ب) میانگین تندی مولکول‌های آب در هر دو ظرف یکسان است.

پ) انرژی گرمایی آب در ظرف B بیشتر بوده و در صورت تماس دو ظرف، انرژی گرمایی از B به A جاری می‌شود.

ت) اگر محتویات دو ظرف به یکدیگر اضافه شود، انرژی گرمایی مایع حاصل، بیشتر از هر یک از ظرف‌های اولیه خواهد بود.

۱) «الف» ـ «پ» ۲) «ب» ـ «ت» ۳) «الف» ـ «ب» ۴) «پ» ـ «ت»

۱۱۷- درون یک ظرف فلزی، ۲۰۰ گرم آب ($c_{H_2O} = 4/2\ J.g^{-1}.{}^{\circ}C^{-1}$) وجود دارد. اگر به این سامانه، ۹/۳۸ کیلوژول گرما داده شود، دمای مجموعه (ظرف و آب)، از $25\,^{\circ}C$ به $32\,^{\circ}C$ می‌رسد. ظرفیت گرمایی ظرف فلزی چند $J.{}^{\circ}C^{-1}$ است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۳۴ ۳) ۵۰۰ ۴) ۱۳۴۰

۱۱۸- کدام گزینه در مورد یخچال صحرایی نادرست است؟

۱) دو ظرف سفالی درون یکدیگر قرار دارند و میان آن‌ها را با شن خیس پر می‌کنند.

۲) درپوش آن یک پوشش نخی است که تهویه را به آسانی انجام می‌دهد.

۳) در آن، آب در بدنهٔ سفالی ظرف بیرونی نفوذ کرده و به آرامی تبخیر می‌شود.

۴) اساس خنک‌شدن محتویات درون آن، فرایند $H_2O(l) \rightarrow H_2O(g) + 44/1\ kJ$ است.

۱۱۹- در کدام واکنش‌های زیر، پایداری فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها است؟

الف) واکنش بین گازهای نیتروژن و هیدروژن و تولید هیدرازین

ب) تشکیل کربن مونوکسید از عناصر سازنده

پ) تشکیل نیتروژن مونوکسید از عناصر سازنده

ت) تجزیهٔ آب‌اکسیژنه به آب و گاز اکسیژن

۱) «ب» ـ «ت» ۲) «پ» ـ «ت» ۳) «الف» ـ «پ» ۴) «الف» ـ «ب»

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۰- باتوجه‌به‌معادله‌های‌زیر،کدام‌مطلب‌نادرست‌است؟ $(H=۱, N=۱۴, O=۱۶, Ca=۴۰, Cl=۳۵/۵ : g.mol^{-۱})$

$$(I)\ CaCl_۲(s) \xrightarrow{\text{آب}} Ca^{۲+}(aq) + ۲Cl^-(aq) \qquad \Delta H = -۸۳\ kJ$$

$$(II)\ NH_۴NO_۳(s) \rightarrow NH_۴^+(aq) + NO_۳^-(aq) \qquad \Delta H = +۲۶\ kJ$$

۱) از انحلال نمک آمونیوم نیترات در آب، برای سردکردن موضع آسیب‌دیده در بدن استفاده می‌شود.

۲) روند تغییرات انحلال‌پذیری نمک فرایند (II) نسبت به دما، مشابه بسیاری از نمک‌ها مانند $KNO_۳$ و KCl است.

۳) با انحلال ۰/۲ مول کلسیم کلرید در آب، ۱۶/۶ kJ گرما آزاد می‌شود.

۴) با ریختن هم‌زمان ۳/۳۳ گرم کلسیم کلرید و ۸ گرم آمونیوم نیترات در مقدار کافی آب، دمای آب افزایش می‌یابد.

۱۲۱- برای همهٔ پیوندهای موجود در کدام واکنش زیر، استفاده از واژهٔ «آنتالپی پیوند» مناسب‌تر از «میانگین آنتالپی پیوند» است؟

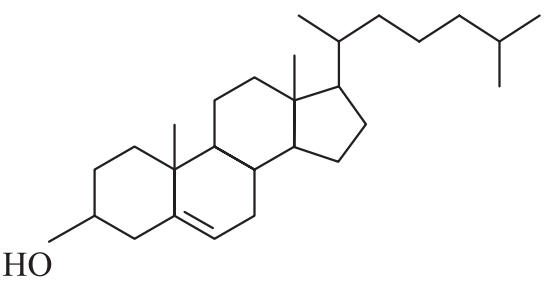
۱) $۲H_۲(g) + O_۲(g) \rightarrow ۲H_۲O(g)$

۲) $N_۲(g) + ۳H_۲(g) \rightarrow ۲NH_۳(g)$

۳) $۲HF(g) \rightarrow H_۲(g) + F_۲(g)$

۴) $۲OF_۲(g) \rightarrow O_۲(g) + ۲F_۲(g)$

۱۲۲- کدام گزینه در مورد ساختار زیر که مرتبط با کلسترول می‌باشد، نادرست است؟



۱) یک الکل سیرنشده با فرمول مولکولی $C_{۲۷}H_{۴۶}O$ است.

۲) مقدار اضافی آن در داخل دیوارهٔ رگ‌ها رسوب می‌کند که منجر به گرفتگی رگ‌ها و سکتهٔ قلبی می‌شود.

۳) شمار گروه‌های $-CH_۳$ در ساختار آن، با شمار این گروه‌ها در ۳، ۳ـ دی‌اتیل ـ ۲ ـ متیل پنتان برابر است.

۴) با توجه به آنتالپی پیوندها، در شرایط یکسان، پیوند $C-O$ در آن آسان‌تر از پیوندهای دیگر شکسته می‌شود.

۱۲۳- کدام مقایسه در مورد ارزش سوختی نخستین عضو آلکان‌ها (a)، آلکن‌ها (b) و آلکین‌ها (c) درست است؟

۱) $a > b > c$ ۲) $a > c > b$

۳) $c > b > a$ ۴) $b > c > a$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۴- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) اندازه‌گیری آنتالپی بسیاری از واکنش‌ها به روش گرماسنجی، امکان‌پذیر نیست.

۲) متان، از تجزیهٔ گیاهان به وسیلهٔ باکتری‌های هوازی در زیر آب تولید می‌شود.

۳) مرحلهٔ اول واکنش تولید آمونیاک به روش هابر، برخلاف مرحلهٔ دوم آن، یک واکنش گرماده است.

۴) نام تجاری آب‌اکسیژنه، هیدروژن پراکسید است و تهیهٔ این ماده از واکنش مستقیم هیدروژن و اکسیژن، امکان‌پذیر نیست.

۱۲۵- در دما و فشار ثابت، با توجه به واکنش‌های زیر و مقدار ΔH آن‌ها،

$$I)\ FeO(s)+H_2(g)\rightarrow Fe(s)+H_2O(g) \qquad \Delta H=-240/5\ kJ$$

$$II)\ 3FeO(s)+\frac{1}{2}O_2(g)\rightarrow Fe_3O_4(s) \qquad \Delta H=-317/5\ kJ$$

$$III)\ 2H_2(g)+O_2(g)\rightarrow 2H_2O(g) \qquad \Delta H=-484\ kJ$$

به ازای تشکیل ۵ لیتر گاز هیدروژن در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۲۵ مول بر لیتر باشد، طی واکنش $3Fe(s)+4H_2O(l)\rightarrow Fe_3O_4(s)+4H_2(g)$، چند کیلوژول گرما بین سامانه و محیط مبادله می‌شود؟ (گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب در این شرایط برابر ۴۱ kJ است.)

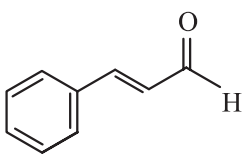
۱) ۳۲/۳ ۲) ۱۶۲ ۳) ۴۰/۵ ۴) ۱۲۹/۲

۱۲۶- با توجه به ترکیب‌های داده‌شده، کدام مورد درست است؟ $(O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

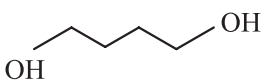
I) دی‌اتیل اتر

II) ۲ ـ هگزانون

III)



IV)



۱) ترکیب (I) با بوتانول ایزومر است و نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به آن دارد.

۲) درصد جرمی اکسیژن در ترکیب (II) کم‌تر از ترکیب (III) است.

۳) به ازای سوختن جرم برابری از ترکیب (II) و بنزآلدهید، میزان CO_2 تولیدی بنزآلدهید بیشتر است.

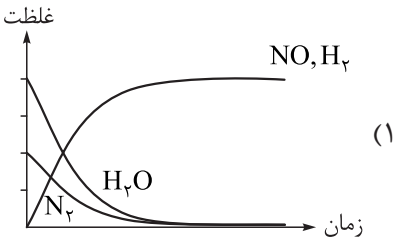
۴) شمار گروه‌های CH_2 در ساختار ترکیب‌های (II) و (IV) برابر است.

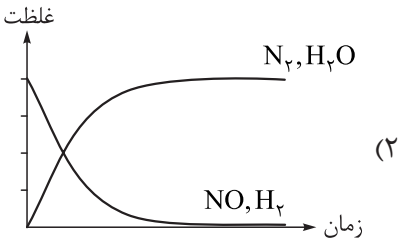
محل انجام محاسبات

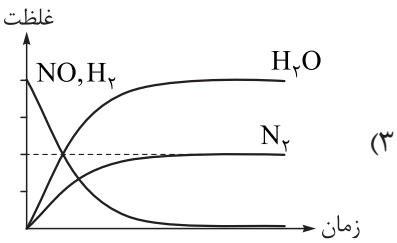
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

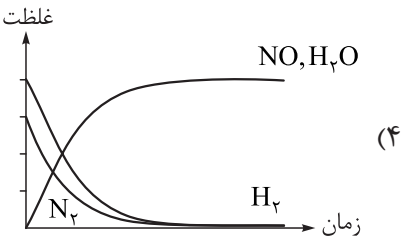
۱۲۷- رابطهٔ زیر، برای تغییر غلظت مولی مواد گازی شرکت‌کننده در یک واکنش در یک بازهٔ زمانی معین، برقرار است. اگر این رابطه، معادل سرعت واکنش باشد، کدام نمودار را می‌توان به تغییر غلظت مواد در این واکنش با گذشت زمان نسبت داد؟

$$\frac{\Delta[N_2]}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta[NO]}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\Delta[H_2O]}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta[H_2]}{\Delta t}$$

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۲۸- در واکنش سوختن کامل یک ترکیب آلی اکسیژن‌دار، سرعت متوسط تولید بخار آب، $3/6\ g.s^{-1}$ و سرعت متوسط مصرف گاز اکسیژن، $30\ mol.min^{-1}$ است. این ترکیب کدام می‌تواند باشد؟ $(H=1, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) بنزآلدهید ۲) ۲ ـ هپتانون ۳) بنزوئیک اسید ۴) اتانول

۱۲۹- مقداری NOBr به ظرفی به حجم ۴ لیتر اضافه شده تا واکنش $2NOBr(g) \rightarrow 2NO(g) + Br_2(g)$ انجام شود. کدام موارد زیر درست است؟ $(Br=80, O=16, N=14 : g.mol^{-1})$

الف) با مصرف ۴۴۰ g واکنش‌دهنده در حضور کاتالیزگر، مقدار Br_2 تولیدی می‌تواند برابر ۳۵۰ g باشد.

ب) شیب نمودار جرم ـ زمان NO تا لحظهٔ اتمام واکنش بیشتر از Br_2 است.

پ) اگر پس از گذشت ۲۰ ثانیه از آغاز واکنش، اختلاف جرم فراورده‌ها ۲۰ g باشد، سرعت مصرف NOBr، $1/2\ mol.min^{-1}$ است.

ت) در صورتی که ΔH برای این واکنش مثبت باشد، با کاهش دما، سرعت متوسط واکنش کاهش می‌یابد.

۱) «الف» ـ «ت» ۲) «پ» ـ «ت» ۳) «الف» ـ «ب» ۴) «ب» ـ «پ»

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۰- کدام مورد نادرست است؟

۱) ریزمغذی‌ها ترکیبات آلی سیرنشده‌ای هستند که در حفظ سلامت بافت‌ها دخالت دارند، اما نقش کامل آن‌ها هنوز به طور دقیق مشخص نشده است.

۲) لیکوپن در هندوانه و گوجه‌فرنگی وجود دارد و ترکیبی محلول در آب است.

۳) سهم تولید گاز CO_2 در ردپای غذا، بیشتر از سوختن سوخت‌ها در خودروها و کارخانه‌هاست.

۴) اتم نیتروژن در مولکول‌های NO و NO_2، از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نکرده است و این مولکول‌ها، رادیکال محسوب می‌شوند.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز – رشته ریاضی

پایه دوازدهم – مرحله سوم – ۲۰ شهریور ۱۴۰۵

پایه دوازدهم

چنان‌چه پایهٔ دوازدهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۱۵	۱۳۱	۱۴۵	۲۵ دقیقه	حسابان (۲) فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۲۲
هندسه	۱۰	۱۴۶	۱۵۵	۲۰ دقیقه	هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای دترمینان و کاربردهای آن) صفحهٔ ۹ تا ۲۶
ریاضیات گسسته	۱۰	۱۵۶	۱۶۵	۲۰ دقیقه	ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۱ تا ۱۷
فیزیک	۲۰	۱۶۶	۱۸۵	۳۰ دقیقه	فیزیک (۳) فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۲۸
شیمی	۱۵	۱۸۶	۲۰۰	۲۰ دقیقه	شیمی (۳) فصل ۱ (تا ابتدای pH، مقیاسی برای تعیین میزان اسیدی‌بودن) صفحهٔ ۱ تا ۲۴
مجموع	۷۰ سؤال			۱۱۵ دقیقه	–

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان دوازدهم

۱۳۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^5 + 2x^4 + x^2 - x - 1$ بر $x + 2$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

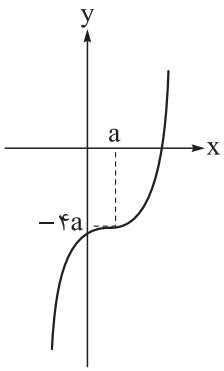
۱۳۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 2$ و $x + 1$ به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟

۱) $\frac{5 - x}{3}$ ۲) $\frac{5 + x}{3}$ ۳) $3 - x$ ۴) $3 + x$

۱۳۳- تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 - 2$ مفروض است. تعداد نقاط مشترک نمودارهای دو تابع f و f^{-1} کدام است؟

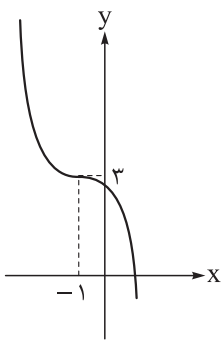
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۳۴- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = (x - b)(x^2 - ax + b)$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a + b$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۳۵- تابع درجه‌دوم f با ضابطهٔ $f(x) = x^2 - kx + k + 1$ و تابع خطی g مفروض‌اند. اگر نمودار تابع h با ضابطهٔ $h(x) = kg(x) - xf(x)$ مطابق شکل زیر باشد، مقدار $g(k)$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{17}{3}$
۳) $-\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{14}{3}$

۱۳۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ax^4 + x^3 + (a + 3)x^2 + 3x - 8$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا است. نمودار کدام تابع از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $y = f(x) + 7$ ۲) $y = f(x - 1)$ ۳) $y = f(x) + 6$ ۴) $y = f(x + 2)$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x+2)|x-1|$ روی بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

۱۳۸- تابع f با دامنهٔ $(-۴,+\infty)$ اکیداً نزولی است. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x+۱)>f(۱۰-۲x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۳۹- برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۲x+۱}-\sqrt{\frac{۵}{۸}-x}$، بازهٔ $[a,b]$ است. حاصل عبارت $a^۲-b$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $-\frac{۹}{۸}$

۱۴۰- دامنهٔ تابع $y=f(x-۱)$، بازهٔ $[-۲,۳]$ است. دامنهٔ تابع $y=۲f(\frac{x}{۳}+۱)$ کدام است؟

۱) $[-۹,۶]$ ۲) $[-۶,۹]$ ۳) $[-۳,۱۲]$ ۴) $[-۱۲,۳]$

۱۴۱- نقطهٔ $(۱,-۱)$ روی نمودار تابع $y=f(۱-\frac{x}{۲})$ به کدام نقطه روی نمودار تابع $y=۱+f(\frac{x+۱}{۲})$ تبدیل می‌شود؟

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۰)$ ۳) $(۱,۰)$ ۴) $(۱,۲)$

۱۴۲- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۱-۲x & ; \quad x<۲\\ \frac{x}{۳}-۱ & ; \quad x\geq ۲\end{cases}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار کدام تابع حاصل می‌شود؟

۱) $y=\begin{cases}۶-۲x & ; \quad x<۲\\ \frac{x-۲}{۳} & ; \quad x\geq ۲\end{cases}$ ۲) $y=\begin{cases}-۲(x+۱) & ; \quad x<۲\\ \frac{x+۲}{۳} & ; \quad x\geq ۲\end{cases}$

۳) $y=\begin{cases}۶-۲x & ; \quad x<۰\\ \frac{x-۲}{۳} & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases}-۲(x+۱) & ; \quad x<۰\\ \frac{x+۲}{۳} & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$

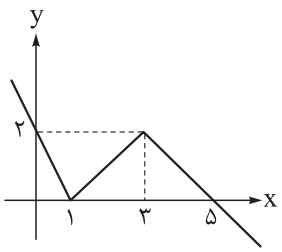
۱۴۳- قرینهٔ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x+۲|x|$ نسبت به مبدأ مختصات را دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. مساحت سطح محدود به نمودارهای دو تابع f و g کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. تابع g با ضابطهٔ $g(x) = ۳ + f(۱ - ۲x)$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟



۱) $[-۱, ۰]$
۲) $[-۵, -۱]$
۳) $[۰, ۱]$
۴) $[۱, ۵]$

۱۴۵- ضابطهٔ تابع f کدام باشد تا نمودارهای دو تابع $y = |f(x)|$ و $y = |f(-f(x))|$ بر هم منطبق شوند؟

۱) $|x - ۱|$
۲) $|x + ۱|$
۳) $|x - ۱| - ۱$
۴) $|x + ۱| - ۱$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دوازدهم

۱۴۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\log ۵ & ۰\\ \log ۴ & \log ۴\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس AB چه‌قدر از $\log ۸$ بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۷- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}=\begin{cases}i & i \text{ زوج}\\ j & i \text{ فرد}\end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۲ ۴) ۸۰

۱۴۸- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x & y+۲x\\ y & x+۲\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $X=BA$ مفروض‌اند. اگر به ازای هر ماتریس دلخواه $Y_{۲\times ۲}$، تساوی $XY-YX=\bar{O}$ برقرار باشد، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس A کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۴۹- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & x\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & x\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۳\\ ۳ & ۰ & ۵\\ ۵ & ۱ & -۲\end{bmatrix}$. اگر مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس AB با مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس BA برابر باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۵۰- برای ماتریس‌های A و B تساوی $(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$ برقرار است. اگر $BA=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۶ & ۸\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های غیر قطر اصلی ماتریس $B^۲\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}B^۲+A^۲\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}A^۲$ کدام است؟

۱) -۲۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) -۴۰

۱۵۱- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}x & x-۳\\ -۲ & y\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مجموع درایه‌های ماتریس $B=\begin{bmatrix}x & ۱\\ x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۵۲- اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $AB+I=A^۲$ باشد، مجموع درایهٔ ماتریس $A^{-۱}+B+I$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۳- اگر $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} - \mathbf{A}\right)\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $\mathbf{A}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۱}{۱۳}$ ۳) $-\frac{۲۷}{۱۳}$ ۴) -۱

۱۵۴- اگر $\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، کدام‌یک از دستگاه‌های زیر بی‌شمار جواب دارد؟

۱) $\begin{cases} ax + by = ۳ \\ cx + dy = ۲ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} (a+۱)x + dy = ۳ \\ cx + by = ۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ax + (d+۱)y = ۱ \\ cx + (b+۲)y = ۲ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} dx + ay = ۲ \\ bx + cy = ۳ \end{cases}$

۱۵۵- اگر $\mathbf{A}^۲ = \begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ -۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{A}^۳ = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۸ \\ -۸ & -۳ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $\mathbf{A}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضیات گسسته

۱۵۶- اگر $۲^n - ۱$ مضرب ۱۷ باشد، چند جواب برای n در اعداد طبیعی کم‌تر از ۵۰ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۱۴

۱۵۷- در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ماکزیمم است. اگر مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده باشد، مقسوم‌علیه کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۵۸- بر روی منحنی $y = \frac{۷x+۵}{x-۲}$ چند نقطه مختصات طبیعی دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹- کدام دو عدد فقط دو مقسوم‌علیه صحیح مشترک دارند؟

۱) $۷m+۶ , ۶m+۱$ ۲) $۷m+۶ , ۶m+۵$

۳) $۷m+۵ , ۶m+۲$ ۴) $۷m+۵ , ۶m+۱$

۱۶۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب ۲ و ۵ باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴m - ۷n$ بر ۱۳ چگونه است؟

۱) اول ۲) مضرب ۳ ۳) فرد ۴) مضرب ۵

۱۶۱- چند عدد اول p وجود دارد که $p+۴$ و $p+۸$ هم اول باشند؟

۱) هیچ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۲- a عددی صحیح و فرد است و $b \mid a^۲ + ۲$. باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲ + b^۲ + ۱۰$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۳- اگر $۳k + ۲ \mid ۵$، آن‌گاه $۹k^۲ + ۲۷k + m \mid ۲۵$. به جای m کدام عدد را می‌توان قرار داد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۹ ۳) ۳۹ ۴) ۴۹

۱۶۴- اگر دو عدد $۳n - ۱$ و $۴n + ۱$ نسبت به هم اول نباشند، برای عدد طبیعی n چند جواب کم‌تر از ۲۰ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۵- مثال نقض گزارهٔ «اگر a عددی گنگ باشد، آن‌گاه $a^۲ + a$ نیز گنگ است.» کدام عدد می‌تواند باشد؟

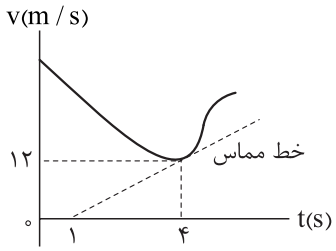
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲} - \sqrt{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲} + \sqrt{۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دوازدهم

۱۶۶- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (خط‌چین مایل رسم‌شده در لحظهٔ $t = ۴\,s$ بر منحنی مماس است.)



۱) $۳\vec{i}$

۲) $-۳\vec{i}$

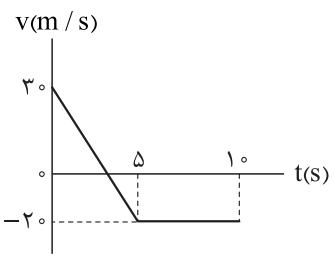
۳) $۴\vec{i}$

۴) $-۴\vec{i}$

۱۶۷- متحرکی با سرعت ثابت در جهت محور x حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۸\,s$، ۳ برابر اندازهٔ بردار مکان آن در لحظهٔ $t_۲ = ۲۰\,s$ باشد، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه جهت بردار مکان متحرک ممکن است تغییر کند؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۶۸- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول، چند متر بر ثانیه است؟



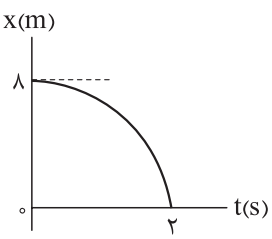
۱) ۶ / ۵

۲) ۷ / ۵

۳) ۱۶ / ۵

۴) ۱۷ / ۵

۱۶۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. به ترتیب از راست به چپ، در لحظهٔ $t = ۱\,s$، فاصلهٔ متحرک از مکان اولیهٔ خود چند متر و تندی متحرک چند متر بر ثانیه است؟ (خط‌چین مماس بر نمودار در مبدأ زمان، موازی محور t است.)



۱) ۲، ۲

۲) ۴، ۲

۳) ۶، ۲

۴) ۶، ۴

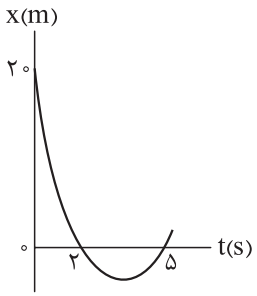
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۰- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = \frac{۳}{۴}t^۲ + ۱۵t + ۳۰$ است. تندی متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول، چند برابر تندی متوسط آن در ۵ ثانیهٔ سوم است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

۱۷۱- سهمی زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که تندی متحرک برابر $۲\ m/s$ است، بردار مکان آن در SI کدام است؟



۱) $-۸\vec{i}$
۲) $-۴\vec{i}$
۳) $-۲\vec{i}$
۴) $-\vec{i}$

۱۷۲- جهت حرکت متحرکی که با شتاب ثابتِ $\vec{a} = (-۲m/s^۲)\vec{i}$ در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t = ۲s$ تغییر می‌کند. مسافت طی‌شده توسط متحرک در ثانیهٔ پنجم برابر چند متر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۴/۵
۳) ۵ ۴) ۹

۱۷۳- متحرکی که با شتاب ثابت $\vec{a}(۱/۵\ m/s^۲)\vec{i}$ در راستای محور x در حال حرکت است، با سرعت $(-۹\ m/s)\vec{i}$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. بردار مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر می‌کند، در SI کدام است؟

۱) $۲۷\vec{i}$ ۲) $-۲۷\vec{i}$
۳) $۵۴\vec{i}$ ۴) $-۵۴\vec{i}$

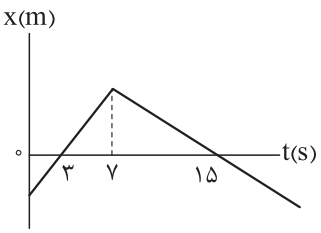
۱۷۴- متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_۱ = ۲s$، $t_۲ = ۴s$ و $t_۳ = ۸s$ به ترتیب از مکان‌های $x_۱ = ۴m$، $x_۲ = ۱۲m$ و $x_۳ = ۶۴m$ عبور می‌کند. جهت حرکت متحرک در کدام لحظه برحسب ثانیه تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۵- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک بین دو لحظه‌ای که از مبدأ مکان عبور می‌کند، برابر $\frac{۴}{۳}\ m/s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی چند متر بر مربع ثانیه است؟



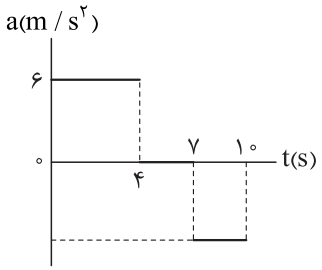
۱) $۰/۲۵\vec{i}$

۲) $۰/۷۵\vec{i}$

۳) $-۰/۲۵\vec{i}$

۴) $-۰/۷۵\vec{i}$

۱۷۶- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در ۱۰ ثانیهٔ اول، شتاب متوسط متحرک برابر صفر و تندی متوسط متحرک برابر $۱۸\ m/s$ باشد، سرعت متحرک در مبدأ زمان چند متر بر ثانیه است؟



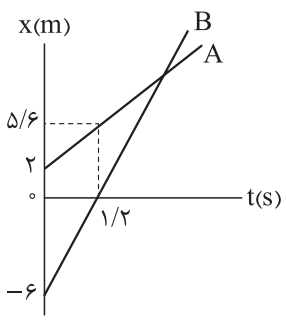
۱) صفر

۲) $۲/۴\vec{i}$

۳) $۱/۴\vec{i}$

۴) $-۱/۴\vec{i}$

۱۷۷- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. چند ثانیه، فاصلهٔ این دو متحرک کم‌تر از ۵m یا مساوی آن است؟



۱) ۲/۵

۲) ۵

۳) ۷/۵

۴) ۱۰

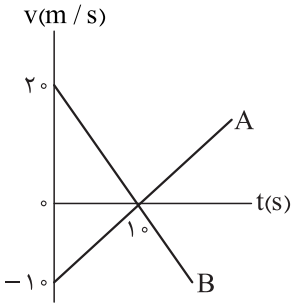
۱۷۸- معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، در SI به صورت $x_A = ۸t$ و $x_B = t^۲ - ۷$ است. فاصلهٔ بین این دو متحرک چند بار برابر ۵ m می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۹- شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که روی محور x حرکت می‌کنند و در مبدأ زمان از مبدأ محور می‌گذرند. در چه لحظه‌ای فاصلهٔ دو متحرک برای بار دوم به ۵۴ m می‌رسد؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۸۰- متحرک A در مبدأ زمان از مبدأ مکان با شتاب ثابتِ $۲\ m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند و پس از ۱۰s با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B نیز در لحظهٔ $t = ۶s$ با شتاب ثابت $۷/۵\ m/s^۲$ از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده و پس از ۴s با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. دو متحرک در فاصلهٔ چند متری مبدأ مکان به یکدیگر می‌رسند؟

۱) ۱۲۰
۲) ۱۶۰
۳) ۱۸۰
۴) ۲۲۰

۱۸۱- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۳۰متری سطح زمین رها می‌شود. تندی گلوله در ارتفاع ۲۰متری سطح زمین، چند برابر تندی آن در ارتفاع ۱۰متری سطح زمین است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۸۲- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۱۲/۸متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله چند ثانیه قبل از رسیدن به زمین از ارتفاع ۵/۶ متری سطح زمین عبور می‌کند؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۰/۴
۲) ۰/۶
۳) ۰/۸
۴) ۱/۲

۱۸۳- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها شده و بعد از ۴s به زمین برخورد می‌کند. تندی متوسط گلوله در ۰/۵ ثانیهٔ آخر حرکت خود قبل از رسیدن به زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۳۲/۵
۲) ۳۵
۳) ۳۷/۵
۴) ۴۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۴- در شرایط خلأ، در لحظه‌ای گلولهٔ A از ارتفاع ۸۰متری و یک ثانیه بعد، گلولهٔ B از ارتفاع ۶۰متری سطح زمین رها می‌شوند. از لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ B تا لحظه‌ای که اولین گلوله به سطح زمین می‌رسد، فاصلهٔ دو گلوله چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$)

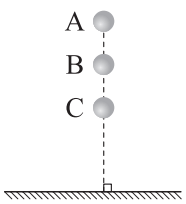
۱) به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۲) به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۱۸۵- در شکل زیر، سه گلوله به صورت هم‌زمان از نقطه‌های A، B و C رها می‌شوند و گلوله‌ها با اختلاف زمانی ۲ثانیه‌ای به سطح زمین می‌رسند. اگر فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر ۱۰۰ m باشد، فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C برابر چند متر است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



۱) ۲۰

۲) ۴۰

۳) ۶۰

۴) ۸۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دوازدهم

۱۸۶- کدام مورد درست است؟

۱) نیروی بین مولکولی در وازلین، مشابه با نیروی بین مولکولی غالب در متانول است.

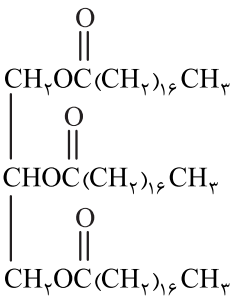
۲) در فرمول شیمیایی روغن زیتون، شمار اتم‌های کربن نصف شمار اتم‌های هیدروژن است.

۳) علت انحلال‌پذیری عسل و اوره در آب، وجود گروه هیدروکسیل در ساختار آن‌ها است.

۴) نسبت تعداد پیوندهای اشتراکی به تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در ساختار اتیلن گلیکول برابر ۲/۲۵ است.

۱۸۷- با توجه به شکل زیر که یک استر سنگین را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

$(O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$



الف) این ماده هم در چربی و هم در آب حل می‌شود.

ب) مخلوط آن با اسید چرب سازندهٔ صابونی با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{35}COONa$، چربی محسوب می‌شود.

پ) مخلوط حاصل از اضافه‌کردن آن به مخلوط آب و صابون، یک مخلوط پایدار است.

ت) بر اثر واکنش کامل ۴۴/۵ گرم از آن با مقدار کافی محلول سود، ۰/۰۵ مول صابون جامد تولید می‌شود.

۱) «الف» ـ «ب»
۲) «ب» ـ «پ»
۳) «الف» ـ «ت»
۴) «پ» ـ «ت»

۱۸۸- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) سوسپانسیون‌ها، ناپایدار بوده و ذرات سازندهٔ آن‌ها با گذشت زمان ته‌نشین می‌شوند.

ب) برای پایدارسازی مخلوط آب و روغن و تبدیل آن به کلوئید پایدار، استفاده از یک عامل نظیر صابون ضروری است.

پ) پدیدهٔ پخش نور، راهی مؤثر برای تشخیص مخلوط‌های کلوئیدی از محلول‌ها است.

ت) ذرات سازندهٔ شیر، یون‌ها یا مولکول‌های کوچک و ذرات سازندهٔ سس مایونز، توده‌های مولکولی است.

۱) «ب» ـ «پ»
۲) «الف» ـ «ب» ـ «پ»
۳) «ب» ـ «پ» ـ «ت»
۴) «ب» ـ «ت»

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۹- شمار کل اتم‌های کربن در یک پاک‌کنندهٔ صابونی با شمار کل اتم‌های کربن در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی برابر است. اگر شمار پیوندهای $C = C$ در این دو پاک‌کننده برابر باشد، شمار اتم‌های هیدروژن در پاک‌کنندهٔ صابونی (a_1) و غیرصابونی (a_2)، چه رابطه‌ای با هم دارند؟ (زنجیر هیدروکربنی در پاک‌کنندهٔ صابونی، سیرنشده و در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، سیرشده و کاتیون هر دو پاک‌کننده، یون سدیم است.)

۱) $a_1 = a_2$ ۲) $a_1 = a_2 - 2$ ۳) $a_1 = a_2 + 4$ ۴) $a_1 = a_2 + 2$

۱۹۰- اگر نمونه‌ای به جرم ۱۵۳ گرم از یک پاک‌کنندهٔ صابونی جامد با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده با ۲ لیتر آب سخت $(d = 1\ g.mL^{-1})$ که غلظت یون منیزیم در آن، ۳۰۰۰ ppm است، به طور کامل واکنش دهد، مجموع شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول صابون کدام است؟ $(H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23, Mg = 24 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۷ ۲) ۵۳ ۳) ۵۶ ۴) ۵۰

۱۹۱- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) برای فرمول شیمیایی پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی جامد، نمی‌توان فرمول عمومی ویژه‌ای نوشت.

۲) طبق نظریهٔ آرنیوس، هر ماده‌ای که در ساختار آن اتم هیدروژن وجود دارد، اسید است.

۳) همهٔ رساناهای الکترونی متعلق به دستهٔ عناصر فلزی هستند و رسانایی آن‌ها به وسیلهٔ الکترون‌ها انجام می‌شود.

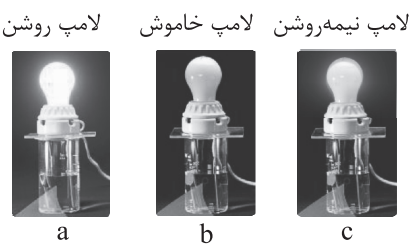
۴) پس از توصیف علمی اسید و باز توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با واکنش‌های میان آن‌ها آشنا شدند.

۱۹۲- شمار یون‌های حاصل از انحلال ۰/۱ مول سدیم اکسید در آب با شمار یون‌های حاصل از انحلال ..... در آب برابر است.

۱) ۰/۲ مول دی‌نیتروژن پنتااکسید ۲) ۰/۱ مول پتاسیم فسفات

۳) ۰/۰۵ مول گوگرد تری‌اکسید ۴) ۰/۱ مول باریم اکسید

۱۹۳- با توجه به شکل زیر که رسانایی چند مایع را نشان می‌دهد، کدام گزینه به یقین درست است؟



۱) b یک محلول غیرالکترولیت مانند محلول استیک اسید یا محلول شکر در آب است.

۲) حل‌شوندهٔ a در مقایسه با c، به میزان بیشتری به یون‌های سازنده‌اش تفکیک شده است.

۳) اگر a و c حاوی اسید تک‌ظرفیتی باشند، غلظت یون هیدرونیوم در a بیشتر است.

۴) حل‌شوندهٔ محلول b نمی‌تواند با آب پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۴- با توجه به شکل زیر، که فرایند یونش محلول دو اسید HA و HX (با حجم، دما و غلظت یکسان) را نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟



۱) در محلول ۱ مولار از هر دو اسید، تفاوت غلظت A^- و X^-، ۱ مولار است.

۲) X می‌تواند هر یک از هالوژن‌های جدول دوره‌ای باشد.

۳) رسانایی الکتریکی محلول ۰/۰۱ مولار $HX(aq)$، به مراتب بیشتر از رسانایی الکتریکی محلول ۰/۰۱ مولار $HA(aq)$ است.

۴) اگر به هر دو محلول مقدار کافی آب اضافه شود، درصد یونش اسید HA کاهش می‌یابد، در حالی که درصد یونش اسید HX بدون تغییر می‌ماند.

۱۹۵- در دمای یکسان، کدام مقایسه نادرست است؟ $(H=1, F=19 : g.mol^{-1})$

۱) رسانایی الکتریکی:

محلول ۰/۵ مولار استیک اسید با $\alpha = 0/2$ > محلول ۱۰ گرم بر لیتر هیدروفلوئوریک اسید با $\alpha = 0/1$

۲) سرعت واکنش با فلز منیزیم:

محلول ۱ مولار HNO_2 > محلول ۰/۵ مولار H_2SO_4

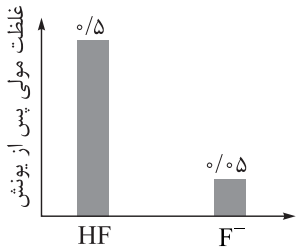
۳) شمار مولکول‌های یونیده‌نشده:

نیم لیتر محلول ۰/۲ مولار HX با $\alpha=0/25$ < ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱/۵ مولار HA با $\alpha=0/5$

۴) رسانایی الکتریکی:

محلول ۲ مولار اتانول < محلول ۲ مولار سدیم کلرید

۱۹۶- در اثر انحلال m گرم هیدروفلوئوریک اسید در ۲۰۰ میلی‌لیتر آب، نمودار غلظت گونه‌ها پس از یونش به شکل زیر درآمده است. به ترتیب، m کدام و درصد یونش اسید به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ (از تغییر حجم آب صرف‌نظر کنید، $(H=1, F=19 : g.mol^{-1})$



۱) ۲ ـ ۱۰

۲) ۲/۲ ـ ۹

۳) ۲/۲ ـ ۱۰

۴) ۲ ـ ۹

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۷- کدام مورد درست است؟

۱) پس از برقراری تعادل در واکنش یونش اسیدهای ضعیف در آب، غلظت همهٔ گونه‌های شرکت‌کننده با یکدیگر برابر می‌شود.

۲) با برقراری تعادل در یک واکنش و ثابت‌ماندن غلظت مواد، سرعت متوسط تولید یا مصرف آن‌ها برابر صفر می‌شود.

۳) در فرایند یونش استیک اسید در آب، پیش از برقراری تعادل، شمار مولکول‌های CH_3COOH کاهش و شمار یون‌های H^+ و CH_3COO^- افزایش می‌یابد.

۴) با توجه به رابطهٔ ثابت یونش نیتروواسید $(K_a = \frac{[H^+][NO_2^-]}{[HNO_2]})$، با افزایش $[H^+]$ در دمای معین، ثابت یونش این اسید افزایش می‌یابد.

۱۹۸- با توجه به جدول زیر، غلظت مولی محلول اسید ضعیف‌تر، به تقریب چند برابر غلظت مولی محلول اسید قوی‌تر است؟

اسید	K_a	غلظت مولی یون هیدرونیوم
HX	۹×۱۰^{-۷}	m
HY	۴×۱۰^{-۶}	۲m

۱) $\frac{۱۰}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۱۹۹- کدام مورد، نادرست است؟

۱) در محلول ۰/۱ مولار هیدرویدیک اسید، غلظت یون یدید برابر ۰/۱ مولار است.

۲) محلول آبی اسیدهایی با $\alpha < ۱$، الکترولیت ضعیف محسوب می‌شود.

۳) هر یون اکسید در محلول‌های آبی، با یک مولکول آب واکنش داده و دو یون هیدروکسید تولید می‌کند.

۴) اگر درجهٔ یونش اسید HA برابر ۰/۰۶ باشد، با اضافه کردن ۱۰۰۰ مولکول آن به آب، تنها ۶۰ مولکول آن در آب حل می‌شود.

۲۰۰- در دمای ثابت، ۵/۴ گرم اسید ضعیف HA (محلول I) و ۳ گرم اسید ضعیف HB (محلول II) در دو ظرف جداگانه، به ترتیب در ۲ و ۱ لیتر آب‌مقطر حل شده‌اند. اگر غلظت مولی آنیون‌ها در دو محلول حاصل برابر باشد، کدام مقایسه‌های زیر درست است؟ $(HA = ۶۰, HB = ۵۰ : g.mol^{-1})$

الف) حجم گاز تولیدشده در واکنش با مقدار کافی فلز منیزیم: $I > II$

ب) قدرت اسیدی: $HA > HB$

پ) رسانایی الکتریکی محلول: $I > II$

ت) شمار یون‌های هیدرونیوم در محلول: $I = II$

۱) «الف» ـ «ب» ۲) «پ» ـ «ت» ۳) «الف» ـ «ب» ـ «ت» ۴) «ب» ـ «پ» ـ «ت»

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

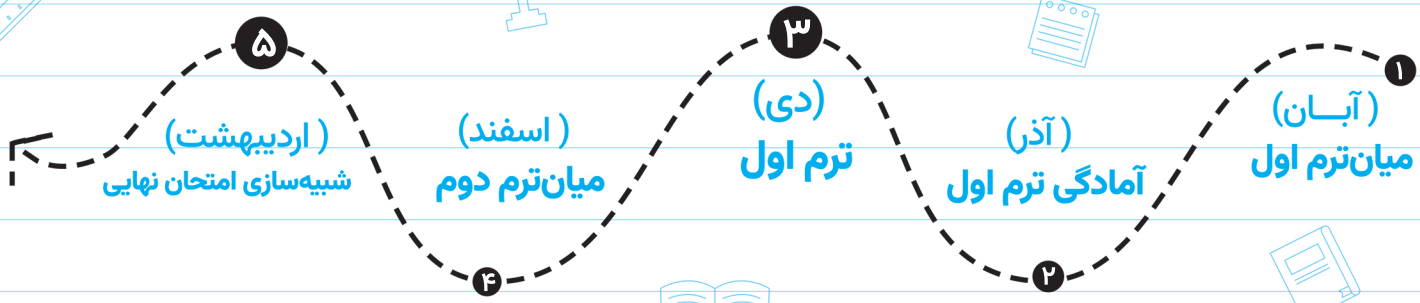
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون‌های تشریحی خیلی‌سبز

۵ مرحله در طول سال

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخبرگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عینا مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملا مکانیزه

- تصحیح کاملا حرفه‌ای توسط دو مصحّح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحّح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحّح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله سوم
۰۶ - ۱۴۰۵	۲۰/شهریور/۱۴۰۵

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۶

ویژگی‌های برنامه راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۰۶ - ۱۴۰۵

۱- دوره دروس پایه دهم
۲- دوره دروس پایه یازدهم
۳- مطالعه بخشی از دروس پایه دوازدهم
۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه / مرحله	اول ۲۳ مرداد	دوم ۶ شهریور	سوم ۲۰ شهریور	چهارم ۳ مهر
دهم	-	✓	✓	✓
یازدهم	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	-	✓	✓	-

- با توجه به موارد فوق دفترچه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۳ قسمت تشکیل شده است.
- هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پنل کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.
- آزمون مرحله سوم (همین دفترچه‌ای که در دست دارید) ادامه پیشروی پایه دهم، یازدهم و دوازدهم است.
- تمامی سرفصل‌های دوازدهم، مجدد از مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoonkheilisabz.com
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه دوازدهم ـ مرحله سوم ـ ۲۰ شهریور ۱۴۰۵

پایه دهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی‌ناو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی مصطفی کرمی ـ محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیک	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ یاسر راش ـ پارسا طاهری‌منزه ـ یاسر عبداللهی ـ آرمین عظیمی ـ سعید فراهانی ـ امیر قاسمی‌پور محمد قهرمانی‌نژاد ـ محسن مجنونی ـ محمد مرادی ـ مرتضی نصیرزاده ـ امیرحسین مسلمی ـ عرفان نریمانی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	عاطفه خان‌محمدی منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
هندسه	کیوان صارمی	کیوان صارمی	کیوان صارمی	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ماهک کناره ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصورزرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری ماهان فنی‌فر
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمدجواد سورچی مریم گلی‌حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی امیر محمودی انزابی سعید محبی احسان محمدی ادریس محمدی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمدمهدی کریمیان	سوران اشرافی عرشیا شفیعی علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضی دهم

۱ نقاط $(۲,-۱)$ و $(۲,۵)$ روی یک سهمی قرار دارند. معادلهٔ محور تقارن این سهمی کدام است؟

همون طول رأس

۱) $x=۲$

۲) $x=۱$

۳) $x=-۲$

۴) $x=-۱$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint به عرض نقاط دقت کنین.

درس Box

- اگر دو نقطهٔ هم‌عرض روی یک سهمی قرار بگیرند، طول رأس سهمی، میانگین طول‌های آن دو نقطه است:

$$(x_۱,y_۰),(x_۲,y_۰)\in \text{سهمی} \Rightarrow x_S=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$$

- معادلهٔ محور تقارن سهمی، $x=x_S$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون دو نقطهٔ داده‌شده، هم‌عرض هستند، طبق درس‌باکس، معادلهٔ محور تقارن سهمی، $x=\frac{۵-۱}{۲}=۲$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ محیط یک مستطیل برابر ۸۰ است. بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

معادلهٔ یک سهمی رو تشکیل بده.

درس Box

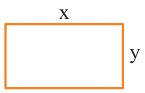
در سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ داریم:

$$\begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} = c - ax_S^2 \end{cases}$$

اگر $a < 0$ باشد، y_S بیشترین مقدار عبارت $ax^2 + bx + c$ و اگر $a > 0$ باشد، y_S کم‌ترین مقدار آن است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم:



طبق فرض، محیط این مستطیل برابر ۸۰ است:

$$\Rightarrow 2(x+y) = 80 \Rightarrow x + y = 40$$

گام دوم: حالا رابطهٔ مساحت مستطیل را برحسب یکی از متغیرهای x یا y می‌سازیم:

$$S = xy \xrightarrow{y=40-x} S = x(40-x) = -x^2 + 40x$$

گام سوم: مطابق روابط درس‌باکس، بیشترین مقدار S در طول رأس آن یعنی $x_S = 20$ رخ می‌دهد:

$$S_{max} = 20(40-20) = 400$$

یه‌جور دیگه

اگر مجموع دو عدد، مقدار ثابت c باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها هنگامی ماکزیمم می‌شود که آن دو عدد مساوی $\frac{c}{2}$ باشند:

$$x + y = c \Rightarrow (xy)_{Max} = \frac{c^2}{4}$$

در این سؤال، $c = 40$ و در نتیجه مقدار ماکزیمم مساحت $= \frac{40^2}{4} = 400$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ عدد $\sqrt[۳]{۱۸}$ چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) $\sqrt[۶]{۱۲}$ ۲) $\sqrt[۶]{۶}$ ۳) $\sqrt[۶]{۱۸}$ ۴) $\sqrt[۶]{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint فرجه‌ها رو یکسان کن.

درس Box

خواص رادیکال‌ها:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}} \quad ; \quad k,n\in\mathbb{N}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a} \quad ; \quad k,n\in\mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

نکته برای این‌که بتوانیم حاصل‌ضرب یا حاصل تقسیم دو رادیکال را به دست آوریم، لازم است که فرجه‌های دو رادیکال یکسان باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: باید فرجه‌ها را یکسان کنیم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\sqrt[۳]{۱۸}=\sqrt[۶]{۱۸^۲}=\sqrt[۶]{(۲\times۳^۲)^۲}=\sqrt[۶]{۲^۲\times۳^۴}\\ \sqrt{۳}=\sqrt[۶]{۳^۳}\end{cases}$$

گام دوم: حالا خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt[۳]{۱۸}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt[۶]{۲^۲\times۳^۴}}{\sqrt[۶]{۳^۳}}=\sqrt[۶]{\frac{۲^۲\times۳^۴}{۳^۳}}=\sqrt[۶]{۲^۲\times۳}=\sqrt[۶]{۱۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ اگر $۲۴۰(\sqrt[۳]{۹})^{k} = ۲۷^{-۰/۵} - \frac{۲۷}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۷}{۴}$ ۳) -۵ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

توان گویا بنویس.

درس Box

توان‌های گویا: عبارت $a^{\frac{m}{n}}$ را با این شرط که $a > ۰$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، می‌توانیم به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ بنویسیم:

$$a > ۰ \ , \ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

تمام ویژگی‌های رادیکال‌ها برای $\sqrt[n]{a^m}$ و هم‌چنین تمام ویژگی‌های اعداد توان‌دار برای $a^{\frac{m}{n}}$ صادق و برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک ویژگی توان‌های گویا، تساوی صورت سؤال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{۳^{۳}}{۳^{\frac{۱}{۲}}} - (۳^{۳})^{-\frac{۱}{۲}} = ۸۰ \times ۳ \times (۳^{\frac{۲}{۳}})^{k}$$

$$\Rightarrow \ ۳^{\frac{۵}{۲}} - ۳^{-\frac{۳}{۲}} = ۸۰ \times ۳ \times ۳^{\frac{۲k}{۳}}$$

گام دوم: عبارت‌ها را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳^{\frac{۵}{۲}} - ۳^{-\frac{۳}{۲}} = ۳^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۱}{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۳^{۴}-۱}{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۸۰}{۳^{\frac{۳}{۲}}} \\ ۸۰ \times ۳ \times ۳^{\frac{۲k}{۳}} = ۸۰ \times ۳^{\frac{۲k+۳}{۳}} \end{cases}$$

پس داریم:

$$۸۰ \times ۳^{-\frac{۳}{۲}} = ۸۰ \times ۳^{\frac{۲k+۳}{۳}} \xrightarrow{\div ۸۰} ۳^{-\frac{۳}{۲}} = ۳^{\frac{۲k+۳}{۳}}$$

گام سوم: برای این‌که تساوی بالا برقرار باشد، لازم است که توان‌ها برابر باشند:

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲} = \frac{۲k+۳}{۳} \Rightarrow ۴k + ۶ = -۹ \Rightarrow k = -\frac{۱۵}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ اگر α و β ریشه‌های دوم عدد $A = 28 - 16\sqrt{3}$ باشند، حاصل عبارت $|\alpha - \beta| - \frac{A}{4}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) ۱

۳) $4\sqrt{3} - 1$ ۴) $1 + 4\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

- همهٔ اعداد حقیقی، ریشهٔ مرتبهٔ فرد دارند و این ریشه، یکتا و منحصربه‌فرد است. مثلاً $\sqrt[3]{-\pi}$ ریشهٔ سوم عدد $-\pi$ است.
- فقط اعداد مثبت هستند که ریشهٔ مرتبهٔ زوج دارند؛ هر عدد مثبت، دو ریشهٔ مرتبهٔ زوج دارد که قرینهٔ یکدیگرند. مثلاً $-\sqrt[6]{10}$ و $\sqrt[6]{10}$ ریشه‌های ششم عدد ۱۰ هستند.

نکته

اتحاد رادیکال مرکب

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = A \\ xy = B \end{cases}$$

مثال

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{9 - 2\sqrt{8}} = \sqrt{8} - \sqrt{1} = 2\sqrt{2} - 1$$

(9: مجموع، 8: حاصل‌ضرب)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا مقادیر α و β را پیدا می‌کنیم:

$$A = 4(7 - 4\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{A} = \sqrt{4}\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ را به صورت $\sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$ بازنویسی می‌کنیم و مطابق نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt{\underbrace{7}_{\text{مجموع}} - 2\sqrt{\underbrace{12}_{\text{حاصل‌ضرب}}}} \xrightarrow{\text{اعداد ۴،۳}} \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

گام دوم: پس ریشه‌های دوم عدد A عبارت‌اند از:

$$\alpha = -2(2 - \sqrt{3}) = -4 + 2\sqrt{3}$$

$$\beta = 2(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$|\alpha - \beta| - \frac{A}{4} = |-4 + 2\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3}| - (7 - 4\sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3} = 1$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}+۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}-۲$

۲) $\sqrt{۵}-۲$

۳) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}{۲}$

۴) $\sqrt{۶}-\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint به کمک اتحاد مزدوج، مخرج رو گویا کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عبارت $\frac{(\sqrt{۶}+۱)-\sqrt{۵}}{(\sqrt{۶}+۱)+\sqrt{۵}}$ را داریم که صورت و مخرج آن را در عبارت $(\sqrt{۶}+۱)-\sqrt{۵}$ ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{((\sqrt{۶}+۱)-\sqrt{۵})^{۲}}{((\sqrt{۶}+۱)+\sqrt{۵})((\sqrt{۶}+۱)-\sqrt{۵})}=\frac{۶+۱+۲\sqrt{۶}+۵-۲\sqrt{۳۰}-۲\sqrt{۵}}{۶+۱+۲\sqrt{۶}-۵}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱۲+۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۳۰}-۲\sqrt{۵}}{۲+۲\sqrt{۶}} \Rightarrow A=\frac{۶+\sqrt{۶}-\sqrt{۳۰}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۶}+۱}$$

گام دوم: حالا با دقت در عبارت صورت، می‌بینیم که می‌توانیم آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$۶+\sqrt{۶}-\sqrt{۳۰}-\sqrt{۵}=\sqrt{۶}(\sqrt{۶}+۱)-\sqrt{۵}(\sqrt{۶}+۱)=(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})(\sqrt{۶}+۱)$$

در نهایت ساده‌شدهٔ کسر داده‌شده برابر می‌شود با:

$$A=\frac{(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})(\sqrt{۶}+۱)}{\sqrt{۶}+۱}=\sqrt{۶}-\sqrt{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ اگر $\sqrt[۳]{x^۲} = ۳\sqrt[۳]{x} + ۱$ باشد، حاصل عبارت $x - \frac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۳۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اتحادهای جبری:

۱) اتحاد مربع دوجمله‌ای: $(\square \pm \triangle)^۲ = \square^۲ \pm ۲\square \times \triangle + \triangle^۲$

۲) اتحاد مزدوج: $(\square + \triangle)(\square - \triangle) = \square^۲ - \triangle^۲$

۳) اتحاد جمله‌مشترک: $(\square + \triangle)(\square + \bigcirc) = \square^۲ + (\triangle + \bigcirc)\square + \triangle \times \bigcirc$

۴) اتحاد مربع سه‌جمله‌ای: $(\square + \triangle + \bigcirc)^۲ = \square^۲ + \triangle^۲ + \bigcirc^۲ + ۲(\square \times \triangle + \square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc)$

۵) اتحاد مکعب دوجمله‌ای: $(\square \pm \triangle)^۳ = \square^۳ \pm ۳\square^۲ \times \triangle + ۳\square \times \triangle^۲ \pm \triangle^۳$

یا $\begin{cases} (\square + \triangle)^۳ = \square^۳ + \triangle^۳ + ۳\square \times \triangle \times (\square + \triangle) \\ (\square - \triangle)^۳ = \square^۳ - \triangle^۳ - ۳\square \times \triangle \times (\square - \triangle) \end{cases}$

۶) اتحاد چاق و لاغر: $(\square \pm \triangle)(\square^۲ \mp \square \times \triangle + \triangle^۲) = \square^۳ \pm \triangle^۳$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تساوی فرض سؤال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{x^۲} - ۱ = ۳\sqrt[۳]{x} \xrightarrow[x \neq ۰]{\div \sqrt[۳]{x}} \sqrt[۳]{x} - \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} = ۳$$

گام دوم: حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x - \frac{۱}{x} - ۳\underbrace{(\sqrt[۳]{x})(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})}_{\text{برابر ۱ است}}\underbrace{(\sqrt[۳]{x} - \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})}_{\text{برابر ۳ است}} = ۲۷ \Rightarrow x - \frac{۱}{x} - ۹ = ۲۷ \Rightarrow x - \frac{۱}{x} = ۳۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ برای اعداد ناصفر a، b و c، تساوی $a^۲+۱۳b^۲+c^۲+۶ab=۴bc$ برقرار است. حاصل $\frac{c}{a}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته اگر مجموع چند عبارت همواره نامنفی، برابر صفر شود، تساوی زمانی برقرار است که همهٔ عبارت‌ها برابر صفر باشند:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۰ \Rightarrow x=y=z=۰$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: باید سعی کنیم تساوی داده‌شده را به مجموع مربعات چند عبارت تبدیل کنیم تا از نکته استفاده کنیم. به همین خاطر عبارت داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$a^۲+۱۳b^۲+c^۲+۶ab-۴bc=۰$$

$$\Rightarrow a^۲+۹b^۲+۴b^۲+c^۲+۶ab-۴bc=۰$$

$$\Rightarrow (a^۲+۶ab+۹b^۲)+(۴b^۲-۴bc+c^۲)=۰$$

$$\Rightarrow (a+۳b)^۲+(۲b-c)^۲=۰$$

گام دوم: عبارت‌های $(a+۳b)^۲$ و $(۲b-c)^۲$ همواره نامنفی‌اند، بنابراین مطابق نکتهٔ گفته‌شده، تساوی، زمانی برقرار است که $a+۳b$ و $۲b-c$ هر دو صفر باشند:

$$\begin{cases} a+۳b=۰ \Rightarrow b=-\frac{a}{۳} \\ ۲b-c=۰ \Rightarrow b=\frac{c}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابری}} -\frac{a}{۳}=\frac{c}{۲} \Rightarrow \frac{c}{a}=-\frac{۲}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ اگر α بزرگ‌ترین و β کوچک‌ترین جواب معادلهٔ $(x-1)(x+3)=1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta+4}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint α و β رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادله را حل می‌کنیم:

$$x^2+2x-3=1 \Rightarrow x^2+2x-4=0 \xrightarrow{\text{روش } \Delta} x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$$

بنابراین $\alpha=\sqrt{5}-1$ و $\beta=-\sqrt{5}-1$ است.

گام دوم: حالا خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+4}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{-\sqrt{5}-1+4}=\frac{6-2\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ بیشترین مقدار عرض نقاط روی سهمی $y = ax^2 + 2ax + 3$، برابر $2a^2$ است. این سهمی از کدام نقطه می‌گذرد؟

y_S

۱) $(-1, \frac{3}{2})$

۲) $(-1, \frac{9}{2})$

۳) $(-2, 6)$

۴) $(-2, \frac{3}{2})$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

حواست باشه a باید منفی باشه.

نکته

حالت‌های خاص معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عرض رأس سهمی را برحسب a به دست می‌آوریم:

$$y = ax^2 + 2ax + 3 : \begin{cases} x_S = -\frac{2a}{2a} = -1 \\ y_S = a - 2a + 3 = 3 - a \end{cases}$$

گام دوم: طبق فرض، عرض رأس برابر $2a^2$ است:

$$\Rightarrow 2a^2 = 3 - a = 2a^2 + a - 3 = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} a = 1 \quad \text{یا} \quad a = -\frac{3}{2}$$

اما چون سهمی نقطهٔ ماکزیمم دارد، پس مقدار منفی a قابل قبول است.

گام سوم: به ازای $a = -\frac{3}{2}$، معادلهٔ سهمی را بازنویسی می‌کنیم:

$$y = -\frac{3}{2}(x+1)^2 + \frac{9}{2}$$

همان‌طور که مشخص است، سهمی از نقطهٔ $(-1, \frac{9}{2})$ که رأس آن است، می‌گذرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقطهٔ $(2, c)$ می‌گذرد و خط $y = -1$ بر آن مماس است. اگر نیمساز ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات، خط $y = -x ; x < 0$ این سهمی را در نقطه‌ای به طول -1 قطع کند، عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور y کدام است؟ (عرض رأس سهمی است.)

۱) -1

۲) 1

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مختصات نقطهٔ $(2, c)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$c = 4a + 2b + c \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

حالا طول رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2a} = 1$$

از طرفی طبق فرض، عرض رأس سهمی $y_S = -1$ است، زیرا خط افقی $y = -1$ بر سهمی مماس است، پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$y = a(x-1)^2 - 1$$

گام دوم: سهمی، خط $y = -x$ را در نقطه‌ای به طول -1 قطع می‌کند، یعنی نقطهٔ $(-1, 1)$ روی سهمی قرار دارد:

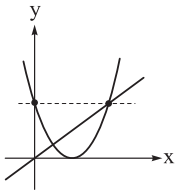
$$1 = a(-2)^2 - 1 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گام سوم: معادلهٔ سهمی $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$ است و عرض نقطهٔ برخورد آن با محور y به ازای $x = 0$ به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و خط $y = 2x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. حاصل $ac - b$ کدام است؟



۱) ۸

۲) ۱۶

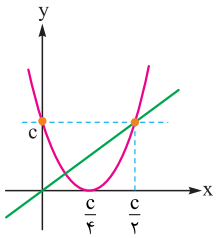
۳) ۱۲

۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عرض از مبدأ سهمی برابر c است و عرض یکی از نقاط تقاطع خط و سهمی نیز c است؛ بنابراین طول این نقطهٔ تقاطع $\frac{c}{2}$ است. با توجه به خاصیت تقارن سهمی و مماس‌بودن آن بر محور x، معادلهٔ سهمی $y = a(x - \frac{c}{4})^2$ است:



گام دوم: معادلهٔ زیر را برای سهمی داریم:

$$y = a(x - \frac{c}{4})^2 = ax^2 - \frac{ac}{2}x + \frac{ac^2}{16}$$

که باید با معادلهٔ مفروض سؤال یکسان باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{ac^2}{16} = c \xrightarrow{c \neq 0} ac = 16 \\ -\frac{ac}{2} = b \xrightarrow{ac=16} b = -8 \end{cases}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$ac - b = 16 + 8 = 24$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=(x+۱)(۳x^۲+۲ax-a)$ به صورت زیر است:

x		-۱		b	
$P(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint به علامت حول -۱ دقت کن.

نکته فرض کنید $x=x_۰$ ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$، از مرتبهٔ n باشد، یعنی در تجزیهٔ عبارت $P(x)$ عامل $(x-x_۰)^n$ حضور دارد. اگر n فرد باشد، علامت $P(x)$ در اطراف $x_۰$ تغییر می‌کند، اما اگر n زوج باشد، علامت $P(x)$ در اطراف $x_۰$ تغییر نمی‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به جدول، علامت $P(x)$ در اطراف $x=-۱$ تغییر نمی‌کند، بنابراین از آن‌جا که $P(x)$ چندجمله‌ای درجه‌سوم است، در تجزیهٔ آن باید عامل $(x+۱)^۲$ دیده شود، به بیان دیگر $x=-۱$ باید ریشهٔ عبارت $۳x^۲+۲ax-a$ نیز باشد:

$$\xrightarrow{x=-۱} ۳-۲a-a=۰ \Rightarrow a=۱$$

گام دوم: پس چندجمله‌ای $P(x)$ عملاً به صورت زیر است:

$$P(x)=(x+۱)(۳x^۲+۲x-۱)=(x+۱)^۲(۳x-۱)$$

ریشهٔ دیگر چندجمله‌ای $P(x)$، $b=\frac{۱}{۳}$ است.

در نهایت، خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$a+b=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ مجموع جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $\frac{x-۴}{۲\sqrt{x}-۱} < ۰$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint جدول تعیین علامت بکش.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ریشهٔ عبارت صورت که $x = ۴$ است. حالا ریشهٔ عبارت مخرج را به دست می‌آوریم:

$$۲\sqrt{x}-۱=۰ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

گام دوم: حالا عبارت $\frac{x-۴}{۲\sqrt{x}-۱}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	۰		$\frac{۱}{۴}$		۴	
$x-۴$		$-$		$-$	۰	$+$
$۲\sqrt{x}-۱$		$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{x-۴}{۲\sqrt{x}-۱}$		$+$	تعریف نشده	$-$	۰	$+$

گام سوم: بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x-۴}{۲\sqrt{x}-۱} < ۰$ بازهٔ $(\frac{۱}{۴}, ۴)$ است که شامل اعداد صحیح ۱، ۲ و ۳ است. مجموع این اعداد صحیح برابر ۶ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^۲-۶|+|۲x-۶|>|x^۲-۲x|$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته **نامساوی مثلثی**: نامساوی زیر برای هر دو عدد دلخواه a و b برقرار است:

$$|a|+|b|\geq|a+b|$$

تساوی $|a|+|b|=|a+b|$ هنگامی برقرار است که a و b هم‌علامت باشند و نامساوی $|a|+|b|>|a+b|$ هنگامی برقرار است که a و b غیرهم‌علامت باشند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: $x^۲-۶$ مجموع $x^۲-۲x$ و $۲x-۶$ است:

$$|x^۲-۲x|+|۲x-۶|>|(x^۲-۲x)+(۲x-۶)|$$

بنابراین طبق نکتهٔ بالا، نامساوی هنگامی برقرار است که $x^۲-۲x$ و $۲x-۶$ غیرهم‌علامت باشند.

گام دوم: یعنی باید نامعادلهٔ $(x^۲-۲x)(۲x-۶)<۰$ را حل کنیم؛ داریم:

$$۲x(x-۲)(x-۳)<۰$$

خواستهٔ سؤال، تعداد اعداد طبیعی جواب این نامعادله است، بنابراین $۲x$ مثبت خواهد بود:

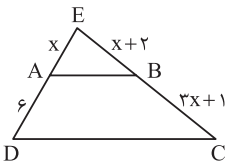
$$\Rightarrow (x-۲)(x-۳)<۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} ۲<x<۳$$

این یعنی مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، شامل هیچ عدد طبیعی نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دهم

۱۶ در شکل زیر، مساحت ذوزنقهٔ **ABCD** چند برابر مساحت مثلث **EAB** است؟



۱) ۳

۲) ۴

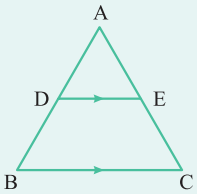
۳) ۶

۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) طبق قضیهٔ تالس، اگر در مثلث زیر، $DE \parallel BC$ باشد، می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم:



جزء‌به‌جزء:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

جزء‌به‌کل:

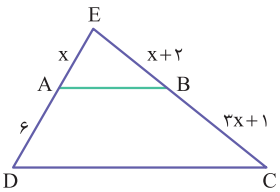
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۲) در شکل بالا مثلث‌های ADE و ABC به خاطر موازی‌بودن DE و BC متشابه‌اند، پس نسبت مساحتشان می‌شود مربع نسبت تشابهشان، یعنی:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=(\frac{AD}{AB})^{۲}\text{ یا }(\frac{AE}{AC})^{۲}\text{ یا }(\frac{DE}{BC})^{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در شکل زیر، $DC \parallel AB$ است، پس می‌توانیم از تالس استفاده کنیم. با یک جزء‌به‌جزء x پیدا می‌شود:



$$\frac{x}{۶}=\frac{x+۲}{۳x+۱}\Rightarrow ۳x^{۲}+x=۶x+۱۲\Rightarrow ۳x^{۲}-۵x-۱۲=۰$$

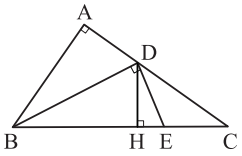
$$\Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{(-۵)^{۲}-۴(۳)(-۱۲)}}{۶}=\frac{۵\pm۱۳}{۶}\xrightarrow{x>۰}x=\frac{۱۸}{۶}=۳$$

گام دوم: طبق مورد (۲) درس‌باکس، نسبت مساحت مثلث EAB به EDC می‌شود:

$$\frac{S_{EAB}}{S_{EDC}}=(\frac{EA}{ED})^{۲}=(\frac{x}{x+۶})^{۲}=(\frac{۳}{۹})^{۲}=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{S_{EAB}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{EAB}}=۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ در شکل زیر، مثلث‌های ABC، BDE و DHC قائم‌الزاویه‌اند. اگر $D\hat{B}C = E\hat{D}C$، $AD = ۴$ و $BE = ۱۰$ باشد، طول HE کدام است؟



۱) ۱/۲۵

۲) ۲

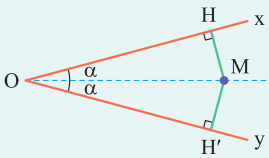
۳) ۲/۲۵

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

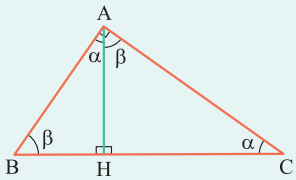
درس Box

۱) **نیمساز** به خطی گفته می‌شود که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. ویژگی‌اش هم این است که اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، فاصله‌اش از ضلع‌های آن زاویه یکسان است و برعکس؛ یعنی اگر نقطه‌ای فاصله‌اش از دو ضلع یک زاویه یکسان باشد، حتماً روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. برای درک بهتر این موضوع، شکل زیر را ببینید:



$$M \text{ روی نیمساز زاویهٔ } xOy \text{ است.} \Leftrightarrow MH = MH'$$

۲) در هر مثلث قائم‌الزاویه، با کشیدن ارتفاع وارد بر وتر (مثل AH در شکل زیر)، دو مثلث متشابه درست می‌شود (مثلث‌های ABH و ACH) که هر کدامشان با مثلث اصلی متشابه‌اند؛ یعنی:



$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

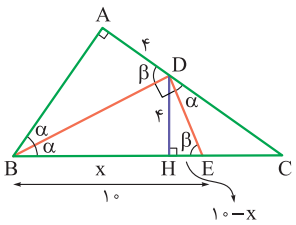
با نوشتن نسبت تشابه هر یک از مثلث‌های بالا، روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه به صورت زیر به دست می‌آیند:

۱) $AB^۲ = BH \times BC$ ، ۲) $AC^۲ = CH \times BC$ ، ۳) $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$ ،

۴) $AH^۲ = BH \times HC$ ، ۵) $AB \times AC = AH \times BC$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به گفتهٔ سؤال زاویه‌های DBC و EDC برابرند، پس طبق شکل، آن‌ها را α در نظر می‌گیریم. زاویهٔ DEB را هم β در نظر می‌گیریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE جمع α و β باید ۹۰° باشد:



$$\alpha + \beta = ۹۰^\circ \qquad (۱)$$

از طرفی جمع زاویه‌های ADB، $\underbrace{BDE}_{۹۰^\circ}$ و $\underbrace{EDC}_{\alpha}$ باید ۱۸۰° باشد:

$$A\hat{D}B + ۹۰^\circ + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{D}B = ۹۰^\circ - \alpha \overset{(۱)}{=\!=} \beta$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB هم جمع β و $A\hat{B}D$ باید ۹۰° باشد، پس طبق رابطهٔ (۱)، $A\hat{B}D = \alpha$ است.

گام دوم: خوب که به شکل بالا نگاه کنیم، می‌فهمیم BD نیمساز $\hat{B}$ است؛ پس فاصلهٔ D که روی نیمساز است، از AB و BC باید یکسان باشد:

$$DH = AD = ۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: حالا فرض می‌کنیم $BH = x$ باشد، در این صورت $HE = ۱۰ - x$ می‌شود.

الان می‌توانیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE از روابط طولی استفاده کنیم:

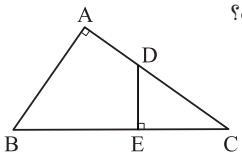
$$DH^۲ = BH \times HE \Rightarrow ۴^۲ = x(۱۰ - x) \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۸)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۸ \text{ یا } ۲$$

از شکل مشخص است که $BH > HE$ است، پس $x = ۸$ را می‌پذیریم؛ بنابراین:

$$HE = ۱۰ - x = ۱۰ - ۸ = ۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ در شکل زیر، $AB = DC$ و $AD = EC$ است. اگر $BE = ۴$ باشد، طول AD کدام است؟

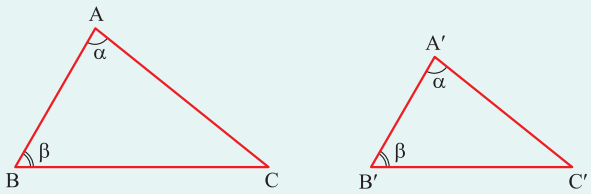


۱) ۲
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۳

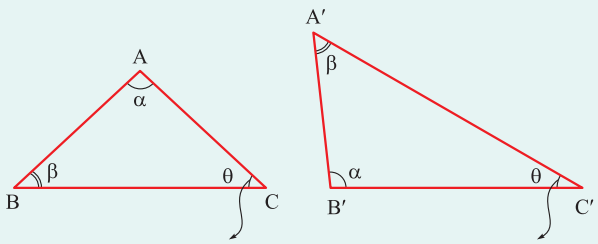
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند. مثلاً مثلث‌های زیر با دو زاویهٔ برابر α و β با یکدیگر متشابه‌اند.



نوشتن نسبت تشابه: برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم؛ به طوری که در صورت نسبت‌ها، اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها، اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. برای نمونه بیایید نسبت تشابه دو مثلث زیر را بنویسیم:

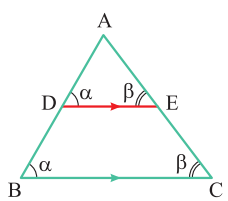
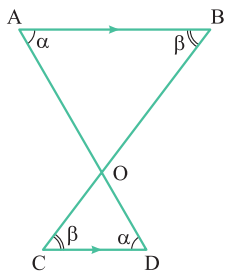
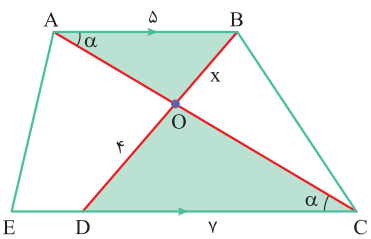


وقتی دو زاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ با دو زاویه از $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ برابره، پس زاویه‌های سومشون هم خودبه‌خود برابر هی‌شن که با θ نشونشون دادیم.

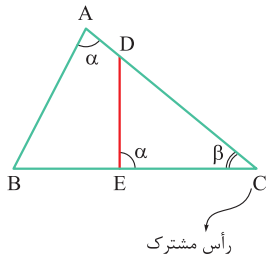
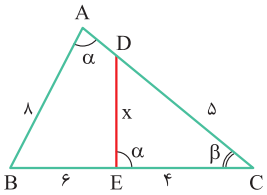
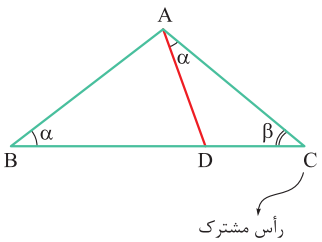
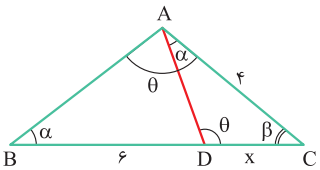
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{BC}{A'C'}}_{\text{رو به } \alpha} = \underbrace{\frac{AC}{B'C'}}_{\text{رو به } \beta} = \underbrace{\frac{AB}{A'B'}}_{\text{رو به } \theta}$$

حواستون هست که تو صورت نسبت‌ها فقط اضلاع مثلث ABC و تو مخرجشون فقط اضلاع مثلث $A'B'C'$ قرار داره!

۲) در جدول زیر ساختارهای هندسی معروفی که در آن‌ها دو مثلث با دو زاویهٔ برابر، متشابه هستند، آمده است. این ساختارها را به خوبی بشناسید:

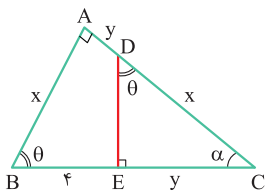
نام ساختار	شکل ساختار	مثلث‌های متشابه	مثال
تالسی		$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$	—
پروانه‌ای		$\overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{COD}$	 $\underbrace{\frac{x}{۴}}_{\text{رو به } \alpha} = \underbrace{\frac{۵}{۷}}_{\text{رو به } \hat{O}} \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۷}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نام ساختار	شکل ساختار	مثلث‌های متشابه	مثال
اشتراکی (مشترک در یک رأس و دارای یک زاویهٔ برابر)		$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EDC}$	 $\underbrace{\frac{x}{۸}}_{\text{رو به } \beta} = \underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{رو به } \alpha} \Rightarrow x = ۴$
		$\overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$	 $\underbrace{\frac{x+۶}{۴}}_{\text{رو به } \theta} = \underbrace{\frac{۴}{x}}_{\text{رو به } \alpha} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = ۲$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مثلث‌های ABC و DEC در شکل زیر، با یک زاویهٔ ۹۰° و یک α مشترک، متشابه‌اند. زاویهٔ سوم این مثلث‌ها هم خودبه‌خود برابر می‌شوند و آن‌ها را θ در نظر می‌گیریم. از طرفی سؤال گفته یه سری پاره‌خط با هم برابرند که آن‌ها را با x و y روی شکل مشخص کردیم.



گام دوم: نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\frac{y}{y+x}}_{\text{رو به } \theta} = \underbrace{\frac{x}{y+۴}}_{\text{رو به } ۹۰^\circ} \Rightarrow y(y+۴) = x(y+x) \Rightarrow x^۲ + xy = y^۲ + ۴y \quad (*)$$

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توانیم فیثاغورس بنویسیم:

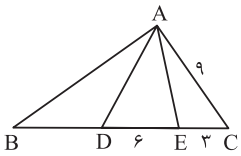
$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow x^۲ + (x+y)^۲ = (y+۴)^۲ \Rightarrow x^۲ + (x^۲ + ۲xy + y^۲) = y^۲ + ۸y + ۱۶$$

$$\Rightarrow ۲(x^۲ + xy) = ۸y + ۱۶ \xrightarrow[x^۲+xy=y^۲+۴y]{(*)} ۲(y^۲ + ۴y) = ۸y + ۱۶ \Rightarrow ۲y^۲ + ۸y = ۸y + ۱۶$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۸ \Rightarrow y = ۲\sqrt{۲} = AD$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ BAE است، طول BD کدام است؟

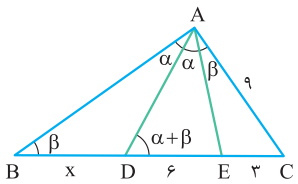


۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به گفتهٔ سؤال AD نیمساز زاویهٔ BAE است، پس طبق شکل آن را به دوتا α تقسیم می‌کند. فرض می‌کنیم $\hat{B}=\beta$ باشد، در این صورت $A\hat{D}C$ که زاویهٔ خارجی مثلث ADB است می‌شود: $\alpha+\beta$



گام دوم: خوب که به مثلث ADC نگاه کنیم، می‌فهمیم:

$$\begin{cases} AC=۹ \\ DC=۳+۶=۹ \end{cases} \Rightarrow AC=DC$$

پس این مثلث متساوی‌الساقین است و زاویه‌های مجاور به ساق‌هایش برابرند:

$$D\hat{A}C=\alpha+\beta \Rightarrow E\hat{A}C=\beta$$

گام سوم: مثلث‌های AEC و ABC در زاویهٔ C مشترک‌اند و یک β برابر هم دارند، پس متشابه‌اند. زاویهٔ سومِ برابرِ این مثلث‌ها هم $\underbrace{\hat{A}}_{۲\alpha+\beta}$ و $\underbrace{A\hat{E}C}_{۲\alpha+\beta}$ هستند. نسبت تشابه می‌نویسیم:

$$\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}}{\underbrace{x+۶+۳}_{\text{رو به } ۲\alpha+\beta}}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{۹} \Rightarrow x+۹=۲۷ \Rightarrow x=۱۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ تعداد قطرهای یک چندضلعی، سه برابر تعداد اضلاع آن است. از هر رأس این چندضلعی، چند قطر می‌گذرد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) یک nضلعی، «$\frac{n(n-3)}{2}$» قطر دارد.

۲) از هر رأس یک nضلعی به خودش و ۲ رأس مجاورش قطر نمی‌گذرد، پس از هر رأس «$n-3$»، قطر می‌گذرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنید با یک nضلعی طرف هستیم. تعداد قطرهایش سه برابر تعداد اضلاعش است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 3n \Rightarrow n-3=6 \Rightarrow n=9$$

گام دوم: پس از هر رأس این ۹ ضلعی، «$9-3=6$» قطر می‌گذرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ **طول یک مستطیل سه برابر عرض آن است. از تقاطع نیمسازهای داخلی این مستطیل یک چهارضلعی حاصل می‌شود. محیط مستطیل چند برابر محیط چهارضلعی ایجادشده است؟**

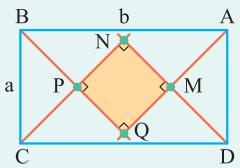
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

از برخورد نیمسازهای داخلی **هر مستطیل**، مطابق شکل زیر، یک **مربع** ساخته می‌شود. اگر ضلع‌های این مستطیل a و b باشند، طول ضلع مربع می‌شود $\frac{|a-b|}{\sqrt{۲}}$.



مثلاً طول ضلع مربعی که از برخورد نیمسازهای داخلی یک مستطیل با ضلع‌های ۶ و ۱۰ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|۱۰-۶|}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طول مستطیل سه برابر عرضش است، پس طول و عرض را به ترتیب $۳x$ و x در نظر می‌گیریم، *این‌پوری* محیط مستطیل می‌شود:

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(x+۳x) = ۸x$$

گام دوم: طبق درس‌باکس، از برخورد نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع ساخته می‌شود که طول ضلعش می‌شود:

$$\text{ضلع مربع} = \frac{۳x-x}{\sqrt{۲}} = \frac{۲x}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = x\sqrt{۲}$$

پس محیط مربع می‌شود:

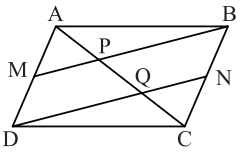
$$۴x\sqrt{۲}$$

گام سوم: نسبت محیط مستطیل به محیط مربع را می‌خواهیم که می‌شود:

$$\frac{۸x}{۴x\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل مفروض است. اگر M و N به ترتیب وسط اضلاع AD و BC و $AQ + PC = ۱۸$ باشد، طول PC کدام است؟



۱) ۷/۵

۲) ۸

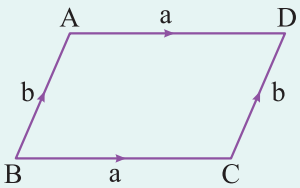
۳) ۸/۵

۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی است که دو ضلع مقابلش هم موازی‌اند و هم مساوی؛ ببینید:

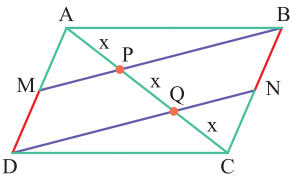


۲) چهارضلعی که ضلع‌های مقابلش هم موازی باشند هم مساوی، حتماً متوازی‌الاضلاع است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به گفتهٔ سؤال، چهارضلعی ABCD در شکل زیر، متوازی‌الاضلاع است؛ پس ضلع‌های مقابل به هم AD و BC، هم موازی‌اند هم مساوی. از این موضوع دوتا نتیجه می‌گیریم:

- BN و MD هم موازی‌اند.
- چون M و N وسط اضلاع‌اند، BN و MD مساوی هم هستند.



گام دوم: به چهارضلعی MBND نگاه کنید. دو ضلع مقابلش هم موازی می‌شوند و هم مساوی، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و MB و ND هم موازی‌اند.

گام سوم: در مثلث ADQ، MP و DQ موازی‌اند، پس می‌توانیم تالس بنویسیم:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} \xrightarrow{AM=MD} AP = PQ = x \qquad (۱)$$

به همین صورت با نوشتن تالس در مثلث PCB می‌فهمیم که:

$$PQ = QC = x \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که طول هر سه پاره‌خط AP، PQ و QC برابرند.

گام چهارم: به گفتهٔ سؤال $AQ + PC = ۱۸$ است؛ پس:

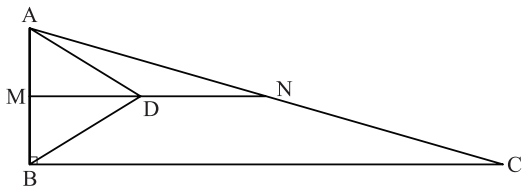
$$۲x + ۲x = ۱۸ \Rightarrow ۴x = ۱۸ \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۴} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

پس طول PC می‌شود:

$$۲x = ۲(۴/۵) = ۹$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{B}=۹۰^\circ$) مطابق شکل مفروض است. اگر مثلث ADB متساوی‌الاضلاع، $DN=۱$، $BC=\sqrt{۳}+۲$ و MN با BC موازی باشد، مساحت چهارضلعی DNCB کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}+۳}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}+۳}{۴}$

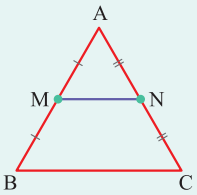
۳) $\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲}$

۴) $\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

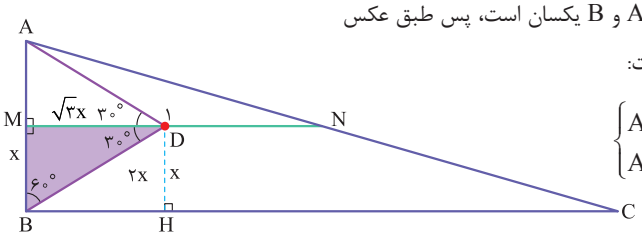
در مثلث زیر، پاره‌خط MN وسط دو ضلع از مثلث را به هم وصل کرده است؛ چنین پاره‌خطی همیشه موازی و نصف ضلع سوم است، یعنی:



$$MN \parallel BC \ , \ MN=\frac{BC}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از متساوی‌الاضلاع‌بودن مثلث ADB در شکل زیر، چندتا نتیجه می‌گیریم که:



- AD و DB برابرند و این یعنی فاصلهٔ D از A و B یکسان است، پس طبق عکس ویژگی عمودمنصف، MD عمودمنصف AB است:

$$\begin{cases} A\hat{D}M=B\hat{D}M=۳۰^\circ \\ AM=MB \end{cases}$$

- زاویهٔ $\hat{B}$ از مثلث هم که باید ۶۰° باشد.

گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ MDB، فرض می‌کنیم $BD=۲x$ باشد، در این صورت:

- ضلع رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است:

$$MB=x$$

از طرفی MDHB مستطیل است، پس:

$$DH=MB=x$$

- ضلع رو به زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر وتر است:

$$MD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲x)=\sqrt{۳}x$$

گام سوم: MN با BC موازی است و MN ضلع AB را در M نصف کرده، پس طبق تالس، AC را هم در N نصف می‌کند؛ بنابراین پاره‌خط MN در مثلث ABC وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند، در نتیجه نصف ضلع سوم است:

$$MN=\frac{BC}{۲} \Rightarrow \sqrt{۳}x+۱=\frac{BC}{۲} \Rightarrow BC=۲\sqrt{۳}x+۲$$

که BC باید برابر با $\sqrt{۳}+۲$ باشد:

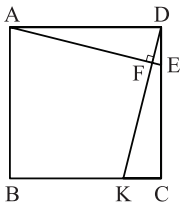
$$۲\sqrt{۳}x+۲=\sqrt{۳}+۲ \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲}$$

گام چهارم: مساحت ذوزنقهٔ DNCB می‌شود:

$$S=\frac{DN+BC}{۲}\cdot DH=\frac{۱+(\sqrt{۳}+۲)}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}+۳}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ مربع ABCD به طول ضلع ۱۲ مطابق شکل مفروض است. اگر $D\hat{A}E = ۱۵^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی KFEC کدام است؟



۱) ۱۴

۲) ۱۶

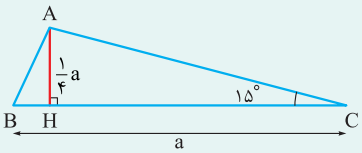
۳) ۱۸

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

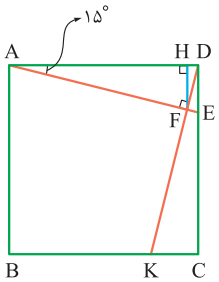
درس Box

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویهٔ ۱۵° دارد، **ارتفاع وارد بر وتر**، $\frac{۱}{۴}$ **وتر است و برعکس**؛ یعنی اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ آن مثلث ۱۵° است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل، مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF، یک زاویهٔ ۱۵ درجه دارد، پس ارتفاع وارد بر وترش، $\frac{۱}{۴}$ وتر است:



$$FH = \frac{۱}{۴}AD = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

پس مساحت مثلث AFD می‌شود:

$$S_{AFD} = \frac{۳\times ۱۲}{۲} = ۱۸$$

گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE یک زاویهٔ ۱۵° داریم، پس:

$$D\hat{E}A = ۹۰^\circ - ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$$

و بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFE داریم:

$$F\hat{D}E = ۹۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۵^\circ$$

گام سوم: خوب که به مثلث‌های ADE و KDC توجه کنیم، می‌فهمیم بنا به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند، پس:

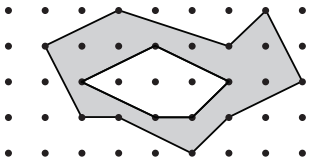
$$S_{ADE} = S_{KDC}$$

از طرفی $S_{ADE} = \underbrace{S_{AFD}}_{۱۸} + S_{FDE}$ شد، پس:

$$۱۸ + S_{FDE} = S_{KDC} \Rightarrow \underbrace{S_{KDC} - S_{FDE}}_{S_{KFEC}} = ۱۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ مساحت قسمت رنگی در شکل زیر کدام است؟

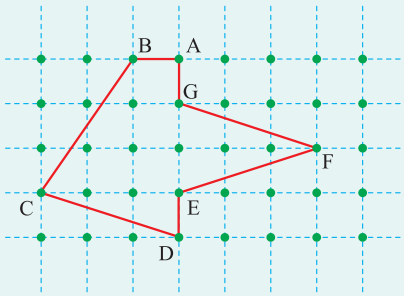


۱) ۱۰
۲) ۱۱/۵
۳) ۱۲
۴) ۱۲/۵

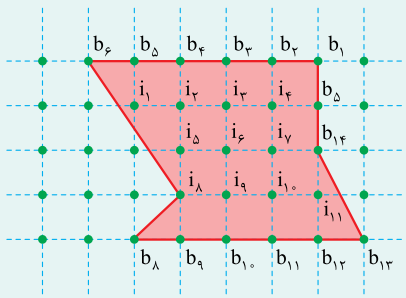
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

به نقطه‌های شکل زیر نگاه کنید. این نقطه‌ها روی خط‌های **افقی**، **عمودی** قرار دارند و فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی‌ای که روی یک خط افقی یا عمودی باشند، برابر **واحد** است. به چنین نقطه‌هایی، **نقطه‌های شبکه‌ای** می‌گوییم. حالا خوب به چندضلعی ABCDEFG نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید تمام رأس‌های این **چندضلعی**، روی نقاط شبکه‌ای هستند. به چندضلعی‌های این مدلی، **چندضلعی شبکه‌ای** می‌گوییم. در مورد چندضلعی‌های شبکه‌ای موارد زیر را باید بلد باشید:



۱) به نقطه‌هایی که روی رأس‌ها و ضلع‌های یک چندضلعی شبکه‌ای قرار دارند، **نقطه‌های مرزی** می‌گوییم. مثلاً در شکل زیر نقطه‌های b_1، b_2، b_3، ... و b_{15} همگی نقطهٔ مرزی هستند. واضح است که **تعداد نقطه‌های مرزی حداقل ۳تا است**. $(b \geq 3)$



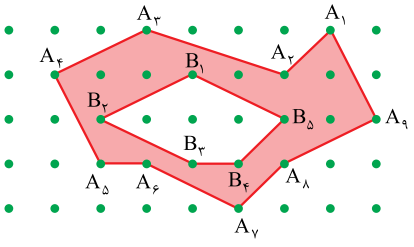
۲) به نقطه‌هایی که درون یک چندضلعی شبکه قرار دارند، **نقطه‌های درونی** می‌گوییم. مثلاً در شکل بالا نقطه‌های i_1، i_2، i_3، ... و i_{11} همگی نقطهٔ درونی هستند. یک چندضلعی شبکه‌ای می‌تواند نقطهٔ درونی نداشته باشد $(i \geq 0)$.

۳) مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای از این رابطه پیدا می‌شود:

$$S = \frac{\overbrace{\text{تعداد نقطه‌های مرزی}}^{b}}{2} + \underbrace{(\text{تعداد نقطه‌های درونی} - 1)}_{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی

برای محاسبهٔ مساحت قسمت رنگی، کافی است مساحت چندضلعی شبکه‌ای $B_1B_2...B_5$ را از مساحت چندضلعی شبکه‌ای $A_1A_2...A_9$ کم کنیم؛ یعنی:



$$S_{\text{رنگی}} = (\frac{9}{2} + (13-1)) - (\frac{5}{2} + (3-1)) = 16/5 - 4/5 = 12$$

(نقطه‌های مرزی ↑ ، نقطه‌های درونی ↓)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دهم

۲۶ متحرکی به جرم $m_1 = 12\ kg$ با تندی v_1 در حرکت است. تندی آن ۲۵ درصد کاهش یافته و انرژی جنبشی آن نیز ۲۵ درصد کاهش یافته است. جرم جسم چند کیلوگرم افزایش یافته است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint رابطهٔ انرژی جنبشی را به صورت نسبتی بنویسید تا m_2 به دست آید و سپس به سراغ محاسبهٔ تغییرات جرم جسم، یعنی $\Delta m = m_2 - m_1$ بروید.

درس Box

- انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v در حال حرکت است، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

(K: انرژی جنبشی (J)، m: جرم جسم (kg)، v: تندی جسم (m/s))

- رابطهٔ نسبتی انرژی جنبشی برای دو حالت مختلف، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کافی است رابطهٔ انرژی جنبشی را به صورت نسبتی بنویسیم تا جرم جسم در حالت دوم محاسبه شود:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{0/75K_1}{K_1} = \frac{m_2}{12} \times \left(\frac{0/75v_1}{v_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{m_2}{12} \times \frac{9}{16} \Rightarrow m_2 = 16\ kg$$

گام دوم: حالا می‌ماند محاسبهٔ تغییرات جرم جسم:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 16 - 12 = 4kg$$

کنکور

متحرکی به جرم $m_1 = 5\ kg$، با تندی v_1 در حرکت است. تندی آن ۲۵ درصد افزایش یافته و انرژی جنبشی آن نیز ۲۵ درصد افزایش یافته است. جرم جسم چند کیلوگرم کاهش یافته است؟ *(سؤال ۴۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) صفر ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ در جابه‌جایی جسمی به جرم ۰/۵ kg، انرژی پتانسیل گرانشی آن از ۲۰۰ J به ۲۵۰ J می‌رسد. در این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن جسم روی آن برابر چند ژول است؟

۱) ۵۰ ۲) −۵۰

۳) ۹۰ ۴) −۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر جسمی به جرم m از ارتفاع h_1 از سطح زمین به ارتفاع h_2 جابه‌جا شود، تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

تغییرات ارتفاع (m) ، جرم (kg)

$$\Delta U = mg\Delta h = mg(h_2 - h_1)$$

تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی (J) ← ΔU

شتاب گرانش (N/kg) ← g

کار نیروی وزن، همواره برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی است:

$$W_{\text{وزن}} = -\Delta U$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به این‌که کار نیروی وزن برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی است، پس:

$$W_{\text{وزن}} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = -(250 - 200) = -50\ J$$

گول نخوری ✘

اگه هواست به علامت منفی نباشه، توی دام گزینهٔ (۱) می‌افتی. ضمناً توجه کن که جرم جسم، دادهٔ اضافی بوده و برای حل مسئله لازم نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ در صفحهٔ مختصات، به جسمی نیروی $\vec{F} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ برحسب نیوتون، وارد می‌شود. جسم ابتدا ۵۰ cm در جهت محور x و در ادامه ۶۰ cm در جهت محور y جابه‌جا می‌شود. در کل این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ برابر چند ژول است؟

۱) $-1/8$
۲) $7/8$
۳) $7/6$
۴) $-0/4$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

هرگاه به جسمی نیروی $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ وارد شود و جسم در هر دو راستای x و y جابه‌جا شود، یعنی بردار جابه‌جایی به صورت $\vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j}$ باشد، کار نیروی F در این جابه‌جایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = F_x d_x + F_y d_y$$

نکته

در رابطهٔ بالا، باید Fها و dها را با رعایت علامت جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

چون جسم هم در راستای x و هم در راستای y جابه‌جا شده، پس:

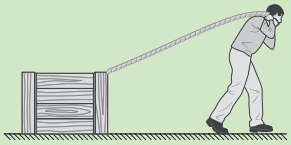
$$W = F_x d_x + F_y d_y = (6\times 50\times 10^{-2}) + (-8\times 60\times 10^{-2}) = -1/8\ J$$

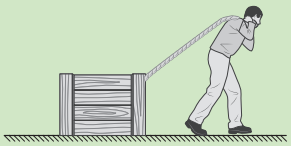
گول نخوری ✘

اگه علامت منفی F_y رو در محاسبات در نظر نگیری، توی دام گزینهٔ (۲) می‌افتی.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ شخصی جسم ساکنی را یک بار با طنابی بلند (شکل الف) و بار دیگر با طنابی کوتاه‌تر (شکل ب) روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌کشد. اگر اندازهٔ نیرویی که شخص وارد می‌کند، در هر دو حالت برابر باشد، پس از جابه‌جایی یکسان جسم، به ترتیب از راست به چپ در کدام شکل، شخص کار بیشتری انجام می‌دهد و در کدام شکل، تندی نهایی جسم بیشتر است؟


(الف)


(ب)

۱) الف ـ الف
۲) الف ـ ب
۳) ب ـ الف
۴) ب ـ ب

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده روی جسم در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییرات انرژی جنبشی آن است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_2 - K_1$$

(W_t: کار کل (J)، K_2: انرژی جنبشی ثانویه (J)، K_1: انرژی جنبشی اولیه (J))

$$\Rightarrow W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

(m: جرم جسم (kg)، v_2: تندی ثانویه (m/s)، v_1: تندی اولیه (m/s))

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ کار به صورت $W = (F\cos\theta)d$ است. از آن‌جایی که اندازهٔ نیرو و جابه‌جایی یکسان است، کار انجام‌شده در هر حالت فقط با $\cos\theta$ رابطه دارد؛ یعنی:

$$\frac{W_{ب}}{W_{الف}} = \frac{\cos\theta_{ب}}{\cos\theta_{الف}} \xrightarrow{\theta_{ب} > \theta_{الف} \Rightarrow \cos\theta_{ب} < \cos\theta_{الف}} W_{ب} < W_{الف}$$

در نتیجه در شکل (الف)، کار بیشتری انجام شده است.

گام دوم: از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی ($W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$) استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{در شکل (الف)}: W_{الف} = \frac{1}{2}m(v_{2,الف}^2 - \cancel{v_{1,الف}^2}^{\circ}) = \frac{1}{2}mv_{2,الف}^2 \\ \text{در شکل (ب)}: W_{ب} = \frac{1}{2}m(v_{2,ب}^2 - \cancel{v_{1,ب}^2}^{\circ}) = \frac{1}{2}mv_{2,ب}^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{W_{الف} > W_{ب}} \frac{1}{2}mv_{2,الف}^2 > \frac{1}{2}mv_{2,ب}^2$$

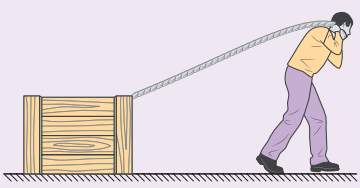
بنابراین تندی نهایی جسم در حالت (الف)، بیشتر است.

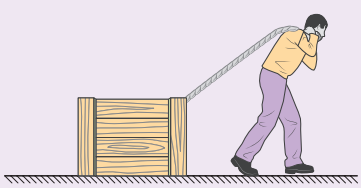
$$\Rightarrow v_{2,الف} > v_{2,ب}$$

درس کتاب درسی

شخصی جسمی را یک بار با طنابی بلند (شکل الف) و بار دیگر با طنابی کوتاه‌تر (شکل ب) روی سطحی هموار می‌کشد. اگر جابه‌جایی و کاری که این شخص در هر دو بار روی جعبه انجام می‌دهد، یکسان باشد، توضیح دهید در کدام حالت، شخص نیروی بزرگ‌تری وارد کرده است. اصطکاک را در هر دو حالت، ناچیز فرض کنید.

(فیزیک (۱) ـ پرسش ۳-۲ صفحهٔ ۵۹ کتاب درسی)


(الف)


(ب)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی به جرم $4\ kg$ که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^2 - 10t + 5$ است. کار کل انجام‌شده روی جسم در سه ثانیهٔ دوم برابر چند ژول است؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲

۳) -24 ۴) -72

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت a و با سرعت اولیهٔ v_0 از مکان اولیهٔ x_0 شروع به حرکت می‌کند، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

برای محاسبهٔ کار انجام‌شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، کافی است لحظات t_1 و t_2 را در معادلهٔ مکان ـ زمان جای‌گذاری کرده تا مکان متحرک را در هر لحظه به دست آوریم و چون جابه‌جایی برابر با فاصلهٔ متحرک بین نقطهٔ ابتدایی و انتهایی مسیر است، پس:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

حالا کافی است در رابطهٔ کار انجام‌شده، مقدار جابه‌جایی را قرار دهیم:

$$W = Fd = F\Delta x$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سه ثانیهٔ دوم حرکت، یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = 3\ s$ تا $t_2 = 6\ s$؛ برای محاسبهٔ جابه‌جایی در این مدت‌زمان، مکان جسم در هر لحظه را حساب کرده و $\Delta x = x_2 - x_1$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix} t_1 = 3\ s \Rightarrow x_1 = (3)^2 - 10(3) + 5 = -16\ m \\ t_2 = 6\ s \Rightarrow x_2 = (6)^2 - 10(6) + 5 = -19\ m \end{matrix} \Rightarrow \Delta x = -19 - (-16) = -3\ m$$

گام دوم: باید برای محاسبهٔ نیروی خالص طبق قانون دوم نیوتون $(F_{net} = ma)$، ابتدا شتاب حرکت را محاسبه کنیم. با مقایسهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده با فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان داریم:

$$\left.\begin{matrix} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ x = t^2 - 10t + 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 1 \Rightarrow a = 2\ m/s^2$$

$$F_{net} = ma = 4 \times 2 = 8\ N$$

گام سوم: حالا داده‌ها را در رابطهٔ کار کل انجام‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$W_t = F\Delta x = 8 \times (-3) = -24\ J$$

گول نخوری

به علامت منفی $\Delta x = -3\ m$ توجه کن وگرنه در دام گزینهٔ (۱) می‌افتی.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ هواپیمایی که در ارتفاع $125\ m$ از سطح زمین با تندی $180\ km/h$ پرواز می‌کند، بسته‌ای را رها می‌کند. با چشم‌پوشی از نیروی مقاومت هوا، تندی بسته هنگام برخورد به زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) $10\sqrt{5}$ ۲) $10\sqrt{2}$

۳) $50\sqrt{2}$ ۴) $50\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

به مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی گفته می‌شود.

$E = K + U$ ← انرژی مکانیکی (J)، K ↓ انرژی جنبشی (J)، U → انرژی پتانسیل (J)

اگر نیروهای اتلافی را نادیده بگیریم، انرژی مکانیکی در تمام مسیر حرکت جسم ثابت است و داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

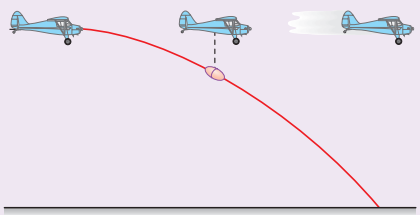
پاسخ خیلی تشریحی ✔ از اصل پایستگی انرژی مکانیکی کمک می‌گیریم (دقت کنید که تندی بسته در لحظهٔ رهاشدن با تندی حرکت هواپیما یکسان است):

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 + 2gh_1 = v_2^2 \xrightarrow{v_1 = 180\ km/h \div 3/6 = 50\ m/s} v_2 = \sqrt{(50)^2 + 2\times 10\times 125} = 50\sqrt{2}\ m/s$$

کتاب درسی

در شکل زیر، هواپیمایی که در ارتفاع $300\ m$ از سطح زمین و با تندی $50\ m/s$ پرواز می‌کند، بسته‌ای را برای کمک به آسیب‌دیدگان زلزله رها می‌کند. تندی بسته هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟ (از تأثیر مقاومت هوا روی حرکت بسته چشم‌پوشی کنید.) *(فیزیک (۱) ـ تمرین ۱۴ صفحهٔ ۸۰ کتاب درسی)*



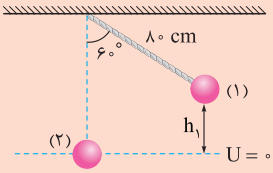
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ وزنهٔ ۶۰۰گرمی را به نخی به طول ۸۰ cm بسته و از سقف آویزان کرده‌ایم. اگر وزنه را روی دایره‌ای به شعاع نخ از حالت قائم آن‌قدر دور کنیم که زاویهٔ نخ با راستای قائم ۶۰ درجه شود و از این حالت وزنه را رها کنیم، بیشینهٔ انرژی جنبشی وزنه در مسیر، چند ژول می‌شود؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و مقاومت هوا و جرم نخ ناچیز است.)

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۴/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ می‌دانیم انرژی جنبشی وزنه در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر، یعنی در نقطهٔ (۲) که از مبدأ پتانسیل گرانشی عبور می‌کند، بیشینه است، پس با توجه به این‌که مقاومت هوا ناچیز است، به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



$$h_۱ = L - L\cos ۶۰^\circ = L(۱ - \cos ۶۰^\circ) = ۸۰ \times ۱۰^{-۲}(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۰/۴\ m$$

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \cancel{K_۱}^{\circ} + U_۱ = K_۲ + \cancel{U_۲}^{\circ} \Rightarrow mgh_۱ = K_۲$$

$$\xrightarrow[h_۱ = ۰/۴\ m]{m = ۶۰۰\ g = ۶۰۰ \times ۱۰^{-۳}\ kg\ ,\ g = ۱۰\ N/kg} K_۲ = ۶۰۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰ \times ۰/۴ = ۲/۴\ J$$

گول نخوری ✘ *خواست باشه که ارتفاع اولیهٔ وزنه از مبدأ پتانسیل گرانشی ($U = ۰$) برابر با طول طناب نیست و از رابطهٔ $h_۱ = L(۱ - \cos ۶۰^\circ)$ باید محاسبه شود؛ وگرنه در دام گزینهٔ (۴) می‌افتی.*

کنکور

وزنهٔ ۲۰۰گرمی را به نخی به طول ۲ متر بسته و از سقف آویزان کرده‌ایم. اگر وزنه را روی دایره‌ای به شعاع نخ از حالت قائم آن‌قدر دور کنیم که زاویهٔ نخ با راستای قائم ۶۰ درجه شود و از این حالت وزنه را رها کنیم، بیشینهٔ انرژی جنبشی وزنه در مسیر، چند ژول می‌شود؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و مقاومت هوا و جرم نخ ناچیز است.)

(سؤال ۷۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ (خارج از کشور))

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ جسمی به جرم $400\,g$ را از سطح زمین با تندی $30\,m/s$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم و جسم حداکثر تا ارتفاع $35\,m$ بالا می‌رود. در این جابه‌جایی ۳۵متری، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن جسم، چند برابر کار انجام‌شده توسط نیروی مقاومت هوا است؟ $(g = 10\,N/kg)$

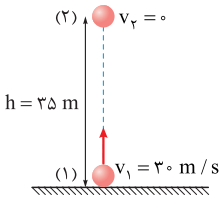
۱) $-4/5$ ۲) $4/5$

۳) $-3/5$ ۴) $3/5$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم:



$$W_{mg} = -mgh \xrightarrow[h=35\,m]{m=400\,g=0/4\,kg\ ,\ g=10\,N/kg} W_{mg} = -0/4\times10\times35 = -140\,J$$

گام دوم: با نوشتن قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی بین نقاط (۱) و (۲)، کار نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$K_2 - K_1 = W_t \xrightarrow{v_2=0 \Rightarrow K_2=0} 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{mg} + W_{f_D} \xrightarrow[W_{mg}=-140\,J]{m=0/4\,kg\ ,\ v_1=30\,m/s} -\frac{1}{2}\times0/4\times30^2 = -140 + W_{f_D}$$

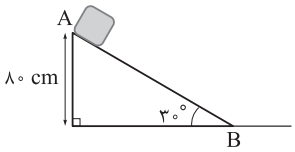
$$\Rightarrow -180 = -140 + W_{f_D} \Rightarrow W_{f_D} = -40\,J$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده در سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{W_{mg}}{W_{f_D}} = \frac{-140}{-40} = 3/5$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ در شکل زیر، جسمی به جرم $500\ g$ را از نقطهٔ A رها می‌کنیم. جسم می‌لغزد و با تندی $2/4\ m/s$ به سطح افقی می‌رسد. اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم با فرض ثابت‌بودن چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) ۱/۶

۲) ۱/۸

۳) ۲/۵۶

۴) ۳/۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint چون در مسیر حرکت، نیروی اتلافی داریم، از رابطهٔ $W_f = fd\cos\theta = E_B - E_A$، اندازهٔ نیروی اصطکاک (f) را به دست آورید.

درس Box **قانون پایستگی انرژی:** در یک سامانهٔ منزوی، مجموع کل انرژی‌ها، پایسته می‌ماند، یعنی انرژی را نمی‌توان خلق یا نابود کرد بلکه می‌توان آن را از یک شکل به شکل دیگری تبدیل نمود.

$$E_2 - E_1 = W_f$$

E_2: انرژی مکانیکی در حالت دوم (J)

E_1: انرژی مکانیکی در حالت اول (J)

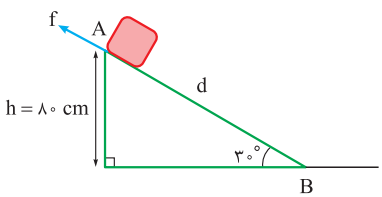
W_f: کار نیروی اتلافی (J)

پاسخ خیلی تشریحی طول سطح شیب‌دار را حساب می‌کنیم:

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{80}{d} \Rightarrow d = 160\ cm$$

نیروی اصطکاک f در خلاف جهت حرکت جسم بر آن اثر می‌کند.

رابطهٔ قانون پایستگی انرژی را بین نقاط A و B می‌نویسیم:



$$W_f = E_B - E_A \Rightarrow fd\cos\theta = (K_B + \cancel{U_B}) - (\cancel{K_A} + U_A) \xrightarrow[\theta = 180^\circ\ ,\ \cos 180^\circ = -1]{d = 160\ cm = 1/6\ m}$$

$$-f(1/6) = \frac{1}{2}(500\times10^{-3})(2/4)^2 - 500\times10^{-3}\times10\times80\times10^{-2}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1/44 - 4}{-1/6} = \frac{-2/56}{-1/6} = 1/6\ N \Rightarrow f = 1/6\ N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ تندی خودرویی به جرم $1620\ kg$ در یک جادهٔ افقی در مدت $5\ s$ از $40\ km/h$ به $80\ km/h$ می‌رسد. در این حرکت، توان متوسط موتور این خودرو حداقل چند اسب بخار است؟ $(1\ hp = 750\ W)$

۱) ۶۰ ۲) ۸۰

۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده را محاسبه کنید و سپس توان متوسط موتور را با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ $P_{av} = \frac{W_t}{\Delta t}$ به دست آورید و در نهایت یکای توان متوسط موتور را برحسب اسب بخار بنویسید.

درس Box

به آهنگ انجام کار توان گفته می‌شود که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{av} = \frac{W \to (J)\ \text{کار}}{\Delta t \to (s)\ \text{مدت‌زمان}} \leftarrow \text{توان متوسط}\ (W)$$

hp نماد اسب بخار است. هر اسب بخار تقریباً برابر با ۷۵۰ وات است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی برای محاسبهٔ کار کل انجام‌شده کمک می‌گیریم:

$$v_1 = 40\ km/h \div 3/6 = \frac{40}{3/6}\ m/s\ ,\ v_2 = 80\ km/h \div 3/6 = \frac{80}{3/6}\ m/s$$

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 1620 \left(\left(\frac{80}{3/6}\right)^2 - \left(\frac{40}{3/6}\right)^2 \right) = \frac{1620(80^2 - 40^2)}{2 \times (3/6)^2} = \frac{810}{(3/6)^2}(6400 - 1600) = 62/5 \times 4800$$

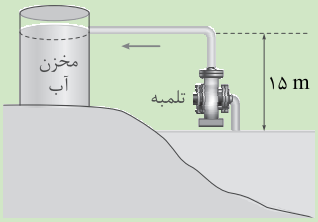
$$\Rightarrow W_t = 3 \times 10^5\ J$$

گام دوم: سراغ محاسبهٔ توان متوسط موتور می‌رویم:

$$P_{av} = \frac{W_t}{\Delta t} = \frac{3 \times 10^5}{5} = 6 \times 10^4\ W \times \frac{1\ hp}{750\ W} = 80\ hp$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ در شکل زیر، توان ورودی تلمبهٔ برقی $5\ kW$ است و در هر دقیقه $1200\ L$ آب با چگالی $\rho = 1\ g/cm^3$ را وارد مخزن می‌کند. بازده این تلمبه، چند درصد است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۶۰
۲) ۶۵
۳) ۷۵
۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ چگالی، جرم را محاسبه کنید. توان مفید در تلمبهٔ برقی برابر با آهنگ انجام کار نیروی گرانشی است، پس توان مفید را طبق رابطهٔ $P = \frac{mg\Delta h}{\Delta t}$ به دست آورید و در نهایت بازده را حساب کنید.

درس Box

۱) **بازده (راندمان)**: به نسبت کار مفید (توان مفید) به کار ورودی (توان ورودی) ضربدر ۱۰۰، بازده می‌گویند:

$$\text{بازده} = \frac{\text{توان مفید}}{\text{توان ورودی}} \times 100 \quad \text{یا} \quad \text{بازده} = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کار ورودی}} \times 100$$

۲) چگالی، نسبت جرم به حجم یک جسم است؛ یکای آن در SI کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3) و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\text{چگالی } (kg/m^3) \leftarrow \rho = \frac{m \rightarrow \text{جرم } (kg)}{V \rightarrow \text{حجم } (m^3)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک رابطهٔ چگالی، جرم آب واردشده به مخزن را به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow[V = 1200\ L \times \frac{1\ m^3}{10^3\ L} = 1/2\ m^3]{\rho = 1\ g/cm^3 \times 10^3 = 10^3\ kg/m^3} 10^3 = \frac{m}{1/2} \Rightarrow m = 1200\ kg$$

گام دوم: توان مفید (خروجی) تلمبهٔ برقی برابر است با:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{1200 \times 10 \times 15}{60} = 3 \times 10^3\ W$$

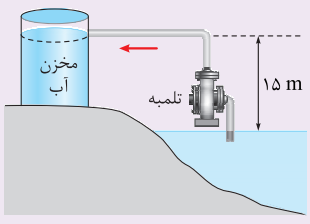
(دقت کنید که مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح آب در نظر گرفتیم.)

گام سوم: با توجه به تعریف بازده داریم:

$$Ra = \frac{\text{توان مفید}}{\text{توان ورودی}} \times 100 = \frac{3 \times 10^3}{5 \times 10^3} \times 100 = \%60$$

کتاب درسی

تلمبه‌ای با توان ورودی $15\ kW$ در هر ثانیه ۷۰ لیتر آب دریاچه‌ای به چگالی $1000\ kg/m^3$ را مطابق شکل زیر تا ارتفاع ۱۵متری مخزنی می‌فرستد. بازده تلمبه چند درصد است؟ *(فیزیک (۱) ـ مثال ۳ ـ ۱۶ صفحهٔ ۷۵ کتاب درسی)*



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ **آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق آبی، از ارتفاع ۷۲متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۵۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، باید در هر دقیقه چند متر مکعب آب روی توربین بریزد تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۶۰ MW برسد؟ (چگالی آب $1000\ kg/m^3$ و $g = 10\ m/s^2$ است.)**

۱) 10^4
۲) 10^7
۳) 2×10^4
۴) 2×10^7

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

در توربین، انرژی ورودی همان کار نیروی گرانشی است، پس ابتدا کار نیروی گرانشی در یک دقیقه را محاسبه کنید، سپس با توجه به این‌که انرژی مفید ۵۰ درصد کار نیروی گرانشی است، توان مفید را در هر دقیقه برحسب جرم (m) به دست آورید و برابر با $60\times10^6\ W$ قرار دهید تا مقدار m به دست آید و در نهایت با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ چگالی، حجم را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در توربین‌ها، انرژی ورودی همان کار نیروی گرانشی و انرژی خروجی، همان انرژی الکتریکی است، پس در هر دقیقه داریم:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg\Delta h = -m\times10(-72) = 720m\ (J)$$

گام دوم: انرژی مفید در توربین‌ها، انرژی الکتریکی تولیدشده است که در این سؤال برابر با ۵۰ درصد کار نیروی گرانشی است، یعنی:

$$W_{\text{مفید}} = \frac{1}{2}W_{mg} = 360m\ (J)$$

حالا به راحتی توان خروجی را برحسب m محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W_{\text{مفید}}}{\Delta t} = \frac{360m}{60} = 6m\ (W)$$

گام سوم: طبق صورت سؤال، توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه $60\ MW$ است. با برابر قرار دادن این عدد، با عدد به‌دست‌آمده در گام دوم، جرم آبی را که در هر دقیقه روی توربین می‌ریزد، محاسبه می‌کنیم:

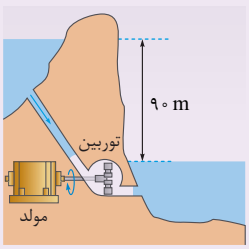
$$P_{\text{خروجی}} = P_{\text{توان الکتریکی}} \Rightarrow 6m = 60\times10^6 \Rightarrow m = 10^7\ kg$$

گام چهارم: کافی است به کمک رابطهٔ چگالی، حجم آب را به دست بیاوریم تا به جواب برسیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1000 = \frac{10^7}{V} \Rightarrow V = 10^4\ m^3$$

کتاب درسی

آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه آبی، از مسیری مطابق شکل روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند. با چرخش توربین، مولد می‌چرخد و انرژی الکتریکی تولید می‌شود (شکل روبه‌رو). اگر ۸۵ درصد کار نیروی گرانش به انرژی الکتریکی تبدیل شود، در هر ثانیه چند متر مکعب آب باید روی توربین بریزد تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۲۰۰ MW برسد؟ جرم هر متر مکعب آب را $1000\ kg$ در نظر بگیرید.



(فیزیک (۱) ـ تمرین ۳ ـ ۱۷ صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) دماسنج گازی، تفسنج و ترموکوپل به عنوان دماسنج‌های معیار برای اندازه‌گیری گسترهٔ دماهای مختلف پذیرفته شده‌اند.

ب) در ترموکوپل، کمیت دماسنجی، ولتاژ است و گسترهٔ دماسنجی یک ترموکوپل، به جنس دو سیم به کار رفته در آن بستگی دارد.

پ) سطوح صاف با رنگ‌های روشن در مقایسه با سطوح ناصاف و تیره تابش گرمایی کم‌تری دارند.

ت) هر چه ضریب انبساط حجمی مایعی کم‌تر باشد، انتقال گرما به روش همرفت در آن سریع‌تر انجام می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارات را تک‌به‌تک بررسی می‌کنیم:

الف) دماسنج گازی، دماسنج مقاومت پلاتینی و تفسنج جزو دماسنج‌های معیار برای اندازه‌گیری گسترهٔ دماهای مختلف توسط دانشمندان پذیرفته شده‌اند، اما ترموکوپل به دلیل دقت کم‌تر آن نسبت به دماسنج‌های بیان‌شده، از مجموعهٔ دماسنج‌های معیار، کنار گذاشته شد. ✖

ب) در ترموکوپل، دو سیم رسانای غیرهم‌جنس مانند مس و کنستانتان در یک ظرف آب و یخ از یک طرف و از طرف دیگر در مکانی که می‌خواهیم دمای آن را اندازه بگیریم، به هم متصل می‌شوند. این مجموعه، با سیم‌های مسی رابط به یک ولت‌سنج بسته می‌شود و در واقع کمیت دماسنجی ترموکوپل، ولتاژ است. ✓

پ) تابش گرمایی سطوح صاف و درخشان با رنگ‌های روشن نسبت به سطوح تیره، ناصاف و مات کم‌تر است. ✓

ت) هرچه ضریب انبساط حجمی مایعی کم‌تر باشد، با افزایش دما، حجم مایع کم‌تر افزایش می‌یابد، در نتیجه چگالی نیز کم‌تر، کاهش می‌یابد، بنابراین اختلاف چگالی بین بخش‌های گرم و سرد مایع کم می‌شود و در نتیجه اختلاف چگالی کاهش یافته و همرفت ضعیف‌تر رخ می‌دهد.

بنابراین تنها عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ مقدار عددی دمای جسمی برحسب درجهٔ سلسیوس و درجهٔ فارنهایت یکسان است. دمای این جسم در SI کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) -۴۰

۳) ۲۳۳ ۴) ۳۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا از برابری مقدار عددی دما برحسب درجهٔ سلسیوس و درجهٔ فارنهایت استفاده کنید و دما را برحسب درجهٔ سلسیوس به دست آورید. سپس به کمک رابطهٔ $T = \theta + ۲۷۳$، دما را برحسب کلوین محاسبه کنید.

درس Box

۱) یکی از مقیاس‌های رایج اندازه‌گیری دما، درجهٔ فارنهایت است که آن را با نماد F نشان می‌دهند. یکای آن $^\circ F$ است و رابطهٔ آن با درجهٔ سلسیوس به صورت زیر است:

دما برحسب درجهٔ سلسیوس $(^\circ C)$

$$F = \frac{۹}{۵}\theta + ۳۲$$

دما برحسب درجهٔ فارنهایت $(^\circ F)$

۲) دما را در SI برحسب یکای کلوین بیان می‌کنند. رابطهٔ بین دما برحسب کلوین و درجهٔ سلسیوس به صورت زیر بیان می‌شود:

دما برحسب درجهٔ سلسیوس $(^\circ C)$

$$T = \theta + ۲۷۳$$

دما برحسب کلوین (K)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق صورت سؤال، مقدار عددی دمای جسم برحسب درجهٔ سلسیوس (θ) با مقدار عددی دمای جسم برحسب درجهٔ فارنهایت (F) یکسان است، پس:

$$\left.\begin{array}{l} F = \frac{۹}{۵}\theta + ۳۲ \\ F = \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{۹}{۵}\theta + ۳۲ \Rightarrow -\frac{۴}{۵}\theta = ۳۲ \Rightarrow \theta = -۴۰\,^\circ C$$

گام دوم: حالا $\theta = -۴۰\,^\circ C$ را برحسب یکای SI (کلوین) می‌نویسیم:

$$T = \theta + ۲۷۳ = -۴۰ + ۲۷۳ = ۲۳۳\ K$$

گول نخوری

یکای SI دما کلوین است. اگه با مساوی $\theta = -۴۰^\circ C$ سراغ گزینه‌ها بری، توی دام گزینهٔ (۲) می‌افتی.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ یک بزرگراه از بخش‌های بتونی به طول $۲۰\ m$ ساخته شده است. این بخش‌ها، در دمای $۴۸\ ^\circ F$، بتون‌ریزی و عمل آورده شده‌اند. برای جلوگیری از تاب‌برداشتن بتون در دمای $۱۲۰\ ^\circ F$، مهندسان باید حداقل چه فاصله‌ای برحسب سانتی‌متر را بین این قطعه‌ها در نظر بگیرند؟ $(\alpha_{\text{بتون}} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۵}\ K^{-۱})$

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۹

۳) ۱ ۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اگر میله‌ای به طول $L_۱$ و دمای اولیهٔ $T_۱$ داشته باشیم، با افزایش دمای میله تا $T_۲$، طول میله به $L_۲$ می‌رسد. این افزایش طول میله به تغییرات دما، طول اولیه و جنس میله بستگی دارد:

$$\Delta L = L_۲ - L_۱ = L_۱ \alpha \Delta\theta \Rightarrow L_۲ = L_۱(۱ + \alpha \Delta\theta)$$

(ΔL: تغییرات طول (m)، $L_۱$: طول اولیه (m)، $\Delta\theta$: تغییرات دما (K یا °C)، $L_۲$: طول ثانویه (m)، α: ضریب انبساط طولی ($\frac{۱}{K}$ یا $\frac{۱}{^\circ C}$))

$$\Delta F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta$$

ΔF = تغییر دما ($^\circ F$)

$\Delta\theta$ = تغییر دما ($^\circ C$)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تغییرات دما برحسب درجهٔ فارنهایت را برحسب درجهٔ سلسیوس می‌نویسیم:

$$\Delta F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta \Rightarrow ۱۲۰ - ۴۸ = \frac{۹}{۵}\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۴۰\ ^\circ C$$

گام دوم: در اثر افزایش دما، طول قطعه‌ها افزایش می‌یابد. این افزایش طول، برابر با حداقل فاصله بین قطعه‌ها برای جلوگیری از تاب‌برداشتن است، پس میزان افزایش طول قطعه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta L = L_۱ \alpha \Delta\theta = ۲۰ \times ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۵} \times ۴۰ = ۱۰^{-۲}\ m \times \frac{۱\ cm}{۱۰^{-۲}\ m} = ۱\ cm$$

گول نخوری

اگه $\Delta F = ۷۲\ ^\circ F$ رو بر حسب $\Delta\theta$ محاسبه نکنی و در رابطهٔ $\Delta L = L_۱ \alpha \Delta\theta$ به جای $\Delta\theta$، $۷۲\ ^\circ F$ رو قرار بدی، توی دام گزینهٔ (۴) می‌افتی.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱ **ضریب انبساط طولی آلومینیم $۲/۲۵\times۱۰^{-۵}\ K^{-۱}$ است. در دمای $۲۰^{\circ}C$ روی یک ورقهٔ تخت آلومینیمی، حفره‌ای دایره‌ای‌شکل ایجاد کرده‌ایم. اگر دمای ورقه را به آرامی به $۸۰^{\circ}C$ برسانیم، مساحت حفره چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟**

۱) ۰/۲۷، کاهش می‌یابد.
۲) ۰/۲۷، افزایش می‌یابد.
۳) ۰/۳۶، کاهش می‌یابد.
۴) ۰/۳۶، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) با گرم‌کردن جسم، مساحت آن زیاد می‌شود. در واقع اگر به جسمی به مساحت $A_۱$ و دمای اولیه $T_۱$، گرما دهیم تا دمای جسم به $T_۲$ برسد، مساحت جدید جسم $A_۲$ می‌شود؛ این افزایش مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta A = A_۱(۲\alpha)\Delta T \Rightarrow A_۲ - A_۱ = A_۱(۲\alpha)\Delta T \Rightarrow A_۲ = A_۱(۱+۲\alpha\Delta T)$$

($A_۱$: مساحت اولیه ($m^۲$)، ΔT: افزایش دما (K یا $^{\circ}C$)، α: ضریب انبساط طولی ($K^{-۱}$ یا $^{\circ}C^{-۱}$)، $A_۲$: مساحت ثانویه ($m^۲$))

۲) درصد تغییرات از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درصد تغییرات طول} = \frac{\Delta L}{L_۱}\times۱۰۰ = (\alpha\Delta T)\times۱۰۰$$

$$\text{درصد تغییرات سطح} = \frac{\Delta A}{A_۱}\times۱۰۰ = (۲\alpha\Delta T)\times۱۰۰$$

$$\text{درصد تغییرات حجم} = \frac{\Delta V}{V_۱}\times۱۰۰ = (۳\alpha\Delta T)\times۱۰۰$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

درصد تغییرات مساحت حفره طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درصد تغییرات سطح} = \frac{\Delta A}{A_۱}\times۱۰۰ = ۲\alpha\Delta\theta\times۱۰۰ = ۲\times۲/۲۵\times۱۰^{-۵}\times(۸۰-۲۰)\times۱۰۰ = ٪۰/۲۷$$

علامت مثبت نشان‌دهندهٔ افزایش مساحت است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ در یک دمای معین، چگالی مایعی $1/25\ g/cm^3$ است. $7/5\ kg$ از این مایع در این دما، چند کیلوژول گرما دریافت کند تا چگالی آن $25\ kg/m^3$ تغییر کند؟ (گرمای ویژهٔ مایع $0/8\ \frac{J}{g.K}$ و ضریب انبساط حجمی آن $2\times10^{-4}\ K^{-1}$ است.)

۱) ۶۰
۲) ۲۴۰
۳) ۶۰۰
۴) ۲۴۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با افزایش دما، حجم افزایش و چگالی کاهش می‌یابد، پس به کمک رابطهٔ $\Delta\rho=-\rho_1\beta\Delta T$، تغییرات دما را محاسبه کنید و سپس با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ $Q=mc\Delta T$، گرمای دریافتی را برحسب کیلوژول به دست آورید.

درس Box

با تقریب مناسبی، می‌توان تغییر چگالی یک مایع را از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\rho_2=\rho_1(1-\beta\Delta T)\Rightarrow\Delta\rho=-\rho_1\beta\Delta T$$

$\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$: تغییر چگالی (kg/m^3)

$\Delta T=T_2-T_1$: تغییر دما $(K$ یا $^\circ C)$

ρ_1: چگالی مایع در دمای T_1 (kg/m^3)

ρ_2: چگالی مایع در دمای T_2 (kg/m^3)

β: ضریب انبساط حجمی $(K^{-1}$ یا $^\circ C^{-1})$

به مقدار انرژی که به دلیل اختلاف دما بین دو جسم مبادله می‌شود، گرما می‌گویند و در صورتی که فقط تغییر دما رخ دهد، رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$Q=m\,c\,\Delta T$$

Q: گرما (J) — c: گرمای ویژه $(\frac{J}{kg.K}$ یا $\frac{J}{kg.^\circ C})$ — m: جرم (kg) — ΔT: تغییرات دما $(K$ یا $^\circ C)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون مایع گرما دریافت کرده، پس حجم آن افزایش یافته، در نتیجه طبق رابطهٔ $(\rho=\frac{m}{V})$، چگالی آن کاهش می‌یابد. تغییرات دما را در اثر تغییرات چگالی به دست می‌آوریم:

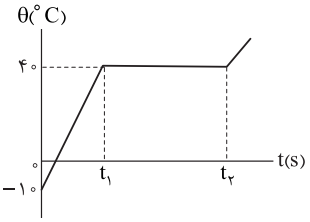
$$\Delta\rho=-\rho_1\beta\Delta T\Rightarrow\Delta T=\frac{\Delta\rho}{-\rho_1\beta}=\frac{-25}{-1/25\times10^3\times2\times10^{-4}}=100\ K$$

گام دوم: حالا کافی است به کمک رابطهٔ $Q=mc\Delta T$، گرمای دریافتی را محاسبه کنیم و آن را برحسب کیلوژول بنویسیم تا به جواب برسیم:

$$Q=7/5\times0/8\times10^3\times100=600000\ J=600\ kJ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ جسمی جامد به جرم $500\,g$ با آهنگ ثابت، گرما دریافت می‌کند و نمودار دمای آن برحسب زمان به شکل زیر است. اگر گرمای ویژهٔ جسم در حالت جامد $800\ \frac{J}{kg.K}$ و گرمای نهان ذوب آن $72\ kJ/kg$ باشد، $\frac{t_2}{t_1}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{9}{5}$

۲) $\frac{14}{5}$

۳) $\frac{14}{9}$

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

به آهنگ انتقال انرژی گرمایی، توان گرمایی گفته می‌شود و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

توان گرمایی (W) ↑ $P = \frac{Q}{t}$ ← گرما (J)، زمان (s)

گرمای نهان ذوب، مقدار گرمایی است که به یک کیلوگرم از جسم می‌دهیم تا در دمای ذوب خود، از جامد به مایع، تغییر حالت دهد و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$Q = \pm m L_F$ ← گرما (J)، گرمای نهان ذوب (J/kg)، جرم (kg)، ذوب (گرماگیر)، انجماد (گرماده)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

جسم جامد با آهنگ ثابت گرما دریافت می‌کند، یعنی در مرحلهٔ اول که دما از $-10\,^\circ C$ تا $40\,^\circ C$ افزایش یافته، آهنگ دریافت انرژی برابر با $P = \frac{mc\Delta\theta}{t_1 - 0}$ است و در مرحلهٔ دوم که دما ثابت و تغییر حالت صورت گرفته، آهنگ دریافت انرژی برابر با $P = \frac{mL_F}{t_2 - t_1}$ است. از برابری این دو رابطه، نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ به دست می‌آید:

$$\frac{mc\Delta\theta}{t_1} = \frac{mL_F}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{500\times10^{-3}\times800\times(40-(-10))}{t_1} = \frac{500\times10^{-3}\times72\times10^{3}}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\times10^{4}}{t_1} = \frac{36\times10^{3}}{t_2 - t_1} \Rightarrow 20t_2 - 20t_1 = 36t_1 \Rightarrow 20t_2 = 56t_1 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{56}{20} = \frac{14}{5}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ ظرفی حاوی مقداری آب با دمای $50\,^{\circ}C$ است. به این ظرف، یک کیلوگرم آب با دمای $90\,^{\circ}C$ اضافه می‌کنیم. دمای تعادل به $60\,^{\circ}C$ می‌رسد. اگر روی این آبِ $60\,^{\circ}C$، یک کیلوگرم دیگر، آبِ $90\,^{\circ}C$ بریزیم، دمای آب به چند درجهٔ سلسیوس می‌رسد؟ (اتلاف گرما ناچیز است.)

۱) ۶۴ ۲) ۶۶ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

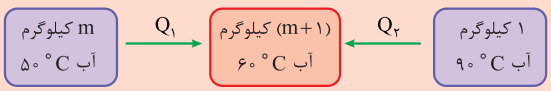
هرگاه چند جسم با دماهای متفاوت کنار هم قرار گیرند، با هم گرما مبادله می‌کنند تا به یک دمای یکسان برسند. در این حالت، جسم‌ها در تعادل گرمایی هستند و به دمایی می‌رسند که اصطلاحاً دمای تعادل گفته می‌شود.

برای رسیدن به تعادل گرمایی، بعضی از اجسام گرما می‌گیرند و بعضی از اجسام گرما از دست می‌دهند که طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری تمام گرماهای مبادله‌شده بین اجسام برابر صفر است و داریم:

$$Q_1+Q_2+Q_3+\ldots=0 \Rightarrow \text{اندازهٔ گرمایی که اجسام با دمای بالاتر از دمای تعادل، از دست می‌دهند.} = \text{گرمایی که اجسام با دمای کم‌تر از دمای تعادل، می‌گیرند.}$$

پاسخ خیلی تشریحی

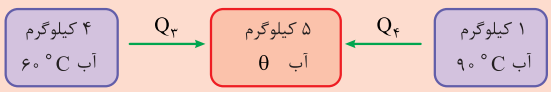
گام اول: m کیلوگرم آب با دمای $50\,^{\circ}C$ را با یک کیلوگرم آب با دمای $90\,^{\circ}C$ مخلوط کرده‌ایم و دمای تعادل به $60\,^{\circ}C$ رسیده است. پس:



$$Q_1+Q_2=0 \Rightarrow (mc\Delta\theta)_1+(mc\Delta\theta)_2=0 \Rightarrow mc(60-50)+1\times c\times(60-90)=0 \Rightarrow 10m=30$$

$$\Rightarrow m=3kg$$

گام دوم: در حالت جدید، $4kg$ آب با دمای $60\,^{\circ}C$ داریم و روی آن یک کیلوگرم آب $90\,^{\circ}C$ می‌ریزیم، پس:



$$Q_3+Q_4=0 \Rightarrow (mc\Delta\theta)_3+(mc\Delta\theta)_4=0 \Rightarrow 4\times(\theta-60)+1(\theta-90)=0$$

$$\Rightarrow 4\theta-240+\theta-90=0 \Rightarrow \theta=66\,^{\circ}C$$

کنکور

ظرفی حاوی مقداری آب با دمای $40\,^{\circ}C$ است. به این ظرف یک کیلوگرم آب با دمای $80\,^{\circ}C$ اضافه می‌کنیم، دمای تعادل به $50\,^{\circ}C$ می‌رسد. اگر روی این آبِ $50\,^{\circ}C$، یک کیلوگرم دیگر، آبِ $80\,^{\circ}C$ بریزیم، دمای آب به چند درجهٔ سلسیوس می‌رسد؟ (اتلاف گرما ناچیز است.) *(سؤال ۷۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))*

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ درون گرماسنجی $800\,g$ آب قرار دارد و دمای مجموعه $10^{\circ}C$ است. اگر قطعه یخی به جرم $500\,g$ و دمای $-10^{\circ}C$ را به آب اضافه کنیم، پس از ایجاد تعادل گرمایی، نیمی از یخ ذوب‌نشده باقی می‌ماند. ظرفیت گرمایی گرماسنج در SI کدام است؟ $(c_{آب} = 2c_{یخ} = 4200\frac{J}{kg.^{\circ}C}$ و $L_F = 3/36\times10^5\,J/kg)$

۱) ۵۰۴

۲) ۶۰۹

۳) ۵۰۴۰

۴) ۶۰۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

ظرفیت گرمایی: وقتی در اثر انتقال گرما، دمای جسمی تغییر کند، نسبت گرما به تغییر دما را ظرفیت گرمایی می‌گوییم.

اگر گرمایی که به جسم داده می‌شود، فقط صرف تغییر دمای جسم شود، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

گرما(J) — گرمای ویژه $(\frac{J}{Kg.^{\circ}C})$

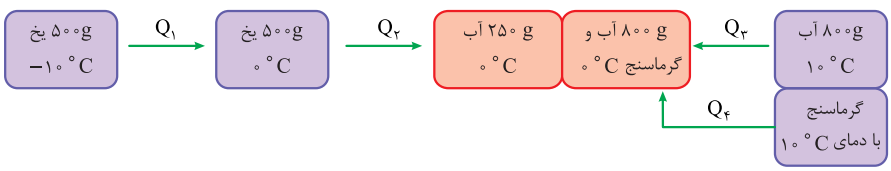
$$Q = mc\Delta\theta = C\Delta\theta \rightarrow \text{تغییرات دما } (^{\circ}C)$$

جرم (kg) — ظرفیت گرمایی $(J/^{\circ}C)$

در گرماسنج، مقدار آب با جرم معین می‌ریزیم و پس از هم‌دماشدن آب و گرماسنج، دمای آب را اندازه می‌گیریم. معمولاً در مورد گرماسنج به جای آن‌که جرم و گرمای ویژهٔ گرماسنج را جداگانه معلوم کنند، ظرفیت گرمایی آن را مشخص می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی

طبق نمودار زیر، گرمای لازم برای تبدیل $250\,g$ یخ $-10^{\circ}C$ به آب $0^{\circ}C$ را محاسبه می‌کنیم:



$$Q_1+Q_2+Q_3+Q_4=0 \Rightarrow mc_{یخ}\Delta\theta_1+\frac{m}{2}L_F+m'c\Delta\theta_2+C\Delta\theta_3=0$$

$$\Rightarrow 500\times10^{-3}\times2100\times(0-(-10))+250\times10^{-3}\times3/36\times10^5+800\times10^{-3}\times4200\times(0-10)$$

$$+C(0-10)=0 \Rightarrow 5\times2100+250\times336-800\times42-10C=0$$

$$\Rightarrow C=\frac{10500+84000-33600}{10}=6090\,J/^{\circ}C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دهم

۴۶ **کدام مورد دربارهٔ هواکره درست است؟**

۱) روند تغییر فشار را می‌توان دلیلی بر لایه‌ای‌بودن آن دانست.

۲) از ارتفاع حدود ۸۰کیلومتری به بعد، علاوه بر اتم‌ها و مولکول‌ها، کاتیون‌ها و آنیون‌ها نیز در هوا وجود دارند.

۳) روند کلی تغییر دما و تغییر فشار در لایهٔ دوم آن، برعکس یکدیگر است.

۴) منبع غنی از گازهای هیدروژن، اکسیژن و نیتروژن است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

در لایهٔ دوم هواکره، با افزایش ارتفاع، فشار کاهش و دما افزایش می‌یابد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): دلیل لایه‌ای‌بودن هواکره، روند تغییر دما است و نه روند تغییر فشار!

گزینهٔ (۲): در لایه‌های بالایی هواکره، به دلیل برخورد پرتوهای خورشیدی به اتم‌ها و مولکول‌ها، کاتیون (مانند He^+، O^+ و ...) نیز یافت می‌شود، اما *خبری از آنیون نیست!*

گزینهٔ (۴): در هوا گاز هیدروژن وجود ندارد. هواکره منبعی غنی از گازهای اکسیژن، نیتروژن و آرگون است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ **اگر رابطهٔ دما نسبت به ارتفاع از سطح زمین در لایهٔ تروپوسفر به صورت $\theta = -۶\Delta h + ۱۴$ باشد و در لایهٔ بعدی (استراتوسفر) به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع، $۲\ ^\circ C$ تغییر دما داشته باشیم، دمای هوا در ارتفاع ۴۰کیلومتری از سطح زمین برابر چند درجهٔ سلسیوس است؟ (ارتفاع لایهٔ تروپوسفر برابر $۱۲\ km$ است.)**

۱) -۱۱۲ ۲) -۲

۳) -۱۱۴ ۴) -۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

با استفاده از رابطهٔ کاهش دما در لایهٔ تروپوسفر، دمای هوا در ارتفاع ۱۲کیلومتری را به دست می‌آوریم:

$$\theta = -۶(۱۲ - ۰) + ۱۴ = -۵۸\ ^\circ C$$

می‌دانیم در لایهٔ دوم هواکره (استراتوسفر) روند تغییر دما به صورت افزایشی است. پس به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع در این لایه، $۲\ ^\circ C$ افزایش دما داریم؛ بنابراین رابطهٔ دما نسبت به ارتفاع در این لایه به صورت $\theta = ۲\Delta h - ۵۸$ (برای $h > ۱۲$) خواهد بود.

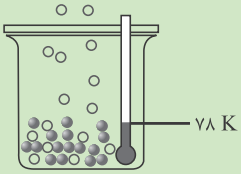
پس داریم:

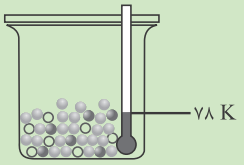
$$\Delta h = ۴۰ - ۱۲ = ۲۸ \Rightarrow \theta = ۲ \times ۲۸ - ۵۸ = -۲\ ^\circ C$$

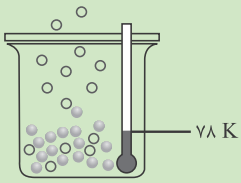
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

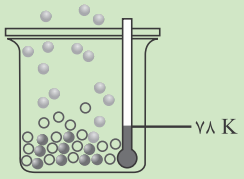
۴۸ اگر مقدار معینی هوای پاک و خشک را تا دمای ۷۸ کلوین سرد کنیم، اجزای سازندهٔ عمدهٔ هوا به کدام شکل در آن وجود دارند؟

N_2 ●
O_2 ●
Ar ○

۱)


۲)


۳)


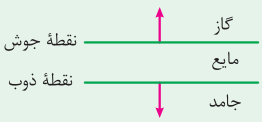
۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نکته

هر ماده در دماهای بالاتر از نقطهٔ جوش خود به صورت گاز و در دماهای پایین‌تر از نقطهٔ جوش خود (و بالاتر از نقطهٔ ذوب خود) به صورت مایع وجود دارد. مثلاً آب خالص در دماهای بالاتر از $100\ ^\circ C$ به صورت گاز و در دماهای پایین‌تر از $100\ ^\circ C$ (مثلاً $25\ ^\circ C$) به صورت مایع وجود دارد.



دمای $78\ K$ معادل با $-195\ ^\circ C$ است.

$$T(K) = \theta(^\circ C) + 273 \Rightarrow \theta = 78 - 273 = -195\ ^\circ C$$

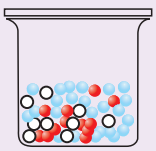
حالا نقطهٔ جوش N_2، O_2 و Ar را ببینید:

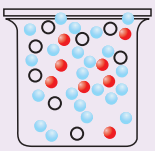
ماده	N_2	O_2	Ar
نقطهٔ جوش ($^\circ C$)	−۱۹۶	−۱۸۳	−۱۸۶

نقطهٔ جوش آرگون و اکسیژن بالاتر از $-195\ ^\circ C$ است؛ بنابراین هر دوی این گازها در دمای $-195\ ^\circ C$ به حالت مایع هستند. از طرفی نقطهٔ جوش نیتروژن $-196\ ^\circ C$ می‌باشد که پایین‌تر از $-195\ ^\circ C$ است؛ بنابراین این گاز در دمای $-195\ ^\circ C$ در حال تبخیر و خارج شدن از مخلوط است. با این تفاسیر، جواب درست می‌شه گزینهٔ (۴).

کتاب درسی

در دمای $-80\ ^\circ C$، اجزای سازندهٔ هوای مایع به کدام شکل وجود دارند؟ چرا؟ *(شیمی (۱) ـ با هم بیندیشیم صفحهٔ ۵۲ کتاب درسی)*


حالت (۲)


حالت (۱)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ در چه تعداد از موارد زیر، نام و فرمول داده‌شده، با هم تطابق دارند؟

- SO_3: گوگرد تری‌اکسید
- N_2O: دی‌نیتروژن اکسید
- CuO: مس (I) اکسید
- Fe_2S: آهن (II) سولفید
- N_2O_3: دی‌نیتروژن تری‌اکسیژن
- MgO: منیزیم (II) اکسید

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) چهار

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نکته

نام‌گذاری ترکیب‌های مولکولی و یونی دوتایی در یک نگاه!

ترکیب‌های یونی (اغلب شامل یک فلز و یک نافلز)

«نام کاتیون (بار کاتیون با اعداد رومی در صورت لزوم) + نام آنیون»

توجه فقط برای فلزهایی که بیش از یک نوع کاتیون با بار متفاوت دارند (مانند Fe، Cu و Cr)، باید بار کاتیون با اعداد رومی داخل پرانتز نوشته شود.

مثال

MgO: منیزیم اکسید

Cr_2S_3: کروم (III) سولفید

ترکیب‌های مولکولی (اغلب شامل دو نافلز)

«پیشوند یونانی (در صورت لزوم) + نام نافلز سمت چپ + پیشوند یونانی + نام نافلز سمت راست (یا ریشهٔ آن) + ید»

توجه اگر در فرمول مولکولی یک ترکیب، تنها یک اتم از عنصر سمت چپ وجود داشته باشد، از به کار بردن پیشوند «مونو» پیش از نام عنصر چشم‌پوشی می‌شود.

مثال

N_2O_4: دی‌نیتروژن تتراکسید

NO: نیتروژن مونوکسید

فقط نام SO_3 درست نوشته شده است، اما بررسی بقیهٔ موارد:

N_2O: دی‌نیتروژن مونوکسید

CuO: مس (II) اکسید

N_2O_3: دی‌نیتروژن تری‌اکسید

FeS: آهن (II) سولفید

MgO: منیزیم اکسید

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ در کدام گزینه، درصد حجمی گازهای نجیب در هواکره به درستی مقایسه شده است؟

۱) $Ar > He > Ne > Xe > Rn$

۲) $Ar > Ne > He > Kr > Xe$

۳) $Ar > Ne > Xe > He > Kr$

۴) $He > Ar > Ne > Kr > Xe$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ آرگون، نئون و هلیم، به ترتیب فراوان‌ترین گازهای نجیب هواکره هستند.

درصد حجمی گاز در هوا: $N_2 > O_2 > \underline{Ar} > CO_2 > \underline{Ne} > \underline{He} > \underline{Kr} > \underline{Xe}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ **با توجه به مطالب کتاب درسی، در مورد ساختار لوویس اکسیدهایی از کربن و گوگرد با فرمول CO_x و SO_y، کدام مورد نادرست است؟**

۱) اگر $x = y$ باشد، نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در اکسید گوگرد بیشتر است.

۲) اگر $x + y = ۵$ باشد، در هر دو مولکول، اتم مرکزی الکترون ناپیوندی ندارد.

۳) در همهٔ مولکول‌های ممکن، هر اتم اکسیژن، ۲ پیوند اشتراکی تشکیل داده است.

۴) اگر شمار پیوندهای اشتراکی اکسید گوگرد بیشتر از اکسید کربن باشد، در نام یکی از مولکول‌ها، واژهٔ «مونو» به کار رفته است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

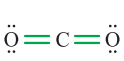
پاسخ خیلی تشریحی ✔

اکسیدهای کربن $\Rightarrow CO, CO_۲$

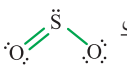
اکسیدهای گوگرد $\Rightarrow SO_۲, SO_۳$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر $x = y$ باشد، با $CO_۲$ و $SO_۲$ سروکار داریم:

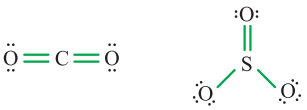


$$\frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}} = \frac{۴}{۴} = ۱$$



$$\frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

گزینهٔ (۲): اگر $x + y = ۵$ باشد، با $CO_۲$ و $SO_۳$ سروکار داریم. در هر دوی این مولکول‌ها، اتم مرکزی الکترون ناپیوندی ندارد.



گزینهٔ (۳): مثلاً در CO، اتم اکسیژن ۳ پیوند اشتراکی تشکیل داده است:

گزینهٔ (۴): شمار پیوندهای اشتراکی $SO_۳$ بیشتر از CO است. در نام CO (کربن مونوکسید)، واژهٔ «مونو» به کار رفته است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ درستی و نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- **افزایش CO_2 در آب دریا، موجب تخریب ساختار آهکی برخی کیسه‌تنان و فرسایش ساختار اسکلتی آن‌ها می‌شود.**
- **محلول ترکیب‌های BaO و NO در آب، به ترتیب موجب قرمزشدن و آبی‌شدن کاغذ pH می‌شوند.**
- **افزودن CaO به خاک کشاورزی، موجب رشد بهتر گیاهان و بهبود محصولات کشاورزی می‌شود.**
- **چگالی کربن مونوکسید بیشتر از هوا و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است.**

۱) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست

۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

۳) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست

۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های اول و سوم، درست و عبارت‌های دوم و چهارم، نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

مورد اول: افزایش گاز CO_2 به آب دریا، موجب اسیدی‌شدن آب شده و ساختار آهکی مرجان‌ها که نوعی از کیسه‌تنان هستند را تخریب می‌کند و لذا موجب فرسایش ساختار اسکلتی آن‌ها می‌شود.

مورد دوم: از واکنش اغلب اکسیدهای فلزی و نافلزی با آب به ترتیب باز و اسید تولید می‌شود؛ یعنی برخی از اکسیدهای فلزی و برخی از اکسیدهای نافلزی خصلت بازی و اسیدی ندارند. مثلاً NO به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و اکسیدی خنثی به حساب می‌آید.

مورد سوم: افزودن CaO (آهک) به خاک کشاورزی موجب افزایش pH خاک شده که می‌تواند رشد بهتر گیاهان و بهبود محصولات کشاورزی را سبب شود.

مورد چهارم: چگالی گاز کربن مونوکسید کم‌تر از هوا است؛ به همین دلیل به سرعت در فضای اتاق پخش می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ پس از موازنهٔ معادلهٔ زیر، تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها کدام است؟

$$Ni + NH_4ClO_4 \rightarrow Ni_2O_3 + NiCl_3 + H_2O + N_2$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موازنه را با پیچیده‌ترین ترکیب (NH_4ClO_4) و اتم هیدروژن در آن شروع می‌کنیم:

موازنهٔ H:

$$\_Ni + 1NH_4ClO_4 \rightarrow \_Ni_2O_3 + \_NiCl_3 + 2H_2O + \_N_2$$

موازنه را با نیتروژن، اکسیژن، کلر و در آخر نیکل ادامه می‌دهیم:

موازنهٔ N:

$$\_Ni + 1NH_4ClO_4 \rightarrow \_Ni_2O_3 + \_NiCl_3 + 2H_2O + \frac{1}{2}N_2$$

$$\xrightarrow{\times 2} \_Ni + 2NH_4ClO_4 \rightarrow \_Ni_2O_3 + \_NiCl_3 + 4H_2O + 1N_2$$

موازنهٔ O:

$$\_Ni + 2NH_4ClO_4 \rightarrow \frac{4}{3}Ni_2O_3 + \_NiCl_3 + 4H_2O + 1N_2$$

$$\xrightarrow{\times 3} \_Ni + 6NH_4ClO_4 \rightarrow 4Ni_2O_3 + \_NiCl_3 + 12H_2O + 3N_2$$

موازنهٔ Cl:

$$\_Ni + 6NH_4ClO_4 \rightarrow 4Ni_2O_3 + 2NiCl_3 + 12H_2O + 3N_2$$

موازنهٔ Ni:

$$10Ni + 6NH_4ClO_4 \rightarrow 4Ni_2O_3 + 2NiCl_3 + 12H_2O + 3N_2$$

تفاوت مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها $= (4+2+12+3) - (10+6) = 21-16 = 5$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ کدام مورد، **نادرست** است؟

۱) با افزایش مقدار کربن دی‌اکسید در هوا، میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد برخلاف مساحت سطح برف در نیمکرهٔ شمالی، افزایش می‌یابد.

۲) در تولید مقدار معینی برق، انرژی خورشیدی، کربن دی‌اکسید کم‌تری نسبت به باد تولید می‌کند.

۳) در برخی از کشورها از اتانول به عنوان سوخت سبز استفاده می‌شود.

۴) در واکنش سوختن کامل ۰/۲ مول اتانول، ۱۳/۴۴ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP مصرف می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مقایسهٔ ردپای CO_2 برای منابع مختلف تولید برق به صورت زیر است:

ردپای CO_2: زغال‌سنگ > نفت خام > گاز طبیعی > انرژی خورشید > گرمای زمین > باد

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

افزایش میزان CO_2 در هوا ← افزایش دمای کرهٔ زمین و افزایش سطح آب دریاها

افزایش میزان CO_2 در هوا ← کاهش مساحت برف در نیمکرهٔ شمالی

گزینهٔ (۳): *کاملاً درسته!*

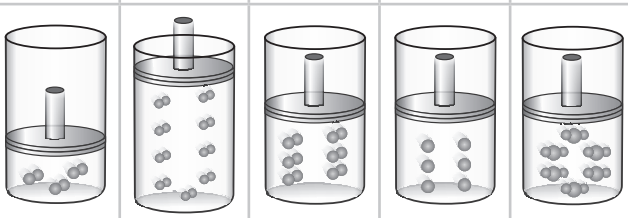
گزینهٔ (۴): معادلهٔ واکنش سوختن کامل اتانول به صورت زیر است:

$$C_2H_5OH + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$$

$$0/2\ mol\ C_2H_5OH \times \frac{3\ mol\ O_2}{1\ mol\ C_2H_5OH} \times \frac{22/4\ L\ O_2}{1\ mol\ O_2} = 13/44\ L\ O_2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ با توجه به جدول زیر که چند نمونهٔ گازی را در شرایط STP نشان می‌دهد، کدام موارد نادرست است؟ (هر ذره معادل ۰/۰۳ مول است؛ $O=16, N=14, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)

شمارهٔ نمونه	۱	۲	۳	۴	۵
گاز	N_2	H_2	O_2	He	CO_2
ظرف محتوی گاز					

الف) در صورت انجام واکنش میان نمونه‌های (۱) و (۲)، ۳/۰۶ گرم آمونیاک تولید می‌شود.

ب) اگر در دمای ثابت، فشار نمونهٔ (۴) به ۲ atm برسد، حجم آن به ۲/۰۱۶ لیتر می‌رسد.

پ) مجموع تعداد اتم‌ها در مخلوط گازهای نمونه‌های (۱) و (۵) برابر $1/6254\times10^{23}$ است.

ت) چگالی گاز نمونهٔ (۳) در شرایط آزمایش به تقریب برابر $1/43\ g.L^{-1}$ است.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) فقط پ
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط مورد «پ» نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نمونه‌های (۱) و (۲) به ترتیب شامل $0/03\times3=0/09$ مول N_2 و $0/03\times9=0/27$ مول H_2 هستند. با توجه به معادلهٔ $N_2+3H_2\rightarrow2NH_3$ با مصرف ۰/۰۹ مول N_2 یا ۰/۲۷ مول H_2، ۰/۱۸ مول آمونیاک تولید می‌شود.

$$0/18\ mol\ NH_3\times\frac{17\ g\ NH_3}{1\ mol\ NH_3}=3/06\ g\ NH_3$$

ب) ابتدا حجم نمونهٔ (۴) را در شرایط STP حساب می‌کنیم:

$$6\times0/03\ mol\ He\times\frac{22/4\ L\ He}{1\ mol\ He}=4/032\ L\ He$$

با دوبرابرشدن فشار در دمای ثابت، حجم گاز نصف می‌شود.

$$\frac{4/032}{2}=2/016$$

پ) در نمونه‌های (۱) و (۵)، به ترتیب ۰/۰۹ مول N_2 و ۰/۱۸ مول CO_2 وجود دارد.

مجموع تعداد مول اتم‌ها: $\underbrace{(0/09\times2)}_{N}+\underbrace{(0/18\times3)}_{C+O}=0/72\ mol$

تعداد اتم‌ها: $0/72\ mol\times\frac{6/02\times10^{23}\ \text{اتم}}{1\ mol}=4/3344\times10^{23}$ اتم

ت) برای محاسبهٔ چگالی گازها می‌توانیم از نسبت جرم مولی به حجم مولی استفاده کنیم:

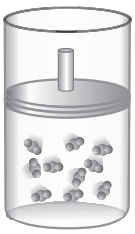
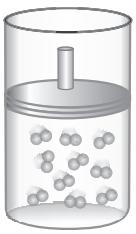
$$\text{چگالی } O_2=\frac{\text{جرم مولی}}{\text{حجم مولی}}=\frac{32\ g}{22/4\ L}\simeq1/43\ g\cdot L^{-1}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

با توجه به شکل داده‌شده که ظرف‌های محتوی گازهای مختلف را در دما و فشار یکسان نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟ (هر ذره، معادل ۰/۱ مول است. $g.mol^{-1} : He = ۴, C = ۱۲, N = ۱۴, O = ۱۶, Ne = ۲۰$)

(سؤال ۷۹ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

شمارهٔ نمونه	۱	۲	۳	۴	۵
گاز	CO	Ne	$CO_۲$	$N_۲$	He
ظرف محتوی گاز					

۱) شمار اتم‌های نمونهٔ (۴)، دوبرابر شمار مولکول‌های نمونهٔ (۱) است.

۲) حجم گاز نمونهٔ (۴)، دو برابر حجم گاز نمونهٔ (۱) و برابر ۲۲/۴ لیتر است.

۳) مجموع جرم گاز در نمونه‌های (۱) و (۳)، ۲/۹ برابر جرم گاز در نمونهٔ (۲) است.

۴) جرم گاز نمونهٔ (۵)، ۸۰ درصد جرم گاز نمونهٔ (۲) و حجم آن، ۴برابر حجم گاز نمونهٔ (۱) است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ کدام مورد، نادرست است؟

۱) مولکول‌های اوزون مانع ورود بیش از ۷۵ درصد تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین می‌شوند.

۲) برای کاهش CO_2 تولیدشده در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، آن را با اکسید فلزهای کلسیم و منیزیم واکنش می‌دهند.

۳) در مجموعهٔ واکنش‌های تولید اوزون تروپوسفری، گاز نیتروژن، در همهٔ مراحل نقش واکنش‌دهنده را ایفا می‌کند.

۴) طول موج نور حاصل از سوختن گوگرد، از طول موج رنگ شعلهٔ فلز سدیم کوتاه‌تر است.

آبی ← ، زرد ←

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مجموعه واکنش‌هایی که به تولید اوزون تروپوسفری منجر می‌شوند، به صورت زیر است:

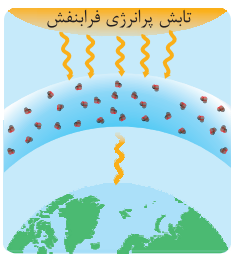
$$N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$$

$$2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$$

$$NO_2(g) + O_2(g) \rightarrow NO(g) + O_3(g)$$

گاز نیتروژن فقط در یکی از واکنش‌ها، نقش واکنش‌دهنده را دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:



گزینهٔ (۱): با توجه به شکل صفحهٔ ۷۳ کتاب درسی، از هر ۵ پرتو فرابنفش، ۴تای آن‌ها توسط اوزون جذب شده و فقط یکی از آن‌ها می‌تواند فرار کند؛ *پس می‌شه گفت* حدود $\frac{4}{5} \times 100 = 80$ درصد تابش فرابنفش توسط لایهٔ اوزون جذب می‌شود.

گزینهٔ (۲): از واکنش‌های زیر به منظور حذف CO_2 استفاده می‌شود:

$$CO_2(g) + CaO(s) \rightarrow CaCO_3(s)$$

$$CO_2(g) + MgO(s) \rightarrow MgCO_3(s)$$

گزینهٔ (۴): نور حاصل از سوختن گوگرد، آبی و رنگ شعلهٔ سدیم، زرد است. طول موج نور آبی کوتاه‌تر از زرد است:

طول موج: سرخ < نارنجی < زرد < سبز < آبی < نیلی < بنفش

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷ در شرایطی معین، ۱ مول اوکتان (C_8H_{18}) سوخته و نیمی از اتم‌های کربن آن به کربن مونوکسید و نیم دیگر آن به کربن دی‌اکسید تبدیل می‌شوند. جرم گاز اکسیژن مصرف‌شده در این فرایند چند گرم است؟ ($O = 16\ g.mol^{-1}$)

۱) ۳۲۰ ۲) ۳۳۶ ۳) ۶۴۰ ۴) ۶۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به اطلاعات سؤال، از هر ۸ اتم کربن C_8H_{18}، ۴ اتم آن به CO_2 و ۴ اتم آن به CO تبدیل می‌شود.

$$\_C_8H_{18} + \_O_2 \rightarrow \_4CO_2 + \_4CO + \_9H_2O$$

حالا با توجه به موازنهٔ اتم اکسیژن، ضریب O_2 را تعیین می‌کنیم:

$$2x = (4\times2)+4+9 \Rightarrow 2x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{2}$$

به ازای سوختن ۱ مول اوکتان، $\frac{21}{2}$ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود:

$$\frac{21}{2}\,mol\ O_2 \times \frac{32\ g\ O_2}{1\ mol\ O_2} = 21\times16 = 336\ g\ O_2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ آلوتروپ‌های اکسیژن در چه تعداد از موارد زیر، مشابه هستند؟

- حالت فیزیکی در دما و فشار اتاق
- رنگ کلی در حالت مایع
- نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در مولکول سازنده
- شمار اتم‌ها در نمونه‌هایی به جرم یکسان

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

اکسیژن و اوزون در همهٔ موارد داده‌شده، مشابه هستند.

آلوتروپ	O_2	O_3
ساختار لوویس	$\ddot{O}=\ddot{O}$	$\ddot{O}=\ddot{O}-\ddot{O}:$ (خمیده یا Vشکل)
نقطهٔ جوش	$-۱۸۳\ ^\circ C$ (کم‌تر)	$-۱۱۲\ ^\circ C$ (بیشتر)
مایع‌شدن	سخت‌تر	آسان‌تر
رنگ در حالت مایع	آبی کمرنگ	آبی پررنگ
واکنش‌پذیری	کم‌تر	بیشتر (گندزدا)
پایداری	بیشتر	کم‌تر
قطبیت	ناقطبی	قطبی
انحلال‌پذیری در آب	کم‌تر	بیشتر

دربارهٔ مورد آخر، دقت کنید که O_2 و O_3 فقط از اتم اکسیژن تشکیل شده‌اند و در جرم یکسان، شامل تعداد اتم یکسانی هستند.

$$mg\ O_2 \times \frac{1\ mol\ O_2}{32\ g\ O_2} \times \frac{2\ mol\ O}{1\ mol\ O_2} = \frac{m}{16}\ mol\ O$$

$$mg\ O_3 \times \frac{1\ mol\ O_3}{48\ g\ O_3} \times \frac{3\ mol\ O}{1\ mol\ O_3} = \frac{m}{16}\ mol\ O$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ اگر در واکنش زیر، به ازای مصرف ۵ گرم از مادهٔ A، ۵۶۰ میلی‌لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP تولید شود، جرم مولی مادهٔ B چند گرم بر مول است؟ $(O = 16\ g.mol^{-1})$

$$2A(s) \rightarrow 2B(s) + O_2(g)$$

۱) ۶۸ ۲) ۸۴ ۳) ۱۳۲ ۴) ۱۶۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با اطلاعات داده‌شده در مورد A و O_2، جرم مولی A را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{A}} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{O_2}} \Rightarrow \frac{5}{2 \times M_A} = \frac{\frac{560}{22400}}{1 \times \frac{22400}{40}} \Rightarrow M_A = 100\ g.mol^{-1}$$

گام دوم: با توجه به قانون پایستگی جرم، جرم مولی B را حساب می‌کنیم.

$$2A \rightarrow 2B + O_2$$

$$\text{جرم } A = \text{جرم } B + \text{جرم } O_2 \xrightarrow{\text{جرم} = \text{جرم مولی} \times \text{مول}} 2 \times 100 = 2 \times M_B + (1 \times 32)$$

$$\Rightarrow 2M_B = 200 - 32 = 168$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{168}{2} = 84\ g.mol^{-1}$$

یه‌جور دیگه

ابتدا تعداد مول و جرم اکسیژن تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$\text{مول } O_2: 560\ mL \times \frac{1\ mol}{22400\ mL} = \frac{1}{40}\ mol$$

$$\text{جرم } O_2: \frac{1}{40}\ mol \times \frac{32\ g}{1\ mol} = 0/8\ g$$

قانون پایستگی جرم: جرم A مصرف‌شده = جرم B تولیدشده + جرم O_2 تولیدشده

$$\Rightarrow 5 = \text{جرم } B \text{ تولیدشده} + 0/8 \Rightarrow \text{جرم } B \text{ تولیدشده} = 4/2\ g$$

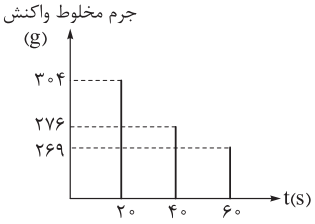
حالا به کمک مول O_2 و جرم B تولیدشده، جرم مولی B را به دست می‌آوریم:

$$2B \sim O_2$$

$$\frac{4/2}{2 \times M} = \frac{\frac{1}{40}}{1} \Rightarrow M(\text{جرم مولی B}) = 84\ g.mol^{-1}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ مخلوطی از C و SiO_2 به جرم ۳۶۰ گرم در واکنش $SiO_2(s)+3C(s)\rightarrow SiC(s)+2CO(g)$ شرکت می‌کند. اگر نمودار تغییرات جرم مخلوط واکنش برحسب زمان به صورت زیر باشد، اختلاف جرم SiC تولیدشده در ۲۰ ثانیهٔ اول با ۲۰ ثانیهٔ سوم واکنش چند گرم است؟ $(Si=28, O=16, C=12 : g.mol^{-1})$



۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۳۰

۴) ۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ کاهش جرم مخلوط واکنش به دلیل تولید گاز CO و خروج آن از ظرف واکنش است:

$$SiO_2+3C\rightarrow SiC+2CO$$

در ۲۰ ثانیهٔ اول واکنش، جرم مخلوط از ۳۶۰ g به ۳۰۴ g رسیده است:

$$\text{جرم CO تولیدشده در ۲۰ ثانیهٔ اول} = 360-304=56\ g$$

حالا به کمک جرم CO، جرم SiC تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$56\ g\ CO\times\frac{1\ mol\ CO}{28\ g\ CO}\times\frac{1\ mol\ SiC}{2\ mol\ CO}\times\frac{40\ g\ SiC}{1\ mol\ SiC}=40\ g\ SiC$$

در ۲۰ ثانیهٔ سوم واکنش (یعنی از $t=40$ تا $t=60$ ثانیه)، جرم مخلوط واکنش از ۲۷۶ g به ۲۶۹ g رسیده است:

$$\text{جرم CO تولیدشده در ۲۰ ثانیهٔ سوم} = 276-269=7\ g$$

به این ترتیب، جرم SiC تولیدشده در ۲۰ ثانیهٔ سوم برابر است با:

$$7\ g\ CO\times\frac{1\ mol\ CO}{28\ g\ CO}\times\frac{1\ mol\ SiC}{2\ mol\ CO}\times\frac{40\ g\ SiC}{1\ mol\ SiC}=5\ g\ SiC$$

اختلاف جرم SiC تولیدشده در ۲۰ ثانیهٔ اول و ۲۰ ثانیهٔ سوم واکنش برابر است با:

$$40-5=35\ g$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه دوازدهم ـ مرحله سوم ـ ۲ شهریور ۱۴۰۵

پایه یازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی‌ناو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی ـ مصطفی کرمی محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیک	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ یاسر راش ـ پارسا طاهری‌منزه ـ یاسر عبداللهی ـ آرمین عظیمی ـ سعید فراهانی ـ امیر قاسمی‌پور محمد قهرمانی‌نژاد ـ محسن مجنونی ـ محمد مرادی ـ مرتضی نصیرزاده ـ امیرحسین مسلمی ـ عرفان نریمانی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	عاطفه خان‌محمدی منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
هندسه	کیوان صارمی	کیوان صارمی	کیوان صارمی	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ماهک کناره ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصورزرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری ماهان فنی‌فر
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمدجواد سورچی مریم گلی‌حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی امیر محمودی انزابی سعید محبی احسان محمدی ادریس محمدی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمدمهدی کریمیان	سوران اشرافی عرشیا شفیعی علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان یازدهم

۶۱ دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{\sqrt{20}-x}}{x-4}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint حواست به مخرج باشه.

درس Box دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{g(x)}$ برابر است با:

$$D_f=\{x\in D_g \mid g(x)\geq 0\}$$

جبر توابع: برای اعمال جبری بین توابع، در ابتدا باید دامنهٔ تابع نهایی را به دست آوریم:

$$f\pm g:\ D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$$

$$f\times g:\ D_{f\times g}=D_f\cap D_g$$

$$\frac{f}{g}:\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: دامنهٔ تابع f اشتراک دامنه‌های سه تابع $y=\sqrt{x-1}$ ، $y=\sqrt{\sqrt{20}-x}$ و $y=\frac{1}{x-4}$ است:

$$y=\sqrt{x-1}:\ x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$$

$$y=\sqrt{\sqrt{20}-x}:\ \sqrt{20}-x\geq 0 \Rightarrow x\leq \sqrt{20}$$

$$y=\frac{1}{x-4}:\ x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$$

گام دوم: بنابراین $D_f=[1,\sqrt{20}]-\{4\}$ که شامل سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{ax^{۲}-۴x+b}$، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{a+۱\}$ است. مجموع مقادیر قابل قبول برای b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ را تابع گویا می‌نامیم. دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه دارد و این در حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

گام اول: الف) عبارت مخرج، درجه‌یک باشد، یعنی $a=۰$ باشد. در این صورت دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۱\}$ است و در نتیجه $x=۱$ تنها ریشهٔ مخرج است:

$$f(x)=\frac{x}{-۴x+b}\xrightarrow[\text{مخرج}]{x=۱}-۴(۱)+b=۰\Rightarrow b=۴$$

گام دوم: ب) عبارت مخرج، درجه‌دوم و Δ ی آن برابر صفر است، در این صورت تنها ریشهٔ مخرج $x_{۰}=\frac{۴}{۲a}=\frac{۲}{a}$ است که طبق فرض باید برابر $a+۱$ باشد:

$$\frac{۲}{a}=a+۱\Rightarrow a^{۲}+a-۲=(a+۲)(a-۱)=۰\Rightarrow a=-۲,a=۱$$

گام سوم: به ازای هر مقدار a، مقدار b را پیدا می‌کنیم:

$$a=۱:\ D_f=\mathbb{R}-\{۲\}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{(x-۲)^{۲}}\Rightarrow b=۴$$

$$a=-۲:\ D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{-۲(x+۱)^{۲}}\Rightarrow b=-۲$$

گام چهارم: یعنی مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای b برابر است با $\{-۲,۴\}$ که مجموع اعضای آن برابر ۲ است.

گول نخوری ✘ درست است که در دو حالت، مقدار قابل قبول برای b برابر ۴ به دست آمده است، اما دقت کنید که در مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای b، نباید ۴ را دو بار به حساب آورد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ اگر $x=\alpha$ جواب معادلهٔ $[2x-\frac{1}{2}]-x=\frac{5}{3}$ باشد، حاصل عبارت $[-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{2}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر　　۲) ۱−　　۳) ۲−　　۴) ۳−

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

به بخش اعشاری x دقت کن.

درس Box

جزء صحیح: جزء صحیح عدد x، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که مساوی با x یا کوچک‌تر از آن است. به بیان ساده‌تر، اگر $n\in\mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$n\le x<n+1 \Leftrightarrow [x]=n$$

برخی ویژگی‌های جزء صحیح:

$$\begin{cases}[n]=n\\ [x+n]=[x]+n\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[2x-\frac{1}{2}]=x+\frac{5}{3}$$

سمت چپ تساوی بالا، عددی صحیح است، پس سمت راست نیز باید عددی صحیح باشد و این هنگامی امکان‌پذیر است که x عددی گویا به فرم $k+\frac{1}{3}$ باشد که در آن $k\in\mathbb{Z}$ است.

گام دوم: حالا با جای‌گذاری $x=k+\frac{1}{3}$، مقدار k را پیدا می‌کنیم:

$$[2(k+\frac{1}{3})-\frac{1}{2}]=k+\frac{1}{3}+\frac{5}{3} \Rightarrow [2k+\frac{1}{6}]=k+2$$

$2k$ عددی صحیح است، پس می‌توانیم آن را از براکت خارج کنیم:

$$\Rightarrow 2k+[\underbrace{\frac{1}{6}}_{\circ}]=k+2 \Rightarrow k=2$$

گام سوم: این یعنی $\alpha=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ جواب معادله است. حالا خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$[-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{2}]=[-\frac{2}{\frac{7}{3}}-\frac{1}{2}]=[-\frac{6}{7}-\frac{1}{2}]=[-\frac{19}{14}] \xrightarrow{-2<-\frac{19}{14}<-1} [-\frac{19}{14}]=-2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ به ازای چند مقدار صحیح k، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1-x & ; \quad x<4\\ k|x-k^2|+k & ; \quad x\geq 4\end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

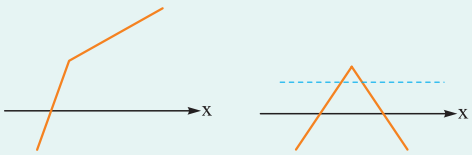
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

تابع f یک‌به‌یک است، هرگاه از تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه بگیریم که $x_1=x_2$ است؛ به بیان ساده‌تر xهای متفاوت، y های یکسان نداشته باشند.

به لحاظ نموداری، نمودار تابع یک‌به‌یک باید به گونه‌ای باشد که هر خط افقی دلخواه، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند:



یک‌به‌یک است. یک‌به‌یک نیست.

نکته

- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=a|x-b|+c$ با دامنهٔ $[x_0,+\infty)$ هنگامی یک‌به‌یک است که $b\leq x_0$ باشد.
- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}g_1(x) & ; \quad x\in D_1\\ g_2(x) & ; \quad x\in D_2\\ \vdots & \\ g_n(x) & ; \quad x\in D_n\end{cases}$ زمانی یک‌به‌یک است که:

۱) هر کدام از توابع g_i در دامنهٔ D_i یک‌به‌یک باشند.

۲) R_i (برد تابع g_i با دامنهٔ D_i)ها هیچ اشتراکی نداشته باشند: $R_i\cap R_j=\varnothing$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع $y=1-x$ روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است، حالا طبق نکته، تابع $y=k|x-k^2|+k$ نیز باید در دامنهٔ $[4,+\infty)$ یک‌به‌یک باشد، بنابراین k^2 نباید از ۴ بزرگ‌تر باشد:

$$k^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq k\leq 2$$

گام دوم: برد تابع $y=1-x$ با دامنهٔ $(-\infty,4)$ را به دست می‌آوریم:

$$x<4 \Rightarrow -x>-4 \Rightarrow 1-x>-3 \Rightarrow y\in(-3,+\infty)$$

حالا برای این‌که تابع f روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک باشد، لازم است که برد تابع $y=k|x-k^2|+k$ با دامنهٔ $[4,+\infty)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(-\infty,-3]$ باشد.

گام سوم: با توجه به شرط $k^2\leq 4$، ضابطهٔ تابع f به صورت زیر خواهد شد:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & ; \quad x<4\\ kx-k^3+k & ; \quad x\geq 4\end{cases}$$

برای این‌که برد تابع خطی $y=kx-k^3+k$ با دامنهٔ $[4,+\infty)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(-\infty,-3]$ باشد، لازم است که اولاً k منفی باشد و ثانیاً مقدار تابع به ازای $x=4$، یعنی $4k-k^3+k$ بیشتر از -3 نباشد.

$$5k-k^3\leq -3 \Rightarrow k^3-5k-3\geq 0 \qquad (*)$$

گام چهارم: اعداد صحیح و منفی بازهٔ $[-2,2]$ که در گام اول برای k به دست آوردیم، عبارت‌اند از -2 و -1. هر دو را امتحان می‌کنیم:

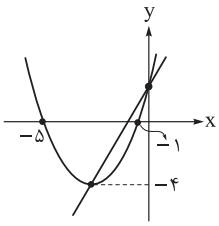
$k=-1: \xrightarrow{(*)} (-1)^3-5(-1)-3\geq 0$ ✓

$k=-2: \xrightarrow{(*)} (-2)^3-5(-2)-3\geq 0$ ×

بنابراین فقط یک مقدار صحیح برای k قابل قبول است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ نمودارهای تابع درجه‌دوم f و تابع خطی g در شکل زیر رسم شده‌اند. مقدار $g^{-1}(۷)$ کدام است؟



۱) ۴

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۱

۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

تابع خطی f با ضابطهٔ $f(x)=mx+h$ با شرط $m\neq ۰$ وارون‌پذیر است و داریم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{x-h}{m}$$

$f^{-۱}(\alpha)$ همان جواب معادلهٔ $f(x)=\alpha$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم. از آن‌جا که ۵− و ۱− صفرهای این تابع هستند، ضابطهٔ آن را می‌توانیم به صورت $f(x)=a(x+۵)(x+۱)$ بنویسیم.

طول رأس سهمی برابر $\frac{-۵-۱}{۲}=-۳$ و عرض آن مطابق شکل برابر ۴− است:

$$\xrightarrow{f(-۳)=-۴} -۴=a(۲)(-۲) \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+۵)(x+۱)=(x+۳)^{۲}-۴$$

گام دوم: نقاط مشترک نمودارهای دو تابع $(-۳,-۴)$ و $(۰,۵)$ هستند، حالا به کمک این نقاط، ضابطهٔ تابع g را می‌یابیم:

$$g(x)=mx+h:\begin{cases}m=\frac{۵-(-۴)}{۰-(-۳)}=۳\\ g(۰)=h=۵\end{cases}\Rightarrow g(x)=۳x+۵$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$g^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۳} \Rightarrow g^{-۱}(۷)=\frac{۲}{۳}$$

یه‌جور دیگه

$$\xrightarrow{g^{-۱}(۷)=\alpha} g(\alpha)=۳\alpha+۵=۷ \Rightarrow \alpha=\frac{۲}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶ اگر $f(x)=x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ باشد، تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x-\sqrt{x} \quad ; \quad x\geq\frac{1}{4}$

۲) $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}-\frac{1}{2} \quad ; \quad x\geq 0$

۳) $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x} \quad ; \quad x\geq 0$

۴) $f^{-1}(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{2} \quad ; \quad x\geq\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ضابطهٔ تابع f رو به فرم مربع کامل بنویس.

درس Box

به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون تابع f:

۱) در تساوی $y=f(x)$، x را بر حسب y به دست می‌آوریم.

۲) جای x و y را عوض می‌کنیم تا ضابطهٔ تابع f^{-1} به دست آید.

۳) برد تابع f را به عنوان دامنهٔ تابع f^{-1} به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به فرم مربع کامل بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x-\frac{1}{4}+\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=(\sqrt{x-\frac{1}{4}})^2+2(\frac{1}{2})\sqrt{x-\frac{1}{4}}+(\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow f(x)=(\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2})^2$$

دامنهٔ این تابع، بازهٔ $[\frac{1}{4},+\infty)$ است و با توجه به این‌که $\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ همواره نامنفی است، برد آن نیز بازهٔ $[\frac{1}{4},+\infty)$ است:

$$D_f=R_f=[\frac{1}{4},+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=[\frac{1}{4},+\infty)$$

گام دوم: حالا ضابطهٔ تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=f(x)=(\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{y}$$

سمت چپ تساوی همواره مثبت است، پس سمت راست هم باید مثبت باشد:

$$\Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{4}}=\sqrt{y}-\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-\frac{1}{4}=y-\sqrt{y}+\frac{1}{4} \Rightarrow x=y-\sqrt{y}+\frac{1}{2}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f^{-1} به صورت $f^{-1}(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{2}$ و دامنهٔ آن $D_{f^{-1}}=[\frac{1}{4},+\infty)$ است.

تیزبازی

عددگذاری می‌کنیم: $f(\frac{5}{4})=\frac{9}{4}$ است، پس باید $f^{-1}(\frac{9}{4})=\frac{5}{4}$ باشد. فقط در تابع گزینهٔ (۴) است که $f^{-1}(\frac{9}{4})$ برابر $\frac{5}{4}$ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۱}{x}$ مفروض است. اگر $f-g=\{(۲,۰),(-۱,۱),(\frac{۱}{۲},۳)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دامنهٔ تابع f، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ و اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g، مجموعهٔ $\{۲,\frac{۱}{۲},-۱\}$ است. حالا به کمک تابع $f-g$، تابع g را می‌یابیم:

$$\begin{cases}(f-g)(-۱)=f(-۱)-g(-۱)=۰-g(-۱)=۱ \Rightarrow g(-۱)=-۱\\(f-g)(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲})-g(\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۲}-g(\frac{۱}{۲})=۳ \Rightarrow g(\frac{۱}{۲})=-\frac{۹}{۲}\\(f-g)(۲)=f(۲)-g(۲)=\frac{۳}{۲}-g(۲)=۰ \Rightarrow g(۲)=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g=\{(-۱,-۱),(\frac{۱}{۲},-\frac{۹}{۲}),(۲,\frac{۳}{۲})\}$$

دقت کنید که تابع g می‌تواند زوج مرتبی با مؤلفهٔ اول صفر هم داشته باشد، اما چون $x=۰$ عضو دامنهٔ تابع f نیست، قطعاً در دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ هم نخواهد بود.

گام دوم: حالا دامنه و تابع $\frac{g}{f}$ را پیدا می‌کنیم:

$$D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f-\{x\mid f(x)=۰\}=\{-۱,\frac{۱}{۲},۲\}-\{\pm ۱\}=\{\frac{۱}{۲},۲\}$$

$$\begin{cases}(\frac{g}{f})(\frac{۱}{۲})=\frac{g(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})}=\frac{-\frac{۹}{۲}}{-\frac{۳}{۲}}=۳\\(\frac{g}{f})(۲)=\frac{g(۲)}{f(۲)}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=۱\end{cases} \Rightarrow \frac{g}{f}=\{(\frac{۱}{۲},۳),(۲,۱)\}$$

دقت کنید که مقدار تابع f به ازای $x=\pm ۱$ صفر می‌شود:

$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x} \Rightarrow f(\pm ۱)=۰$$

در نتیجه $\{۱,۳\}$ برد تابع $\frac{g}{f}$ است که مجموع اعضای آن برابر می‌شود با ۴.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^{۲}-\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x-\sqrt{x-۱}$ مفروض‌اند. برد تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$

۲) $(-\infty,۰]$

۳) $[-\frac{۱}{۴},+\infty)$

۴) $(-\infty,-\frac{۱}{۴}]$

پاسخ: گزینهٔ ۱

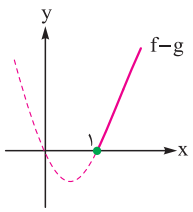
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دامنهٔ هر دو تابع، بازهٔ $[۱,+\infty)$ است، پس دامنهٔ تابع $f-g$ نیز بازهٔ $[۱,+\infty)$ است. حالا ضابطهٔ تابع $f-g$ را پیدا می‌کنیم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^{۲}-x$$

گام دوم: بازهٔ $[۱,+\infty)$ شامل طول رأس سهمی نیست و از آن‌جا که دهانهٔ سهمی رو به بالا است، برد تابع بازهٔ $[y(۱),+\infty)$ است:

$$(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۱-۱=۰ \Rightarrow R_{f-g}=[۰,+\infty)$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{mx-1}{2x-1}$ مفروض است. اگر $(fof)(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$ باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرایط $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ هموگرافیک است، ضابطهٔ وارون این تابع $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس اگر $a+d=0$ باشد، $f(x)=f^{-1}(x)$ است.
- اگر تابع f وارون‌پذیر باشد، داریم:

$(fof^{-1})(x)=x \quad ; \quad x\in R_f$

$(f^{-1}of)(x)=x \quad ; \quad x\in D_f$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقدار $f(\frac{1}{3})$ را به دست می‌آوریم و مجدداً در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{1}{3})=\frac{\frac{m}{3}-1}{\frac{2}{3}-1}=3-m$$

$$\Rightarrow (fof)(\frac{1}{3})=f(3-m)=\frac{m(3-m)-1}{2(3-m)-1}=\frac{m^2-3m+1}{2m-5}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3m^2-9m+3=2m-5 \Rightarrow 3m^2-11m+8=0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها صفر است}} m=1 \text{ یا } m=\frac{8}{3}$$

دقت کنید که اگر $m=1$ باشد، تابع f با وارونش مساوی است و در این صورت تابع fof همانی می‌شود.

گام دوم: پس مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای m برابر $\{1,\frac{8}{3}\}$ است که مجموع اعضای آن برابر $\frac{11}{3}$ است.

تیزبازی کافی است مجموع جواب‌های معادلهٔ $3m^2-11m+8=0$ را حساب کنیم که برابر $\frac{11}{3}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x}$ مفروض‌اند. برد تابع $g^{-۱}of$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[-۱,۳]$ ۴) $[-۳,۱]$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

دامنهٔ تابع مرکب fog:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

برای محاسبهٔ R_{fog} نیز، ابتدا با دامنهٔ D_{fog} برد تابع g را پیدا می‌کنیم، سپس با دامنهٔ R_g برد تابع f را حساب می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دامنهٔ تابع f بازهٔ $(-۱,+\infty]$ است و برای تابع g نیز داریم:

$$D_g=(-\infty,۱] \Rightarrow R_g=[۰,+\infty)$$

بنابراین تابع $g^{-۱}$ برابر است با:

$$g^{-۱}(x)=۱-x^۲ \quad ; \quad x\geq ۰$$

گام دوم: حالا دامنهٔ تابع $g^{-۱}of$ را پیدا می‌کنیم:

$$D_{g^{-۱}of}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_{g^{-۱}}\}=\{x\geq -۱ \mid ۲-\sqrt{x+۱}\geq ۰\}$$

$$=\{x\geq -۱ \mid \sqrt{x+۱}\leq ۲\}=\{x\geq -۱ \mid x\leq ۳\}$$

$$\Rightarrow D_{g^{-۱}of}=[-۱,۳]$$

گام سوم: در این مرحله، باید برد تابع f را با دامنهٔ $[-۱,۳]$ حساب کنیم:

$$-۱\leq x\leq ۳ \Rightarrow ۰\leq x+۱\leq ۴ \Rightarrow ۰\leq \sqrt{x+۱}\leq ۲$$

$$\Rightarrow ۰\leq ۲-\sqrt{x+۱}\leq ۲ \Rightarrow R_f=[۰,۲]$$

گام چهارم: حالا اگر برد تابع $g^{-۱}$ را با دامنهٔ $[۰,۲]$ حساب کنیم، برد تابع $g^{-۱}of$ به دست می‌آید:

$$۰\leq x\leq ۲ \Rightarrow ۰\leq x^۲\leq ۴ \Rightarrow -۳\leq ۱-x^۲\leq ۱$$

$$\Rightarrow R_{g^{-۱}of}=[-۳,۱]$$

یه‌جور دیگه

بعد از این‌که $D_{g^{-۱}of}$ را به دست آوردیم، می‌توانستیم ضابطهٔ تابع را به دست آوریم:

$$(g^{-۱}of)(x)=۱-(f(x))^۲=۱-(۲-\sqrt{x+۱})^۲$$

$$-۱\leq x\leq ۳ \Rightarrow ۰\leq ۲-\sqrt{x+۱}\leq ۲ \Rightarrow ۰\leq (۲-\sqrt{x+۱})^۲\leq ۴$$

$$\Rightarrow -۳\leq (g^{-۱}of)(x)\leq ۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{1-k}{2k-8})^x$ نمایی است. اگر k عددی صحیح باشد، مقدار $f(-k)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ نمایی است، اگر a مثبت و مخالف ۱ باشد:

$a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا عبارت داخل پرانتز را مثبت و مخالف یک قرار می‌دهیم تا تابع، نمایی باشد:

$$\begin{cases}\frac{1-k}{2k-8}>0 \Rightarrow \frac{k-1}{k-4}<0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 1<k<4\\ \frac{1-k}{2k-8}\neq 1 \Rightarrow 2k-8\neq 1-k \Rightarrow k\neq 3\end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر قابل قبول برای k، مجموعهٔ $(1,3)\cup(3,4)$ است.

گام دوم: اما طبق فرض، k عددی صحیح است و تنها عدد صحیح عضو مجموعهٔ بالا $k=2$ است. در این شرایط داریم:

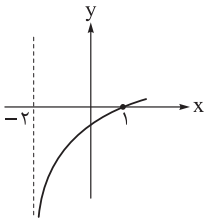
$$f(x)=(\frac{1-2}{4-8})^x \Rightarrow f(x)=(\frac{1}{4})^x$$

و خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$f(-k)=f(-2)=(\frac{1}{4})^{-2}=16$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۳}(x+a)+b$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a^{۲}-۳b$ کدام است؟



۱) ۷

۲) ۶

۳) ۲

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\log_a$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ >۰ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: براساس درس‌باکس و از روی ضابطه، دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$x+a>۰ \Rightarrow x>-a \Rightarrow D_f=(-a,+\infty)$$

در حالی که مطابق نمودار، دامنهٔ تابع بازهٔ $(-۲,+\infty)$ است، پس داریم:

$$-a=-۲ \Rightarrow a=۲$$

گام دوم: هم‌چنین نمودار تابع از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد:

$$\xrightarrow{a=۲} f(۱)=\log_{۳}(۱+۲)+b=۰ \Rightarrow b=-۱$$

گام سوم: در نهایت، خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$a^{۲}-۳b=۴+۳=۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ انرژی آزادشدهٔ زلزلهٔ دوم، ۸۰ برابر انرژی آزادشدهٔ زلزلهٔ اول است. اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ باشد، زلزلهٔ دوم تقریباً چند ریشتر از زلزلهٔ اول بزرگ‌تر است؟ $(\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M)$

۱) $\frac{۲۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۹}{۱۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر E انرژی آزادشدهٔ یک زلزله برحسب اِرگ (Erg) و M بزرگی زلزله برحسب ریشتر باشد، داریم:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

هر ارگ، $۱۰^{-۷}$ ژول است.

نکته

اگر $E_۱$ و $E_۲$ انرژی‌های آزادشدهٔ دو زلزله با بزرگی‌های $M_۱$ و $M_۲$ ریشتر باشند، داریم:

$$\log \frac{E_۲}{E_۱} = ۱/۵(M_۲ - M_۱)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اگر بزرگی زلزله یک واحد افزایش یابد، میزان انرژی آزادشدهٔ آن $\sqrt{۱۰۰۰}$ (تقریباً ۳۱/۶) برابر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق رابطهٔ نکته داریم:

$$\xrightarrow{\frac{E_۲}{E_۱}=۸۰} \log ۸۰ = ۱/۵(M_۲ - M_۱)$$

$$\Rightarrow \log(۲^۴ \times ۵) = \frac{۳}{۲}(M_۲ - M_۱)$$

$$\Rightarrow ۴\log ۲ + \log ۵ = \frac{۳}{۲}(M_۲ - M_۱)$$

$$\xrightarrow{\log ۵ = ۱ - \log ۲} ۱ + ۳\log ۲ = \frac{۳}{۲}(M_۲ - M_۱)$$

$$\Rightarrow M_۲ - M_۱ = \frac{۲(۱ + ۳\log ۲)}{۳}$$

گام دوم: حالا مقدار تقریبی ۰/۳ را برای $\log ۲$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$M_۲ - M_۱ \simeq \frac{۲(۱ + ۰/۹)}{۳} = \frac{۳۸}{۳۰} = \frac{۱۹}{۱۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ اگر $\log_{۸} ۹ = a$ و $\log_{۲} b = ۱ + \frac{۳}{۲}a$ باشد، حاصل $\log_{۲۷}(۲b^{۲} + ۹)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ویژگی‌های لگاریتم:

۱) $\log_c x + \log_c y = \log_c xy$

۲) $\log_c x - \log_c y = \log_c \frac{x}{y}$

۳) $\log_{c^m} x^n = \frac{n}{m}\log_c x$

۴) $\log_c x = \frac{۱}{\log_x c}$

۵) $\log_y x = \frac{\log_c x}{\log_c y}$

۶) $x^{\log_c y} = y^{\log_c x}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا a را ساده‌تر می‌کنیم:

$$a = \log_{۳^۲} ۳^{۲} = \frac{۲}{۳}\log_{۲} ۳$$

گام دوم: حالا مقدار b را پیدا می‌کنیم:

$$\log_{۲} b = ۱ + \frac{۳}{۲}(\frac{۲}{۳}\log_{۲} ۳) = ۱ + \log_{۲} ۳ = \log_{۲} ۶ \Rightarrow b = ۶$$

گام سوم: حالا خواسته سؤال را به دست می‌آوریم.

$$\log_{۲۷}(۲b^{۲} + ۹) = \log_{۲۷} ۸۱ = \log_{۳^۳} ۳^{۴} = \frac{۴}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ اختلاف جواب‌های معادلهٔ $x^{\log_{\sqrt{3}} x^2} = \sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از طرفین لگاریتم بگیر.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ زیر را داریم:

$$x^{2\log_{\sqrt{3}} x} = \sqrt{3}$$

حالا از طرفین تساوی در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$2\log_{\sqrt{3}} x \times \log_{\sqrt{3}} x = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\log_{\sqrt{3}} x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} x = \pm\frac{1}{2}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم جواب معادله را به دست آوریم:

$$\begin{cases} x_1 = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه یازدهم

۷۶ چه تعداد از تبدیل‌های زیر، جهت شکل را تغییر می‌دهند؟

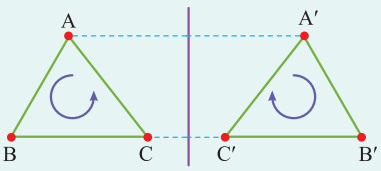
- دوران
- بازتاب
- انتقال
- تجانس

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

از بین تبدیل‌های گفته‌شده فقط بازتاب است که جهت شکل را تغییر می‌دهد. برای درک بهتر به مثلث ABC و بازتاب آن نسبت به خط d در شکل زیر نگاه کنید. در شکل اولیه وقتی از A به B و بعد به C می‌رویم، جهت حرکت، **مخالف** جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، در حالی که در شکل سمت راست (مثلث $A'B'C'$) وقتی از A' به B' و بعد به C' می‌رویم، جهت حرکت **موافق** جهت حرکت عقربه‌های ساعت است؛ این یعنی **بازتاب، جهت شکل را تغییر می‌دهد.**

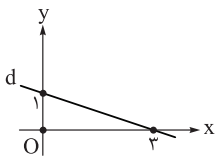


به همین صورت می‌توانیم بفهمیم که انتقال، دوران و تجانس جهت شکل را تغییر نمی‌دهند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق «درس‌باکس» فقط بازتاب است که جهت شکل را تغییر می‌دهد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ در شکل زیر اگر خط d را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۹}{۴}$ تصویر کنیم و آن را d' بنامیم، مساحت بین خط d و d' و محورهای مختصات کدام است؟



۱) $\frac{۱۴۱}{۳۲}$

۲) $\frac{۳۵}{۸}$

۳) $\frac{۷۱}{۱۶}$

۴) $\frac{۱۹۵}{۳۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

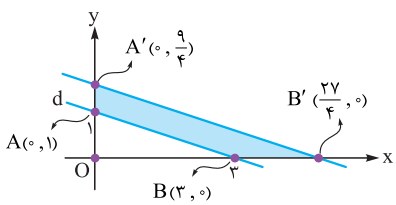
تجانس: به طور خلاصه، در این تبدیل ابعاد شکل با نسبت $k \neq ۰$ بزرگ یا کوچک می‌شود. به k **نسبت تجانس** (مقیاس) می‌گوییم.

مجانس نقطهٔ A در تجانس به مرکز O *(که نقطهٔ ثابتی هستش)* و نسبت تجانس $k \neq ۰$ را به شکل زیر پیدا می‌کنیم:

علامت k	روش پیداکردن مجانس	مثال
مثبت	اول از O به A وصل می‌کنیم و بعد پاره‌خط OA را **از سمت** A امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم به طوری که $OA' = k \times OA$ باشد.	O A′ A O A A′ در این حالت A و A' در یک طرف O قرار دارند. (تجانس مستقیم)
منفی	اول از O به A وصل می‌کنیم و بعد پاره‌خط OA را **از سمت** O امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم به طوری که $OA' = \lvert k \rvert \times OA$ باشد.	A′ O A A′ O A در این حالت A و A' در دو طرف O قرار دارند. (تجانس معکوس)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاط A و B در تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{۹}{۴}$ به ترتیب به نقاط $A'(۰, ۱\times\frac{۹}{۴}) = (۰, \frac{۹}{۴})$ و $B'(۳\times\frac{۹}{۴}, ۰) = (\frac{۲۷}{۴}, ۰)$ تبدیل می‌شوند.



گام دوم: مساحت ناحیهٔ رنگی را می‌خواهیم که می‌شود:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{OA'B'} - S_{OAB} = (\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۴}\times\frac{۲۷}{۴}) - (\frac{۱}{۲}\times۱\times۳) = \frac{۲۴۳}{۳۲} - \frac{۴۸}{۳۲} = \frac{۱۹۵}{۳۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

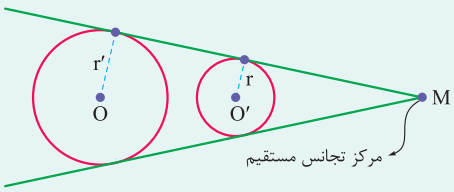
۷۸ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ مماس‌خارج هستند. فاصلهٔ مرکز تجانس مستقیم دو دایره از مرکز تجانس معکوس آن‌ها کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

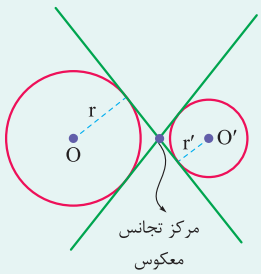
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تجانس در دایره‌ها: هر دو دایرهٔ دلخواه مجانس یکدیگرند. قدرمطلق نسبت تجانس دو دایره برابر نسبت شعاع آن‌ها است. اگر دایره‌ها متخارج باشند، مرکز تجانس مستقیم دو دایره محل برخورد مماس‌های مشترک خارجی (شکل ۱) و مرکز تجانس معکوس آن‌ها، محل برخورد مماس‌های مشترک داخلی است. (شکل ۲).



شکل (۱)

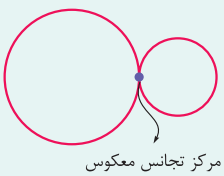


شکل (۲)

$$k = -\frac{r}{r'} \text{ یا } \frac{r'}{r} \qquad k = -\frac{r}{r'} \text{ یا } -\frac{r'}{r}$$

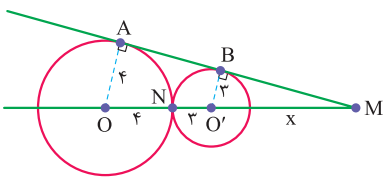
حواستان باشد که در تجانس به مرکز M و نسبت $\frac{r}{r'}$ یا $-\frac{r}{r'}$، دایرهٔ $C'(O',r')$ روی دایرهٔ $C(O,r)$ و در تجانس به مرکز M و نسبت $\frac{r'}{r}$ یا $-\frac{r'}{r}$، دایرهٔ $C(O,r)$ روی دایرهٔ $C'(O',r')$ تصویر می‌شود.

حواستون باشه: نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مماس‌خارج، مرکز تجانس معکوس آن‌ها است؛ ببینید:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



گفتیم که نقطهٔ تماس دو دایره، مرکز تجانس معکوس و نقطهٔ برخورد مماس‌های مشترک خارجی، مرکز تجانس مستقیم دو دایره است.

گام دوم: برای به دست آوردن خواستهٔ مسئله، یعنی طول MN، اول به کمک قضیهٔ تالس در مثلث MOA طول $MO' = x$ را پیدا می‌کنیم و بعد مقدارش را با شعاع NO' جمع می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{OAM} : O'B \parallel OA \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MO'}{MO} = \frac{O'B}{OA}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۷} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x}{۷} = \frac{۳}{۱}$$

$$\Rightarrow x = ۲۱ \xrightarrow{MN=MO'+O'N} MN = ۲۱+۳ = ۲۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

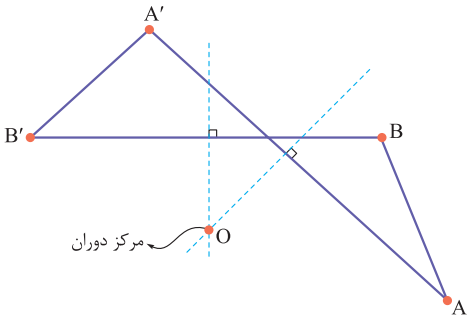
۷۹ اگر نقاط $A'(۲,۴)$ و $B'(۷,۱۱)$ به ترتیب دوران‌یافتهٔ نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۸,۳)$ باشند، مجموع طول و عرض مرکز دوران کدام است؟

۱) ۵/۲ ۲) ۵/۴
۳) ۵/۶ ۴) ۵/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

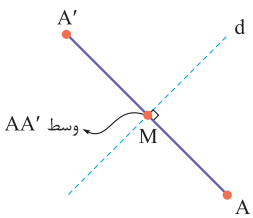
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قبل از هر چیز باید ببینیم پاره‌خط‌های AB و $A'B'$ موازی‌اند یا نه. شیب خط AB می‌شود $m_{AB}=\frac{۳-۲}{۸-۱}=\frac{۱}{۷}$ در صورتی که شیب خط $A'B'$ می‌شود $m_{A'B'}=\frac{۱۱-۴}{۷-۲}=\frac{۷}{۵}$؛ پس دو خط موازی نیستند. مرکز دوران کجا است؟ بله در حالتی که خط و دوران‌یافته‌اش موازی نیستند، مرکز دوران روی عمودمنصف خطی قرار دارد که نقطه و تصویرش را به هم وصل می‌کند. همان‌طور که در شکل فرضی زیر (شکلی که دقیق نیست.) می‌بینید، A' تصویر A و B' تصویر B است؛ پس مرکز دوران، نقطهٔ برخورد عمودمنصف پاره‌خط‌های AA' و BB' است (به نقطهٔ O در شکل توجه کنید). برای پیداکردن مختصات O، اول معادلهٔ عمودمنصف‌ها را می‌نویسیم و بعد محل برخوردشان را به دست می‌آوریم:



گام دوم:

- معادلهٔ عمودمنصف AA' (خط d در شکل زیر):

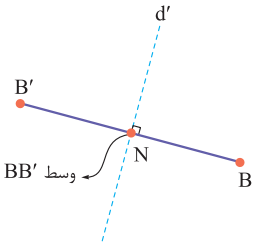


$$\begin{cases} M=\frac{A+A'}{۲}=\frac{(۱,۲)+(۲,۴)}{۲} \Rightarrow M(۱/۵,۳) \\ m_{AA'}=\frac{۴-۲}{۲-۱}=\frac{۲}{۱} \Rightarrow m_d=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

قرینه معکوس

$$\Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۱/۵) \Rightarrow d: ۲y+x=۷/۵$$

- معادلهٔ عمودمنصف BB' (خط d' در شکل زیر):



$$\begin{cases} N=\frac{B+B'}{۲}=\frac{(۸,۳)+(۷,۱۱)}{۲}=(۷/۵,۷) \\ m_{BB'}=\frac{۱۱-۳}{۷-۸}=-۸ \Rightarrow m_{d'}=\frac{۱}{۸} \end{cases}$$

$$y-۷=\frac{۱}{۸}(x-۷/۵) \Rightarrow d': ۸y-x=۴۸/۵$$

- نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌ها:

$$\begin{cases} ۲y+x=۷/۵ \\ ۸y-x=۴۸/۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۱۰y=۵۶ \Rightarrow y=۵/۶$$

بنابراین عرض مرکز دوران می‌شود: ۵/۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

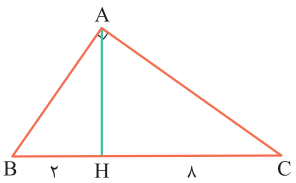
۸۰ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A = 90^\circ)$، ارتفاع AH روی ضلع BC، قطعاتی به طول‌های ۲ و ۸ ایجاد می‌کند. اگر این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AH}$ انتقال دهیم، بیشترین فاصلهٔ رأس‌های مثلث اولیه و جدید کدام است؟

۱) $6\sqrt{3}$
۲) $8\sqrt{2}$
۳) $5\sqrt{3}$
۴) $7\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

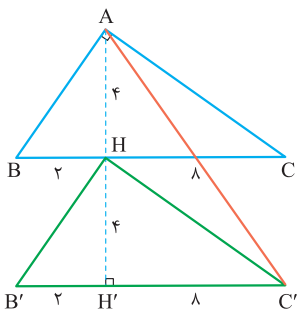
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به همراه ارتفاعش رسم می‌کنیم. به گفتهٔ سؤال ارتفاع AH روی وتر BC دو قطعه به طول‌های ۲ و ۸ ایجاد می‌کند، پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، طول AH می‌شود.



$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

گام دوم: برای انتقال مثلث ABC با بردار $\overrightarrow{AH}$، سه رأسش را مطابق شکل با $\overrightarrow{AH}$ انتقال می‌دهیم تا به مثلث سبزرنگ برسیم. با توجه به این‌که انتقال طول‌پاست، طول پاره‌خط‌ها تغییر نمی‌کند، در نتیجه قطعات به طول ۲ و ۸ روی مثلث سبز هم ایجاد می‌شوند.



گام سوم: بیشترین فاصلهٔ رأس‌های مثلث اولیه و جدید، همان AC' است که طبق فیثاغورس در مثلث $AH'C'$ می‌شود:

$$AC' = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

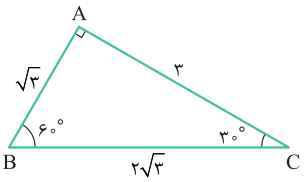
۸۱ در مثلث ABC که میانه‌های آن در نقطهٔ G همرس هستند، داریم $AB = \sqrt{۳}$ ، $AC = ۳$ و $BC = ۲\sqrt{۳}$. بازتاب G را نسبت به ضلع AC، G' می‌نامیم. اگر نقطهٔ M وسط ضلع BC باشد، نسبت $\frac{GG'}{GM}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بین $\sqrt{۳}$، ۳ و $۲\sqrt{۳}$ رابطهٔ فیثاغورس برقرار است؛ ببینید:



$$\underbrace{۳^۲}_{AB} + \underbrace{(\sqrt{۳})^۲}_{AC} = \underbrace{(۲\sqrt{۳})^۲}_{BC} \Rightarrow ۳+۹=۱۲ \checkmark$$

پس مثلث قائم‌الزاویه است و $A = ۹۰^\circ$. خوب که به مثلث بالا نگاه کنید، ضلع رو به زاویهٔ C، نصف وتر است:

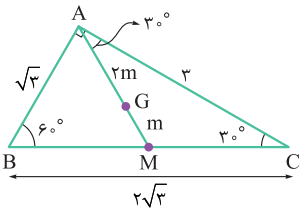
$$\underbrace{AB}_{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}\underbrace{BC}_{۲\sqrt{۳}}$$

پس زاویهٔ C باید ۳۰° و در نتیجه $\hat{B}$ باید ۶۰° باشد.

گام دوم: مطابق شکل یکی از میانه‌های مثلث ABC، مثل AM را می‌کشیم. مرکز ثقل $\underbrace{\text{مرکز ثقل}}_{\text{نقطهٔ G}}$ روی این میانه قرار دارد و آن را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند؛ به همین خاطر طول قطعات روی AM را m و ۲m در نظر می‌گیریم.

از طرفی، میانهٔ وارد بر وتر، دوتا مثلث متساوی‌الساقین درست می‌کند؛ یعنی در شکل زیر AMC و AMB متساوی‌الساقین‌اند.

از متساوی‌الساقین‌بودن AMC نتیجه می‌گیریم که:

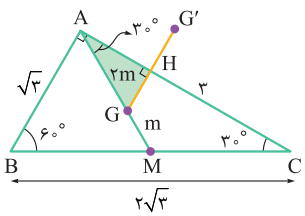


$$M\hat{A}C = A\hat{C}M = ۳۰^\circ$$

گام سوم: از نقطهٔ G، عمود GH را بر AC رسم کرده، سپس به اندازهٔ GH امتداد می‌دهیم تا به G' برسیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی GH ضلع رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس طولش نصف وترِ AG می‌شود:

$$GH = \frac{۱}{۲}AG = \frac{۲m}{۲} = m$$

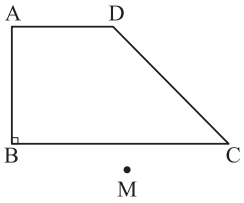
گام چهارم: $GH = HG'$ بود، پس نسبت $\frac{GG'}{GM}$ می‌شود:



$$\frac{GG'}{GM} = \frac{۲GH}{GM} = \frac{۲m}{m} = ۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD و نقطهٔ M در خارج آن، مطابق شکل مفروض‌اند. نقطهٔ M را ابتدا نسبت به BC بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ M' حاصل شود و سپس M' را نسبت به DC بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ M'' به دست آید. اگر $M\hat{C}M'' = ۹۰^\circ$، $AD = ۵$ و $BC = ۹$ باشد، طول DC کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$

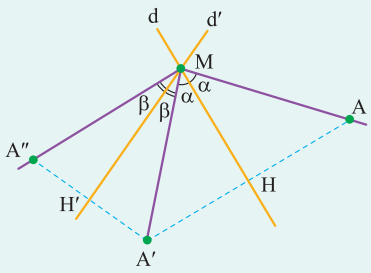
۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

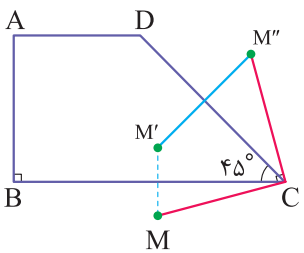
درس Box



به نقطهٔ A و خط‌های متقاطع d و d' در شکل مقابل توجه کنید. در این شکل اول A را نسبت به d و بعد A' را نسبت به d' بازتاب می‌دهیم تا به نقطهٔ A'' برسیم. با این کار، اولاً $MA = MA' = MA''$ و دوماً $A\hat{M}A'' = ۲H\hat{M}H'$ می‌شود. حالا با کمی دقت باید متوجه بشوید که نقطهٔ A را می‌توان با دوران به مرکز M و زاویهٔ $۲(\alpha+\beta)$ روی A'' تصویر کرد، بنابراین **ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران است**؛ دورانی با زاویهٔ دو برابر زاویهٔ بین دو محور، به مرکز نقطهٔ برخورد محورها.

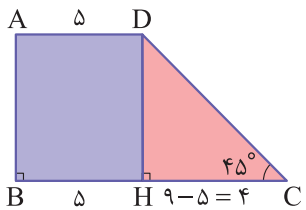
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل مسئله به صورت زیر است. طبق درس‌باکس، زاویهٔ MCM'' باید دو برابر DCB باشد، پس:



$$M\hat{C}M'' = ۲D\hat{C}B \Rightarrow ۲D\hat{C}B = ۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{C}B = ۴۵^\circ$$

گام دوم: حالا در ذوزنقهٔ زیر، ارتفاع DH را رسم می‌کنیم تا مستطیل آبی و مثلث قرمز درست بشود.



در مستطیل، ضلع‌های مقابل برابرند، پس:

$$BH = AD = ۵$$

از طرفی اگر طول BH را از BC کم کنیم به طول HC می‌رسیم:

$$HC = ۹ - ۵ = ۴$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ قرمز، یک زاویهٔ ۴۵° داریم، پس این مثلث متساوی‌الساقین هم هست:

$$DH = HC = ۴$$

پس طبق فیثاغورس در مثلث قرمز، طول DC می‌شود $۴\sqrt{۲}$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ چهار نقطهٔ $A(1,1)$ ، $B(25,4)$ ، $M(4,0)$ و $N(9,0)$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند. کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMNB چه‌قدر از $\sqrt{386}$ بیشتر است؟

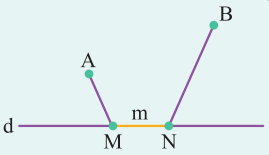
۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

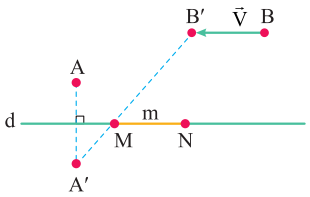
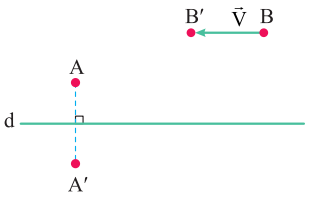
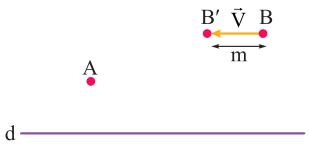
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مسئلهٔ جادهٔ ساحلی: در این مسئله نقطه‌های A و B در یک طرف خط d قرار دارند (شکل زیر).

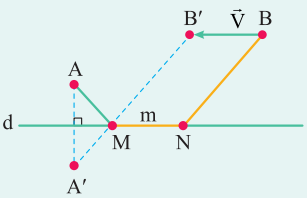


می‌خواهیم پاره‌خط MN به طول m را از خط d جدا کنیم، به طوری که مسیر AMNB کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد، پاره‌خط MN مطابق جدول زیر در سه مرحله پیدا می‌شود، ببینید:

مرحلهٔ (۳)	مرحلهٔ (۲)	مرحلهٔ (۱)
		
نقطهٔ A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ M قطع کند (تا این‌جا M پیدا شد). حالا از نقطهٔ M، m واحد روی خط d به راست می‌رویم تا N هم مشخص شود.	بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم تا به نقطهٔ A' برسیم.	نقطهٔ B را با بردار $\vec{v}$ به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم. این بردار موازی با d بوده و طولش برابر m است.

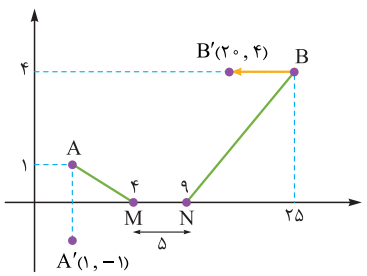
نکته

در مسئلهٔ جادهٔ ساحلی (شکل زیر) رابطهٔ $AM+m+NB=A'B'+m$ برقرار است؛ یعنی به جای محاسبهٔ « $AM+m+NB$ » می‌توانیم « $A'B'+m$ » را به دست آوریم.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاط $A(1,1)$ ، $B(25,4)$ ، $M(4,0)$ و $N(9,0)$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. می‌خواهیم طول مسیر AMNB حداقل باشد، بنابراین طبق درس‌باکس با مسئلهٔ جادهٔ ساحلی طرف هستیم.



گام دوم: بنابراین طبق درس‌باکس، اول نقطهٔ B را به اندازهٔ «$MN=5$» واحد به سمت چپ می‌بریم تا به نقطهٔ $B'(20,4)$ برسیم. A را هم نسبت به محور x ها بازتاب می‌دهیم تا به $A'(1,-1)$ برسیم.

گام سوم: حالا با محاسبهٔ «$A'B'+MN$» به کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB می‌رسیم:

$$A'B'+MN=\sqrt{5^2+19^2}+5=\sqrt{386}+5$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

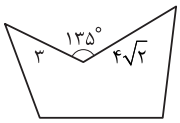
۸۴ زمینی به شکل زیر داریم و می‌خواهیم بدون آن‌که محیط این زمین و تعداد اضلاع آن تغییر کند، مساحتش را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت کدام است؟

۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۱



پاسخ: گزینهٔ ۲

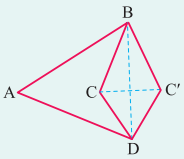
درس Box

در مسائلی به نام هم‌محیطی یا هم‌پیرامونی برای افزایش در مساحت چندضلعی بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط، به ترتیب زیر عمل می‌شود:

الف) شکل زیر را در نظر می‌گیریم که یک زاویهٔ بزرگ‌تر از ۱۸۰° دارد (زاویهٔ C).

ب) بازتاب C را نسبت به خط BD به دست می‌آوریم (C').

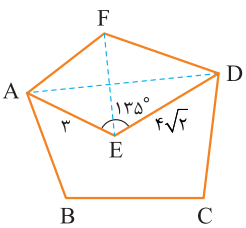
ج) چهارضلعی $ABC'D$ چهارضلعی مطلوب است که مساحتش به اندازهٔ $۲S_{BCD}$ افزایش یافته است.



$S_{BCD} = \frac{۱}{۲} \times BC \times CD \times \sin \hat{C} \Rightarrow$ میزان افزایش مساحت: $S_{BC'DC} = BC \times CD \times \sin \hat{C}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بازتاب نقطهٔ E را نسبت به خط AD تعیین می‌کنیم.



گام دوم: مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ را به دست می‌آوریم:

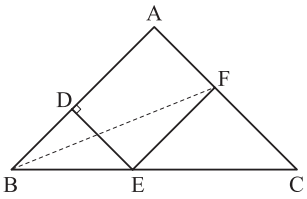
$$S_{ADE} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴\sqrt{۲} \times \sin ۱۳۵^\circ = ۶\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۶$$

گام سوم: میزان افزایش مساحت عبارت است از:

$$S = ۲S_{ADE} = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ در شکل زیر D و F دو نقطهٔ ثابت به ترتیب واقع بر AB و AC هستند و نقطهٔ E روی ضلع BC به گونه‌ای انتخاب شده است که خط شکستهٔ DEF کم‌ترین طول ممکن را دارد. اگر $DE = ۳$ ، $BD = ۲$ و $EF = ۵$ باشد، طول BF کدام است؟



۱) ۶

۲) $۲\sqrt{۱۷}$

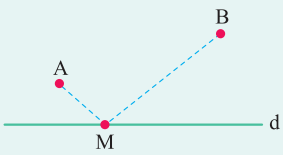
۳) $۶\sqrt{۲}$

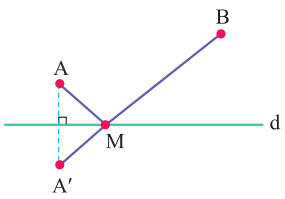
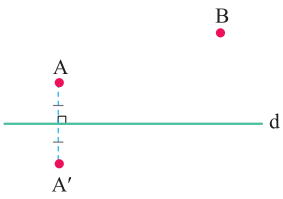
۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

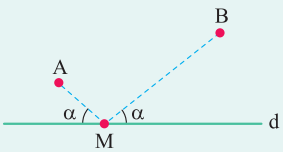
درس Box

۱) **مسئلهٔ هرون**: در این مسئله، دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d قرار دارند (شکل مقابل). می‌خواهیم نقطه‌ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم که مسیر AMB (همون $AM + MB$)، کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. نقطهٔ m مطابق جدول زیر در دو مرحله پیدا می‌شود:



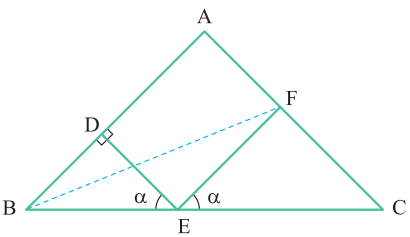
مرحلهٔ (۲)	مرحلهٔ (۱)
	
نقطهٔ A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطهٔ M قطع کند. M همان نقطه‌ای است که به دنبالش هستیم.	بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم تا به نقطهٔ A' برسیم.

۲) با توجه به مطالب بالا، اگر طول خط شکستهٔ AMB در شکل مقابل حداقل باشد، زاویه‌هایی که AM و MB با d می‌سازند باید برابر باشند.

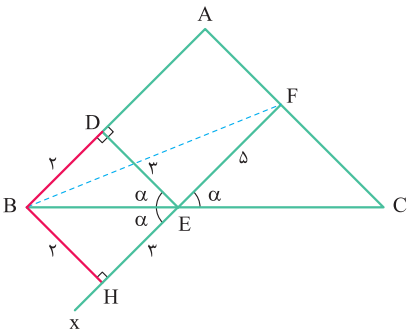


پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به گفتهٔ سؤال، طول خط شکستهٔ DEF حداقل است، پس طبق درس‌باکس، زاویه‌های DEB و FEC برابرند.



گام دوم: الان اگر EF را امتداد بدهیم، زاویهٔ BEx با زاویهٔ FEC متقابل به رأس می‌شود و در نتیجه:



$BEx = \alpha$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پس BE نیمساز زاویهٔ DEx است و فاصلهٔ B از دو سر این زاویه باید یکسان باشد:

$$BH = BD = ۲$$

از طرفی مثلث‌های BED و BEH هم‌نهشت‌اند، پس:

$$DE = EH = ۳$$

گام سوم: حالا با نوشتن فیثاغورس در مثلث BHF به طول BF می‌رسیم:

$$BF^۲ = ۲^۲ + (۳+۵)^۲ = ۲^۲ + ۸^۲ = ۲^۲(۱+۱۶) \Rightarrow BF = ۲\sqrt{۱۷}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آمار و احتمال

۸۶ در پرتاب دو تاس با هم با کدام احتمال جمع ارقام روشده، فرد و بیشتر از ۶ است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

احتمال برای مجموع دو تاس:

در پرتاب دو تاس $n(S) = ۳۶$ حالت داریم که معمولاً در جدول شطرنجی ۶×۶ نشان می‌دهیم جمع اعداد روشده از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد. برای هر کدام از این مجموع‌ها چند حالت مختلف داریم:

مجموع ارقام دو تاس (x)	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

فرمول این‌ها $x-۱$ است. فرمول این‌ها $۱۳-x$ است.

نکته

- در دو تاس احتمال این‌که مجموع ۷ باشد، از بقیه بیشتر است.
- احتمال مجموعِ x با احتمال مجموع $۱۳-x$ برابر است.
- برای هر تعداد تاس، احتمال زوج‌بودن جمع ارقام روشده، $\frac{۱}{۲}$ است (احتمال فردبودن هم $\frac{۱}{۲}$ است).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جدول را ببینید:

جمع ارقام دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

گام دوم: مجموع‌های فرد و بیشتر از ۶ یعنی ۷، ۹ و ۱۱ را می‌خواهیم که روی هم $۶+۴+۲$ حالت دارند.

گام سوم: احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ خانواده‌ای ۷ فرزند دارند. با کدام احتمال فرزند هفتم، سومین پسر است؟

۱) $\frac{۲۰}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۲۱}{۱۲۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

فرمول‌های احتمال برای چند سکه و فرزند:

در خانواده‌ای با m فرزند یا در پرتاب m سکه کلاً ۲^m حالت داریم:

$$n(S)=۲^m$$

احتمال این‌که در پرتاب m سکه (یا m بار پرتاب یک سکه) kتا رو بیاید برابر است با:

$$\frac{\binom{m}{k}}{۲^m}$$

احتمال این‌که kاُمین رو در پرتاب mاُم بیاید برابر است با:

$$\frac{\binom{m-۱}{k-۱}}{۲^m}$$

مثال در پرتاب ۱۰ سکه با احتمال $\frac{\binom{۱۰}{۴}}{۲^{۱۰}}=\frac{۲۱۰}{۱۰۲۴}$ چهار بار «رو» می‌بینیم.

مثال در خانواده‌ای احتمال این‌که فرزند ششم، سومین پسر باشد $\frac{\binom{۵}{۲}}{۲^۶}=\frac{۱۰}{۶۴}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرزند هفتم باید پسر باشد $(P(B)=\frac{۱}{۲})$.

گام دوم: در شش فرزند اول باید ۲ پسر داشته باشیم: پ پ د د د د. تعداد کل حالت‌ها $۲^۶=۶۴$ و تعداد حالت‌های مورد نظر $\binom{۶}{۲}=۱۵$ است.

گام سوم: پس $P(A)=\frac{۱۵}{۶۴}$ و چون فرزندان از هم مستقل‌اند، احتمال برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۶۴}=\frac{۱۵}{۱۲۸}$$

کتاب درسی

در یک امتحان پنج‌گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که: *(آمار و احتمال ـ تمرین ۸ صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی)*

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ اگر در فضای نمونه‌ای $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ احتمال a_i متناسب با i باشد، $P(\{a_1,a_3\})$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

احتمال در فضای غیرهم‌شانس:

وقتی احتمال اعضای مختلف S با هم برابر نیست، از فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده نمی‌شود.

باید اول مجموع احتمال همهٔ اعضا را مساوی ۱ قرار دهیم:

$$\sum P(x_i)=1$$

معمولاً احتمال همهٔ عضوها را برحسب یک متغیر می‌نویسیم و آن متغیر را به دست می‌آوریم.

نکته اگر احتمال اعضای S متناسب با $a, b, c, \dots$ باشد، آن‌ها را $at, bt, ct, \dots$ می‌گیریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از این‌که $P(a_i)$ متناسب با i است، داریم:

$$P(a_1)=k \ , \ P(a_2)=2k \ , \ P(a_3)=3k \ , \ P(a_4)=4k$$

گام دوم: جمع احتمال‌ها باید ۱ باشد:

$$\sum P(a_i)=k+2k+3k+4k=10k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{10}$$

گام سوم: احتمال پیشامد $\{a_1,a_3\}$ برابر است با:

$$P(a_1)+P(a_2)=k+3k=4k=0/4$$

کتاب درسی

در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با همان عدد است، مثلاً احتمال مشاهدهٔ عدد ۳، سه برابر احتمال مشاهدهٔ عدد ۱ است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این‌که عدد مشاهده‌شده، زوج باشد را تعیین کنید.

(آمار و احتمال ـ تمرین ۲ صفحهٔ ۴۷ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ از کیسه‌ای که در آن ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد، مهره‌ها را یکی یکی بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مهرهٔ سوم و ششم به ترتیب سیاه و سفید هستند؟

۱) $\frac{۲۰}{۸۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱۶}{۸۱}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

قاعدهٔ ضرب احتمال (قانون ندیده‌گرفتن):

اگر از نتیجهٔ آزمایش اطلاعی نداشته باشیم، انگار هیچ کاری انجام نشده و عضوی از فضای نمونه‌ای کم نمی‌شود. پس مثلاً وقتی رنگ مهرهٔ خروجی را نگاه نمی‌کنیم یا از قبلی‌ها خبری نداریم انگار هیچ کاری نکردیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون از مهره‌های دیگر خبر نداریم انگار اصلاً آن‌ها را بیرون نیاورده‌ایم، پس یک سیاه و یک سفید می‌خواهیم.

گام دوم: طبق قاعدهٔ ضرب احتمال داریم:

$$P(B_۱ \cap W_۲) = P(B_۱)P(W_۲ \mid B_۱) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۴}{۸} = \frac{۵}{۱۸}$$

کتاب درسی

جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه‌تای آن‌ها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که: *(آمار و احتمال ـ تمرین ۱۰ صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی)*

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ بر روی وجه‌های یک تاس ارقام ۱ , ۱ , ۲ , ۲ , ۲ , ۳ نوشته شده است. این تاس را دو بار می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد متوالی ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

تاس‌های ویژه:

اگر روی یک تاس به جای ۱ تا ۶ ارقام دیگری بود، آن رقم‌ها را روی مربع ۶×۶ می‌نویسیم و احتمال را حساب می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جدول حالت‌های دو پرتاب تاس را ببینید:

	۱	۱	۲	۲	۲	۳
۱						
۱						
۲						
۲						
۲						
۳						

گام دوم: اعداد متوالی یعنی {۱,۲} یا {۳,۲} که در خانهٔ آن‌ها ▢ گذاشته‌ایم.

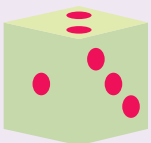
گام سوم: پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$$

کتاب درسی

یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم، *(آمار و احتمال ـ فعالیت صفحهٔ ۴۴ کتاب درسی)*

۱) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. $S=\{... , ... , ...\}$



۲) با توجه به این‌که عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال این‌که این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به دست آورید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ اگر $P(A)=\frac{۲}{۳}$، $P(B)=\frac{۱}{۲}$ و $P(A\mid B)=\frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $P(B-A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

فرمول احتمال شرطی:

احتمال A در شرایطی که پیشامد B رخ داده برابر است با:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

حالت	A و B مستقل‌اند	A و B ناسازگارند	$A\subset B$	$B\subset A$
$P(A\mid B)$	$P(A)$	۰	$\frac{P(A)}{P(B)}$	۱

در سؤال‌هایی که احتمال شرطی را می‌دهند، می‌توانیم با طرفین‌وسطین‌کردن فرمول، به $P(A\cap B)$ برسیم و در صورت نیاز $P(A\cup B)$ و $P(A-B)$ و ... را به دست آوریم.

فرمول‌های شرطی را برای مکمل A و B ببینید:

فرمول	$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}$	$P(A'\mid B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}$	$P(A'\mid B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}$
بیان فارسی	اگر B رخ ندهد با کدام احتمال A رخ می‌دهد.	اگر B رخ دهد با کدام احتمال A رخ نمی‌دهد.	اگر B رخ ندهد با کدام احتمال A رخ نمی‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

گام دوم: فرمول احتمال $B-A$ عبارت است از:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ در پرتاب ۲ سکه و ۲ تاس با کدام احتمال دو سکهٔ متفاوت و دو تاس یکسان می‌آیند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

پیشامدهای مستقل:

وقتی دو پیشامد A و B اثری روی هم ندارند:

$$P(A \mid B) = P(A \mid B') = P(A)$$

یعنی رخ‌دادن یا رخ‌ندادن B اثری روی احتمال A ندارد.

در این صورت: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (یعنی احتمال اشتراک برابر ضرب احتمال‌ها است.)

اگر A و B مستقل باشند، رخ‌ندادن آن‌ها نیز مستقل‌اند، یعنی:

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B) \quad , \quad P(A' \cap B') = P(A')P(B')$$

افراد مختلف، اشیای مختلف، دفعات مختلف، از هم مستقل‌اند.
علی و سارا — سکه و تاس — بار اول و بار دوم

یک مسئلهٔ خاص: در پرتاب دو تاس پیشامد «مجموع ۷ باشد: A» از پیشامد «تاس اول n باشد: B» مستقل است. (n هر عدد بین ۱ تا ۶ می‌تواند باشد!)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در پرتاب ۲ سکه چهار حالت {پ‌پ ، پ‌ر ، ر‌پ ، ر‌ر} داریم و احتمال متفاوت‌بودن آن‌ها $\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ است.

گام دوم: در پرتاب ۲ تاس ۳۶ حالت داریم و در ۶ حالت دو تاس یکسان‌اند:

$$\frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

گام سوم: چون از هم مستقل‌اند:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

کتاب درسی

یک سکه و دو تاس به طور هم‌زمان پرتاب می‌شوند. احتمال این‌که سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چه‌قدر است؟

(آمار و احتمال ـ تمرین ۷ صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳ شانس قبولی علی دو برابر بهنام است. اگر احتمال این‌که فقط علی قبول شود ۰/۳۲ باشد، با کدام احتمال علی قبول می‌شود؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

فرمول‌های احتمال برای حالت مستقل:

اگر A و B مستقل باشند، داریم:

فرمول	احتمال	بیان فارسی
$P(A)\times P(B)$	$P(A\cap B)$	هر دو رخ دهند.
$P(A)\times P(B')$	$P(A\cap B')$ یا $P(A-B)$	فقط A رخ دهد.
$P(A)P(B')+P(B)P(A')$	$P(A-B)+P(B-A)$	فقط یکی رخ دهد.
$P(A')\times P(B')$	$P(A'\cap B')$	هیچ‌کدام رخ ندهند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر احتمال قبولی علی را $2x$ بگیریم، احتمال قبولی بهنام x است و سؤال گفته:

$$\underbrace{P(A\cap B')}_{\text{فقط علی}}=0/32$$

گام دوم: چون افراد از هم مستقل‌اند، داریم:

$$P(A)\times P(B')=2x\,(1-x)=0/32$$

$$\xrightarrow{\div 2} x-x^2=0/16 \xrightarrow{\text{مرتب}} x^2-x+0/16=(x-0/2)(x-0/8)=0$$

پس:

$$x=0/2$$

گام سوم: دقت می‌کنیم که $P(A)=2x$ نباید از ۱ بیشتر شود، پس جواب $x=0/8$ را نمی‌پذیریم و احتمال قبولی علی برابر است با:

$$P(A)=2x=0/4$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ تاسی را می‌اندازیم. اگر عدد اول آمد یک سکه، اگر عدد مرکب آمد ۲ سکه و در غیر این صورت ۳ سکه می‌اندازیم. با کدام احتمال تمام پرتاب‌ها «رو» می‌آید؟

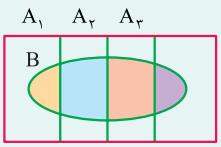
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

قانون جمع احتمال (فرمول احتمال کل):

در مسائلی که فضای نمونه‌ای شامل چند کیسه، چند کارخانه، چند حالت یا وضعیت مختلف باشد، شرایط سؤال را روی نمودار درختی می‌آوریم:



احتمال پیشامد B برابر است با:

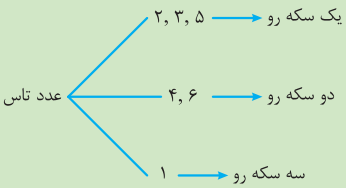
$$P(B) = \underbrace{P(A_۱)P(B \mid A_۱)}_{\text{احتمال B در قسمت اول}} + \underbrace{P(A_۲)P(B \mid A_۲)}_{\text{احتمال B در قسمت دوم}} + \dots$$

این فرمول احتمال B را در هر قسمت فضا به دست می‌آورد و با هم **جمع** می‌کند تا به $P(B)$ در کل **فضا** برسیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تاس در حالت‌های ۲، ۳ و ۵ «اول» است، اگر «۴ یا ۶» باشد مرکب است و اگر «۱» باشد نه اول و نه مرکب است.

گام دوم: حالت‌های صورت سؤال را روی نمودار درختی می‌آوریم:



گام سوم: احتمال یک رو، دو رو و سه رو به ترتیب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۸}$ است. پس داریم:

$$P(\text{همه رو}) = \frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۸} = \frac{۱۲+۴+۱}{۴۸} = \frac{۱۷}{۴۸}$$

کتاب درسی

فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴، کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال این‌که شمارهٔ کارت خارج‌شده ۳ باشد چه‌قدر است؟

(آمار و احتمال ـ تمرین ۱۶ صفحهٔ ۶۲ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ ۶۰ درصد از اعضای باشگاهی مرد هستند. نصف مردان و ۷۵ درصد زنان کارت ویژه دارند. یک عضو کارت ویژه دارد، با کدام احتمال مرد است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

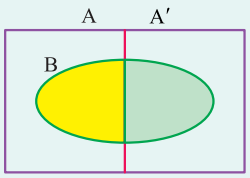
قانون بیز: پس از محاسبهٔ احتمال با فرمول کل، سؤال می‌تواند احتمال شرطی $P(A_i \mid B)$ را بخواهد. طبق فرمول شرطی داریم:

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب احتمال}} \frac{P(B \mid A_i)(P(A_i))}{P(B)}=\frac{\text{سهم شاخهٔ iاُم}}{\text{جواب کل}}$$

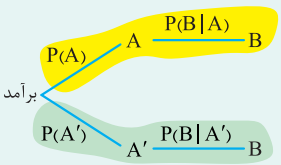
این فرمول را به صورت $P(A \mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}P(B \mid A)$ می‌نویسیم و اسمش قاعدهٔ بیز است.

معمولاً مسائل قاعدهٔ بیز فاز دوم یک مسئلهٔ احتمال کل هستند و اول باید با فرمول احتمال کل، مخرج را به دست آوریم. برای حالتی که S به دو پیشامد افراز شود، داریم:



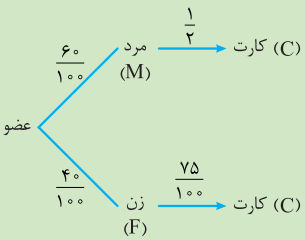
$$P(B)=P(A)P(B \mid A)+P(A')P(B \mid A')$$

$$P(A \mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}P(B \mid A)=\frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A)+P(A')P(B \mid A')}=\frac{\text{سهم شاخهٔ بالا}}{\text{جواب کل}}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: احتمال‌ها را در نمودار درختی می‌آوریم:



گام دوم: احتمال داشتن کارت ویژه برابر است با:

$$P(C)=P(M)P(C \mid M)+P(F)P(C \mid F)=\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}=\frac{۶}{۱۰}$$

گام سوم: حالا طبق قاعدهٔ بیز $P(M \mid C)$ برابر است با:

$$P(M \mid C)=\frac{P(M)}{P(C)}P(C \mid M)=\frac{\text{سهم شاخهٔ بالا}}{\text{کل}}=\frac{\frac{۳}{۱۰}}{\frac{۶}{۱۰}}=\frac{۱}{۲}$$

کتاب درسی

جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهی‌نامهٔ تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که گواهی‌نامهٔ تراکتور داشته باشد چه‌قدر است؟ *(آمار و احتمال ـ تمرین ۶ صفحهٔ ۶۱ کتاب درسی)*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک یازدهم

۹۶ روی یک باتری قلمی مقدار ۱۲۰ mAh نوشته شده است. اگر این باتری جریان الکتریکی متوسط ۲۵۰ μA را فراهم سازد، چند دقیقه طول می‌کشد تا خالی شود؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۴۸۰۰

۳) ۲۸۸۰ ۴) ۲۸۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

به آهنگ شارش بار الکتریکی در رسانا، جریان الکتریکی متوسط می‌گویند:

بار الکتریکی (C) ↑
$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ ← جریان الکتریکی (A)
↓ مدت‌زمان (s)

در رابطهٔ $\Delta q = I(\Delta t)$، اگر I برحسب A و Δt برحسب ساعت باشد، یکای Δq برحسب آمپر ـ ساعت (Ah) بیان می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مقدار بار عبوری از باتری ۱۲۰ m Ah و جریان الکتریکی متوسط عبوری از باتری ۲۵۰ μA است. با استفاده از رابطهٔ $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ داریم:

$$\Delta t = \frac{\Delta q}{I} \xrightarrow[I = ۲۵۰\,\mu A \times \frac{۱\,A}{۱۰^{۶}\,\mu A} = ۲۵ \times ۱۰^{-۵}\,A]{\Delta q = ۱۲۰\,m\,Ah \times \frac{۱\,Ah}{۱۰^{۳}\,mAh} = ۱۲ \times ۱۰^{-۲}\,Ah} \Delta t = \frac{۱۲ \times ۱۰^{-۲}}{۲۵ \times ۱۰^{-۵}} = ۴۸۰\,h \times \frac{۶۰\,min}{۱\,h} = ۲۸۸۰۰\,min$$

گول نخوری ✘ *اگه زمان رو برحسب ساعت محاسبه کنین و تبدیل یکا به دقیقه رو انجام ندین، توی دام گزینهٔ (۱) می‌افتین.*

کتاب درسی

روی یک باتری قلمی، مقدار ۱۰۰۰ m Ah نوشته شده است. اگر این باتری جریان متوسط ۱۰۰ μA را فراهم سازد، چه مدت طول می‌کشد تا خالی شود؟

(فیزیک (۲) ـ تمرین ۲ ـ ۱ (قسمت ب) صفحهٔ ۴۸ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷ مقاومت الکتریکی کدام‌یک از مقاومت‌های زیر، به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد؟

۱) ترمیستور
۲) پتانسیومتر
۳) LED
۴) LDR

پاسخ: گزینهٔ ۴

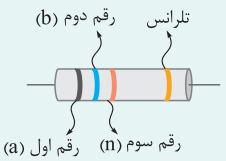
درس Box

الف) انواع اصلی مقاومت‌ها بر دو نوع هستند:

۱) **مقاومت‌های پیچه‌ای**: شامل پیچه‌ای از یک سیم نازک‌اند و برای به دست آوردن مقاومت‌های پایین، بسیار دقیق و هم‌چنین توان‌های بالا ساخته می‌شوند. یکی از مشهورترین آن‌ها، رئوستا است که یک نوع مقاومت متغیر است.

پتانسیومتر در مدارها همان نقش رئوستا (مقاومت متغیر) را انجام می‌دهد، به این صورت که اگر پایانه‌های A و B را به مدار ببندیم، با حرکت‌دادن لغزنده، طول مادهٔ مقاومتی که در مدار قرار می‌گیرد، تغییر می‌کند. در نتیجه طبق رابطهٔ $R = \rho \frac{L}{A}$، با تغییر طول مادهٔ مقاومتی، اندازهٔ مقاومت نیز تغییر می‌کند.

۲) **مقاومت‌های ترکیبی**: این مقاومت‌ها معمولاً از کربن و برخی نیم‌رساناها و یا لایه‌های نازک فلزی ساخته شده‌اند. این مقاومت‌ها در اندازه‌های خاص استانداردی تولید می‌شوند. مقدار مقاومت آن‌ها یا روی آن‌ها نوشته می‌شود یا عمدتاً به صورت کدی رنگی نشان داده می‌شود که با ۳ یا ۴ حلقهٔ رنگی مشخص می‌شود؛ دو حلقهٔ اول و دوم به ترتیب رقم اول و رقم دوم مقدار مقاومت را مشخص می‌کنند و حلقهٔ سوم ضریب n را نشان می‌دهد.



$R = \overline{ab} \times 10^{n}$

حلقهٔ چهارم، تلرانس نامیده می‌شود و مقدار مجاز انحراف از مقدار دقیق را نشان می‌دهد. نبود حلقهٔ چهارم به معنای آن است که تلرانس ۲۰٪ است.

ب) مقاومت‌های خاص:

۱) **ترمیستور**: نوعی مقاومت است که نسبت به تغییرات دما، به سرعت واکنش نشان می‌دهد و مقاومت آن تغییر می‌کند. از این مقاومت اغلب به عنوان حسگر دما در مدارهای حساس به دما استفاده می‌شود.

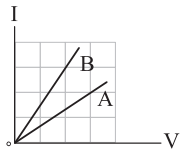
۲) **مقاومت نوری (LDR)**: نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد، به طوری که با افزایش شدت نور، از مقاومت آن کاسته می‌شود.

۳) **دیود**: دیود قطعه‌ای است که به عنوان یک‌سوکنندهٔ جریان در مدار به کار می‌رود؛ در واقع دیود فقط در یک جهت، جریان را عبور می‌دهد. یکی از معروف‌ترین آن‌ها دیود نورگسیل یا LED است که از نیم‌رسانایی ساخته شده که باعث می‌شود با عبور جریان از آن، از خود نور گسیل کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق مطلب بیان‌شده در درس‌باکس، LDR مقاومت الکتریکی است که به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ **نمودار جریان عبوری از دو مقاومت A و B برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. به دو سر این دو رسانا، به ترتیب اختلاف پتانسیل الکتریکی ۳۰V و ۴۰V اعمال می‌شود. در این حالت، جریان عبوری از مقاومت A، چند برابر جریان عبوری از مقاومت B است؟**



۱) $\frac{۲۷}{۱۶}$

۲) $\frac{۱۶}{۲۷}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

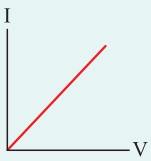
درس Box

- در رساناهای اهمی، مقاومت الکتریکی در ولتاژهای متفاوت در دمای ثابت همواره مقدار ثابتی است؛ در واقع در وسیله‌هایی که از قانون اهم پیروی می‌کنند نسبت اختلاف پتانسیل به جریان عبوری همواره مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی رسانا می‌نامند:

$$R=\frac{V}{I}$$

V: اختلاف پتانسیل (V)، R: مقاومت الکتریکی (Ω)، I: جریان عبوری (A)

- نمودار جریان برحسب اختلاف پتانسیل نشان می‌دهد که در رساناهای اهمی، جریان به طور مستقیم با اختلاف پتانسیل افزایش می‌یابد:



$$\text{شیب نمودار}=\frac{۱}{R}=\frac{I}{V}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در نمودار جریان عبوری برحسب اختلاف پتانسیل، شیب نمودار برابر با $\frac{۱}{R}$ است؛ پس:

$$\frac{R_B}{R_A}=\frac{\text{شیب نمودار A}}{\text{شیب نمودار B}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴}{۹}$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ قانون اهم، نسبت جریان عبوری از مقاومت A به جریان عبوری از مقاومت B را حساب می‌کنیم:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow I=\frac{V}{R}\Rightarrow \frac{I_A}{I_B}=\frac{V_A}{V_B}\times\frac{R_B}{R_A}=\frac{۳۰}{۴۰}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

گول نخوری

اگه به اشتباه، $\frac{I_B}{I_A}$ رو حساب کنین، توی دام گزینهٔ (۳) می‌افتین و اگر رابطهٔ نسبتی $\frac{I_A}{I_B}=\frac{V_A}{V_B}\times\frac{R_B}{R_A}$ رو جابه‌جا بنویسین، توی دام گزینه‌های (۱) یا (۲) می‌افتین.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ **جنس و دمای دو سیم استوانه‌ای A و B یکسان است. اگر طول سیم A، نصف طول سیم B و جرم آن دو برابر جرم سیم B باشد، مقاومت الکتریکی سیم A چند برابر مقاومت الکتریکی سیم B است؟**

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{۱}{۸}$

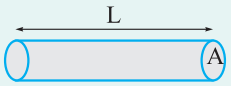
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint جنس دو سیم یکسان است؛ پس با استفاده از برابربودن چگالی، نسبت مساحت سطح مقطع دو استوانه را به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ نسبتی، $\frac{R_A}{R_B}=\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}$، نسبت مقاومت الکتریکی سیم A به مقاومت الکتریکی سیم B را به دست آورید.

درس Box اگر سطح مقطع جسم در تمام طول آن یکسان باشد، مقاومت آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$R=\rho\frac{L}{A}$$

مقاومت الکتریکی (Ω) — مقاومت ویژه ($\Omega\cdot m$) — طول رسانا (m) — مساحت مقطع جسم ($m^۲$)



پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** با توجه به این‌که جنس دو سیم یکسان است، به کمک رابطهٔ چگالی داریم:

$$\rho_A=\rho_B\Rightarrow\frac{m_A}{V_A}=\frac{m_B}{V_B}\xrightarrow[m_A=۲m_B]{V=AL\,,\,L_A=\frac{۱}{۲}L_B}\frac{۲m_B}{A_AL_A}=\frac{m_B}{۲A_BL_A}\Rightarrow\frac{A_A}{A_B}=۴$$

گام دوم: رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$ را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

کنکور **جنس و دمای دو سیم استوانه‌ای A و B یکسان است. اگر طول سیم A دو برابر طول سیم B و جرم آن نصف جرم B باشد، مقاومت الکتریکی سیم A چند برابر مقاومت سیم B است؟** *(سؤال ۶۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

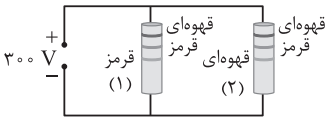
۱۰۰ در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی مقاومت ترکیبی (۱) برابر $75\,W$ باشد، توان مصرفی مجموعه برابر چند وات است؟ (قهوه‌ای: ۱ و قرمز: ۲ و از تلرانس مقاومت‌های ترکیبی چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۷/۵

۲) ۸۲/۵

۳) ۷۵۰

۴) ۸۲۵

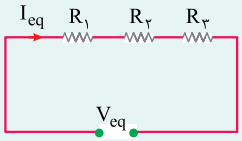


پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

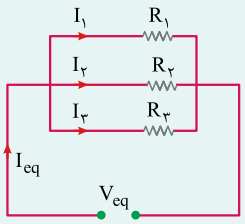
به هم بستن مقاومت‌ها:

۱) اتصال متوالی (سری): در این حالت مطابق شکل زیر، جریان عبوری از تمام مقاومت‌ها یکسان است و داریم:



$$\left.\begin{matrix} I_۱ = I_۲ = I_۳ = I_{eq} \\ V_{eq} = V_۱ + V_۲ + V_۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳$$

۲) اتصال موازی: مطابق شکل در اتصال موازی، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است؛ پس:



$$\left.\begin{matrix} I_{eq} = I_۱ + I_۲ + I_۳ \\ V_{eq} = V_۱ = V_۲ = V_۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳}$$

نکته اگر دو مقاومت به صورت موازی به هم متصل شده باشند، می‌توانیم مقاومت معادل آن‌ها را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$R_{eq} = \frac{R_۱ \times R_۲}{R_۱ + R_۲}$$

توان مصرفی در یک مصرف‌کننده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$P = VI$$

$$P = RI^۲$$

$$P = \frac{V^۲}{R}$$

V: اختلاف پتانسیل دو سر مصرف‌کننده (V)

R: مقاومت الکتریکی مصرف‌کننده (Ω)

I: جریان الکتریکی عبوری از مصرف‌کننده (A)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** $R_۱$ را محاسبه کرده و با استفاده از آن، کدهای رنگ‌های قهوه‌ای و قرمز را تعیین می‌کنیم:

$$P_۱ = \frac{V^۲}{R_۱} \Rightarrow ۷۵ = \frac{(۳۰۰)^۲}{R_۱} \Rightarrow R_۱ = \frac{۹۰۰۰۰}{۷۵} = ۱۲۰۰\,\Omega$$

$$R_۱ = \overline{a_۱ b_۱} \times ۱۰^{n_۱} \Rightarrow ۱۲۰۰ = ۱۲ \times ۱۰^۲ \Rightarrow$$

کد رنگی قهوه‌ای = ۱

کد رنگی قرمز = ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: اندازهٔ مقاومت $R_۲$ و مقاومت معادل را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}(۱)\ \text{مقاومت}: R_۱ = ۱۲۰۰\,\Omega \\ (۲)\ \text{مقاومت}: R_۲ = ۱۲\times ۱۰^{۱} = ۱۲۰\,\Omega\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقاومت‌های موازی}} R_{eq} = \frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲} = \frac{۱۲۰۰}{۱۱}\,\Omega$$

گام سوم: توان مصرفی مجموعه را طبق رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$ به دست می‌آوریم:

$$P_{eq} = \frac{V^۲}{R_{eq}} = \frac{(۳۰۰)^۲}{\frac{۱۲۰۰}{۱۱}} = ۸۲۵\ W$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) مقاومت ویژهٔ رساناهای فلزی با افزایش دما، کاهش می‌یابد.

ب) مقاومت ویژهٔ نیم‌رساناها مانند ژرمانیم و سیلیسیم، با افزایش دما، افزایش می‌یابد.

پ) در برخی موارد مانند جیوه، با کاهش دما، مقاومت ویژه به تدریج کاهش می‌یابد تا به صفر برسد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

مشاوره در پاسخ به سؤال‌هایی که درستی یا نادرستی جملات را باید بررسی کنید، مثل این سؤال، به عبارات کاهش و افزایش دقت کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مقاومت ویژهٔ یک ماده، به ساختار اتمی و دمای آن بستگی دارد. رساناهای الکتریکی خوب، مقاومت ویژهٔ بسیار کم و عایق‌های خوب، مقاومت ویژهٔ بسیار زیادی دارند.

- اگر یک رسانای فلزی داشته باشیم، با افزایش دمای آن، تعداد حامل‌های بار تقریباً ثابت می‌ماند، ولی ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌ها و یون‌های آن افزایش می‌یابد. این عامل باعث افزایش برخورد حامل‌های بار با شبکهٔ اتمی‌شده که نتیجهٔ آن، افزایش مقاومت رسانا در برابر عبور جریان است.
- در نیم‌رساناها مانند ژرمانیم و سیلیسیم در دماهای پایین، تعداد حامل‌های بار ناچیز است. با افزایش دما، به تعداد حامل‌های بار اضافه می‌شود و باعث کاهش مقاومت نیم‌رسانا می‌شود.
- در برخی مواد مانند جیوه و قلع، با کاهش دما، مقاومت ویژه در دمای خاصی به صورت ناگهانی به صفر افت می‌کند و در دماهای پایین‌تر، هم‌چنان صفر می‌ماند که این پدیده را ابررسانایی می‌گویند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، هیچ‌کدام از عبارت‌ها درست نیستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ دو سر یک استوانهٔ مسی به سطح مقطع $0/5\ cm^2$ به اختلاف پتانسیل معینی متصل است. اگر جریان الکتریکی عبوری از استوانه برابر $0/4\ A$ باشد، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت درون آن چند نیوتون بر کولن است؟ (مقاومت ویژهٔ مس برابر $1/8\times10^{-8}\ \Omega.m$ است.)

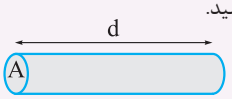
۱) $1/44$ ۲) $1/44\times10^{-4}$

۳) $2/25$ ۴) $2/25\times10^{-4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

از روابط $V=Ed=RI$ و $R=\rho\frac{d}{A}$، میدان الکتریکی یکنواخت را برحسب سایر پارامترها بنویسید.



درس Box

رابطهٔ میدان الکتریکی یکنواخت درون یک رسانا با مقطع ثابت:

$$E=\frac{V}{d}$$

E: اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $(V/m$ یا $N/C)$

V: اختلاف پتانسیل دو سر رسانا (V)

d: طول رسانا (m)

پاسخ خیلی تشریحی

با برابر قراردادن دو رابطهٔ $V=RI$ و $V=Ed$ داریم:

$$Ed=RI \xrightarrow{R=\rho\frac{d}{A}} Ed=\rho\frac{d}{A}I \Rightarrow E=\rho\frac{I}{A}=1/8\times10^{-8}\times\frac{0/4}{0/5\times10^{-4}} \Rightarrow E=1/44\times10^{-4}\ N/C$$

گول نخوری

اگه تبدیل یکای سطح مقطع رو در نظر نگیرین، توی دام گزینهٔ (۱) می‌افتین.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ **اگر قطر سیم مقاومت یک لامپ بر اثر تبخیر یک درصد کاهش یابد، با فرض ثابت‌ماندن جریان عبوری از لامپ و مقاومت ویژهٔ سیم، توان مصرفی آن تقریباً چگونه تغییر می‌کند؟ (از تغییر طول سیم چشم‌پوشی کنید.)**

۱) دو درصد کاهش می‌یابد.
۲) یک درصد کاهش می‌یابد.
۳) دو درصد افزایش می‌یابد.
۴) یک درصد افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا به کمک رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$، با توجه به ثابت‌بودن مقاومت ویژه و طول سیم، رابطهٔ مقاومت را با قطر سیم پیدا کنید، سپس به کمک رابطهٔ توان مصرفی $(P=RI^2)$ به صورت نسبتی، $\frac{P_2}{P_1}$ را حساب کرده و در آخر، درصد تغییرات توان را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ مقاومت الکتریکی را برحسب قطر سیم به دست می‌آوریم:

$$R=\rho\frac{L}{A}\xrightarrow{A=\pi(\frac{D}{2})^2}R=\rho\frac{L}{\pi\frac{D^2}{4}}=\frac{4\rho L}{\pi D^2}\xrightarrow{\text{ثابت: }\rho,L}R\propto\frac{1}{D^2}$$

گام دوم: با توجه به این‌که جریان عبوری از لامپ ثابت است، رابطهٔ توان $(P=RI^2)$ را به صورت مقایسه‌ای می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{R_1}{R_2}=(\frac{D_2}{D_1})^2\xrightarrow{D_2=0/99D_1}\frac{P_1}{P_2}=(0/99)^2\simeq 0/98$$

گام سوم: درصد تغییرات توان مصرفی برابر است با:

$$\frac{\Delta P}{P_1}\times 100=\frac{P_2-P_1}{P_1}\times 100=\frac{\frac{P_1}{0/98}-P_1}{P_1}\times 100\simeq \%2$$

علامت مثبت درصد تغییرات توان مصرفی، نشان می‌دهد که توان مصرفی افزایش یافته است.

کنکور

اگر قطر سیم مقاومت یک لامپ بر اثر تبخیر یک درصد کاهش یابد، با ثابت‌ماندن ولتاژ دو سر لامپ و مقاومت ویژهٔ سیم، توان مصرفی آن تقریباً چگونه تغییر می‌کند؟ *(سؤال ۶۵٪ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) دو درصد کاهش
۲) یک درصد کاهش
۳) دو درصد افزایش
۴) یک درصد افزایش

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

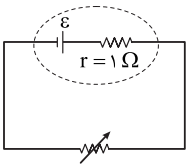
۱۰۴ در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا ۵ Ω افزایش می‌یابد و جریان الکتریکی عبوری از آن نصف می‌شود. اگر در ادامه، مقاومت رئوستا باز هم ۵ Ω افزایش یابد، جریان عبوری از آن چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۷}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

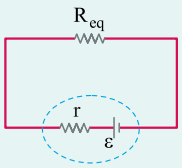
۴) $\frac{۱}{۴}$



پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در مدار تک‌حلقه، جریان الکتریکی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

ε: نیروی محرکهٔ الکتریکی (V)، I: جریان الکتریکی (A)، R_{eq}: مقاومت معادل خارجی (Ω)، r: مقاومت درونی مولد (Ω)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جریان الکتریکی عبوری از مدار، طبق رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ محاسبه می‌شود. پس برای حالت اول داریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + ۱} \quad (۱)$$

در حالت دوم، مقاومت را ۵ Ω افزایش می‌دهیم و جریان عبوری از آن نصف می‌شود؛ یعنی:

$$I' = \frac{I}{۲} = \frac{\varepsilon}{(R + ۵) + ۱} = \frac{\varepsilon}{R + ۶} \quad (۲)$$

گام دوم: از دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\frac{\varepsilon}{R + ۱}}{۲} = \frac{\varepsilon}{R + ۶} \Rightarrow ۲(R + ۱) = R + ۶ \Rightarrow R = ۴\ \Omega$$

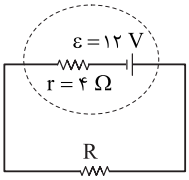
گام سوم: در ادامه، مقاومت رئوستا را باز هم ۵ Ω افزایش می‌دهیم و جریان را برحسب ε نوشته و نسبت $\frac{I''}{I'}$ را به دست می‌آوریم:

$$I'' = \frac{\varepsilon}{R + ۱۰ + ۱} = \frac{\varepsilon}{R + ۱۱}$$

$$\frac{I''}{I'} = \frac{\frac{\varepsilon}{R + ۱۱}}{\frac{\varepsilon}{R + ۶}} = \frac{R + ۶}{R + ۱۱} \xrightarrow{R = ۴\ \Omega} \frac{I''}{I'} = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ در مدار شکل زیر، مقاومت R از مقاومت درونی باتری، کم‌تر است. اگر توان خروجی باتری برابر ۸ W باشد، جریان الکتریکی عبوری از آن برابر چند آمپر است؟



۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

توان خروجی باتری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$P = \varepsilon I - r I^{۲}$

(P: توان خروجی (W)، ε: نیروی محرکهٔ الکتریکی (V)، I: جریان عبوری (A)، r: مقاومت درونی مولد (Ω))

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که $R < r$ است، محدودهٔ اندازهٔ جریان الکتریکی را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{۱۲}{R+۴} \Rightarrow R+۴ = \frac{۱۲}{I} \Rightarrow R = \frac{۱۲}{I} - ۴ < ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲}{I} < ۸ \Rightarrow I > \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲}\,A$$ (رد گزینه‌های (۱) و (۲))

گام دوم: توان خروجی باتری برابر با ۸ W است، پس:

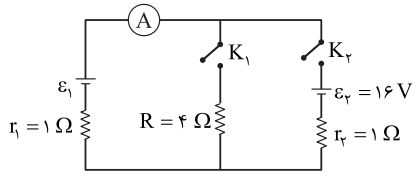
$$P = \varepsilon I - r I^{۲} \Rightarrow ۸ = ۱۲I - ۴I^{۲} \Rightarrow I^{۲} - ۳I + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} I = ۱ \ A \\ I = ۲ \ A \end{cases}$$

با توجه به این‌که باید $I > ۱/۵\ A$ باشد، پس $I = ۲A$ جواب سؤال است.

گول نخوری *اگه فقط گام دوم رو برای حل سؤال در نظر بگیرین و هواستون به $R < r$ نباشه، با دیدن $I = ۱A$، ممکنه سراغ گزینهٔ (۱) برین.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۶ در مدار شکل زیر، در حالتی که کلید K_1، بسته و کلید K_2، باز است، آمپرسنج آرمانی A ۲ را نشان می‌دهد. اگر کلید K_1، باز و کلید K_2 بسته باشد، آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در مدارهای تک‌حلقه‌ای که چند منبع نیروی محرکه داریم، به کمک قانون حلقه، جریان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R + \sum r}$$

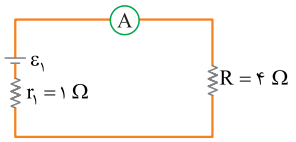
$\sum \varepsilon$: جمع جبری نیروهای محرکه
$\sum R$: جمع مقاومت‌های خارجی
$\sum r$: جمع مقاومت‌های داخلی

در رابطهٔ بالا، باتری‌هایی که جریان از پایانهٔ منفی به آن‌ها وارد می‌شود و در واقع هم‌جهت با جریان هستند، به مدار انرژی می‌دهند و علامت آن‌ها را در رابطهٔ بالا مثبت قرار می‌دهیم.

باتری‌هایی که جریان از پایانهٔ مثبت به آن‌ها وارد و از پایانهٔ منفی خارج می‌شود و در واقع خلاف جهت جریان عمل می‌کنند، از مدار انرژی می‌گیرند و با علامت منفی در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌شوند.

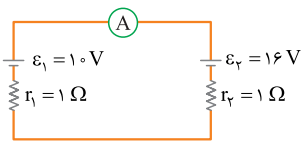
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: وقتی کلید K_1، بسته و کلید K_2، باز است، مولد ε_2 از مدار خارج می‌شود. در این حالت، مدار به صورت شکل زیر درمی‌آید. به کمک جریان عبوری از آمپرسنج، نیروی محرکهٔ ε_1 را محاسبه می‌کنیم:



$$I_A = \frac{\varepsilon_1}{R + r_1} \Rightarrow ۲ = \frac{\varepsilon_1}{۴ + ۱} \Rightarrow \varepsilon_1 = ۱۰\ V$$

گام دوم: وقتی کلید K_1، باز و کلید K_2، بسته شود، در این حالت، مقاومت R از مدار خارج می‌شود و آمپرسنج جریان عبوری از مدار را نشان می‌دهد:



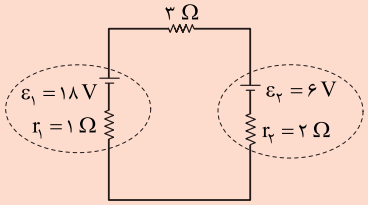
$$I'_A = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R + r} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_1 + r_2} = \frac{۱۶ - ۱۰}{۱ + ۱} = ۳\ A$$

گول نخوری

هواستون باشه در محاسبهٔ جریان در مدار با چند باتری، اگر باتری‌ها مخالف هم بسته شده باشن، باید اندازهٔ ε ها رو از هم کم کنین.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۷ در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری (۱) از توان ورودی باتری (۲) چند وات بیشتر است؟



۱) ۱۲
۲) ۴۸
۳) ۶
۴) ۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در باتری‌هایی که جریان از پایانهٔ منفی به آن‌ها وارد می‌شود و به مدار انرژی می‌دهند، توان خروجی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2$$

باتری‌هایی که جریان از پایانهٔ مثبت به آن‌ها وارد و از پایانهٔ منفی خارج می‌شود، از مدار انرژی می‌گیرند. برای این باتری‌ها در مدار داریم:

$$P_{\text{ورودی}} = \varepsilon I + rI^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جریان عبوری از مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{18 - 6}{3 + 1 + 2} = \frac{12}{6} = 2\ A$$

گام دوم: سراغ خواستهٔ سؤال می‌رویم. باتری (۱) در حال تخلیه و باتری (۲) در حال شارژ است، پس:

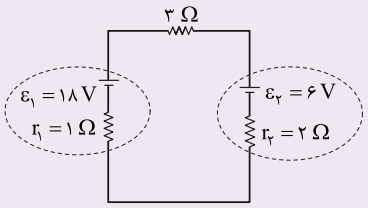
$$P_1 - P_2 = (\varepsilon_1 I - r_1 I^2) - (\varepsilon_2 I + r_2 I^2) = (18\times2 - 1\times2^2) - (6\times2 + 2\times2^2) = 32 - 20 = 12\ W$$

گول نخوری ✘

اگه هواست نباشه که باتری (۲) از مدار انرژی می‌گیره و رابطهٔ توان خروجی رو برای باتری (۲) به صورت $P_2 = \varepsilon_2 I - r_2 I^2$ بنویسی، به جواب اشتباه $P_1 - P_2 = 28\ W$ که توی گزینهٔ نادرست (۴) اومده، می‌رسی.

کنکور

در مدار شکل زیر، توان ورودی باتری (۲)، چند برابر توان خروجی باتری (۱) است؟ *(سؤال ۶۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*



۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

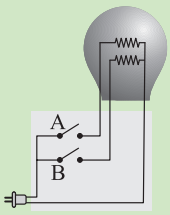
۱۰۸ یک لامپ سه‌راهه که دو رشته دارد، مطابق شکل برای کار در سه توان مختلف ساخته شده است. اگر کم‌ترین و بیشترین توان مصرفی این لامپ به‌ترتیب ۵۰ W و ۱۵۰ W باشد، نسبت مقاومت دو رشتهٔ آن برابر کدام است؟

۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴



پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

در به هم بستن مقاومت‌های موازی، همواره مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها کوچک‌تر است و هم‌چنین توان مصرفی طبق رابطهٔ $P=\frac{V^2}{R}$ با مقاومت، رابطهٔ عکس دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که مقاومت‌ها موازی بسته شده‌اند، رابطهٔ مقاومت‌ها به صورت $R_{eq}<R_2<R_1$ است (R_1 را معادل با مقاومت الکتریکی بزرگ‌تر در نظر گرفته‌ایم و هم‌چنین می‌دانیم مقاومت معادل در به هم بستن موازی از تک‌تک مقاومت‌ها کوچک‌تر است).

گام دوم: طبق رابطهٔ $P=\frac{V^2}{R}$، بیشترین توان مربوط به مقاومت کوچک‌تر و کم‌ترین توان مربوط به مقاومت بزرگ‌تر است؛ پس:

$$P_{min}=\frac{V^2}{R_{max}} \Rightarrow 50=\frac{V^2}{R_1} \quad (1)$$

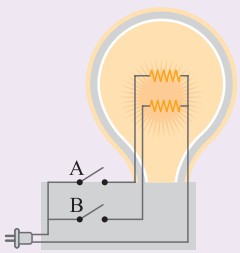
$$P_{max}=\frac{V^2}{R_{min}} \Rightarrow 150=\frac{V^2}{R_{eq}} \xrightarrow{R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} 150=\frac{V^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

$$\xrightarrow{(1)} 150=50\frac{(R_1+R_2)}{R_2} \Rightarrow 3R_2=R_1+R_2 \Rightarrow R_1=2R_2$$

گول نخوری

اگه هواستون به بستن هر دو کلید و در نظر گرفتن مقاومت معادل نباشه و فقط تک‌تک مقاومت‌ها رو در نظر بگیرین و در رابطهٔ $P=\frac{V^2}{R}$، یک‌بار R_1 و یک‌بار R_2 رو قرار بدین، به گزینهٔ اشتباه (۳) می‌رسین.

کتاب درسی

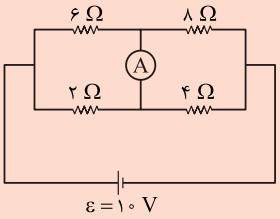


یک لامپ سه‌راههٔ ۲۲۰ V که دو رشته دارد، مطابق شکل برای کار در سه توان مختلف ساخته شده است. کم‌ترین و بیشترین توان مصرفی این لامپ به ترتیب ۵۰/۰ W و ۱۵۰ W است. مقاومت هر یک از رشته‌ها را بیابید.

(فیزیک (۲) ـ مثال ۲ ـ ۱۵ صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۹ در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟



۱) ۰/۴
۲) ۰/۳
۳) ۰/۲
۴) ۰/۱

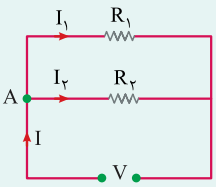
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

مقاومت معادل را محاسبه کنید تا به کمک آن، جریان عبوری از مدار را به دست آورید، سپس جریان عبوری از مقاومت‌های ۶ Ω و ۸ Ω را حساب کرده و در گرهٔ M، جریان عبوری از آمپرسنج را به دست آورید.

درس Box

با توجه به این‌که در مقاومت‌های موازی، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است، داریم:



$$V_1 = V_2 = V \Rightarrow I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

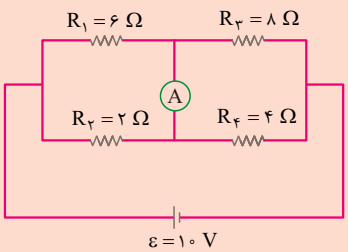
یعنی جریان در مقاومت‌های موازی به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم می‌شود.

طبق اصل پایستگی بار الکتریکی، جریان‌های ورودی به هر گره در مدار، با جریان‌های خروجی از آن گره، برابر است. یعنی در شکل بالا در گرهٔ A داریم:

$$\text{جریان‌های ورودی} = \text{جریان‌های خروجی} \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با بررسی مدار، مقاومت معادل را محاسبه کرده و سپس جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:



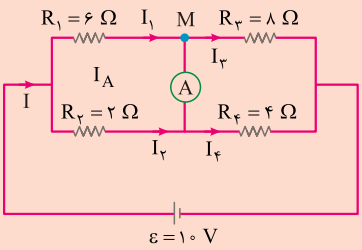
$$R_1 \text{ و } R_2 \text{ موازی}: R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{6\times2}{6+2} = \frac{3}{2}\,\Omega$$

$$R_3 \text{ و } R_4 \text{ موازی}: R'' = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = \frac{8\times4}{8+4} = \frac{8}{3}\,\Omega$$

$$R_{eq} = R' + R'' = \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{25}{6}\,\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} = \frac{10}{\frac{25}{6}} = 2/4\ A$$

گام دوم: مطابق شکل، جریان اصلی در ابتدا بین مقاومت‌های موازی R_1 و R_2 و سپس بین مقاومت‌های موازی R_3 و R_4 تقسیم می‌شود؛ پس:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow 6I_1 = 2I_2 \Rightarrow 3I_1 = I_2$

$I = I_1 + I_2 \Rightarrow 2/4 = I_1 + 3I_1 \Rightarrow I_1 = 0/6\ A$

$V_3 = V_4 \Rightarrow I_3R_3 = I_4R_4 \Rightarrow 8I_3 = 4I_4 \Rightarrow 2I_3 = I_4$

$I = I_3 + I_4 \Rightarrow 2/4 = I_3 + 2I_3 \Rightarrow I_3 = 0/8\ A$

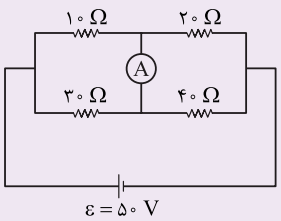
گام سوم: با نوشتن اصل پایستگی بار الکتریکی در گرهٔ M، جریان عبوری از آمپرسنج (I_A) را به دست می‌آوریم:

$I_1 + I_A = I_3 \Rightarrow I_A = I_3 - I_1 = 0/8 - 0/6 = 0/2\ A$

جهت جریان در شاخهٔ حامل آمپرسنج به سمت بالا خواهد بود.

کنکور

در شکل زیر، آمپرسنج آرمانی چند میلی‌آمپر را نشان می‌دهد؟ *(سؤال ۶۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*



۱) ۴۰۰

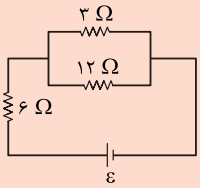
۲) ۳۰۰

۳) ۲۰۰

۴) ۱۰۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۰ در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۶ اُهمی چند برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۳ اُهمی است؟

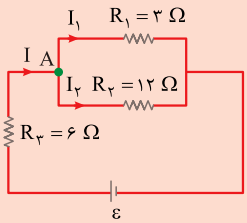


۱) $\frac{۸}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا نسبت جریان‌های عبوری از مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ را به کمک قاعدهٔ تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی به دست آورید و سپس به کمک اصل پایستگی بار الکتریکی، نسبت جریان عبوری از مقاومت ۶ اُهمی به جریان عبوری از مقاومت ۳ اُهمی را به دست آورید. در نهایت به کمک قانون اُهم $(V = RI)$، خواستهٔ سؤال را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** جریان در مقاومت‌های موازی به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم می‌شود؛ یعنی:



$$\frac{I_۱}{I_۲} = \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{۱۲}{۳} = ۴ \Rightarrow I_۲ = \frac{I_۱}{۴}$$

گام دوم: به کمک اصل پایستگی بار الکتریکی در گرهٔ A، نسبت جریان عبوری از مقاومت ۶ اُهمی به جریان عبوری از مقاومت ۳ اُهمی را به دست می‌آوریم:

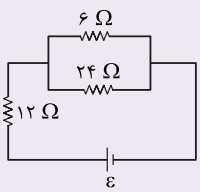
$$I = I_۱ + I_۲ = I_۱ + \frac{I_۱}{۴} = \frac{۵I_۱}{۴} \Rightarrow \frac{I}{I_۱} = \frac{۵}{۴}$$

گام سوم: جریان عبوری از مقاومت ۶ اُهمی، I و جریان عبوری از مقاومت ۳ اُهمی، $I_۱$ است. حالا که نسبت I به $I_۱$ را داریم، خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{V_۳}{V_۱} = \frac{IR_۳}{I_۱R_۱} = \frac{۵}{۴} \times \frac{۶}{۳} = \frac{۵}{۲}$$

کنکور

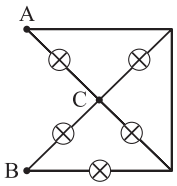
در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۱۲ اُهمی چند برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۶ اُهمی است؟ *(سؤال ۶۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*



۱) $\frac{۸}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۱ در شکل زیر، لامپ‌ها مشابه‌اند. مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B چند برابر مقاومت معادل بین دو نقطهٔ B و C است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۷}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

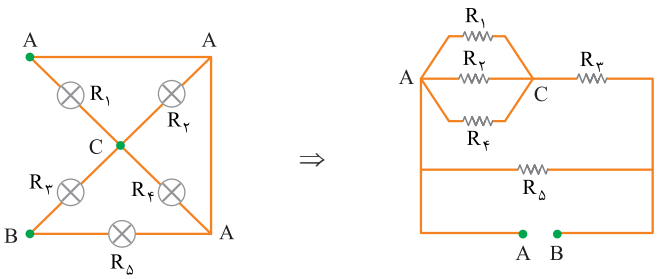
درس Box

نقاطی از یک مدار که توسط سیم‌های رابط (با مقاومت ناچیز) به یکدیگر وصل می‌شوند، پتانسیل یکسانی دارند.

پاسخ خیلی تشریحی

برای محاسبهٔ مقاومت معادل در هر دو حالت، به کمک نقاط هم‌پتانسیل، مدار را به شکل ساده‌تر، رسم می‌کنیم:

گام اول: برای به دست آوردن مقاومت معادل، ابتدا نقاط هم‌پتانسیل را مشخص کرده و مدار ساده‌ای رسم می‌کنیم:



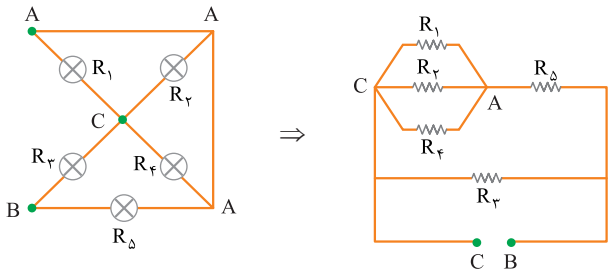
گام دوم: مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B را به دست می‌آوریم. از آن‌جا که لامپ‌ها مشابه‌اند، مقاومت هر یک از آن‌ها را R فرض می‌کنیم.

موازی $R_۴ , R_۲ , R_۱$: $\frac{۱}{R'}=\frac{۱}{R}+\frac{۱}{R}+\frac{۱}{R}=\frac{۳}{R} \Rightarrow R'=\frac{R}{۳}$

متوالی $R_۳ , R'$: $R''=\frac{R}{۳}+R=\frac{۴R}{۳}$

موازی $R_۵ , R''$: $\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{R}+\frac{۳}{۴R}=\frac{۷}{۴R} \Rightarrow R_{eq}=\frac{۴R}{۷}$

گام سوم: حالا مراحل گام اول و دوم را برای محاسبهٔ مقاومت معادل بین دو نقطهٔ B و C تکرار می‌کنیم:



گام چهارم: مقاومت معادل بین دو نقطهٔ B و C را نیز محاسبه می‌کنیم:

موازی $R_۴ , R_۲ , R_۱$: $\frac{۱}{R'}=\frac{۱}{R}+\frac{۱}{R}+\frac{۱}{R}=\frac{۳}{R} \Rightarrow R'=\frac{R}{۳}$

متوالی $R_۵ , R'$: $R''=R+\frac{R}{۳}=\frac{۴R}{۳}$

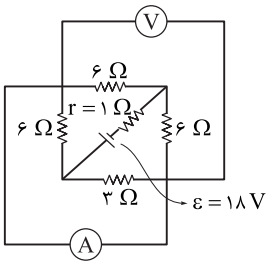
موازی $R_۳ , R''$: $R_{eq}=\frac{R\times\frac{۴R}{۳}}{R+\frac{۴R}{۳}}=\frac{۴R}{۷}$

پس نسبت مقاومت‌های معادل برابر یک است.

$$\frac{(R_{eq})_{AB}}{(R_{eq})_{BC}}=\frac{\frac{۴R}{۷}}{\frac{۴R}{۷}}=۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۲ در مدار شکل زیر، به ترتیب از راست به چپ، مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، چند آمپر و چند ولت است؟



۱) ۱/۵ ، ۱۲

۲) ۱/۵ ، صفر

۳) ۰/۵ ، ۱۲

۴) ۰/۵ ، صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

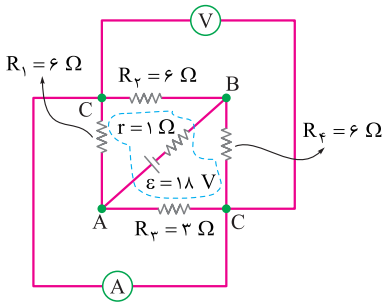
درس Box

۱) آمپرسنج در مدار به صورت متوالی (سری) و ولت‌سنج به صورت موازی با اجزایی که می‌خواهیم اختلاف پتانسیل آن را محاسبه کنیم، بسته می‌شود.

۲) چون مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت است، ولت‌سنج آرمانی در هر شاخه‌ای قرار بگیرد، جریانی از آن شاخه عبور نمی‌کند.

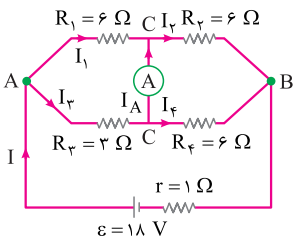
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاط هم‌پتانسیل را مشخص کرده و مدار ساده‌ای رسم می‌کنیم:



(الف)

⇒



(ب)

گام دوم: مقاومت معادل و جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:

$$\text{موازی } R_۳ , R_۱ : R' = \frac{R_۱ \times R_۳}{R_۱ + R_۳} = \frac{۶ \times ۳}{۶ + ۳} = ۲\,\Omega$$

$$\text{موازی } R_۴ , R_۲ : R'' = \frac{R_۲ \times R_۴}{R_۲ + R_۴} = \frac{۶ \times ۶}{۶ + ۶} = ۳\,\Omega$$

$$\text{متوالی } R'' , R' : R_{eq} = R' + R'' = ۲ + ۳ = ۵\,\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{۱۸}{۵ + ۱} = ۳\,A$$

گام سوم: جریان عبوری از هر شاخه را محاسبه می‌کنیم تا جهت و اندازهٔ جریان عبوری از آمپرسنج به دست آید:

$$\text{موازی } R_۳ , R_۱ \Rightarrow V_۱ = V_۳ \Rightarrow R_۱ I_۱ = R_۳ I_۳ \Rightarrow ۶ I_۱ = ۳ I_۳ \Rightarrow ۲ I_۱ = I_۳$$

$$\text{در گرهٔ A (قاعدهٔ انشعاب (اصل پایستگی بار الکتریکی)): } I = I_۱ + I_۳ \Rightarrow ۳ = I_۱ + ۲ I_۱ = ۳ I_۱ \Rightarrow I_۱ = ۱\,A , I_۳ = ۲\,A$$

$$\text{موازی } R_۴ , R_۲ \Rightarrow V_۲ = V_۴ \Rightarrow R_۲ I_۲ = R_۴ I_۴ \Rightarrow ۶ I_۲ = ۶ I_۴ \Rightarrow I_۲ = I_۴$$

$$\text{در گرهٔ B (قاعدهٔ انشعاب (اصل پایستگی بار الکتریکی)): } I = I_۲ + I_۴ \xrightarrow{I_۲ = I_۴} ۳ = I_۲ + I_۲$$

$$\Rightarrow ۳ = ۲ I_۲ \Rightarrow I_۲ = I_۴ = ۱/۵\,A$$

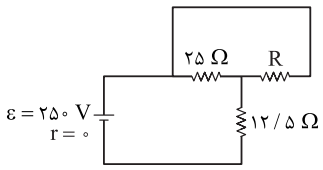
قاعدهٔ انشعاب (اصل پایستگی بار الکتریکی) را در گرهٔ C (نقطهٔ C بالای مدار) می‌نویسیم تا جریان عبوری از آمپرسنج محاسبه شود.

$$I_۱ + I_A = I_۲ \Rightarrow I_A = I_۲ - I_۱ = ۱/۵ - ۱ = ۰/۵\,A$$ (رد گزینه‌های (۱) و (۲))

گام چهارم: حالا سراغ محاسبهٔ مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، می‌رویم. همان‌طور که از مدار شکل (الف) مشخص است، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ هم‌پتانسیل C را نشان می‌دهد؛ پس $V_V = ۰$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۳ در مدار شکل زیر، اگر جریان عبوری از مقاومت ۲۵ Ω برابر ۶ A باشد، انرژی مصرفی مقاومت R در مدت ۳۰ min چند کیلووات ساعت است؟

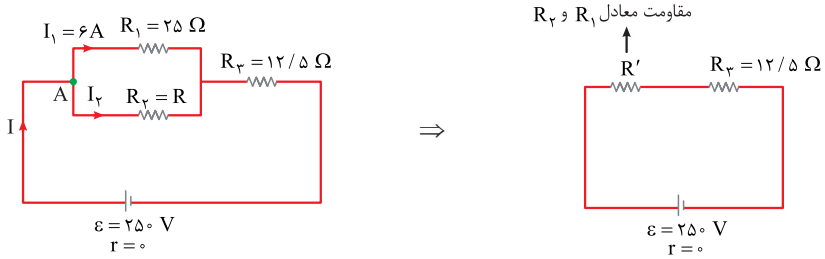


۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۴۵
۳) ۱/۵
۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم تا مفهوم را ساده‌تر بتوانیم بیان کنیم:



گام دوم: دو مقاومت R و ۲۵ اُهمی موازی هستند، پس اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها برابر است با:

$$V_1 = R_1 I_1 = V_2 = V' \Rightarrow V_2 = V' = ۲۵ \times ۶ = ۱۵۰\ V$$

گام سوم: مجموع اختلاف پتانسیل مقاومت‌های R' و R_3 برابر با ۲۵۰ V است؛ پس:

$$V' + \underbrace{V_3}_{R_3 I} = ۲۵۰ \Rightarrow ۱۵۰ + ۱۲/۵\, I = ۲۵۰ \Rightarrow I = ۸\ A$$

گام چهارم: برای محاسبهٔ انرژی مصرفی مقاومت R طبق رابطهٔ $U_R = V_2 I_2 t$، به جریان عبوری از مقاومت R نیاز داریم. پس قاعدهٔ انشعاب (اصل پایستگی بار الکتریکی) را در گرهٔ A می‌نویسیم:

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow ۸ = ۶ + I_2 \Rightarrow I_2 = ۲A$$

گام پنجم: حالا محاسبهٔ خواستهٔ سؤال:

$$U_R = V_2 I_2 t \xrightarrow[t = ۳۰\ min = \frac{۱}{۲}\ h]{V_2 = ۱۵۰\ V,\ I_2 = ۲\ A} U_R = ۱۵۰ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱۵۰\ Wh \times \frac{۱\ kWh}{۱۰^۳\ Wh} = ۰/۱۵\ kWh$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

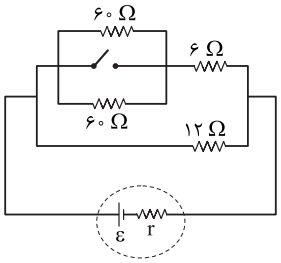
۱۱۴ در مدار زیر، با بستن کلید، توان خروجی باتری تغییر نمی‌کند. مقاومت درونی باتری چند اُهم است؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۳۶



پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

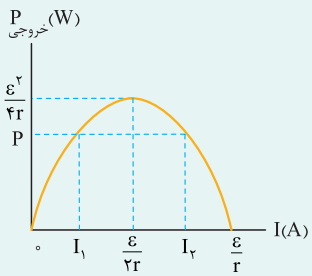
در هر دو حالت کلید باز و کلید بسته، مقاومت معادل را محاسبه کنید و سپس با جای‌گذاری در رابطهٔ $r=\sqrt{R_{eq}\times R'_{eq}}$، مقاومت درونی باتری را به دست آورید.

درس Box

نمودار توان خروجی برحسب جریان عبوری از مدار به صورت شکل زیر است:

$I_m=$ جریان عبوری از مدار، هنگامی که توان خروجی، بیشینه است. (A)

$$I_m=\frac{\varepsilon}{2r}$$



$$P_{\text{خروجی}}=VI=(\varepsilon-Ir)I=\varepsilon I-rI^2$$

$$I_m=\frac{\varepsilon}{2r}$$

$$P_{max}=\varepsilon I_m-r(I_m)^2=\varepsilon(\frac{\varepsilon}{2r})-r(\frac{\varepsilon}{2r})^2$$

$$\Rightarrow P_{max}=\frac{\varepsilon^2}{2r}-\frac{\varepsilon^2}{4r}=\frac{\varepsilon^2}{4r}$$

همان‌طور که از نمودار مشخص است، به ازای دو جریان I_1 و I_2 توان خروجی مولد بدون تغییر است. از این‌رو به ازای دو مقدار مقاومت معادل خارجی هم توان خروجی مولد بدون تغییر است و داریم:

$$r^2=R_{eq}\times R'_{eq}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق رابطه‌ای که در درس‌باکس بیان کردیم، چون با بستن کلید، مقاومت معادل تغییر می‌کند، اما توان خروجی باتری تغییر نکرده، پس کافی است در حالت‌های کلید باز و کلید بسته، مقاومت معادل را محاسبه کنیم.

در حالت کلید بسته: مقاومت موازی ۶ اُهمی و ۱۲ اُهمی در مدار قرار دارند، پس:

$$R_{eq}=\frac{12\times6}{12+6}=4\ \Omega$$

در حالت کلید باز: دو مقاومت ۶۰ اُهمی، موازی هستند:

$$R'=\frac{60\times60}{60+60}=30\ \Omega$$

مقاومت‌های ۳۰ اُهمی و ۶ اُهمی متوالی و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت ۱۲ اُهمی موازی است؛ یعنی:

$$R'_{eq}=\frac{(30+6)\times12}{(30+6)+12}=\frac{36\times12}{48}=9\ \Omega$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

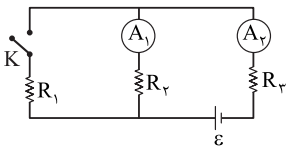
گام دوم: به کمک رابطهٔ $r^{۲} = R_{eq} \times R'_{eq}$، مقاومت درونی باتری را به دست می‌آوریم:

$$r^{۲} = R_{eq} \times R'_{eq} = ۴ \times ۹ = ۳۶ \Rightarrow r = ۶\ \Omega$$

گول‌نخوری *اگه در رابطهٔ $r^{۲} = R_{eq} \times R'_{eq}$، توان ۲ رو در نظر نگیرین، توی دام گزینهٔ (٤) می‌افتین.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۵ **در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، مقدارهایی که آمپرسنج‌های آرمانی A_1 و A_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟ (مولد آرمانی فرض شود.)**



۱) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۳) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۴) تغییر نمی‌کند، تغییر نمی‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در حالتی که کلید باز است، مقاومت R_1 از مدار خارج است و در مدار تک‌حلقهٔ حاصل، از هر دو آمپرسنج A_1 و A_2 جریان I عبور می‌کند.

گام دوم: با بستن کلید، مقاومت R_1 به مدار اضافه می‌شود، در نتیجه چون مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی هستند، مقاومت معادل آن‌ها، یعنی R' از R_1 و R_2 کوچک‌تر است و مقاومت R' با R_3 متوالی است. اما چون نسبت به حالت کلید باز، مقاومت معادل کاهش یافته است، پس جریان عبوری از آمپرسنج A_2 افزایش می‌یابد؛ یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} \text{در حالت کلید باز: } I_1 = I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_2 + R_3} \\ \text{در حالت کلید بسته: } I' = \dfrac{\varepsilon}{R' + R_3} \end{array}\right\} \xrightarrow{R' < R_2} I' > I_1$$

پس آمپرسنج آرمانی (۲) عدد بیشتری را نمایش می‌دهد. (رد گزینه‌های (۲) و (۴))

گام سوم: حالا سراغ تغییرات آمپرسنج آرمانی (۱) می‌رویم:

اختلاف پتانسیل باتری در هر دو حالت برابر است با (I_1 و I_2 جریان عبوری از آمپرسنج‌ها هستند):

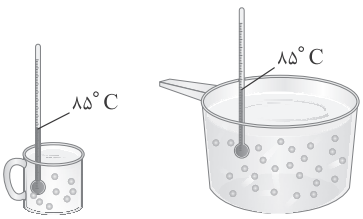
$$\varepsilon = V_3 + V_2 \xrightarrow[\varepsilon:\text{ثابت}]{V_3 = R_3 I' :\text{افزایش}} V_2 :\text{کاهش} \xrightarrow[R_2:\text{ثابت}]{V_2 = R_2 I'_2} I'_2 :\text{کاهش}$$

یعنی جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی (۱) کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی یازدهم

۱۱۶ با توجه به شکل‌های زیر که دو ظرف A و B حاوی مقادیری آب با دمای یکسان $85\ ^\circ C$ را نشان می‌دهند، کدام موارد درست است؟



الف) برای این‌که دمای آب در هر دو ظرف به $95\ ^\circ C$ برسد، گرمای مورد نیاز برای ظرف A، بیشتر از گرمای مورد نیاز برای ظرف B است.

ب) میانگین تندی مولکول‌های آب در هر دو ظرف یکسان است.

پ) انرژی گرمایی آب در ظرف B بیشتر بوده و در صورت تماس دو ظرف، انرژی گرمایی از B به A جاری می‌شود.

ت) اگر محتویات دو ظرف به یکدیگر اضافه شود، انرژی گرمایی مایع حاصل، بیشتر از هر یک از ظرف‌های اولیه خواهد بود.

۱) «الف» ـ «پ»
۲) «ب» ـ «ت»
۳) «الف» ـ «ب»
۴) «پ» ـ «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، به ازای $\Delta\theta$ معین، Q با m رابطهٔ مستقیم دارد؛ پس برای ظرف B با جرم بیشتر، گرمای بیشتری نیاز است.

ب) با توجه به یکسان‌بودن دمای دو ظرف، میانگین تندی مولکول‌های آب در دو ظرف برابر است.

پ) جهت جاری‌شدن انرژی گرمایی را دمای مواد مشخص می‌کند و نه جرم آن‌ها! با توجه به این‌که دمای دو نمونه یکسان است، بین آن‌ها انرژی گرمایی مبادله نمی‌شود.

ت) با مخلوط‌کردن دو ظرف، نمونه‌ای با جرم بیشتر و دمای یکسان نسبت به نمونه‌های اولیه به دست می‌آید. انرژی گرمایی با جرم نمونه رابطهٔ مستقیم دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۷ درون یک ظرف فلزی، ۲۰۰ گرم آب ($c_{H_2O} = 4/2\ J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$) وجود دارد. اگر به این سامانه، ۹/۳۸ کیلوژول گرما داده شود، دمای مجموعه (ظرف و آب)، از $25\ ^\circ C$ به $32\ ^\circ C$ می‌رسد. ظرفیت گرمایی ظرف فلزی چند $J.^\circ C^{-1}$ است؟

۱) ۵۰
۲) ۱۳۴
۳) ۵۰۰
۴) ۱۳۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نکته مقدار گرمای مبادله‌شده در یک فرایند را می‌توان از رابطه‌های زیر به دست آورد:

$Q = C\Delta\theta \xrightarrow{C = mc} Q = mc\Delta\theta$

گام اول: محاسبهٔ مقدار گرمای جذب‌شده توسط آب: $Q_{H_2O} = mc\Delta\theta = 200 \times 4/2 \times (32-25) = 5880\ J = 5/88\ kJ$

گام دوم: محاسبهٔ مقدار گرمای جذب‌شده توسط ظرف فلزی: $Q_{ظرف} = Q_{کل} - Q_{H_2O} = 9/38 - 5/88 = 3/5\ kJ = 3500\ J$

گام سوم: محاسبهٔ ظرفیت گرمایی ظرف فلزی: $\text{ظرفیت گرمایی} = \frac{Q}{\Delta\theta} = \frac{3500}{7} = 500\ J.^\circ C^{-1}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۸ کدام گزینه در مورد یخچال صحرایی نادرست است؟

۱) دو ظرف سفالی درون یکدیگر قرار دارند و میان آن‌ها را با شن خیس پر می‌کنند.

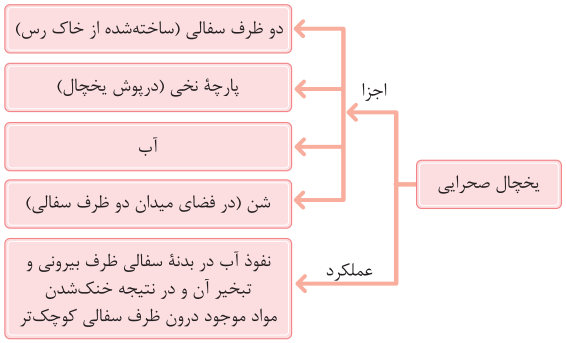
۲) درپوش آن یک پوشش نخی است که تهویه را به آسانی انجام می‌دهد.

۳) در آن، آب در بدنهٔ سفالی ظرف بیرونی نفوذ کرده و به آرامی تبخیر می‌شود.

۴) اساس خنک‌شدن محتویات درون آن، فرایند $H_2O(l) \rightarrow H_2O(g) + 44/1\,kJ$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تبخیر آب از سطح بیرونی ظرف سفالی طبق معادلهٔ $H_2O(l) + 44/1\,kJ \rightarrow H_2O(g)$، باعث جذب گرما و کاهش دمای محفظهٔ درون ظرف شده و به این ترتیب، غذای درون آن را خنک می‌کند. (تبخیر آب، گرماگیر است و نه گرماده!)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۹ در کدام واکنش‌های زیر، پایداری فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها است؟

$\Delta H < 0$

الف) واکنش بین گازهای نیتروژن و هیدروژن و تولید هیدرازین

ب) تشکیل کربن مونوکسید از عناصر سازنده

پ) تشکیل نیتروژن مونوکسید از عناصر سازنده

ت) تجزیهٔ آب‌اکسیژنه به آب و گاز اکسیژن

۱) «ب» ـ «ت»
۲) «پ» ـ «ت»
۳) «الف» ـ «پ»
۴) «الف» ـ «ب»

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته لیست همهٔ فرایندهای گرماده و گرماگیر کتاب درسی:

فرایندهای گرماگیر ($\Delta H > 0$)	فرایندهای گرماده ($\Delta H < 0$)
۱) تغییر حالت فیزیکی در فرایندهای ذوب، تبخیر و تصعید (فرازش)	۱) تغییر حالت فیزیکی در فرایندهای انجماد، میعان و چگالش
۲) واکنش فتوسنتز: $6CO_2(g)+6H_2O(l) \rightarrow C_6H_{12}O_6(s)+6O_2(s)$	۲) همهٔ واکنش‌های سوختن (مانند سوختن گاز هیدروژن، کربن، هیدروکربن‌ها و...)
۳) انحلال آمونیوم نیترات در آب: $NH_4NO_3(s) \xrightarrow{\text{آب}} NH_4^+(aq)+NO_3^-(aq)$	۳) انحلال کلسیم کلرید در آب: $CaCl_2(s) \xrightarrow{\text{آب}} Ca^{2+}(aq)+2Cl^-(aq)$
۴) تجزیهٔ N_2O_4 به NO_2: $N_2O_4(g) \rightarrow 2NO_2(g)$	۴) واکنش فلزهای گروه اول با گاز کلر: $2M(s)+Cl_2(g) \rightarrow 2MCl(s)$ (M: گروه اول)
۵) تولید اوزون از گاز اکسیژن: $3O_2(g) \rightarrow 2O_3(g)$	۵) تشکیل گاز HCl از گازهای H_2 و Cl_2: $H_2(g)+Cl_2(g) \rightarrow 2HCl(g)$
۶) تشکیل گاز NO از گازهای N_2 و O_2: $N_2(g)+O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$	۶) تشکیل گاز NH_3 از گازهای H_2 و N_2 (فرایند هابر): $N_2(g)+3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$
۷) تشکیل N_2H_4 (هیدرازین) از N_2 و H_2: $N_2(g)+2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(g)$	۷) تشکیل آمونیاک از هیدرازین و هیدروژن: $N_2H_4(g)+H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$
۸) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید جامد: $H_2(g)+I_2(s) \rightarrow 2HI(g)$	۸) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید: $2H_2O_2(aq) \rightarrow 2H_2O(l)+O_2(g)$
	۹) واکنش گازهای CO و NO: $2CO(g)+2NO(g) \rightarrow 2CO_2(g)+N_2(g)$
	۱۰) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید گازی: $H_2(g)+I_2(g) \rightarrow 2HI(g)$

در واکنش‌های گرماده، سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است و در نتیجه پایداری فراورده‌ها بیشتر است. در بین واکنش‌های داده‌شده، «ب» و «ت» گرماده هستند.

ب) $2C+O_2 \rightarrow 2CO$

ت) $2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O+O_2$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۰ با توجه به معادله‌های زیر، کدام مطلب نادرست است؟ $(H=۱, N=۱۴, O=۱۶, Ca=۴۰, Cl=۳۵/۵ : g.mol^{-1})$

$$(I)\ CaCl_۲(s) \xrightarrow{\text{آب}} Ca^{۲+}(aq) + ۲Cl^-(aq) \qquad \Delta H = -۸۳\ kJ$$

$$(II)\ NH_۴NO_۳(s) \rightarrow NH_۴^+(aq) + NO_۳^-(aq) \qquad \Delta H = +۲۶\ kJ$$

۱) از انحلال نمک آمونیوم نیترات در آب، برای سردکردن موضع آسیب‌دیده در بدن استفاده می‌شود.

۲) روند تغییرات انحلال‌پذیری نمک فرایند (II) نسبت به دما، مشابه بسیاری از نمک‌ها مانند $KNO_۳$ و KCl است.

۳) با انحلال ۰/۲ مول کلسیم کلرید در آب، ۱۶/۶ kJ گرما آزاد می‌شود.

۴) با ریختن هم‌زمان ۳/۳۳ گرم کلسیم کلرید و ۸ گرم آمونیوم نیترات در مقدار کافی آب، دمای آب افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

بسته‌های گرمازا و سرمازا:

حل‌شدن (انحلال) برخی از ترکیب‌های یونی در آب گرماگیر و انحلال برخی دیگر از این ترکیب‌ها در آب گرماده است. اساس کار بسته‌های گرمازا و سرمازایی که ورزشکاران برای درمان آسیب‌دیدگی‌های خود استفاده می‌کنند، **انحلال یک حل‌شوندهٔ یونی** (ترکیب یونی) در آب است. در واقع هر بسته، یک کیسهٔ پلاستیکی است که درون آن بستهٔ کوچکی آب همراه با مقدار معینی از یک جامد یونی وجود دارد. ضربه‌زدن یا فشاردادن کیسهٔ پلاستیکی باعث پاره‌شدن بستهٔ آب شده و جامد یونی در آن حل می‌شود؛ انحلالی که باعث ردوبدل گرما با محیط می‌شود.

مثال انحلال کلسیم کلرید $(CaCl_۲)$ در آب گرماده است، به طوری که بر اثر انحلال ۱ مول از این ترکیب در آب، ۸۳ کیلوژول گرما آزاد می‌شود؛ در نتیجه بر اثر انحلال این نمک در آب، دمای محلول افزایش می‌یابد و گرما به سرعت به بدن ورزشکار منتقل می‌شود.

$$CaCl_۲(s) \xrightarrow{\text{درآب}} Ca^{۲+}(aq) + ۲Cl^-(aq) + ۸۳\ kJ \qquad \Delta H < ۰$$

مثال انحلال آمونیوم نیترات $(NH_۴NO_۳)$ در آب گرماگیر است، به طوری که برای انحلال ۱ مول از این ترکیب در آب، ۲۶ کیلوژول گرما باید جذب شود؛ در نتیجه بر اثر انحلال این نمک در آب، دمای محلول کاهش می‌یابد. به همین خاطر از آمونیوم نیترات در بسته‌های سرمازا استفاده می‌شود.

$$NH_۴NO_۳(s) + ۲۶\ kJ \xrightarrow{\text{درآب}} NH_۴^+(aq) + NO_۳^-(aq) \qquad \Delta H > ۰$$

انحلال کلسیم کلرید در آب ← گرماده ← دمای بسته بالا می‌رود. ← بسته‌های گرمازا

انحلال آمونیوم نیترات در آب ← گرماگیر ← دمای بسته کاهش می‌یابد. ← بسته‌های سرمازا

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): درس‌باکس بالا را ببینید.

گزینهٔ (۲): انحلال آمونیوم نیترات در آب گرماگیر است و مانند اغلب نمک‌ها، انحلال‌پذیری آن با دما افزایش می‌یابد. (نمودار انحلال‌پذیری آن برحسب دما، صعودی است.)

گزینهٔ (۳): از انحلال هر مول کلسیم کلرید در آب، ۸۳ kJ گرما آزاد می‌شود؛ بنابراین مقدار گرمای آزادشده به ازای انحلال ۰/۲ مول از آن برابر با $۰/۲ \times ۸۳ = ۱۶/۶$ کیلوژول است.

گزینهٔ (۴): با اضافه‌شدن کلسیم کلرید، دمای آب افزایش و با اضافه‌شدن آمونیوم نیترات، دمای آب کاهش می‌یابد. *بالا بینیم زور کی بیشتره!*

$$۳/۳۳\ g\ CaCl_۲ \times \frac{۱\ mol\ CaCl_۲}{۱۱۱\ g\ CaCl_۲} \times \frac{۸۳\ kJ}{۱\ mol\ CaCl_۲} = ۲/۴۹\ kJ$$

مقدار گرمای آزادشده از انحلال $CaCl_۲$ که باعث افزایش دمای آب می‌شود.

$$۸\ g NH_۴NO_۳ \times \frac{۱\ mol\ NH_۴NO_۳}{۸۰\ g\ NH_۴NO_۳} \times \frac{۲۶\ kJ}{۱\ mol\ NH_۴NO_۳} = ۲/۶\ kJ$$

مقدار گرمای گرفته‌شده از انحلال $NH_۴NO_۳$ که باعث کاهش دمای آب می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

با توجه به این‌که مقدار گرمایی که به دلیل انحلال NH_4NO_3 از آب گرفته می‌شود، از مقدار گرمایی که به دلیل انحلال $CaCl_2$ در آب آزاد می‌شود، بیشتر است، در مجموع دمای آب کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۱ برای همهٔ پیوندهای موجود در کدام واکنش زیر، استفاده از واژهٔ «آنتالپی پیوند» مناسب‌تر از «میانگین آنتالپی پیوند» است؟

۱) $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$

۲) $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$

۳) $2HF(g) \rightarrow H_2(g) + F_2(g)$

۴) $2OF_2(g) \rightarrow O_2(g) + 2F_2(g)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نکته

در مورد پیوندهایی که در مولکول‌های دواتمی وجود دارد، مثل «$H-H$» در H_2، «$N\equiv N$» در N_2، «$O=O$» در O_2، «$Cl-Cl$» در Cl_2، «$Br-Br$» در Br_2، «$H-F$» در HF، «$H-Cl$» در HCl و ...، چون فقط همین یک نوع پیوند اشتراکی وجود دارد، دیگر نیازی به استفاده از واژهٔ «میانگین آنتالپی پیوند» نیست.

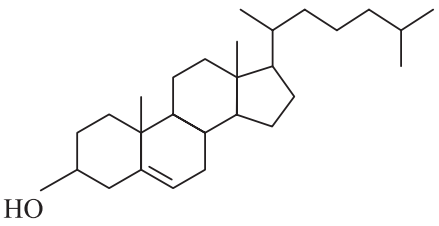
پیوندها

- نیازی به استفاده از واژهٔ میانگین آنتالپی پیوند نیست. (فقط همین یک نوع پیوند وجود دارد.)
  - $Cl-Cl$ ، $O=O$ ، $N\equiv N$ ، $H-H$
  - $H-Cl$ ، $H-F$ ، $Br-Br$ و ...
- برای آن‌ها میانگین آنتالپی پیوند به کار می‌رود (دو یا تعداد بیشتری از آن‌ها می‌توانند در یک مولکول وجود داشته باشند و یا همین نوع پیوند در مولکول‌های مختلف وجود دارد.)
  - $C-I$ ، $C-Br$ ، $C-Cl$ ، $C-F$
  - $C-C$ ، $C-H$ ، $O-H$ ، $N-H$
  - $C=O$ ، $C\equiv C$ ، $C=C$ و ...

در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴)، برای پیوندهای $O-H$، $N-H$ و $O-F$ باید از واژهٔ میانگین آنتالپی پیوند استفاده کرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۲ **کدام گزینه در مورد ساختار زیر که مرتبط با کلسترول می‌باشد، نادرست است؟**



۱) یک الکل سیرنشده با فرمول مولکولی $C_{۲۷}H_{۴۶}O$ است.

۲) مقدار اضافی آن در داخل دیوارهٔ رگ‌ها رسوب می‌کند که منجر به گرفتگی رگ‌ها و سکتهٔ قلبی می‌شود.

۳) شمار گروه‌های $-CH_۳$ در ساختار آن، با شمار این گروه‌ها در ۳، ۳ـ دی‌اتیل ـ ۲ ـ متیل پنتان برابر است.

۴) با توجه به آنتالپی پیوندها، در شرایط یکسان، پیوند $C-O$ در آن آسان‌تر از پیوندهای دیگر شکسته می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

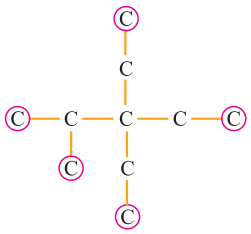
پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به این‌که در ساختار کلسترول، یک گروه هیدروکسیل (OH) و یک پیوند دوگانه ($C=C$) وجود دارد، کلسترول یک الکل سیرنشده می‌باشد. فرمول مولکولی آن هم $C_{۲۷}H_{۴۶}O$ است.

گزینهٔ (۲): کلسترول در داخل دیوارهٔ رگ‌ها رسوب می‌کند و منجر به گرفتگی رگ‌ها و سکتهٔ قلبی می‌شود.

گزینهٔ (۳): در ساختار کلسترول مانند آلکان داده‌شده، ۵ گروه $CH_۳$ وجود دارد:



۳، ۳ ـ دی‌اتیل ـ ۲ ـ متیل پنتان

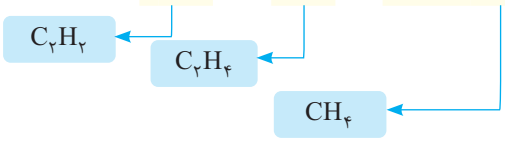
گزینهٔ (۴): در ساختار کلسترول، پیوندهای $C-C$، $C=C$، $C-H$، $C-O$ و $O-H$ وجود دارد. مقایسهٔ آنتالپی پیوند این پیوندها به صورت زیر است:

آنتالپی پیوند: $C-C < C-O < C-H < O-H < C=C$

در نتیجه، پیوند $C-C$ آسان‌تر از پیوندهای دیگر شکسته می‌شود و نه پیوند $C-O$!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۳ کدام مقایسه در مورد ارزش سوختی نخستین عضو آلکان‌ها (a)، آلکن‌ها (b) و آلکین‌ها (c) درست است؟



۱) $a > b > c$

۲) $a > c > b$

۳) $c > b > a$

۴) $b > c > a$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نکته

هنگام سوختن جرم‌های یکسانی از هیدروکربن‌های یک خانواده (مثلاً یک گرم)، گرمای حاصل از سوختن هیدروکربنی بیشتر است که جرم مولی کم‌تری دارد. به عبارت دیگر، در میان هیدروکربن‌های هم‌خانواده، ارزش سوختی هیدروکربن سبک‌تر بیشتر است:

ارزش سوختی $(kJ.g^{-1})$: $\underbrace{C_2H_4 > C_3H_6 > C_4H_8}_{\text{همگی از خانوادهٔ آلکن‌ها هستند.}}$ (اتن، پروپن، بوتن)

- در میان هیدروکربن‌ها، بیشترین ارزش سوختی مربوط به متان (CH_4) است.
- با توجه به جدول کتاب درسی، *بهتر است مقایسهٔ زیر را بلد باشین.*

در تعداد کربن برابر:
- قدرمطلق آنتالپی سوختن: آلکین > آلکن > آلکان
- ارزش سوختی: آلکل > آلکین > آلکن > آلکان

نخستین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها به ترتیب CH_4، C_2H_4 و C_2H_2 است. متان که در بین همهٔ هیدروکربن‌ها، بیشترین ارزش سوختی را دارد. در بین C_2H_4 و C_2H_2 که تعداد کربن برابری دارند، ارزش سوختی C_2H_4 (از خانوادهٔ آلکن‌ها) بیشتر است.

ارزش سوختی: $\underset{\text{متان}}{CH_4} > \underset{\text{اتن}}{C_2H_4} > \underset{\text{اتین}}{C_2H_2}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۴ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) اندازه‌گیری آنتالپی بسیاری از واکنش‌ها به روش گرماسنجی، امکان‌پذیر نیست.

۲) متان، از تجزیهٔ گیاهان به وسیلهٔ باکتری‌های هوازی در زیر آب تولید می‌شود.

۳) مرحلهٔ اول واکنش تولید آمونیاک به روش هابر، برخلاف مرحلهٔ دوم آن، یک واکنش گرماده است.

۴) نام تجاری آب‌اکسیژنه، هیدروژن پراکسید است و تهیهٔ این ماده از واکنش مستقیم هیدروژن و اکسیژن، امکان‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۱) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۲): متان از تجزیهٔ گیاهان به وسیلهٔ باکتری‌های بی‌هوازی در زیر آب تولید می‌شود.

گزینهٔ (۳):

واکنش تولید آمونیاک: $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ (گرماده)

← دومرحله‌ای

← مرحلهٔ اول: $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(g)$ (گرماگیر) ← گرمای واکنش را نمی‌توان به طور تجربی محاسبه کرد.

← مرحلهٔ دوم: $N_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ (گرماده) ← گرمای واکنش را می‌توان به طور تجربی محاسبه کرد.

گزینهٔ (۴): *برعکس گفته!* نام تجاری هیدروژن پراکسید (H_2O_2)، آب‌اکسیژنه است!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۵ در دما و فشار ثابت، با توجه به واکنش‌های زیر و مقدار ΔH آن‌ها،

I) $FeO(s)+H_2(g)\rightarrow Fe(s)+H_2O(g)$ $\quad\Delta H=-240/5\ kJ$

II) $3FeO(s)+\frac{1}{2}O_2(g)\rightarrow Fe_3O_4(s)$ $\quad\Delta H=-317/5\ kJ$

III) $2H_2(g)+O_2(g)\rightarrow 2H_2O(g)$ $\quad\Delta H=-484\ kJ$

به ازای تشکیل ۵ لیتر گاز هیدروژن در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۲۵ مول بر لیتر باشد، طی واکنش $3Fe(s)+4H_2O(l)\rightarrow Fe_3O_4(s)+4H_2(g)$، چند کیلوژول گرما بین سامانه و محیط مبادله می‌شود؟ (گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب در این شرایط برابر ۴۱ kJ است.)

۱) ۳۲/۳ ۲) ۱۶۲

۳) ۴۰/۵ ۴) ۱۲۹/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با استفاده از قانون هس، آنتالپی واکنش مورد نظر را به دست می‌آوریم:

I) $FeO(s)+H_2(s)\rightarrow Fe(s)+H_2O(g)$, $\Delta H_1\times -3$

II) $3FeO(s)+\frac{1}{2}O_2(g)\rightarrow Fe_3O_4(g)$, $\Delta H_2\times 1$

III) $2H_2(g)+O_2(g)\rightarrow 2H_2O(g)$, $\Delta H_3\times\frac{-1}{2}$

IV) $H_2O(l)\rightarrow H_2O(g)$, $\Delta H_4\times 4$

واکنش نهایی: $3Fe(s)+4H_2O(l)\rightarrow Fe_3O_4(s)+4H_2(g)$

$$\Delta H_{\text{نهایی}}=-3\Delta H_1+\Delta H_2-\frac{\Delta H_3}{2}+4\Delta H_4$$

$$=-3\times(-240/5)-317/5-(\frac{-484}{2})+4\times 41$$

$$=721/5-317/5+242+164=810\ kJ$$

در نهایت، مقدار گرمای آزادشده به ازای تولید ۵ لیتر گاز H_2 را به دست می‌آوریم:

$$5\ L\ H_2\times\frac{1\ mol\ H_2}{25\ L\ H_2}\times\frac{810\ kJ}{4\ mol\ H_2}=40/5\ kJ$$

کنکور

با توجه به واکنش‌های زیر:

آ) $A(g)+2B(g)\rightarrow C(g)$ $\quad\Delta H=-115\ kJ$

ب) $C(g)+D(g)+2B(g)\rightarrow 2E(g)$ $\quad\Delta H=+52\ kJ$

پ) $2D(g)\rightarrow A(g)+2E(g)$ $\quad\Delta H=-20\ kJ$

با گرمای آزادشده ضمن تشکیل یک مول $D(g)$ در واکنش $3A(g)+4E(g)\rightarrow 2C(g)+3D(g)$، به تقریب چند گرم آب با دمای $30\ ^\circ C$ را می‌توان در فشار ۱ atm به جوش آورد؟ ($c_{\text{آب}}=4/2\ J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$)

(سؤال ۲۱۶ کنکور ریاضی ۱۳۹۳ (خارج از کشور))

۱) ۱۲۶/۷ ۲) ۱۶۶/۷

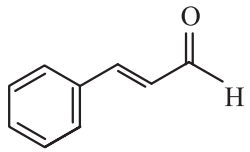
۳) ۲۶۸/۳ ۴) ۲۷۹/۳

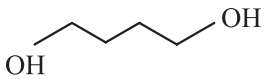
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۶ با توجه به ترکیب‌های داده‌شده، کدام مورد درست است؟ $(O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

I) دی‌اتیل اتر

II) ۲ ـ هگزانون

III) 

IV) 

۱) ترکیب (I) با بوتانول ایزومر است و نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به آن دارد.

۲) درصد جرمی اکسیژن در ترکیب (II) کم‌تر از ترکیب (III) است.

۳) به ازای سوختن جرم برابری از ترکیب (II) و بنزآلدهید، میزان CO_2 تولیدی بنزآلدهید بیشتر است.

۴) شمار گروه‌های CH_2 در ساختار ترکیب‌های (II) و (IV) برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فرمول مولکولی ترکیب I (اتر ۴کربنی) مانند بوتانول (الکل ۴کربنی) به صورت $C_4H_{10}O$ است؛ پس این دو ترکیب، ایزومر یکدیگر محسوب می‌شوند، اما در بین الکل‌ها و اترهای هم‌کربن، نقطهٔ جوش الکل‌ها بالاتر است؛ زیرا به دلیل داشتن پیوند $H-O$، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارند.

نکته الکل‌ها و اترهایی که تعداد کربن برابر دارند به شرطی که هر دو یک‌عاملی و سیرشده باشند، ایزومر یکدیگرند. فرمول عمومی الکل‌ها و اترهای یک‌عاملی سیرشده با n اتم کربن به صورت $C_nH_{2n+2}O$ است.

CH_3-CH_2-OH ، CH_3-O-CH_3

گزینهٔ (۲): ۲ ـ هگزانون یک کتون ۶ کربنه است که شمارهٔ کربن گروه کربونیل آن برابر ۲ می‌باشد:



فرمول مولکولی ترکیب (III) به صورت C_9H_8O است.

هر دو ترکیب، یک اتم اکسیژن دارند، اما جرم مولی ۲ـ هگزانون کم‌تر است، پس درصد جرمی اکسیژن در ۲ـ هگزانون بیشتر می‌باشد:

$$\text{درصد جرمی } O = \frac{\text{جرم } O}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100 \xrightarrow{\text{جرم O ثابت}} \text{درصد جرمی} \propto \frac{1}{\text{جرم مولی ترکیب}}$$

گزینهٔ (۳): فرمول مولکولی ترکیب (II) و بنزآلدهید به ترتیب به صورت $C_6H_{12}O$ و C_7H_6O است.

$$C_6H_{12}O \sim 6CO_2$$
$$1\ mol = 100\ g \quad 6\ mol = 6\times 44 = 264\ g$$
$$C_7H_6O \sim 7CO_2$$
$$1\ mol = 106\ g \quad 7\ mol = 7\times 44 = 308\ g$$

اگر جرم هر دو ترکیب را ۱۰۰ گرم در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\text{ترکیب (II)}: 100\ g \times \frac{264\ g\ CO_2}{100\ g} = 264\ g\ CO_2$$

$$\text{بنزآلدهید}: 100\ g \times \frac{308\ g\ CO_2}{106\ g} = 290/5\ g\ CO_2$$

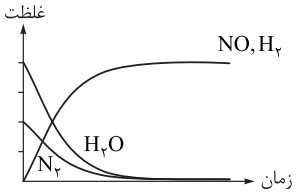
گزینهٔ (۴): در ساختار ترکیب (II)، ۳ گروه CH_2 و در ساختار ترکیب (IV)، ۴ گروه CH_2 وجود دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

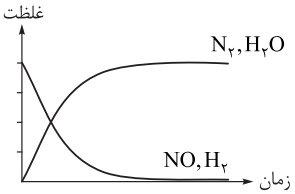
۱۲۷ **رابطهٔ زیر، برای تغییر غلظت مولی مواد گازی شرکت‌کننده در یک واکنش در یک بازهٔ زمانی معین، برقرار است. اگر این رابطه، معادل سرعت واکنش باشد، کدام نمودار را می‌توان به تغییر غلظت مواد در این واکنش با گذشت زمان نسبت داد؟**

$$\frac{\Delta[N_2]}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta[NO]}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\Delta[H_2O]}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta[H_2]}{\Delta t}$$

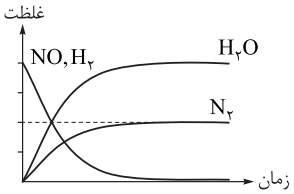
۱)



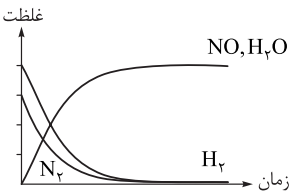
۲)



۳)



۴)



پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به این‌که رابطهٔ داده‌شده، معادل سرعت واکنش است، NO و H_2 با تغییرات غلظت منفی، واکنش‌دهنده و N_2 و H_2O با تغییرات غلظت مثبت، فراورده هستند.

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\overbrace{\Delta[N_2]}^{\text{فراورده}}}{\Delta t} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{\Delta[NO]}{\Delta t}}_{\text{واکنش‌دهنده}} = \frac{1}{2}\frac{\overbrace{\Delta[H_2O]}^{\text{فراورده}}}{\Delta t} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{\Delta[H_2]}{\Delta t}}_{\text{واکنش‌دهنده}}$$

از طرفی، ضرایب عددی در مخرج هر کسر، در واقع نشان‌دهندهٔ ضریب استوکیومتری مادهٔ مورد نظر است:

$$2NO(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2(g) + 2H_2O(g)$$

با توجه به ضرایب مواد، در یک بازهٔ زمانی معین، میزان تغییرات غلظت NO، H_2 و H_2O یکسان بوده و دوبرابر میزان تغییر غلظت N_2 است.

تغییر غلظت آن‌ها برابر و نمودار نزولی $\Rightarrow$ واکنش‌دهنده $\rightarrow 2NO$ و $2H_2$

تغییر غلظت H_2O، دوبرابر N_2 و نمودار صعودی $\Rightarrow$ فراورده $\rightarrow 2H_2O$ و N_2

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۸ در واکنش سوختن کامل یک ترکیب آلی اکسیژن‌دار، سرعت متوسط تولید بخار آب، $۳/۶\ g.s^{-1}$ و سرعت متوسط مصرف گاز اکسیژن، $۳۰\ mol.min^{-1}$ است. این ترکیب کدام می‌تواند باشد؟ $(H=۱, O=۱۶ : g.mol^{-1})$

۱) بنزآلدهید
۲) ۲ ـ هپتانون
۳) بنزوئیک اسید
۴) اتانول

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نسبت سرعت تولید و مصرف مواد برحسب مول بر زمان، با نسبت ضریب استوکیومتری آن‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش با هم برابر است:

$$aA \rightarrow bB \quad \frac{\bar{R}(A)}{\bar{R}(B)}=\frac{a}{b}$$

پس کافی است با توجه به داده‌های سؤال نسبت $\bar{R}(O_۲)$ به $\bar{R}(H_۲O)$ را حساب کرده و سپس ببینیم در معادلهٔ واکنش سوختن کدام ماده، نسبت محاسبه‌شده با نسبت ضریب استوکیومتری $O_۲$ به $H_۲O$ برابر است:

$$\bar{R}(H_۲O)=۳/۶\ g/s\times\frac{۱\ mol}{۱۸\ g}\times\frac{۶۰\ s}{۱\ min}=۱۲\ mol.min^{-۱}$$

$$\frac{\bar{R}(O_۲)}{\bar{R}(H_۲O)}=\frac{۳۰}{۱۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۱) سوختن کامل بنزآلدهید:

$$C_۷H_۶O+۸O_۲ \rightarrow ۷CO_۲+۳H_۲O$$

$$\frac{\bar{R}(O_۲)}{\bar{R}(H_۲O)}=\frac{۸}{۳}$$

۲) سوختن کامل ۲ـ هپتانون:

$$C_۷H_{۱۴}O+۱۰O_۲ \rightarrow ۷CO_۲+۷H_۲O$$

$$\frac{\bar{R}(O_۲)}{\bar{R}(H_۲O)}=\frac{۱۰}{۷}$$

۳) سوختن کامل بنزوئیک اسید:

$$C_۷H_۶O_۲+\frac{۱۵}{۲}O_۲ \rightarrow ۷CO_۲+۳H_۲O$$

$$\frac{\bar{R}(O_۲)}{\bar{R}(H_۲O)}=\frac{\frac{۱۵}{۲}}{۳}=\frac{۱۵}{۶}=\frac{۵}{۲}=۲/۵ \quad ✓$$

۴) سوختن کامل اتانول:

$$C_۲H_۶O+۳O_۲ \rightarrow ۲CO_۲+۳H_۲O$$

$$\frac{\bar{R}(O_۲)}{\bar{R}(H_۲O)}=\frac{۳}{۳}=۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۹ مقداری NOBr به ظرفی به حجم ۴ لیتر اضافه شده تا واکنش $2NOBr(g) \rightarrow 2NO(g) + Br_2(g)$ انجام شود. کدام موارد زیر درست است؟ $(Br = 80, O = 16, N = 14 : g.mol^{-1})$

الف) با مصرف ۴۴۰ g واکنش‌دهنده در حضور کاتالیزگر، مقدار Br_2 تولیدی می‌تواند برابر ۳۵۰ g باشد.

ب) شیب نمودار جرم ـ زمان NO تا لحظهٔ اتمام واکنش بیشتر از Br_2 است.

پ) اگر پس از گذشت ۲۰ ثانیه از آغاز واکنش، اختلاف جرم فراورده‌ها ۲۰ g باشد، سرعت مصرف NOBr، $1/2\ mol.min^{-1}$ است.

ت) در صورتی که ΔH برای این واکنش مثبت باشد، با کاهش دما، سرعت متوسط واکنش کاهش می‌یابد.

۱) «الف» ـ «ت»
۲) «پ» ـ «ت»
۳) «الف» ـ «ب»
۴) «ب» ـ «پ»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) حساب می‌کنیم به ازای مصرف ۴۴۰ گرم NOBr، چند گرم Br_2 تولید می‌شود:

$$440\ g\ NOBr \times \frac{1\ mol\ NOBr}{110\ g\ NOBr} \times \frac{1\ mol\ Br_2}{2\ mol\ NOBr} \times \frac{160\ g\ Br_2}{1\ mol\ Br_2} = 320\ g\ Br_2$$

کاتالیزگر فقط سرعت واکنش را زیاد می‌کند و بر مقدار نهایی فراورده، تأثیری ندارد؛ پس چه در غیاب و چه در حضور کاتالیزگر، نمی‌توان بیشتر از ۳۲۰ گرم Br_2 تولید کرد.

ب) ضریب استوکیومتری NO، دوبرابر Br_2 است؛ پس می‌توان گفت تا قبل از اتمام واکنش، شیب نمودار مول ـ زمان NO بیشتر از Br_2 می‌باشد، اما دقت کنید که جرم ۲ مول NO کم‌تر از جرم ۱ مول Br_2 است؛ پس اگر نمودار جرم ـ زمان را رسم کنیم، شیب نمودار NO کم‌تر خواهد شد.

پ) با توجه به معادلهٔ واکنش، با مصرف ۲ مول NOBr، ۲ مول NO $(2 \times 30 = 60\ g)$ و ۱ مول Br_2 (۱۶۰ g) تولید می‌شود؛ یعنی به ازای مصرف ۲ مول $NOBr_2$، اختلاف جرم فراورده‌ها، $160 - 60 = 100$ گرم است. به ازای ۲۰ گرم اختلاف جرم خواهیم داشت:

$$20\ g \times \frac{2\ mol\ NOBr}{100\ g} = 0/4\ mol\ NOBr_2$$

$$\bar{R}(NOBr) = \left| \frac{\Delta n(NOBr)}{\Delta t} \right| = \frac{0/4\ mol}{20\ s} \times \frac{60\ s}{1\ min} = 1/2\ mol.min^{-1}$$

ت) با کاهش دما، سرعت همهٔ واکنش‌ها (چه گرماگیر و چه گرماده!) کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۰ کدام مورد نادرست است؟

۱) ریزمغذی‌ها ترکیبات آلی سیرنشده‌ای هستند که در حفظ سلامت بافت‌ها دخالت دارند، اما نقش کامل آن‌ها هنوز به طور دقیق مشخص نشده است.

۲) لیکوپن در هندوانه و گوجه‌فرنگی وجود دارد و ترکیبی محلول در آب است.

۳) سهم تولید گاز CO_2 در ردپای غذا، بیشتر از سوختن سوخت‌ها در خودروها و کارخانه‌هاست.

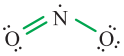
۴) اتم نیتروژن در مولکول‌های NO و NO_2، از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نکرده است و این مولکول‌ها، رادیکال محسوب می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ لیکوپن $(C_{40}H_{56})$ نوعی هیدروکربن و در آب، نامحلول است.

در مورد گزینهٔ (۴) دقت کنید که مجموع شمار الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها در NO و NO_2 عددی فرد است که نشان می‌دهد یکی از اتم‌ها هشت‌تایی نمی‌شود و این مولکول‌ها، رادیکال به حساب می‌آیند:

$NO \Rightarrow ۵+۶=۱۱ \Rightarrow$ 

$NO_2 \Rightarrow ۵+(۲\times۶)=۱۷ \Rightarrow$ 

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه‌دوازدهم ـ مرحله‌سوم ـ ۲۰ شهریور ۱۴۰۵

پایه دوازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی‌ناو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی ـ مصطفی کرمی محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیك	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ یاسر راش ـ پارسا طاهری‌منزه ـ یاسر عبداللهی ـ آرمین عظیمی ـ سعید فراهانی ـ امیر قاسمی‌پور محمد قهرمانی‌نژاد ـ محسن مجنونی ـ محمد مرادی ـ مرتضی نصیرزاده ـ امیرحسین مسلمی ـ عرفان نریمانی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	عاطفه خان‌محمدی منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
هندسه	کیوان صارمی	کیوان صارمی	کیوان صارمی	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ماهک کناره ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصورزرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری ماهان فنی‌فر
فیزیك	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمدجواد سورچی مریم گلی‌حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی امیر محمودی انزابی سعید محبی احسان محمدی ادریس محمدی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمدمهدی کریمیان	سوران اشرافی عرشیا شفیعی علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان دوازدهم

۱۳۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^5 + 2x^4 + x^2 - x - 1$ بر $x + 2$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $x - a$ برابر $P(a)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

-2 را به جای x قرار می‌دهیم:

باقی‌مانده: $r = \underbrace{(-2)^5 + 2(-2)^4}_{\text{صفر است.}} + (-2)^2 - (-2) - 1 = 5$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x+1$ به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-x-2 کدام است؟

۱) $\frac{5-x}{3}$ ۲) $\frac{5+x}{3}$ $(x-2)(x+1)$

۳) $3-x$ ۴) $3+x$

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته در تقسیم چندجمله‌ای‌ها، درجهٔ باقی‌مانده، همواره از درجهٔ مقسوم‌علیه کوچک‌تر است، بنابراین اگر مقسوم‌علیه چندجمله‌ای درجه‌دوم باشد، چندجمله‌ای باقی‌مانده حداکثر درجه‌یک و به فرم $\alpha x+\beta$ (α می‌تواند صفر باشد) است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق درس‌باکس پاسخ قبل، از فرض سؤال نتیجه می‌شود که:

$$P(2)=1$$

$$P(-1)=2$$

گام دوم: حالا طبق نکتهٔ بالا، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای x^2-x-2، چندجمله‌ای $r(x)=\alpha x+\beta$ در نظر می‌گیریم:

$$P(x)=(x-2)(x+1)q(x)+\alpha x+\beta$$

در تساوی بالا، $x=2$ و $x=-1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P(2)=2\alpha+\beta \xrightarrow{P(2)=1} 2\alpha+\beta=1$$

$$P(-1)=-\alpha+\beta \xrightarrow{P(-1)=2} \alpha-\beta=-2$$

گام سوم: از حل دستگاه بالا به دست می‌آید که:

$$\alpha=-\frac{1}{3}\ ,\ \beta=\frac{5}{3}$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم، $\frac{5-x}{3}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 - 2$ مفروض است. تعداد نقاط مشترک نمودارهای دو تابع f و f^{-1} کدام است؟

اکیداً صعودی است.

۱) ۳

۲) ۲

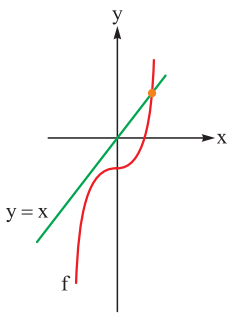
۳) ۱

۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، نمودارهای توابع f و f^{-1} یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند.

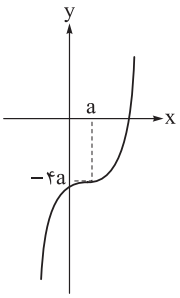
پاسخ خیلی تشریحی طبق نکتهٔ بالا کافی است نمودار تابع f و خط $y = x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم:



مطابق شکل بالا تعداد نقاط مشترک نمودار تابع f و خط $y = x$ برابر ۱ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۴ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x-b)(x^۲-ax+b)$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

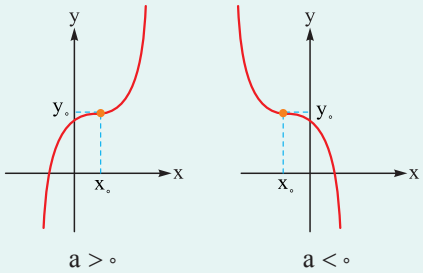
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نمودار تابع $f(x)=a(x-x_۰)^۳+y_۰$:

در این نمودارها:

- اگر $a>۰$ باشد، تابع اکیداً صعودی و اگر $a<۰$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.
- نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ مرکز تقارن نمودار تابع است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به فرم چندجمله‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=(x-b)(x^۲-ax+b)=x^۳-(a+b)x^۲+b(a+۱)x-b^۲$$

از طرفی مطابق نمودار، ضابطهٔ تابع f باید $f(x)=(x-a)^۳-۴a$ باشد.

گام دوم: حالا باید ضابطه‌های به‌دست‌آمده برای تابع، یکسان باشند:

$$x^۳-(a+b)x^۲+b(a+۱)x-b^۲=x^۳-۳ax^۲+۳a^۲x-a^۳-۴a$$

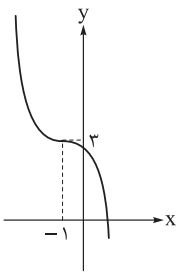
$$\Rightarrow \begin{cases} -(a+b)=-۳a \Rightarrow b=۲a \\ b(a+۱)=۳a^۲ \xrightarrow{b=۲a} ۲a(a+۱)=۳a^۲ \xrightarrow{a\neq ۰} ۲a+۲=۳a \Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

بنابراین $b=۴$ به دست می‌آید.

گام سوم: خواستهٔ سؤال برابر $a+b=۶$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۵ تابع درجه‌دوم f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-kx+k+۱$ و تابع خطی g مفروض‌اند. اگر نمودار تابع h با ضابطهٔ $h(x)=kg(x)-xf(x)$ مطابق شکل زیر باشد، مقدار $g(k)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $-\frac{۱۷}{۳}$

۳) $-\frac{۵}{۳}$

۴) $-\frac{۱۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از روی نمودار، ضابطهٔ تابع h باید $h(x)=-(x+۱)^۳+۳$ باشد.

دقت کنید که ضریب تک‌جمله‌ای $x^۲$ در ضابطهٔ تابع f برابر ۱ و در نتیجه، ضریب تک‌جمله‌ای $x^۳$ در ضابطهٔ تابع h برابر -۱ است:

$$\Rightarrow h(x)=-x^۳-۳x^۲-۳x+۲$$

گام دوم: حالا ضابطهٔ تابع g را $g(x)=\alpha x+\beta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$h(x)=kg(x)-xf(x)=k(\alpha x+\beta)-x(x^۲-kx+k+۱)$$

$$\Rightarrow h(x)=-x^۳+kx^۲+(k\alpha-k-۱)x+k\beta$$

گام سوم: حالا ضابطه‌های به‌دست‌آمده برای تابع h را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} k=-۳ \\ k\alpha-k-۱=-۳ \xrightarrow{k=-۳} -۳\alpha+۲=-۳ \Rightarrow \alpha=\frac{۵}{۳} \\ k\beta=۲ \xrightarrow{k=-۳} \beta=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

گام چهارم: در نتیجه، $g(x)=\frac{۵x-۲}{۳}$ است و داریم:

$$g(k)=g(-۳)=-\frac{۱۷}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۶ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=ax^4+x^3+(a+3)x^2+3x-8$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا است. نمودار کدام تابع از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $y=f(x)+7$
۲) $y=f(x-1)$
۳) $y=f(x)+6$
۴) $y=f(x+2)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته توابع چندجمله‌ای از درجهٔ زوج، روی $\mathbb{R}$ قطعاً غیریکنوا هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

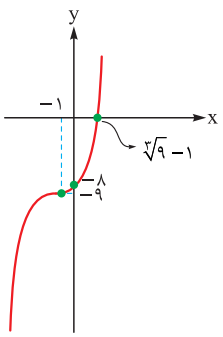
گام اول: طبق نکتهٔ بالا، واضح است که ضابطهٔ تابع f نباید چندجمله‌ای درجه‌چهار باشد:

$$\Rightarrow a=0$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2+3x-8$$

گام دوم: حالا با بازنویسی ضابطهٔ تابع، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=(x+1)^3-9$$



دقت کنید که طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع با محور x را به صورت زیر به دست آورده‌ایم:

$$\xrightarrow{y=0} (x+1)^3-9=0 \Rightarrow (x+1)^3=9 \Rightarrow x+1=\sqrt[3]{9} \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}-1$$

گام سوم: از آن‌جا که $1<\sqrt[3]{9}-1<2$ است، اگر نمودار تابع f را ۲ واحد به چپ انتقال دهیم، قطعاً نمودار حاصل از ناحیهٔ چهارم نخواهد گذشت، بنابراین در بین گزینه‌ها فقط نمودار تابع $y=f(x+2)$ است که از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x+۲)|x-۱|$ روی بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

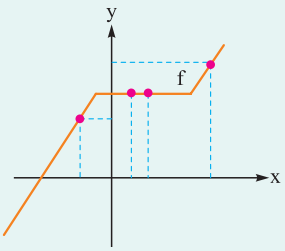
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

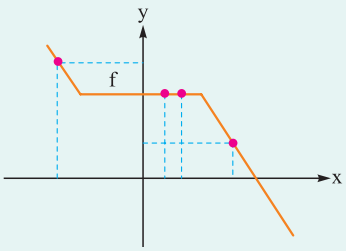
Hint نمودار رسم کن.

درس Box

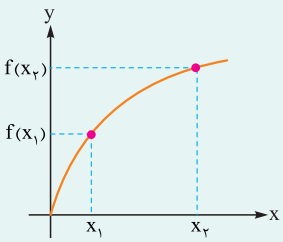
تابع صعودی: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) \le f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



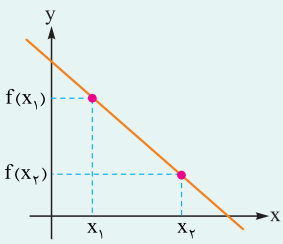
تابع نزولی: اگر برای هر نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) \ge f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.



تابع اکیداً صعودی: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) < f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



تابع اکیداً نزولی: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) > f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



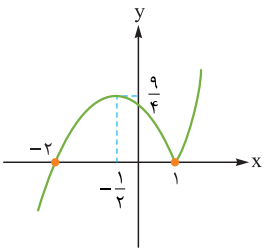
تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-(x+۲)(x-۱) & ; \quad x<۱\\ (x+۲)(x-۱) & ; \quad x\geq ۱\end{cases}$$



گام دوم: با توجه به نمودار تابع، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً نزولی است، بازهٔ $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$ است، در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $۱-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۸ تابع f با دامنهٔ $(-۴,+\infty)$ اکیداً نزولی است. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x+۱)>f(۱۰-۲x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات: فرض کنید که تابع f روی دامنه‌اش اکیداً یکنوا باشد، برای حل نامعادلهٔ $f(g(x))\geq f(h(x))$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{تابع f اکیداً نزولی است.}} g(x)\leq h(x)\\ \xrightarrow{\text{تابع f اکیداً صعودی است.}} g(x)\geq h(x)\end{cases}$$

در مواردی که دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی نباشد، شرط‌های $g(x)\in D_f$ و $h(x)\in D_f$ نیز اضافه می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق درس‌باکس، با در نظر گرفتن دامنهٔ تابع، باید نامساوی زیر را حل کنیم:

$$-۴<x+۱<۱۰-۲x$$

گام دوم: داریم:

$$\begin{cases}x+۱>-۴ \Rightarrow x>-۵\\ x+۱<۱۰-۲x \Rightarrow ۳x<۹ \Rightarrow x<۳\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۵<x<۳$$

گام سوم: بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $(-۵,۳)$ است که شامل $۳-(-۵)-۱=۷$ عدد صحیح است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۹ برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{\frac{5}{8}-x}$، بازهٔ $[a,b]$ است. حاصل عبارت a^2-b کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $-\frac{9}{8}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع $y=\sqrt{2x+1}$ با دامنهٔ $[-\frac{1}{2},+\infty)$ اکیداً صعودی است. تابع $y=-\sqrt{\frac{5}{8}-x}$ نیز با دامنهٔ $(-\infty,\frac{5}{8}]$ اکیداً صعودی است. دقت کنید که تابع $y=\sqrt{\frac{5}{8}-x}$ اکیداً نزولی و قرینهٔ آن اکیداً صعودی است. در نتیجه تابع f با دامنهٔ $[-\frac{1}{2},\frac{5}{8}]$ اکیداً صعودی است.

نکته اگر تابع f با دامنهٔ $[a,b]$ اکیداً یکنوا باشد، برد آن یکی از بازه‌های $[f(a),f(b)]$ یا $[f(b),f(a)]$ است:

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} R=[f(a),f(b)]\\ \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} R=[f(b),f(a)]\end{cases}$$

گام دوم: حالا طبق نکتهٔ بالا، برد تابع را حساب می‌کنیم:

$$R_f=[f(-\tfrac{1}{2}),f(\tfrac{5}{8})]=[-\sqrt{\tfrac{9}{8}},\sqrt{\tfrac{9}{4}}]\Rightarrow R_f=[-\tfrac{3}{2\sqrt{2}},\tfrac{3}{2}]$$

گام سوم: بنابراین $a=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ و $b=\frac{3}{2}$ و در نتیجه داریم:

$$a^2-b=\frac{9}{8}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{8}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۰ دامنهٔ تابع $y=f(x-1)$، بازهٔ $[-2,3]$ است. دامنهٔ تابع $y=2f(\frac{x}{3}+1)$ کدام است؟

۱) $[-9,6]$

۲) $[-6,9]$

۳) $[-3,12]$

۴) $[-12,3]$

مشاوره دقت کنید که دامنهٔ تابع، همواره محدودهٔ x است نه محدودهٔ عبارت داخل پرانتز. مثلاً در این سؤال، دامنهٔ تابع $y=f(x-1)$، محدودهٔ x است و محدودهٔ $x-1$ دامنهٔ تابع f است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تبدیل نمودار توابع:

	ضابطهٔ تبدیل	توضیح تبدیل	اثر روی نقطهٔ (x,y)
انتقال‌ها	$y=f(x)+k$ $y=f(x-k)$	انتقال عمودی: نمودار به اندازهٔ $\lvert k\rvert$ واحد به بالا (اگر $k>0$) یا به پایین (اگر $k<0$) منتقل می‌شود. انتقال افقی: نمودار به اندازهٔ $\lvert k\rvert$ واحد به راست (اگر $k>0$) یا به چپ (اگر $k<0$) منتقل می‌شود.	$(x,y+k)$ $(x+k,y)$
انعکاس‌ها	$y=-f(x)$ $y=f(-x)$	تقارن نسبت به محور x: نمودار نسبت به محور x قرینه می‌شود. تقارن نسبت به محور y: نمودار نسبت به محور y قرینه می‌شود.	$(x,-y)$ $(-x,y)$
انبساط و انقباض	$y=kf(x)$ $y=f(kx)$	انبساط/ انقباض عمودی: نمودار در راستای عمودی با ضریب $\lvert k\rvert$ کشیده (اگر $\lvert k\rvert>1$) یا فشرده (اگر $\lvert k\rvert<1$) می‌شود. (اگر $k<0$ باشد، تقارن نسبت به محور x نیز رخ می‌دهد.) انبساط / انقباض افقی: نمودار در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{\lvert k\rvert}$ فشرده (اگر $\lvert k\rvert>1$) یا کشیده (اگر $\lvert k\rvert<1$) می‌شود. (اگر $k<0$ باشد، تقارن نسبت به محور y نیز رخ می‌دهد.)	(x,ky) $(\frac{x}{k},y)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای رسم نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{3}+1)$ باید نمودار تابع $y=f(x-1)$ را ۲ واحد به چپ انتقال دهیم، سپس طول نقاط روی نمودار حاصل را در ۳ و عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم:

$$y=f(x-1) \xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد به چپ}} y=f(x+1)$$

$$y=f(x+1) \xrightarrow[\text{ضرب عرض نقاط در ۲}]{x\to\frac{x}{3}:\text{ضرب طول نقاط در ۳}} y=2f(\frac{x}{3}+1)$$

گام دوم: حالا همین عملیات را روی دامنهٔ تابع $y=f(x-1)$ انجام می‌دهیم تا دامنهٔ تابع $y=2f(\frac{x}{3}+1)$ به دست آید. دقت کنید که تبدیلات روی محور عمودی تأثیری روی دامنهٔ تابع ندارند:

$$[-2,3] \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} [-4,1] \xrightarrow{\text{ضرب طول نقاط در ۳}} [-12,3]$$

یه جور دیگه دامنهٔ تابع $y=f(x-1)$، بازهٔ $[-2,3]$ و در نتیجه دامنهٔ تابع $y=f(x)$، بازهٔ $[-3,2]$ است. حالا داریم:

$$y=2f(\frac{x}{3}+1):\ -3\le\frac{x}{3}+1\le 2 \Rightarrow -4\le\frac{x}{3}\le 1 \Rightarrow -12\le x\le 3$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۱ نقطهٔ $(-۱,۱)$ روی نمودار تابع $y=f(۱-\frac{x}{۲})$ به کدام نقطه روی نمودار تابع $y=۱+f(\frac{x+۱}{۲})$ تبدیل می‌شود؟

۱) $(۲,۰)$ ۲) $(۰,۰)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۲,۱)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

پیداکردن مختصات نقطه در نمودار تبدیل‌یافته:

گاهی اوقات مختصات یک نقطهٔ خاص مانند $(x_۰, y_۰)$ از نمودار $y=f(x)$ را داریم و می‌خواهیم مختصات جدید همان نقطه را پس از اعمال یک سری تبدیلات و رسیدن به نمودار $y=kf(ax+b)+h$ پیدا کنیم.

۱) **تبدیل مختصات y (تغییرات عمودی):** تغییرات عمودی به همان ترتیب روی $y_۰$ اعمال می‌شوند. ابتدا ضرب در k و سپس جمع با h.

$$y_{new}=ky_۰+h$$

۲) **تبدیل مختصات x (تغییرات افقی):** به صورت معکوس روی $x_۰$ اعمال می‌شوند، یعنی برای یافتن x_{new} باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$a\cdot x_{new}+b=x_۰ \Rightarrow x_{new}=\frac{x_۰-b}{a}$$

مثال نقطهٔ $(۴,۵)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد، مختصات این نقطه روی نمودار $y=۲f(۳x-۲)+۱$ کدام است؟

- اطلاعات اولیه: $y_۰=۵\ ,\ x_۰=۴$
- ضرایب تبدیل: $k=۲\ ,\ a=۳\ ,\ b=-۲\ ,\ h=۱$
- محاسبهٔ y جدید:

$$y_{new}=k\cdot y_۰+h=۲\times(۵)+۱=۱۰+۱=۱۱$$

- محاسبهٔ x جدید:

$$x_{new}=\frac{x_۰-b}{a}=\frac{۴-(-۲)}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲$$

پاسخ نهایی: مختصات نقطهٔ جدید، $(۲,۱۱)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطهٔ $(-۱,۱)$ را در تساوی $y=f(۱-\frac{x}{۲})$ قرار می‌دهیم:

$$-۱=f(۱-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=-۱$$

گام دوم: حالا ورودی تابع f در تساوی $y=۱+f(\frac{x+۱}{۲})$ را برابر $\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{x+۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۰$$

بنابراین با جای‌گذاری $x=۰$ در تساوی $y=۱+f(\frac{x+۱}{۲})$ داریم:

$$y=۱+f(\frac{۱}{۲})=۱-۱=۰$$

پس نقطهٔ $(-۱,۱)$ به مبدأ مختصات، نظیر می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۲ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۱-۲x & ; \quad x<۲\\ \frac{x}{۳}-۱ & ; \quad x\geq ۲\end{cases}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

نمودار کدام تابع حاصل می‌شود؟

۱) $y=\begin{cases}۶-۲x & ; \quad x<۲\\ \frac{x-۲}{۳} & ; \quad x\geq ۲\end{cases}$

۲) $y=\begin{cases}-۲(x+۱) & ; \quad x<۲\\ \frac{x+۲}{۳} & ; \quad x\geq ۲\end{cases}$

۳) $y=\begin{cases}۶-۲x & ; \quad x<۰\\ \frac{x-۲}{۳} & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$

۴) $y=\begin{cases}-۲(x+۱) & ; \quad x<۰\\ \frac{x+۲}{۳} & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا به جای همهٔ xهای ضابطهٔ تابع f، $x+۲$ قرار می‌دهیم:

$$f(x+۲)=\begin{cases}۱-۲(x+۲) & ; \quad x+۲<۲\\ \frac{x+۲}{۳}-۱ & ; \quad x+۲\geq ۲\end{cases} \Rightarrow f(x+۲)=\begin{cases}-۲x-۳ & ; \quad x<۰\\ \frac{x-۱}{۳} & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$$

گام دوم: در نهایت، نمودار تابع بالا را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

$$f(x+۲)+۱=\begin{cases}-۲x-۲ & ; \quad x<۰\\ \frac{x+۲}{۳} & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۳ **قرینهٔ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x+۲|x|$ نسبت به مبدأ مختصات را دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. مساحت سطح محدود به نمودارهای دو تابع f و g کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

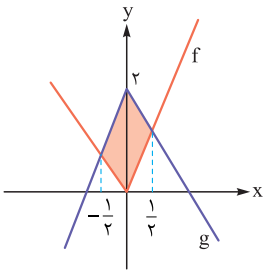
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات، نمودار تابع $y=-f(-x)$ است؛ بنابراین داریم:

$$g(x)=۲-f(-x)=۲-(-x+۲|-x|) \Rightarrow g(x)=\begin{cases}۳x+۲ & ; \quad x<۰\\ -x+۲ & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$$

گام دوم: حالا نمودارهای دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



متوازی‌الاضلاع مشخص‌شده در شکل بالا، سطح مورد نظر سؤال است.

گام سوم: حالا طول نقاط برخورد نمودارها را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{x<۰} -x=۳x+۲ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

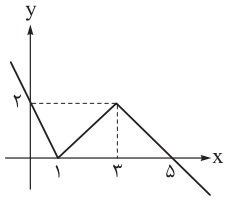
$$\xrightarrow{x>۰} ۳x=-x+۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع مشخص‌شده برابر است با:

$$S=۲(\frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{۲})=۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۴ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. تابع g با ضابطهٔ $g(x) = ۳ + f(۱-۲x)$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟



۱) $[-۱,۰]$

۲) $[-۵,-۱]$

۳) $[۰,۱]$

۴) $[۱,۵]$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: وضعیت یکنوایی دو تابع f و g مخالف هم است. به این معنی که تابع f در ابتدا نزولی، سپس صعودی و در انتها نزولی می‌شود. اما تابع g در ابتدا صعودی، سپس نزولی است و در انتها مجدداً صعودی می‌شود، بنابراین کافی است پیدا کنیم که بازهٔ $[۱,۳]$ روی نمودار تابع f به کدام بازه روی نمودار تابع g نظیر می‌شود.

گام دوم: یعنی کافی است محدودهٔ عبارت $۱-۲x$ را که ورودی تابع f است، برابر بازهٔ $[۱,۳]$ قرار دهیم:

$$۱ \le ۱-۲x \le ۳ \Rightarrow ۰ \le -۲x \le ۲ \Rightarrow -۱ \le x \le ۰$$

یعنی تابع g روی بازهٔ $[-۱,۰]$ اکیداً نزولی است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۵ ضابطهٔ تابع f کدام باشد تا نمودارهای دو تابع $y=|f(x)|$ و $y=|f(-f(x))|$ بر هم منطبق شوند؟

۱) $|x-1|$
۲) $|x+1|$
۳) $|x-1|-1$
۴) $|x+1|-1$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

کافیه که امتحان کنین.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ضابطه‌های گزینه‌های (۱) و (۲) بدیهی است که $|f(x)|=f(x)$ است، اما $|f(-f(x))|$ ضابطه‌ای متفاوت خواهد شد که قطعاً با $f(x)$ برابر نمی‌شود، پس یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) پاسخ صحیح سؤال است.

گام دوم: ضابطه‌های گزینه‌های (۳) و (۴) را امتحان می‌کنیم:

$$f(x)=|x-1|-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(x)|=||x-1|-1| \\ f(-f(x))=|1-|x-1|-1|-1=||x-1||-1=|x-1|-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f(-f(x))|=||x-1|-1|$$

$$f(x)=|x+1|-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(x)|=||x+1|-1| \\ f(-f(x))=|1-|x+1|+1|-1=|2-|x+1||-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f(-f(x))|=||x+1|-2|-1$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دوازدهم

۱۴۶ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\log ۵ & ۰\\ \log ۴ & \log ۴\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس AB چه‌قدر از $\log ۸$ بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

رد پای لگاریتم را در این فصل زیاد می‌بینید، به همین خاطر بهتر است همین‌جا قوانینش را مرور کنید:

۱) اگر $\log_a b=c$ باشد، می‌توانیم بنویسیم: $a^c=b$

۲) جمع و تفریق دو لگاریتم با مبناهای یکسان، به این‌صورت انجام می‌شود:

$$\log_a b+\log_a c=\log_a bc \quad \text{و} \quad \log_a b-\log_a c=\log_a \frac{b}{c}$$

۳) لگاریتم، توان روی عبارت جلویش را به عنوان ضریب به پشت خودش می‌برد؛ یعنی: $\log_a b^m=m\log_a b$

۴) لگاریتم، معکوسِ توان روی مبنایش را به عنوان ضریب به پشت خودش می‌برد؛ یعنی: $\log_{a^n} b=\frac{۱}{n}\log_a b$

۵) ترکیب دو قانون قبلی، *این‌پوری* می‌شود: $\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$

۶) در عبارت‌هایی مثل $a^{\log_b c}$ که در آن‌ها عدد به توان لگاریتم می‌رسد، می‌توانیم جای a و c را عوض کنیم:

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $\log ۴=\log ۲^۲$ همان $۲\log ۲$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\log ۵ & ۰\\ \underbrace{\log ۴}_{۲\log ۲} & \underbrace{\log ۴}_{۲\log ۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\log ۵+۲\log ۲ & ۲\log ۲\\ \log ۵+\log ۲ & \log ۲\end{bmatrix}$$

گام دوم: درایه‌ها را به کمک ویژگی‌های لگاریتم ساده‌تر می‌نویسیم:

- $\log ۲+\log ۵=\log(۲\times ۵)=\log ۱۰=۱$
- $۲\log ۲+۲\log ۵=۲\underbrace{(\log ۲+\log ۵)}_{\log ۱۰=۱}=۲$

پس $AB=\begin{bmatrix}۲ & ۲\log ۲\\ ۱ & \log ۲\end{bmatrix}$ و جمع درایه‌هایش می‌شود:

$$۳+۳\log ۲=۳+\log ۲^۳=۳+\log ۸$$

که ۳ واحد بیشتر از $\log ۸$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۷ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}=\begin{cases} i & i \text{ زوج} \\ j & i \text{ فرد} \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۲ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرم کلی یک ماتریس ۳×۳ به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

در درایه‌های آبی، i فرد و در درایه‌های قرمز، i زوج است؛ پس طبق فرمول $A_{۳\times ۳}=\begin{cases} i & i \text{ زوج} \\ j & i \text{ فرد} \end{cases}$ درایه‌های A به این صورت‌اند:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

گام دوم: حالا با داشتن A می‌توانیم $A^۲$ را حساب کنیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۱۲ & ۱۶ \\ ۸ & ۱۲ & ۱۶ \\ ۸ & ۱۲ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

که جمع درایه‌هایش می‌شود:

$$(۳\times ۸)+(۳\times ۱۲)+(۳\times ۱۶)=۱۰۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۸ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y+2x \\ y & x+2 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $X=BA$ مفروض‌اند. اگر به ازای هر ماتریس دلخواه $Y_{2\times 2}$، تساوی $XY-YX=\bar{O}$ برقرار باشد، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس A کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ماتریس اسکالر:

۱) ماتریس مربعی‌ای است در صورتی که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی‌اش صفر و درایه‌های روی قطر اصلی‌اش همگی مساوی باشند.

۲) در واقع ماتریس اسکالر، ماتریس قطری‌ای است که درایه‌های روی قطر اصلی‌اش مساوی‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تساوی $XY-YX=\bar{O}$ را به صورت $XY=YX$ که بنویسیم، از گفتهٔ سؤال می‌فهمیم ماتریس X با هر ماتریس دلخواه Y خاصیت جابه‌جایی دارد؛ پس X باید اسکالر باشد.

گام دوم: درایه‌های $X=BA$ را پیدا می‌کنیم:

$$X=BA=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y+2x \\ y & x+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x-5y & 3y+x-10 \\ -x+2y & 4-y \end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس بالا به دو شرط اسکالر است:

- درایه‌های قطر اصلی‌اش برابر باشند:

$$3x-5y=4-y \Rightarrow 3x-4y=4 \quad (1)$$

- درایه‌های غیر قطر اصلی صفر باشند: این‌جا فقط $-x+2y$ را مساوی صفر می‌گذاریم:

$$2y-x=0 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) به دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=4 \\ 2y-x=0 \end{cases}$ می‌رسیم که جواب $x=4$ و $y=2$ را می‌دهد.

گام چهارم: مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & y+2x \\ y & x+2 \end{bmatrix}$ می‌شود:

$$y+(y+2x)=2(x+y)=2(4+2)=12$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۹ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 1 & -2\end{bmatrix}$. اگر مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس AB با مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس BA برابر باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

ستون اول AB می‌شود:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+5x & \bullet & \bullet\\ 4 & \bullet & \bullet\\ 5x & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

سطر اول BA می‌شود:

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1+5x\\ \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

گام دوم: به گفتهٔ سؤال جمع درایه‌های ستون اولِ AB با جمع درایه‌های سطر اول BA برابر است، پس باید بنویسیم:

$$(5+5x)+4+5x=3+1+(1+5x)\Rightarrow 5x=-4\Rightarrow x=-\frac{4}{5}$$

گام سوم: $A+B$ می‌شود:

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 1 & \overset{-\frac{4}{5}}{\overset{\uparrow}{x}}\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & \underset{-\frac{4}{5}}{\underset{\downarrow}{x}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & \frac{11}{5}\\ 4 & -1 & 6\\ 5 & 1 & -\frac{14}{5}\end{bmatrix}$$

که بزرگ‌ترین درایه‌اش ۶ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۰ برای ماتریس‌های A و B تساوی $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ برقرار است. اگر $BA=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های غیر قطر اصلی ماتریس $B^2\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}B^2+A^2\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}A^2$ کدام است؟

۱) -20 ۲) 20

۳) 40 ۴) -40

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) اتحادهای جبری به شرطی برای ماتریس‌های A و B برقرار است که A و B خاصیت جابه‌جایی داشته باشند، یعنی $AB=BA$ باشد.

۲) در دنیای ماتریس‌ها عمل فاکتورگیری برقرار است، فقط باید حواسمان باشد که از یک سمت فاکتور بگیریم. مثلاً در عبارت $AX+BX$ می‌توانیم از یک X سمت راست فاکتور بگیریم و بنویسیم $(A+B)X$.

ولی اگر عبارتمان به صورت $XA+BX$ باشد با این‌که یک X مشترک داریم، ولی نمی‌توانیم از آن فاکتور بگیریم، چون یکی سمت راست و دیگری سمت چپ است. خوب است که فاکتورگیری‌های جدول زیر را ببینید:

فاکتور گرفتن	از چی می‌شه فاکتور گرفت؟	عبارت
$A(B+I)$	A از سمت چپ	$AB+A$
$(B+I)A$	A از سمت راست	$BA+A$
$A(X+Y)B$	A از سمت چپ و B از سمت راست	$AXB+AYB$
—	هیچی!	$BXA+AYB$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از این‌که $\underbrace{(A+B)(A-B)=A^2-B^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}$ شده، نتیجه می‌گیریم که:

- A و B خاصیت جابه‌جایی دارند:

$$AB=BA=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}$$

- بقیهٔ اتحادها هم برای A و B برقرار است:

$$(AB)^2=A^2B^2 \quad (*)$$

گام دوم: در عبارت $M=A^2\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}B^2+A^2\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}B^2$ از یک A^2 سمت چپ و یک B^2 سمت راست، فاکتور می‌گیریم:

$$M=A^2(\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I})B^2=A^2IB^2=A^2B^2\overset{(*)}{=}(AB)^2$$

گام سوم: $AB=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}$ بود، پس $M=(AB)^2$ می‌شود:

$$M=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & 40\\ -60 & 40\end{bmatrix}$$

(قطر اصلی)

که جمع درایه‌های غیر قطر اصلی‌اش می‌شود -20.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۱ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & x-3 \\ -2 & y \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مجموع درایه‌های ماتریس $B=\begin{bmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به شرطی وارون‌پذیر است که $ad-bc\neq 0$ (ضرب درایه‌های قطر اصلی − ضرب درایه‌های قطر فرعی) باشد. مثلاً ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست، چون $(2)(5)-(1)(10)=0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از این‌که $A=\begin{bmatrix} x & x-3 \\ -2 & y \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست، نتیجه می‌گیریم که:

$$\text{ضرب درایه‌های قطر فرعی} - \text{ضرب درایه‌های قطر اصلی} = 0 \Rightarrow xy-(-2)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow xy+2x=6 \quad (*)$$

گام دوم: درایه‌های B را به دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} xy-2 & 2x+3 \\ xy-2 & 2x+3 \end{bmatrix}$$

که جمع درایه‌هایش می‌شود:

$$2(xy-2)+2(2x+3)=2\underbrace{(xy+2x)}_{\text{طبق (*) می‌شه ۶}}+2=12+2=14$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۲ اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}۲ & -۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $AB+I=A^{۲}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A^{-1}+B+I$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) طرفین یک تساوی ماتریسی مثل $B=C$ را می‌توانیم **از یک طرف** در ماتریس دلخواه A ضرب کنیم. منظورمان از یک طرف این است که A را یا باید از سمت راست ضرب کنیم تا به تساوی $BA=CA$ و یا از سمت چپ ضرب کنیم تا به تساوی $AB=AC$ برسیم.

۲) برای محاسبهٔ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

۳) وارونِ وارونِ هر ماتریس می‌شود خود آن ماتریس:

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طرفین تساوی $AB+I=A^{۲}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا B تنها بشود:

$$A^{-1}(AB+I)=A^{-1}A^{۲}\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}B+A^{-1}=\underbrace{A^{-1}A}_{I}A\Rightarrow B+A^{-1}=A \quad (1)$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ (۱) خواستهٔ سؤال را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$M=\underbrace{A^{-1}+B}_{A}+I=A+I \quad (*)$$

گام سوم: وارونِ $A^{-1}=\begin{bmatrix}۲ & -۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ می‌شود خود A :

$$(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}۲ & -۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}^{-1}\Rightarrow A=\frac{1}{۶-۵}\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

گام چهارم: طبق $(*)$ خواستهٔ سؤال می‌شود:

$$M=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۵\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

که بزرگ‌ترین درایه‌اش ۵ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۳ اگر $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & -3\end{bmatrix}A-\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{1}{13}$ ۳) $-\frac{27}{13}$ ۴) -1

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در تساوی داده‌شده، ماتریس را در پرانتز ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & -3\end{bmatrix}A-\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & -3\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1 & -8\\ -3 & -11\end{bmatrix}}A-\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & -8\\ -3 & -11\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

گام دوم: طرفین تساوی بالا را از سمت چپ در وارون ماتریس قرمز ضرب می‌کنیم تا A تنها بشود:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -8\\ -3 & -11\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{11-24}\begin{bmatrix}-11 & 8\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=-\frac{1}{13}\begin{bmatrix}5 & 21\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

می‌بینید که جمع درایه‌های سطر اولِ A می‌شود $-2=(5+21)$ و $-\frac{1}{13}$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۴ اگر $\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، کدام‌یک از دستگاه‌های زیر بی‌شمار جواب دارد؟

۱) $\begin{cases} ax+by=۳ \\ cx+dy=۲ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} (a+۱)x+dy=۳ \\ cx+by=۲ \end{cases}$

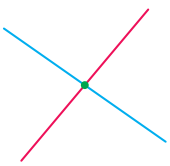
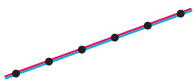
۳) $\begin{cases} ax+(d+۱)y=۱ \\ cx+(b+۲)y=۲ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} dx+ay=۲ \\ bx+cy=۳ \end{cases}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر نگاهمان را هندسی کنیم، دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ شامل دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ است که نقطهٔ برخوردشان همان جواب دستگاه است. با این نگاه به جدول زیر می‌رسیم:

دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ کی ...	وقتی ...	شرطش چیست؟	شکل خطوط چه‌طوری است؟
جواب منحصربه‌فرد دارد؟	خطوطش همدیگر را در یک نقطه قطع کنند؛ یعنی موازی نباشند.	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	
جواب ندارد؟	خطوطش همدیگر را قطع نکنند؛ یعنی موازی باشند.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	
بی‌شمار جواب دارد؟	خطوطش بی‌شمار نقطهٔ برخورد داشته باشند؛ یعنی بر هم منطبق باشند.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	

مثلاً دستگاه $\begin{cases} ۴x+۸y=۲۱ \\ ۲x+۴y=۱۳ \end{cases}$ طبق سطر دوم جدول بالا، جواب ندارد، چون $\frac{۴}{۲}=\frac{۸}{۴}\neq\frac{۲۱}{۱۳}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ضرب سمت راست تساوی داده‌شده را انجام که بدهیم می‌فهمیم:

$$\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

گام دوم: ضرب ماتریس‌های $\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شد I، پس این دو ماتریس وارون هم هستند:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۱/۵-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow a=b=c=۲\,,\,d=۳$$

گام سوم: در بین گزینه‌ها فقط دستگاه $\begin{cases} (a+۱)x+dy=۳ \\ cx+by=۲ \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد، چون شرط $\frac{\overbrace{a+۱}^{۳}}{\underbrace{c}_{۲}}=\frac{\overbrace{d}^{۳}}{\underbrace{b}_{۲}}=\frac{۳}{۲}$ را دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۵ اگر $A^{۲}=\begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ -۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A^{۳}=\begin{bmatrix} ۲۱ & ۸ \\ -۸ & -۳ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم $A=A^{-۱}\times A^{-۱}\times A^{۳}$ است. $A^{-۱}\times A^{-۱}$ هم همان $(A^{۲})^{-۱}$ است، پس $(A^{-۱})^{۲}=(A^{۲})^{-۱}$ است، پس:

$$A=A^{۳}\times(A^{۲})^{-۱} \quad (*)$$

طبق $(*)$ باید $(A^{۲})^{-۱}$ را پیدا کنیم:

گام دوم: ۵لا؛

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ -۳ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{۲})^{-۱}=\underbrace{\frac{۱}{-۸-(-۹)}}_{۱}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix} \text{ و } (A^{۲})^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}$$

گام سوم: $A^{۳}=\begin{bmatrix} ۲۱ & ۸ \\ -۸ & -۳ \end{bmatrix}$ را در $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲۱ & ۸ \\ -۸ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های A می‌شود $۳=۰+۱-۱+۳$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضیات گسسته

۱۵۶ اگر $۲^n - ۱$ مضرب ۱۷ باشد، چند جواب برای n در اعداد طبیعی کم‌تر از ۵۰ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

بخش‌پذیری $a^n \pm b^n$ بر $a^p \pm b^p$:

روابط عادکردن	شرط برقراری	مثال	
$a^p - b^p \mid a^n - b^n$	$\frac{n}{p}$ طبیعی است.	$a^۵ - b^۵ \not\mid a^{۱۲} - b^{۱۲}$	$a^۴ - b^۴ \mid a^{۱۲} - b^{۱۲}$
$a^p + b^p \mid a^n - b^n$	$\frac{n}{p}$ زوج است.	$a^۴ + b^۴ \not\mid a^{۱۲} - b^{۱۲}$	$a^۳ + b^۳ \mid a^{۱۲} - b^{۱۲}$
$a^p + b^p \mid a^n + b^n$	$\frac{n}{p}$ فرد است.	$a^۳ + b^۳ \not\mid a^{۱۲} + b^{۱۲}$	$a^۴ + b^۴ \mid a^{۱۲} + b^{۱۲}$

حالا درستی روابط زیر را کنترل می‌کنیم:

$۷^۶ - ۱ \mid ۷^۲ - ۱ = ۴۸$	$۳^{۱۲} - ۱ \mid ۳^۳ + ۱ = ۲۶$	$۲^{۱۵} + ۱ \mid ۲^۳ + ۱ = ۹$
✓	✓	✓
($\frac{۶}{۲}$ طبیعی است.)	($\frac{۱۲}{۳}$ زوج است.)	($\frac{۱۵}{۳}$ فرد است.)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عدد ۱۷ همان $۲^۴ + ۱$ است. شرط بخش‌پذیری $۲^n - ۱$ بر $۲^۴ + ۱$ را در درس‌باکس دیدیم، باید n مضرب زوج ۴ باشد.

گام دوم: مضرب زوج ۴ یعنی مضرب ۸، پس در اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰ دنبال مضارب ۸ هستیم که تعدادشان $\left[\frac{۵۰}{۸}\right] = ۶$ تا است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۷ در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ماکزیمم است. اگر مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده باشد، مقسوم‌علیه کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

قضیهٔ تقسیم:

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت q و باقی‌مانده r است و داریم: $a = bq + r$

مقسوم‌علیه ↑ b، مقسوم ↑ a، bq، q ↓ خارج قسمت، r ↓ باقی‌مانده

باقی‌مانده هم باید در شرط $0 \le r < b$ صدق کند. پس بیشترین مقدار باقی‌مانده $r = b - 1$ است.

نکته دقت کنید که در تقسیم a بر b دوتا متغیر q و r داریم و حتماً باید شرط $0 \le r < b$ را در نظر بگیرید تا به همراه $a = bq + r$ به جواب برسید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a = bq + r$، طبق صورت سؤال $a = 12r$ و چون باقی‌مانده ماکزیمم است: $b = r + 1$

گام دوم: با جای‌گذاری داریم: $12r = (r+1)q + r \Rightarrow (r+1)q = 11r$

گام سوم: این رابطه را به صورت $r+1 \mid 11r$ می‌نویسیم و داریم: $r+1 = 11$ (r با $r+1$ شمارندهٔ مشترکی ندارد)، پس: $b = 11$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۸ بر روی منحنی $y=\frac{۷x+۵}{x-۲}$ چند نقطه مختصات طبیعی دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نقطه با مختصات صحیح روی نمودار تابع کسری:

اگر حاصل یک کسر، عدد صحیح باشد، مخرج باید صورت را عاد کند. پس وقتی دنبال نقطه با مختصات صحیح روی $y=\frac{ax+b}{x-c}$ هستیم باید $x-c \mid ax+b$.

نکته برای رسیدن به جواب، می‌توانیم ریشهٔ طرف چپ را در عبارت طرف راست قرار دهیم:

$$x-c \mid f(x) \Rightarrow x-c \mid f(c)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد:

$$x-۲ \mid ۷x+۵$$

گام دوم: می‌دانیم $x-۲ \mid ۷(x-۲)$ و با استفاده از ترکیب خطی داریم:

$$x-۲ \mid ۷x+۵-۷(x-۲)$$

پس $x-۲ \mid ۱۹$ یعنی: $x-۲=\pm ۱, \pm ۱۹$

یه‌جور دیگه طبق نکتهٔ درس‌باکس $x-۲ \mid f(۲)$ یعنی: $x-۲ \mid ۱۹$

گام سوم: xها و y متناظرشان را حساب می‌کنیم:

x	۳	۱	۲۱	-۱۷
y	۲۶	-۱۲	۸	۶

گام چهارم: نقاط $(۲۱,۷)$ و $(۳,۲۶)$ در ربع اول، مختصات طبیعی دارند، یعنی جواب می‌شود ۲ نقطه.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۹ کدام دو عدد فقط دو مقسوم‌علیه صحیح مشترک دارند؟

۱) $۷m+۶ , ۶m+۱$
۲) $۷m+۶ , ۶m+۵$
۳) $۷m+۵ , ۶m+۲$
۴) $۷m+۵ , ۶m+۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

ب.م.م در عبارت $an+b$:

ب.م.م دو عدد $an+b$ و $a'n+b'$ را d می‌نامیم و داریم:

$$\begin{cases} d \mid an+b \\ d \mid a'n+b' \end{cases}$$

برای حذف n، بالایی را در a' و پایینی را در $-a$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$d \mid aa'n+ba'-aa'n-b'a \Rightarrow d \mid ba'-b'a$$

یعنی $d \mid \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$، یعنی به جای طرف راست، دترمینان ضرایب را قرار می‌دهیم.

نکته دقت کنید که در این روش (استفاده از ترکیب خطی یا دترمینان) ممکن است جواب‌های اضافی به دست بیاید. بهتر است برای تمام dهایی که به دست می‌آید، مثال بزنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر d مقسوم‌علیه مشترک دو عدد باشد، هر دو را عاد می‌کند:

گزینهٔ (۱): $\begin{cases} d \mid ۶m+۱ \\ d \mid ۷m+۶ \end{cases}$

گزینهٔ (۲): $\begin{cases} d \mid ۶m+۵ \\ d \mid ۷m+۶ \end{cases}$

گزینهٔ (۳): $\begin{cases} d \mid ۶m+۲ \\ d \mid ۷m+۵ \end{cases}$

گزینهٔ (۴): $\begin{cases} d \mid ۶m+۱ \\ d \mid ۷m+۵ \end{cases}$

گام دوم: با استفاده از ترکیب خطی یا روش دترمینان داریم:

گزینهٔ (۱): $d \mid ۲۹$

گزینهٔ (۲): $d \mid ۱$

گزینهٔ (۳): $d \mid ۱۶$

گزینهٔ (۴): $d \mid ۲۳$

گام سوم: در گزینهٔ (۲) فقط دو مقدار برای d داریم: ۱ و -۱ و در سایر گزینه‌ها تعداد جواب‌های d از ۲ بیشتر است.

کتاب درسی

اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۶m+۷)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm ۱$.

(ریاضیات گسسته ـ کار در کلاس (۱) صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۰ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب ۲ و ۵ باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $4m-7n$ بر ۱۳ چگونه است؟

۱) اول ۲) مضرب ۳ ۳) فرد ۴) مضرب ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

کار با قضیهٔ تقسیم:

اگر باقی‌ماندهٔ دو عدد را در تقسیم بر b داشته باشیم:

$$\begin{cases} a_1 = bq + r \\ a_2 = bq' + r' \end{cases}$$

می‌توانیم باقی‌ماندهٔ اعدادی مثل $2a_1 - 3a_2$ را بر b پیدا کنیم.

البته روش سریع‌تری برای این کار در بخش «هم‌نهشتی» یاد می‌گیرید. اما الان، با جای‌گذاری a_1 و a_2 به عبارتی شبیه $bq'' + r''$ می‌رسیم. حالا اگر r'' در شرط $0 \le r'' < b$ صدق نکرد، از بانک bq'' قرض می‌گیریم و به آن اضافه یا کم می‌کنیم تا درست شود، مثلاً اگر به $x = 11q - 7$ برسیم، داریم:

$$x = 11q' + 11 - 7 = 11q' + 4$$

یا مثلاً اگر به $y = 11q + 30$ رسیدیم:

$$x = 11q' - 2\times 11 + 30 = 11q' + 8$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: صورت سؤال می‌گوید $\begin{cases} m = 13q + 2 \\ n = 13q' + 5 \end{cases}$، حالا $4m - 7n$ را می‌سازیم:

$$4m - 7n = 4(13q + 2) - 7(13q' + 5) = 13(4q - 7q') + 8 - 35 = 13q'' - 27$$

گام دوم: برای رسیدن به باقی‌مانده از بانک $13q''$، به اندازهٔ 13×3 قرض می‌گیریم و به -27 می‌دهیم:

$$a = 13q''' + 39 - 27 \Rightarrow q = 13q''' + 12$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۲ است که مضرب ۳ می‌باشد.

کتاب درسی

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به دست آورید.

(ریاضیات گسسته ـ مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۱ چند عدد اول p وجود دارد که $p+۴$ و $p+۸$ هم اول باشند؟

۱) هیچ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نتایج قضیهٔ تقسیم (افراز $\mathbb{Z}$): *(این‌ها رو حفظ باشید خوبه)*

- تقسیم بر ۲: هر عدد صحیح به فرم $۲q$ یا $۲q+۱$ است، پس ضرب دو عدد صحیح متوالی حتماً زوج است. مربع اعداد زوج حتماً مضرب ۴ است و مربع اعداد فرد در تقسیم بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد.
- تقسیم بر ۳: هر عدد صحیح به فرم $۳q$ یا $۳q+۱$ یا $۳q+۲$ است. ضرب سه عدد صحیح متوالی حتماً مضرب ۶ است.

اگر عددی مضرب ۳ باشد، مربع آن مضرب ۹ است؛ اگر a مضرب ۳ نباشد، باقی‌ماندهٔ $a^۲$ بر ۳ می‌شود یک.

- تقسیم بر ۵: از هر ۵ عدد متوالی یکی مضرب ۵ است، پس ضرب ۵ عدد متوالی حتماً مضرب $۵! = ۱۲۰$ است. مربع اعداد $۵q$، $۵q+۱$، $۵q+۲$، $۵q+۳$ و $۵q+۴$ به ترتیب به صورت $۲۵k$، $۵k+۱$، $۵k+۴$، $۵k+۴$ و $۵k+۱$ است. پس عدد مربع کامل در تقسیم بر ۵، هرگز باقی‌ماندهٔ ۲ و ۳ ندارد.
- تقسیم بر ۶: هر عدد اول به‌جز ۲ و ۳ حتماً به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق نتایج قضیهٔ تقسیم دیدیم که ۴ نوع عدد اول داریم: $۶k+۱, ۶k+۵, ۳, ۲$

گام دوم: برای این چهار گروه، $p+۴$ و $p+۸$ را می‌بینیم:

عدد اول	۲	۳	$۶k+۵$	$۶k+۱$
$p+۴$	۶	۷	$۶k+۹$	$۶k+۵$
$p+۸$	۱۰	۱۱	$۶k+۱۳$	$۶k+۹$

گام سوم: اعداد رنگی، اول نیستند، پس فقط به ازای $p=۳$ هر ۳ عدد اول شدند، یعنی ۱ مقدار p وجود دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۲ **a عددی صحیح و فرد است و $b \mid a^۲+۲$. باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲+b^۲+۱۰$ بر ۸ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

ویژگی‌های اعداد مربع کامل: *(این‌ها رو به خاطر می‌سپاریم.)*

- مربع هر عدد فرد حتماً به صورت $۸k+۱$ است.
- مربع هر عدد زوج حتماً به صورت $۴k$ است.
- اگر p عدد اول و بیشتر از ۳ باشد، مربع آن حتماً $۲۴k+۱$ است.
- رقم یکان عدد مربع کامل هرگز ۲، ۳، ۷ و ۸ نیست.
- باقی‌ماندهٔ عدد مربع کامل بر ۳، هرگز ۲ نیست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: a فرد است، پس $a^۲$ نیز فرد است و $a^۲+۲$ هم عددی فرد خواهد بود.

گام دوم: اعداد فرد، مقسوم‌علیه زوج ندارند! پس وقتی $b \mid a^۲+۲$ نتیجه می‌گیریم b هم فرد است.

گام سوم: می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $۸k+۱$ است، پس $a^۲+b^۲+۱۰$ به صورت $۸k+۱+۸k'+۱+۱۰$ درمی‌آید که در تقسیم بر ۸ باقی‌ماندهٔ ۴ دارد.

تیزبازی

$a=b=۱$ در نظر بگیرید! باقی‌ماندهٔ $a^۲+b^۲+۱۰$ بر ۸ می‌شود ۴.

کتاب درسی

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

(ریاضیات گسسته ـ تمرین ۱۰ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۳ اگر $۳k+۲ \mid ۵$، آن‌گاه $۹k^۲+۲۷k+m \mid ۲۵$. به جای m کدام عدد را می‌توان قرار داد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۹ ۳) ۳۹ ۴) ۴۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در خواص عادکردن دیدیم که:

$$a \mid b \Rightarrow ka \mid kb$$
$$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$$

از ترکیب این دو خاصیت در تمرین کتاب درسی استفاده می‌شود تا از رابطه‌ای به شکل $۴ \mid ۳k+۱$ به رابطهٔ $۱۶ \mid ۹k^۲+۱۸k+۵$ برسیم:

$$۴ \mid ۳k+۱ \xrightarrow{\times ۴} ۱۶ \mid ۱۲k+۴$$
$$۴ \mid ۳k+۱ \xrightarrow{\text{به توان دو}} ۱۶ \mid ۹k^۲+۶k+۱$$
$$\xrightarrow{\text{جمع طرف راست}} ۱۶ \mid ۹k^۲+۱۸k+۵$$

حالا دقت کنید که با تفریق طرف راست‌ها یا افزودن عباراتی به شکل $۱۶ \mid ۱۶q$ می‌توانیم به نتایج دیگری برسیم. مثلاً:

$$\xrightarrow{-} ۱۶ \mid ۹k^۲-۶k-۳$$
$$\xrightarrow{۱۶+۱۶} ۱۶ \mid ۹k^۲+۱۸k+۲۱$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از $۳k+۲ \mid ۵$ می‌توان با ضرب در ۵ یا رساندن به توان ۲، عدد ۲۵ را در طرف چپ بسازیم:

$$۵ \mid ۳k+۲ \begin{cases} \xrightarrow{\times ۵} ۲۵ \mid ۱۵k+۱۰ \\ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲۵ \mid ۹k^۲+۱۲k+۴ \end{cases}$$

گام دوم: از جمع طرف راست این‌ها داریم: $۲۵ \mid ۹k^۲+۲۷k+۱۴$. حالا چون $۲۵ \mid ۲۵q$ می‌توانیم $۲۵q$ را هم اضافه کنیم:

$$۲۵ \mid ۹k^۲+۲۷k+۱۴+۲۵q$$

گام سوم: پس m می‌تواند $۲۵q+۱۴$ باشد و به ازای $q=۱$، داریم:

$$m=۳۹$$

کتاب درسی

اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $۵ \mid ۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵ \mid ۱۶k^۲+۲۸k+۶$

(ریاضیات گسسته ـ تمرین ۴ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۴ اگر دو عدد $۳n-۱$ و $۴n+۱$ نسبت به هم اول نباشند، برای عدد طبیعی n چند جواب کم‌تر از ۲۰ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

وقتی ب.م.م دو عدد پارامتری معلوم است.

اگر سؤال ب.م.م خاصی را بخواهد، d را جای‌گذاری می‌کنیم و n را به دست می‌آوریم.

مثلاً ب.م.م $۵n+۲$ و $۴n-۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} d \mid ۵n+۲ \\ d \mid ۴n-۱ \end{cases} \Rightarrow d \mid -۱۳$$

حالا اگر ب.م.م ۱۳ را بخواهیم، می‌نویسیم:

$$۱۳ \mid ۴n-۱ \Rightarrow ۴n-۱=۱۳q$$

و برای محاسبهٔ n داریم:

$$۴n=۱۳q+۱$$

از بانک $۱۳q$ سه‌تا را بیرون می‌آوریم و به ۱ اضافه می‌کنیم تا به ۴ بخورد:

$$۴n=۱۳q'+\underbrace{۳\times۱۳+۱}_{۴۰} \xrightarrow{+۴} n=۱۳q''+۱۰$$

نگران بخش‌پذیری q' بر ۴ نباشید ... چون $۴n$ و ۴۰ بر ۴ بخش‌پذیرند. قسمت $۱۳q'$ هم مجبور است مضرب ۴ باشد، یعنی برای مقادیر $۱۳q''+۱۰$ مثل $n=۱۰$ یا $n=۲۳$ یا ... ب.م.م می‌شود ۱۳.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} d \mid ۳n-۱ \\ d \mid ۴n+۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی یا دترمینان}} d \mid ۷$$

گام دوم: دو عدد نسبت به هم اول نیستند، پس $d=۷$ و داریم:

$$۷ \mid ۴n+۱ \ , \ ۷ \mid ۳n-۱$$

گام سوم: در بین اعداد ۱ تا ۱۹، دنبال آن‌هایی هستیم که $۳n-۱$ به ۷ بخورد:

$$۳n-۱=۷q \Rightarrow ۳n=۷q+۱$$

گام چهارم: از بانک $۷q$، دوتا ۷ قرض می‌گیریم:

$$۳n=۷q'+۷\times۲+۱=۷q'+۱۵ \xrightarrow{\div ۳} n=۷q''+۵$$

پس جواب، اعدادی هستند که بر ۷ باقی‌ماندهٔ ۵ دارند: ۱۹، ۱۲ و ۵، یعنی ۳تا جواب.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۵ مثال نقض گزارهٔ «اگر a عددی گنگ باشد، آن‌گاه $a^۲+a$ نیز گنگ است.» کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نادرستی گزارهٔ غلط را با یک مثال نقض می‌توان نشان داد.

این مثال باید:

الف) در شرایط فرض صدق کند.

ب) حکم برقرار نشود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عدد گنگ می‌خواهیم (پس ۱ و ۲ نیستند) و $a^۲+a$ باید گویا شود.

گام دوم: سراغ گزینه‌های (۳) و (۴) می‌رویم:

گزینهٔ (۳): $a=\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲+a=(\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲})^۲+\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲}=\frac{۱}{۴}-\sqrt{۲}+۲+\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲}=\frac{۱۱}{۴}-۲\sqrt{۲}\notin\mathbb{Q}$

گزینهٔ (۴): $a=-\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲+a=(-\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲})^۲-\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}=\frac{۱}{۴}-\sqrt{۲}+۲-\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}=\frac{۷}{۴}\in\mathbb{Q}$

گام سوم: پس $a=-\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}$ مناسب است.

تیزپاری

اگر $a^۲+a$ را به شکل مربع کامل بنویسیم داریم:

$$(a+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}$$

حالا معلوم است که عدد $-\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}$ مناسب است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دوازدهم

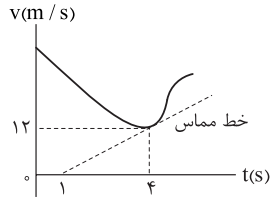
۱۶۶ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (خط‌چین مایل رسم‌شده در لحظهٔ $t = ۴\,s$ بر منحنی مماس است.)

۱) $۳\vec{i}$

۲) $-۳\vec{i}$

۳) $۴\vec{i}$

۴) $-۴\vec{i}$

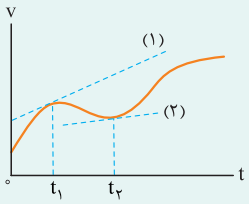


یعنی به کمک شیب خط‌چین، شتاب لحظهٔ $t = ۴s$ رو پیدا کن.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در هر لحظه، برابر با شتاب متحرک در آن لحظه است. به شکل زیر توجه کنید:



خط‌چین (۱): مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۱$

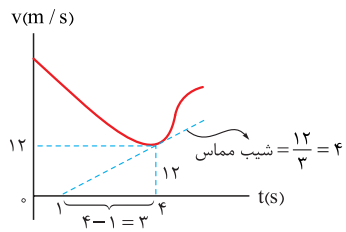
خط‌چین (۲): مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۲$

شتاب در $t_۱$ = شیب خط‌چین (۱)

شتاب در $t_۲$ = شیب خط‌چین (۲)

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان شکل زیر، شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۴\,s$ را به دست می‌آوریم. می‌دانیم شیب این خط همان شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ است. بنابراین داریم:



$$a = \text{شیب مماس} = ۴\ m/s^۲$$

بنابراین شتاب در $t = ۴\,s$ به صورت $\vec{a} = (۴\ m/s^۲)\vec{i}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۷ متحرکی با سرعت ثابت در جهت محور x حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t_1 = 8\,s$، ۳ برابر اندازهٔ بردار مکان آن در لحظهٔ $t_2 = 20\,s$ باشد، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه جهت بردار مکان متحرک ممکن است تغییر کند؟

یعنی سرعت مثبته.

یعنی در چه لحظه‌ای متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور می‌کنه.

۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک در حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

$$x = vt + x_0$$

(x: مکان (m)، v: سرعت (m/s)، t: زمان (s)، x_0: مکان اولیه (m))

با توجه به معادلهٔ بالا که یک معادلهٔ درجه‌یک است، لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان (عبور متحرک از مبدأ مکان) را طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$x = 0 : 0 = vt + x_0 \Rightarrow t = \frac{-x_0}{v}$$

بنابراین با توجه به این‌که t عددی نامنفی است، برای این‌که بردار مکان تغییر جهت دهد، حتماً باید x_0 و v در خلاف جهت همدیگر باشند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به اطلاعات سؤال و معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت داریم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 8s : x_1 = v(8) + x_0 \\ t_2 = 20s : x_2 = v(20) + x_0 \end{cases}$$

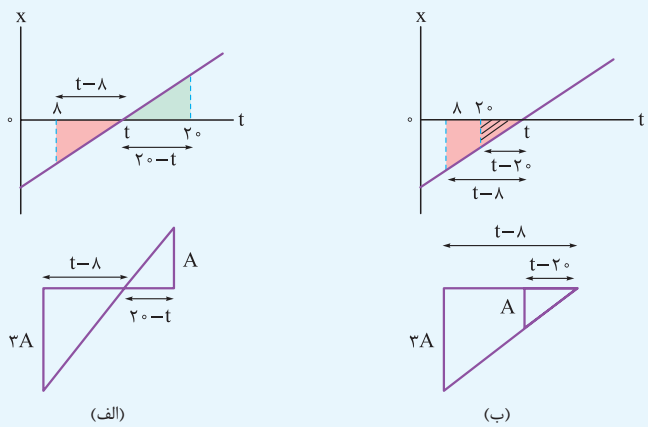
$$|x_1| = 3|x_2| \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \Rightarrow 8v + x_0 = 3(20v + x_0) \Rightarrow -52v = 2x_0 \Rightarrow x_0 = -26v \\ x_1 = -3x_2 \Rightarrow 8v + x_0 = -3(20v + x_0) \Rightarrow 68v = -4x_0 \Rightarrow x_0 = -17v \end{cases}$$

گام دوم: حالا لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان را به دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow{x=0} t = \frac{-x_0}{v} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-(-26v)}{v} = 26\,s \\ t = \frac{-(-17v)}{v} = 17\,s \text{ ق‌ق} \end{cases}$$

یه‌جور دیگه

می‌دانیم نمودار مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت به صورت خطی با شیب ثابت است؛ بنابراین با استفاده از تشابه دو مثلث، مطابق شکل‌های زیر می‌توانیم بنویسیم:

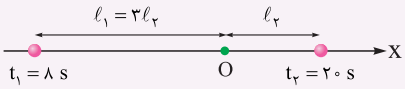


(الف) حالت: $\frac{t-8}{20-t} = 3 \Rightarrow 60 - 3t = t - 8 \Rightarrow t = 17\,s$ ق‌ق

(ب) حالت: $\frac{t-8}{t-20} = 3 \Rightarrow 3t - 60 = t - 8 \Rightarrow t = 26\,s$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تیزبازی

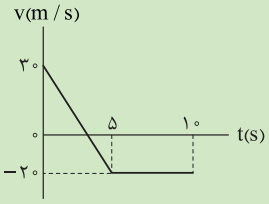


$$\frac{4\ell_2}{3\ell_2} = \frac{12s}{\Delta t} \Rightarrow t = 9s$$

$$t = t_1 + \Delta t = 8 + 9 = 17s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۸ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۶ / ۵
۲) ۷ / ۵
۳) ۱۶ / ۵
۴) ۱۷ / ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

اول لحظهٔ تغییر جهت رو به کمک شیب خط یا تشابه به دست بیار. بعدش با استفاده از مساحت محصور بین نمودار v ـ t با محور t، مسافت طی‌شده رو به دست بیار و در نهایت طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$، تندی متوسط رو حساب کن.

درس Box

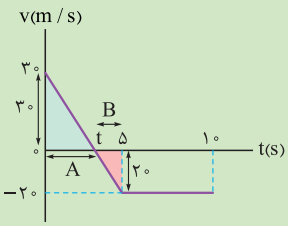
برای این‌که از روی نمودار سرعت ـ زمان تندی متوسط را در یک بازهٔ زمانی مشخص به دست آوریم، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱: مساحت محصور نمودار سرعت ـ زمان را در بازهٔ مورد نظر به دست می‌آوریم که اگر بدون توجه به بالا و پایین بودن نسبت به محور t، مقادیر به‌دست‌آمده را با هم جمع کنیم، مسافت طی‌شده به دست می‌آید.

مرحلهٔ ۲: با داشتن مسافت طی‌شده و مدت‌زمان، طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$، تندی متوسط را به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: لحظهٔ تغییر جهت حرکت (نقطه‌ای که نمودار v ـ t محور t را قطع می‌کند.) را به دست می‌آوریم. با توجه به تشابه دو مثلث در نمودار سرعت ـ زمان داریم:

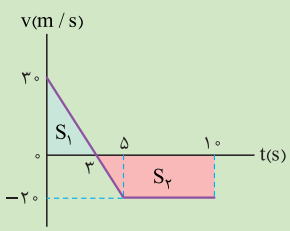


تشابه دو مثلث: $\frac{A}{B} = \frac{۳۰}{۲۰} \Rightarrow A = \frac{۳}{۲}B$

$$\xrightarrow[A=\frac{۳}{۲}B]{A+B=۵} \frac{۳}{۲}B + B = ۵ \Rightarrow B = ۲ \ , \ A = ۳ \Rightarrow t = ۳\ s$$

(توجه کنید که به کمک شیب خط هم می‌شود لحظهٔ t را به دست آورد.)

گام دوم: مسافت طی‌شده در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت را به کمک مساحت محصور نمودار v ـ t با محور t، در شکل زیر به دست می‌آوریم:



$$S_۱ = \frac{۳۰ \times ۳}{۲} = ۴۵$$

$$S_۲ = \frac{(۱۰-۳)+(۱۰-۵)}{۲} \times ۲۰ = ۱۲۰$$

$$\ell = S_۱ + S_۲ = ۴۵ + ۱۲۰ = ۱۶۵\ m$$

گام سوم: تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

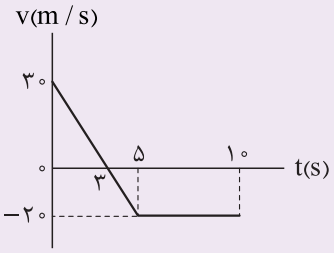
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{۱۶۵}{۱۰} = ۱۶ / ۵\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

امتحان نهایی

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است.

(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ رشتهٔ ریاضی)

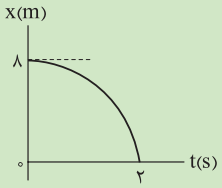


الف) تندی متوسط متحرک در کل زمان حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

ب) اگر متحرک در لحظهٔ $t = 5\ s$ در ۲۰ متری مبدأ محور باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را در بازهٔ زمانی ۵ s تا ۱۰ s بنویسید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۹ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. به ترتیب از راست به چپ، در لحظهٔ $t = ۱\,s$، فاصلهٔ متحرک از مکان اولیهٔ خود چند متر و تندی متحرک چند متر بر ثانیه است؟ (خط‌چین مماس بر نمودار در مبدأ زمان، موازی محور t است.)



۱) ۲، ۲

۲) ۴، ۲

۳) ۶، ۲

۴) ۶، ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

(x: مکان (m)، a: شتاب ($m/s^۲$)، $x_۰$: مکان اولیه (m)، $v_۰$: سرعت اولیه (m/s))

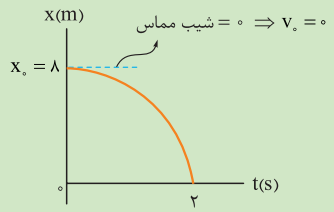
از طرفی معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$v = at + v_۰$$

(v: سرعت (m/s)، a: شتاب ($m/s^۲$)، $v_۰$: سرعت اولیه (m/s))

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار مکان ـ زمان متحرک مطابق شکل زیر، مکان اولیه (عرض از مبدأ نمودار) و سرعت اولیه (شیب نمودار در $t = ۰$) را به دست می‌آوریم:



گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان و معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow[t=۲s\,,\,x=۰]{x_۰=۸m\,,\,v_۰=۰} ۰ = \frac{۱}{۲}a(۲)^۲ + (۰)(۲) + ۸$$

$$\Rightarrow ۲a = -۸ \Rightarrow a = -۴\ m/s^۲$$

$$\begin{cases} x_۰ = ۸\,m \\ v_۰ = ۰ \\ a = -۴\,m/s^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ = \frac{۱}{۲}(-۴)t^۲ + (۰)t + ۸ \Rightarrow x = -۲t^۲ + ۸ \\ v = at + v_۰ \Rightarrow v = -۴t \end{cases}$$

گام سوم: مکان و سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = ۱\,s$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = -۲t^۲ + ۸ \xrightarrow{t=۱s} x = -۲(۱)^۲ + ۸ = ۶\ m \\ v = -۴t \xrightarrow{t=۱s} v = -۴(۱) = -۴\ m/s \end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ متحرک در $t = ۴\,s$ از مکان اولیهٔ خود برابر است با:

$$d = |۶ - ۸| = ۲\,m$$

از طرفی تندی متحرک در این لحظه برابر است با:

$$s = |v| = ۴\ m/s$$

تیزبازی

اگه خوب به نمودار x ـ t دقت کنی، با توجه به این‌که حرکت متحرک تندشونده بوده و توی ۲s، به اندازهٔ ۸ m از مکان اولیهٔ خودش دور شده، می‌تونی دوتا نتیجهٔ مهم بگیری و باهاش گزینه رد کنی:

۱) چون تغییر جهت نداره و با شتاب ثابت حرکت می‌کنه، تندی متوسط همون تندی در لحظهٔ وسط بازه‌س، یعنی: (رد گزینه‌های (۱) و (۳))

$$s_{۱s} = s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{|۰ - ۸|}{۲ - ۰} = \frac{۸}{۲} = ۴\ m/s$$

۲) توی نیمهٔ اول زمان، باید کم‌تر از نصف مسافت رو طی کرده باشه، یعنی کم‌تر از ۴ m از مکان اولیهٔ خودش دور بشه (رد گزینه‌های (۳) و (۴)).

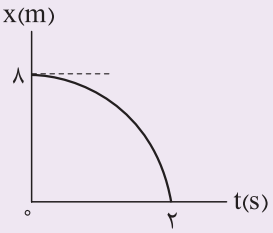
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گول نخوری هواست باشه سؤال گفته فاصلهٔ متحرک از مکان اولیهٔ خودش، نگفته فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان. اگه اشتباه کنی، توی دام گزینهٔ (٤) می‌افتی.

امتحان نهایی

شکل زیر نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که با شتاب ثابت در امتداد محور x حرکت می‌کند.

(سؤال ۴ ـ امتحان نهایی تجربی دی ۱۴۰۴)



الف) سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی صفر تا ۲ s به دست آورید.

ب) معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک را بنویسید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۰ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = \frac{۳}{۴}t^۲ + ۱۵t + ۳۰$ است.

تندی متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول، چند برابر تندی متوسط آن در ۵ ثانیهٔ سوم است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در حرکت با شتاب ثابت، برای به دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت (t') از روی معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک، طبق الگوی زیر داریم:

$$x = At^۲ + Bt + C \begin{cases} \text{متحرک تغییر جهت نمی‌دهد: A و B هم‌علامت} \\ \text{A و B مختلف‌العلامت: } t' = -\frac{B}{۲A} \end{cases}$$

نکته

در حرکت با شتاب ثابت، برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، دو حالت داریم:

حالت اول: اگر در این بازهٔ زمانی متحرک تغییر جهت نداده باشد، مسافت طی‌شده همان مقدار جابه‌جایی در این بازه است.

حالت دوم: اگر در این بازهٔ زمانی متحرک تغییر جهت داده باشد، مسافت طی‌شده برابر است با مجموع اندازهٔ جابه‌جایی از $t_۱$ تا لحظهٔ تغییر جهت با اندازهٔ جابه‌جایی از لحظهٔ تغییر جهت تا $t_۲$، یعنی: $L = |x_{\text{تغییر جهت}} - x_۱| + |x_۲ - x_{\text{تغییر جهت}}|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: لحظهٔ تغییر جهت حرکت را به دست می‌آوریم:

$$x = \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{A}t^۲ + \underbrace{۱۵}_{B}t + ۳۰$$

با توجه به این‌که A و B هم علامت‌اند، درمی‌یابیم متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

گام دوم: مکان متحرک را در لحظات $t_۱ = ۰$، $t_۲ = ۵s$، $t_۳ = ۱۰s$ و $t_۴ = ۱۵s$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۳}{۴}t^۲ + ۱۵t + ۳۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۰ : x_۱ = ۳۰\,m \\ t_۲ = ۵s : x_۲ = \frac{۳}{۴}(۵^۲) + ۱۵(۵) + ۳۰ = ۱۲۳/۷۵\,m \\ t_۳ = ۱۰s : x_۳ = \frac{۳}{۴}(۱۰^۲) + ۱۵(۱۰) + ۳۰ = ۲۵۵\,m \\ t_۴ = ۱۵s : x_۴ = \frac{۳}{۴}(۱۵^۲) + ۱۵(۱۵) + ۳۰ = ۴۲۳/۷۵\,m \end{cases}$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در ۵ ثانیهٔ اول و ۵ ثانیهٔ سوم را به دست می‌آوریم.

با توجه به این‌که متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، مسافت طی‌شده در این بازه‌ها همان اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این بازه‌های زمانی است.

$$\ell_{(۰-۵\,s)} = |x_۲ - x_۱| = |۱۲۳/۷۵ - ۳۰| = ۹۳/۷۵\,m$$

$$\ell_{(۱۰\,s-۱۵\,s)} = |x_۴ - x_۳| = |۴۲۳/۷۵ - ۲۵۵| = ۱۶۸/۷۵\,m$$

گام چهارم: نسبت تندی متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول به تندی متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ سوم را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \frac{s_{av_{(۰-۵\,s)}}}{s_{av_{(۱۰\,s-۱۵\,s)}}} = \frac{\frac{\ell_{(۰-۵\,s)}}{۵}}{\frac{\ell_{(۱۰\,s-۱۵\,s)}}{۵}} = \frac{L_{(۰-۵\,s)}}{L_{(۱۰\,s-۱۵\,s)}} = \frac{۹۳/۷۵}{۱۶۸/۷۵} = \frac{۵}{۹}$$

یه‌جور دیگه

گام اول: به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان، معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\frac{۱}{۲}a}t^۲ + \underbrace{۱۵}_{v_۰}t + ۳۰ \xrightarrow[a=\frac{۳}{۲}\,m/s^۲,\ v_۰=۱۵\,m/s]{v=at+v_۰} v = \frac{۳}{۲}t + ۱۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول و پنج ثانیهٔ سوم را به دست می‌آوریم:

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی از t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ برابر است.

$$v_{av(0s-5s)}=v_{\frac{5}{2}s}=\frac{3}{2}(\frac{5}{2})+15=\frac{3}{2}(\frac{5}{2}+10)=\frac{3}{2}(\frac{25}{2})\ m/s$$

$$v_{av(10s-15s)}=v_{\frac{25}{2}s}=\frac{3}{2}(\frac{25}{2})+15=\frac{3}{2}(\frac{25}{2}+10)=\frac{3}{2}(\frac{45}{2})\ m/s$$

گام سوم: با توجه به این‌که متحرک، تغییر جهت نمی‌دهد، مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی برابر است، در نتیجه تندی متوسط هم با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. بنابراین داریم:

$$\frac{s_{av(0-5)}}{s_{av(10-15)}}=\frac{v_{av(0-5)}}{v_{av(10-15)}}=\frac{\frac{3}{2}(\frac{25}{2})}{\frac{3}{2}(\frac{45}{2})}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$$

کنکور

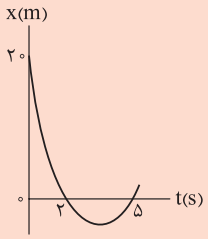
معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به صورت $x=\frac{3}{4}t^2-15t+30$ است. سرعت متوسط در ۵ ثانیهٔ اول، چند برابر سرعت متوسط در ۵ ثانیهٔ سوم است؟

(سؤال ۴۶ ـ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) -3 ۲) -4 ۳) ۳ ۴) ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۱ سهمی زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که تندی متحرک برابر $۲\ m/s$ است، بردار مکان آن در SI کدام است؟



یعنی این نمودار مکان ـ زمان مربوط به حرکت با شتاب ثابت است.

۱) $-۸\vec{i}$
۲) $-۴\vec{i}$
۳) $-۲\vec{i}$
۴) $-\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر سه نقطه از نمودار مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت مشخص باشد، با جای‌گذاری آن سه نقطه در معادلهٔ $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ و تشکیل سه معادله و سه مجهول، می‌توان به معادلهٔ x ـ t متحرک رسید.

نکته

در صورتی که ریشه‌های معادله را داشته باشیم، به روش تجزیه هم می‌توانیم معادله را به دست آوریم. به عنوان مثال، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند و در لحظهٔ t'، مکان متحرک x' باشد، داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}a(t-\alpha)(t-\beta)$$

با جای‌گذاری t' و x' در رابطهٔ فوق، $\frac{۱}{۲}a$ را به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک سه نقطه از نمودار x ـ t متحرک، معادلهٔ مکان ـ زمان و شتاب و سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$t=۰ : x=۲۰\ m \Rightarrow x_۰=۲۰\ m$$

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۲s : x=۰ \Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}a(۲^۲)+v_۰(۲)+۲۰ \\ t=۵s : x=۰ \Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}a(۵^۲)+v_۰(۵)+۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+۲v_۰+۲۰=۰ \\ \frac{۲۵}{۲}a+۵v_۰+۲۰=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۴\ m/s^۲ \ , \ v_۰=-۱۴\ m/s$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(۴)t^۲-۱۴t+۲۰ \Rightarrow x=۲t^۲-۱۴t+۲۰$$

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان، مکان متحرک را وقتی که تندی آن $۲\ m/s$ است، حساب می‌کنیم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \xrightarrow[a=۴\ m/s^۲\ ,\ \Delta x=x-۲۰]{|v|=۲\ m/s\ ,\ v_۰=-۱۴\ m/s} ۲^۲-(-۱۴)^۲=۲(۴)(x-۲۰)$$

$$\Rightarrow -۱۹۲=۸(x-۲۰) \Rightarrow -۲۴=x-۲۰ \Rightarrow x=-۴\ m$$

بنابراین در مکان $\vec{x}=-۴(m)\vec{i}$، تندی متحرک $۲\ m/s$ است.

یه‌جور دیگه

با توجه به نمودار، درمی‌یابیم رأس سهمی لحظهٔ بین دو ریشه، یعنی $t=\frac{۲+۵}{۲}=۳/۵\ s$ است. بنابراین در $t=۳/۵s$ سرعت صفر است. از طرفی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۲s$ که همان سرعت لحظهٔ وسط بازه، یعنی $t=۱s$ است برابر می‌شود با:

$$v_{۱s}=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{۱s}=\frac{۰-۲۰}{۲}=-۱۰\ m/s$$

بنابراین معادلهٔ سرعت ـ زمان مطابق زیر است:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow \begin{cases} -۱۰=a+v_۰ \\ ۰=۳/۵a+v_۰ \end{cases} \Rightarrow a=۴\ m/s^۲ \ , \ v_۰=-۱۴\ m/s$$

در نهایت طبق معادلهٔ مستقل از زمان، مکانی که در آن تندی متحرک $۲\ m/s$ است را به دست می‌آوریم:

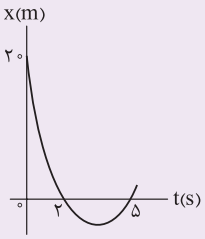
$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۴-۱۹۶=۲(۴)\Delta x \Rightarrow \Delta x=-۲۴\ m$$

$$\Rightarrow -۲۴=x-۲۰ \Rightarrow x=-۴\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

سهمی زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 5s$ چند متر بر ثانیه است؟ (سؤال ۴۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)



۱) ۲/۵

۲) ۴

۳) ۴/۵

۴) ۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۲ جهت حرکت متحرکی که با شتاب ثابتِ $\vec{a} = (-2\,m/s^2)\vec{i}$ در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t = 2\,s$ تغییر می‌کند. مسافت طی‌شده توسط متحرک در ثانیهٔ پنجم برابر چند متر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a=-2\,m/s^2]{v=0\,,\ t=2\,s} 0 = -2(2) + v_0 \Rightarrow v_0 = 4\,m/s$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0=4\,m/s]{a=-2\,m/s^2} v = -2t + 4$$

گام دوم: با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی $t_1 = 4\,s$ تا $t_2 = 5\,s$ متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، درمی‌یابیم تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط متحرک برابر است. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر است با میانگین سرعت لحظات ابتدا و انتهای آن بازهٔ زمانی، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$t_1 = 4s: v_1 = -2(4) + 4 = -4\,m/s$$

$$t_2 = 5s: v_2 = -2(5) + 4 = -6\,m/s$$

$$s_{av_{(4s-5s)}} = |v_{av_{(4s-5s)}}| = \left|\frac{v_1 + v_2}{2}\right| \Rightarrow s_{av_{(4s-5s)}} = \left|\frac{-4-6}{2}\right| = 5\,m/s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در ثانیهٔ پنجم را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{\ell}{1} \Rightarrow \ell = 5m$$

یه‌جور دیگه

در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ nاُم، از رابطهٔ $\Delta x_n = (x - 0/5)a + v_0$ به دست می‌آید.

با توجه به این‌که متحرک در ثانیهٔ پنجم تغییر جهت نمی‌دهد، مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی با مقدار جابه‌جایی برابر است، در نتیجه داریم:

$$\Delta x_n = (x - 0/5)a + v_0 \xrightarrow[v_0=4\,m/s]{n=5\,,\ a=-2\,m/s} \Delta x_5 = (5 - 0/5)(-2) + 4 = -5\,m \Rightarrow \ell = 5\,m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۳ متحرکی که با شتاب ثابت $\vec{a}=(1/5\ m/s^2)\vec{i}$ در راستای محور x در حال حرکت است، با سرعت $\vec{v}_1=(-9\ m/s)\vec{i}$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. بردار مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر می‌کند، در SI کدام است؟

۱) $27\vec{i}$
۲) $-27\vec{i}$
۳) $54\vec{i}$
۴) $-54\vec{i}$

یعنی $x_1=0$

یعنی $v_2=0$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در حرکت با شتاب ثابت، وقتی که متحرک در لحظهٔ t_1 در مکان x_1 و در لحظهٔ t_2 در مکان x_2 قرار دارد، طبق معادلهٔ مستقل از زمان می‌توانیم بنویسیم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)$$

پاسخ خیلی تشریحی

طبق معادلهٔ مستقل از زمان می‌توانیم بنویسیم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\xrightarrow[x_1=0\ ,\ x_2=?]{v_1=-9\ m/s\ ,\ v_2=0\ ,\ a=1/5\ m/s^2} 0^2-(-9)^2=2(1/5)(x_2-0)$$

$$\Rightarrow -81=3x_2 \Rightarrow x_2=-27\ m \Rightarrow \vec{x}_2=(-27\ m)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۴ متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 2s$ ، $t_2 = 4s$ و $t_3 = 8s$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 4m$ ، $x_2 = 12m$ و $x_3 = 64m$ عبور می‌کند. جهت حرکت متحرک در کدام لحظه برحسب ثانیه تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی معین از t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ وسط آن بازهٔ زمانی، یعنی $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر است و می‌توانیم بنویسیم:

$$v_{av_{(t_1-t_2)}} = v_{(t=\frac{t_1+t_2}{2})}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از مکان متحرک در سه لحظهٔ t_1 ، t_2 و t_3 ، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \begin{cases} t_1 = 2s : x_1 = 4m \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}a(2)^2 + v_0(2) + x_0 \Rightarrow 4 = 2a + 2v_0 + x_0 \Rightarrow x_0 = 4 - 2a - 2v_0 \\ t_2 = 4s : x_2 = 12m \Rightarrow 12 = \frac{1}{2}a(4)^2 + v_0(4) + x_0 \\ t_3 = 8s : x_3 = 64m \Rightarrow 64 = \frac{1}{2}a(8)^2 + v_0(8) + x_0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_0 = 4 - 2a - 2v_0} \begin{cases} 12 = 8a + 4v_0 + (4 - 2a - 2v_0) \\ 64 = 32a + 8v_0 + (4 - 2a - 2v_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 6a + 2v_0 \\ 60 = 30a + 6v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 3 m/s^2 , v_0 = -5 m/s \Rightarrow x_0 = 8m$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(3)t^2 - 5t + 8 \Rightarrow x = 1/5t^2 - 5t + 8$$

گام دوم: حالا لحظهٔ تغییر جهت حرکت را طبق رابطهٔ $t = \frac{-B}{2A}$ (رأس سهمی) به دست می‌آوریم:

$$x = \underbrace{1/5}_{A}t^2 \underbrace{-5}_{B}t \underbrace{+8}_{C} \Rightarrow t = \frac{-(-5)}{2(1/5)} = \frac{5}{3}s$$

یه‌جور دیگه

گام اول: سرعت متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 به دست می‌آوریم:

$$(t_1 - t_2): v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av,1} = \frac{12 - 4}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4 m/s$$

$$(t_2 - t_3): v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av,2} = \frac{64 - 12}{8 - 4} = \frac{52}{4} = 13 m/s$$

گام دوم: سرعت متحرک را در لحظات $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$ و $t'' = \frac{t_2 + t_3}{2}$ به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که حرکت با شتاب ثابت است، داریم:

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3s : v' = v_{av_1} = 4 m/s$$

$$t'' = \frac{t_2 + t_3}{2} = \frac{4 + 8}{2} = 6s : v'' = v_{av_2} = 13 m/s$$

گام سوم: با داشتن سرعت متحرک در دو لحظهٔ t' و t'' ، معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} t' = 3s , v' = 4 m/s : 4 = 3a + v_0 \\ t'' = 6s , v'' = 13 m/s : 13 = 6a + v_0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 m/s^2 , v_0 = -5 m/s$$

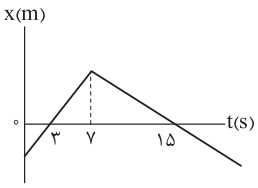
$$\Rightarrow v = 3t - 5$$

گام چهارم: لحظهٔ تغییر جهت حرکت (ریشهٔ معادلهٔ v ـ t) را به دست می‌آوریم:

$$v = 3t - 5 \xrightarrow{v=0} 0 = 3t - 5 \Rightarrow 3t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{3}s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۵ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک بین دو لحظه‌ای که از مبدأ مکان عبور می‌کند، برابر $\frac{۴}{۳}\ m/s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی چند متر بر مربع ثانیه است؟



یعنی همان دو لحظه‌ای که نمودار x ـ t محور t را قطع کرده.

۱) $۰/۲۵\vec{i}$

۲) $۰/۷۵\vec{i}$

۳) $-۰/۲۵\vec{i}$

۴) $-۰/۷۵\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

چگونه به کمک نمودار مکان ـ زمان یک متحرک، شتاب متوسط آن را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ به دست آوریم؟

ابتدا باید به کمک شیب مماس بر نمودار در لحظات ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی یعنی در لحظات $t_۱$ و $t_۲$، سرعت متحرک را به دست آوریم. سپس با داشتن سرعت متحرک در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ و هم‌چنین بازهٔ زمانی، می‌توانیم طبق رابطهٔ $a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}$، شتاب متوسط را به دست آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند را با توجه به نمودار مکان ـ زمان پیدا می‌کنیم:

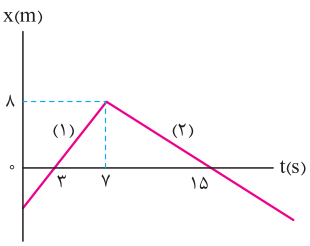
می‌دانیم در لحظاتی که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند، نمودار مکان ـ زمان متحرک محور زمان را قطع می‌کند، بنابراین با توجه به نمودار مکان ـ زمان، متحرک در دو لحظهٔ $t_۱=۳s$ و $t_۲=۱۵s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند.

گام دوم: مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت حرکت $(t=۷\ s)$ را به دست می‌آوریم. با توجه به تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۳s$ تا $t_۲=۱۵s$ داریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{\ell}{۱۵-۳}\Rightarrow\ell=۱۶\,m$$

$$\ell=|x_۷-۰|+|۰-x_۷|=۲x_۷\Rightarrow ۲x_۷=۱۶\Rightarrow x_۷=۸\,m$$

گام سوم: شتاب متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی $t_۱=۳\ s$ تا $t_۲=۱۵\ s$ به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار شکل زیر داریم:



$$t_۱=۳s:\ v_۱=(۱)\ \text{شیب}=\frac{۸-۰}{۷-۳}=۲\ m/s$$

$$t_۲=۱۵s:\ v_۲=(۲)\ \text{شیب}=\frac{۰-۸}{۱۵-۷}=-۱\ m/s$$

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{-۱-۲}{۱۵-۳}=\frac{-۳}{۱۲}=-۰/۲۵\ m/s^۲$$

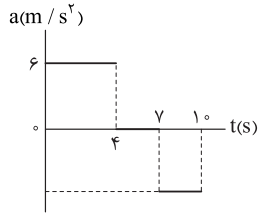
بنابراین شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با: $\vec{a}_{av}=-۰/۲۵\ (m/s^۲)\vec{i}$

تیزبازی

با توجه به این‌که شیب نمودار در $t=۱۵s$ منفی و در $t=۳s$ مثبت است، درمی‌یابیم تغییرات سرعت منفی و در نتیجه شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی منفی است، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) را در همان ابتدای کار رد می‌کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۶ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در ۱۰ ثانیهٔ اول، شتاب متوسط متحرک برابر صفر و تندی متوسط متحرک برابر ۱۸ m/s باشد، سرعت متحرک در مبدأ زمان چند متر بر ثانیه است؟



۱) صفر

۲) $2/4\vec{i}$

۳) $1/4\vec{i}$

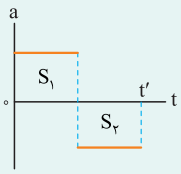
۴) $-1/4\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مساحت محصور نمودار شتاب ـ زمان با محور زمان با در نظر گرفتن علامت، نشان‌دهندهٔ تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی است.

مطابق شکل زیر، داریم:



$$\Delta v_{(0-t')} = S_1 - S_2$$

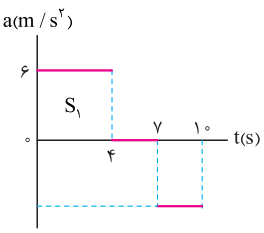
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 10\,s$ را برحسب سرعت اولیهٔ متحرک به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که شتاب متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول صفر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 0 = \frac{v_{10} - v_0}{10 - 0} \Rightarrow v_{10} = v_0$$

بنابراین سرعت متحرک در $t = 10\,s$ همان v_0 است.

گام دوم: با استفاده از نمودار شتاب ـ زمان، سرعت متحرک را در لحظات $t = 4\,s$ و $t = 7\,s$ برحسب v_0 به دست می‌آوریم:



$$\Delta v_{(0-4s)} = S_1 = 4 \times 6 = 24 \Rightarrow v_4 = v_0 + 24\,(m/s)$$

$$\Delta v_{(4s-7s)} = 0 \Rightarrow v_7 - v_4 = 0 \Rightarrow v_7 = v_4 = v_0 + 24\,(m/s)$$

گام سوم: با استفاده از مسافت طی‌شده، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 18 = \frac{\ell}{10} \Rightarrow \ell = 180\,m$$

$$(0-4s)\text{: حرکت با شتاب ثابت} \Rightarrow d_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_0 t \Rightarrow d_1 = \frac{1}{2}(6)(4^2) + v_0(4) = 48 + 4v_0$$

$$(4s-7s)\text{: حرکت با سرعت ثابت} \Rightarrow d_2 = v_4 \cdot \Delta t \Rightarrow d_2 = (v_0 + 24) \times 3 = 3v_0 + 72$$

$$(7s-10s)\text{: حرکت با شتاب ثابت} \Rightarrow d_3 = \left(\frac{v_7 + v_{10}}{2}\right)\Delta t \Rightarrow d_3 = \left(\frac{v_0 + 24 + v_0}{2}\right) \times 3 = 3v_0 + 36$$

$$\ell = d_1 + d_2 + d_3 \Rightarrow 180 = 48 + 4v_0 + 3v_0 + 72 + 3v_0 + 36$$

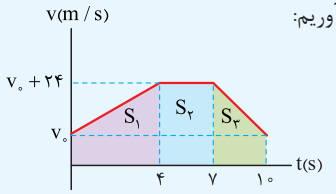
$$\Rightarrow 24 = 10v_0 \Rightarrow v_0 = 2/4\,m/s$$

بنابراین سرعت اولیهٔ متحرک $2/4\,(m/s)\vec{i}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

یه‌جور دیگه

می‌توانیم با استفاده از مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنیم و سپس به کمک مساحت محصور در نمودار سرعت ـ زمان، خواستهٔ سؤال را به دست آوریم:



$$S_1 = (\frac{v_0 + 24 + v_0}{2}) \times 4 = 4v_0 + 48$$

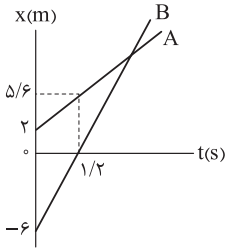
$$S_2 = (v_0 + 24) \times 3 = 3v_0 + 72$$

$$S_3 = (\frac{v_0 + 24 + v_0}{2}) \times 3 = 3v_0 + 36$$

$$\ell = S_1 + S_2 + S_3 = 180 \Rightarrow 10v_0 + 156 = 180 \Rightarrow v_0 = 2/4\,m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۷ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. چند ثانیه، فاصلهٔ این دو متحرک کم‌تر از ۵ m یا مساوی آن است؟



۱) ۲/۵

۲) ۵

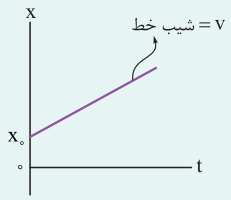
۳) ۷/۵

۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

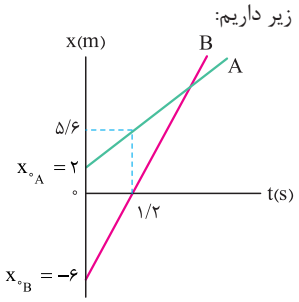
درس Box

نمودار مکان ـ زمان حرکت متحرکی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، طبق رابطهٔ $x = vt + x_0$، به صورت خطی است با شیب ثابت، که عرض از مبدأ آن، مکان اولیه (x_0) و شیب خط، سرعت متحرک (v) است. به شکل زیر توجه کنید:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو متحرک را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار شکل زیر داریم:



حرکت با سرعت ثابت: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{۵/۶ - ۲}{۱/۲} = ۳\ m/s \\ v_B = \frac{۰ - (-۶)}{۱/۲} = ۵\ m/s \end{cases}$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۳t + ۲ \\ x_B = ۵t - ۶ \end{cases}$$

گام دوم: مدت‌زمانی که فاصلهٔ دو متحرک از هم کم‌تر یا مساوی ۵ m است را به دست می‌آوریم:

$$|x_B - x_A| \le ۵ \Rightarrow |(۵t - ۶) - (۳t + ۲)| \le ۵ \Rightarrow |۲t - ۸| \le ۵$$

$$\Rightarrow -۵ \le ۲t - ۸ \le ۵ \Rightarrow ۳ \le ۲t \le ۱۳ \Rightarrow ۱/۵\ s \le t \le ۶/۵\ s$$

بنابراین مدت‌زمانی که فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر یا مساوی ۵ m است، برابر است با:

$$\Delta t = ۶/۵ - ۱/۵ = ۵\ s$$

یه‌جور دیگه

با توجه به نمودار، درمی‌یابیم در $t = ۰$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۸ m و در $t = ۱/۲\ s$، این فاصله ۲/۴ m کاهش یافته و به ۵/۶ m رسیده است. بنابراین سرعت این دو متحرک نسبت به هم ثابت و برابر $v_{نسبی} = \frac{۲/۴}{۱/۲} = ۲\ m/s$ است. حالا برای این‌که مدت‌زمانی که متحرک B، ۵ متر عقب‌تر از متحرک A باشد، تا این‌که ۵ متر جلوتر از متحرک A باشد را به دست آوریم، داریم:

$$\Delta t = \frac{d_{نسبی}}{v_{نسبی}} = \frac{۵ - (-۵)}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵\ s$$

گول نخوری

اگه به اشتباه فکر کنی مدت زمانی که فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر یا مساوی ۵m است، فقط مربوط به حالتی است که متحرک B عقب‌تر از متحرک A است، این زمان رو ۲/۵ s در نظر می‌گیری و توی دام گزینهٔ (۱) می‌افتی!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۸ معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، در SI به صورت $x_A = 8t$ و $x_B = t^2 - 7$ است. فاصلهٔ بین این دو متحرک چند بار برابر ۵ m می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی خواستهٔ سؤال را به صورت یک معادلهٔ قدرمطلقی می‌نویسیم:

$$|x_B - x_A| = 5 \Rightarrow |(t^2 - 7) - (8t)| = 5 \Rightarrow |t^2 - 8t - 7| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 - 8t - 12 = 0 \\ t^2 - 8t - 2 = 0 \end{cases}$$

$$8t^2 - 8t - 12 = 0: \ \Delta = (-8)^2 - 4(1)(-12) = 64 + 48 = 112$$

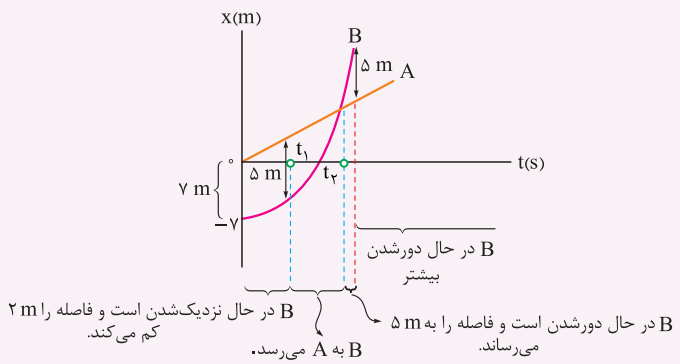
$$\Rightarrow t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{112}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{112}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{8 + \sqrt{112}}{2} & \text{ق ق} \\ t = \dfrac{8 - \sqrt{112}}{2} < 0 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$8t^2 - 8t - 2 = 0: \ \Delta = (-8)^2 - 4(1)(-2) = 64 + 8 = 72$$

$$\Rightarrow t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{72}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{8 + \sqrt{72}}{2} & \text{ق ق} \\ t = \dfrac{8 - \sqrt{72}}{2} < 0 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

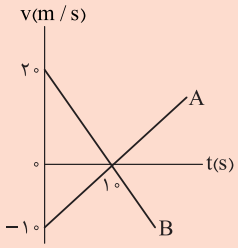
بنابراین دو لحظهٔ قابل قبول وجود دارد که در آن‌ها، فاصلهٔ بین دو متحرک به ۵ m می‌رسد.

تیزپازی *اگر نمودار x ـ t دو متحرک رو رسم می‌کردی، سریع می‌فهمیدی که دوبار فاصلهٔ دو متحرک از هم ۵ متر میشه.*



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۹ شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که روی محور x حرکت می‌کنند و در مبدأ زمان از مبدأ محور می‌گذرند. در چه لحظه‌ای فاصلهٔ دو متحرک برای بار دوم به ۵۴ m می‌رسد؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک، سرعت اولیه و شتاب آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{A متحرک:}\begin{cases} v_{\circ A} = -10\ m/s \\ a_A = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0-(-10)}{10} = 1\ m/s^2 \end{cases}$$

$$\text{B متحرک:}\begin{cases} v_{\circ B} = 20\ m/s \\ a_B = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0-20}{10} = -2\ m/s^2 \end{cases}$$

گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_\circ t + x_\circ \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{1}{2}(1)t^2 - 10t + 0 \Rightarrow x_A = \frac{1}{2}t^2 - 10t \\ x_B = \frac{1}{2}(-2)t^2 + 20t + 0 \Rightarrow x_B = -t^2 + 20t \end{cases}$$

گام سوم: لحظه‌ای که برای دومین بار فاصلهٔ دو متحرک از هم به ۵۴ m می‌رسد را به دست می‌آوریم:

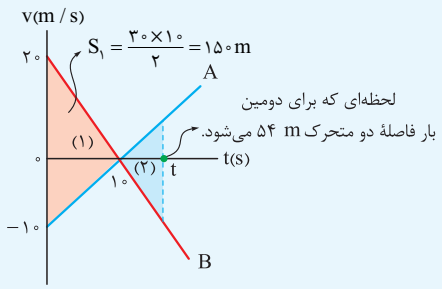
$$|x_A - x_B| = 54\ m \Rightarrow |(\frac{1}{2}t^2 - 10t) - (-t^2 + 20t)| = 54$$

$$\Rightarrow |1/5t^2 - 30t| = 54 \Rightarrow \begin{cases} 1/5t^2 - 30t - 54 = 0 \\ 1/5t^2 - 30t + 54 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 20t - 36 = 0 \Rightarrow t = 10 + \sqrt{136}\ s \\ t^2 - 20t + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2s \\ t = 18s \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین در لحظات $t_1 = 2s$، $t_2 = 18s$ و $t_3 = 10 + \sqrt{136}\ s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۵۴ m می‌شود که در لحظهٔ $t = 18s$ برای دومین بار این اتفاق می‌افتد.

یه‌جور دیگه

می‌توانیم با استفاده از تشابه دو مثلث نیز به جواب برسیم:



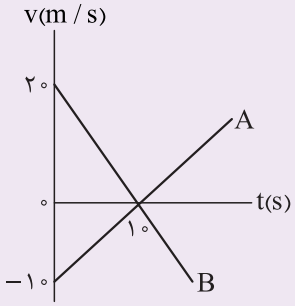
با توجه به این‌که تا قبل از برابرشدن سرعت دو متحرک، متحرک B به اندازهٔ مساحت مثلث (۱)، از متحرک A جلوتر است و مساحت این مثلث ۱۵۰ متر است، درمی‌یابیم تا این لحظه متحرک B، ۱۵۰ متر جلوتر افتاده است و اولین باری که فاصلهٔ دو متحرک از هم ۵۴ متر می‌شود، قبل از این لحظه است؛ بنابراین دومین باری که فاصلهٔ دو متحرک از هم ۵۴ متر می‌شود، باید پس از این لحظه $(t = 10\ s)$ باشد و متحرک A به اندازهٔ 96 m از این عقب‌ماندن را جبران کند؛ بنابراین باید مساحت مثلث (۲)، ۹۶ باشد، در نتیجه داریم:

$$(\frac{t-10}{10})^2 = \frac{96}{150} = \frac{64}{100} \Rightarrow \frac{t-10}{10} = \frac{8}{10} \Rightarrow t - 10 = 8 \Rightarrow t = 18\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که روی محور x حرکت می‌کنند و در مبدأ زمان از مبدأ محور می‌گذرند. چند بار فاصلهٔ بین این دو متحرک ۱۵۰ متر می‌شود؟ (سؤال ۴۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۰ متحرک A در مبدأ زمان از مبدأ مکان با شتاب ثابتِ $۲\ m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند و پس از ۱۰s با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B نیز در لحظهٔ $t=۶s$ با شتاب ثابت $۷/۵\ m/s^۲$ از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده و پس از ۴s با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. دو متحرک در فاصلهٔ چند متری مبدأ مکان به یکدیگر می‌رسند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰

۳) ۱۸۰ ۴) ۲۲۰

مشاوره وقتی به این سؤال رسیدی، یه نگاه به زمان بنداز، اگه دیدی زمان کمی داری، درگیر سؤالات دومتحرکهٔ این مدلی نشو! بعد از آزمون کامل تحلیلش کن!

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مکان دو متحرک را در $t=۱۰s$ به دست می‌آوریم:

$$(۰-۱۰s):\begin{cases}\text{A متحرک}: x_A=\frac{۱}{۲}a_At^۲+\underbrace{v_{۰A}}_{۰}t+\underbrace{x_{۰A}}_{۰}\Rightarrow x_A=\frac{۱}{۲}(۲)(۱۰^۲)=۱۰۰\,m\\ \text{B متحرک}:\begin{cases}(۰-۶s):\ \text{ساکن}\\ (۶s-۱۰s): x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+\underbrace{v_{۰B}}_{۰}t+\underbrace{x_{۰B}}_{۰}=\frac{۱}{۲}(۷/۵)(۴^۲)=۶۰\,m\end{cases}\end{cases}$$

گام دوم: سرعت دو متحرک را در $t=۱۰s$ به دست می‌آوریم:

$$\text{A متحرک}_{(۰-۱۰s)}: v_A=a_At+v_{۰A}\Rightarrow v_A=۲(۱۰)+۰=۲۰\,m/s$$

$$\text{B متحرک}_{(۶s-۱۰s)}: v_B=a_Bt+v_{۰B}\Rightarrow v_B=۷/۵(۴)+۰=۳۰\,m/s$$

گام سوم: در لحظهٔ $t=۱۰s$، زمان‌سنج را ریست (Reset) می‌کنیم و برای دو متحرک که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، داریم:

$$x=vt+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_A=۲۰t+۱۰۰\\ x_B=۳۰t+۶۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_A=x_B}۲۰t+۱۰۰=۳۰t+۶۰\Rightarrow ۱۰t=۴۰\Rightarrow t=۴s$$

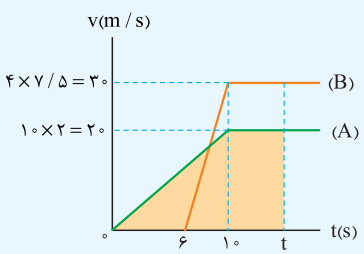
گام چهارم: مکانی که دو متحرک به هم می‌رسند را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[t=۴s]{x_A=x_B}x=۲۰(۴)+۱۰۰=۱۸۰\,m$$

بنابراین دو متحرک در ۱۸۰ متری مبدأ مکان به هم می‌رسند.

یه جور دیگه

می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک را رسم کنیم. به شکل زیر توجه کنید.



$$\xrightarrow{d_A=d_B}\left(\frac{(t)+(t-۱۰)}{۲}\right)\times۲۰=\left(\frac{(t-۶)+(t-۱۰)}{۲}\right)\times۳۰$$

$$\Rightarrow ۲۰t-۱۰۰=۳۰t-۲۴۰\Rightarrow ۱۰t=۱۴۰\Rightarrow t=۱۴s\Rightarrow d_A=d_B=\left(\frac{۱۴+۴}{۲}\right)\times۲۰=۱۸۰\,m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۱ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۳۰متری سطح زمین رها می‌شود. تندی گلوله در ارتفاع ۲۰متری سطح زمین، چند برابر تندی آن در ارتفاع ۱۰متری سطح زمین است؟

۱) ۲

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پس از پیمودن مسافت ۲۰ m

پس از پیمودن مسافت ۱۰ m

پاسخ: گزینهٔ ۴

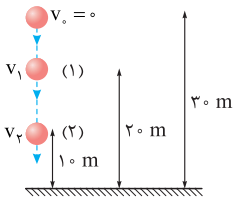
درس Box

در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، طبق رابطهٔ $v^۲ = -۲g\Delta y$، درمی‌یابیم تندی با جذر مسافت طی‌شده متناسب است و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\frac{v_۲}{v_۱} = \sqrt{\frac{\Delta y_۲}{\Delta y_۱}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

مطابق شکل زیر و طبق معادلهٔ مستقل از زمان در سقوط آزاد، داریم:



$$\Delta y_۱ = ۲۰ - ۳۰ = -۱۰ m$$

$$\Delta y_۲ = ۱۰ - ۳۰ = -۲۰ m$$

$$v^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow |v| = \sqrt{-۲g\Delta y} \Rightarrow \frac{|v_۱|}{|v_۲|} = \sqrt{\frac{\Delta y_۱}{\Delta y_۲}} = \sqrt{\frac{-۱۰}{-۲۰}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تیزپازی

می‌دانیم تندی گلوله هرچه به زمین نزدیک‌تر می‌شود، بیشتر است. بنابراین پاسخ باید کوچک‌تر از ۱ باشد (رد گزینه‌های (۱) و (۲)).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۲ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۱۲/۸ متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله چند ثانیه قبل از رسیدن به زمین از ارتفاع ۵/۶ متری سطح زمین عبور می‌کند؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۰/۴
۲) ۰/۶
۳) ۰/۸
۴) ۱/۲

یعنی مسافت $12/8 - 5/6 = 7/2\ m$ را طی می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، اندازهٔ جابه‌جایی طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d\ (m) \text{ اندازهٔ جابه‌جایی} \leftarrow d = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t\ (s) \text{ زمان سپری شده}$$

$g\ (m/s^2)$ شتاب گرانش

پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق معادلهٔ $d = \frac{1}{2}gt^2$ می‌توانیم بنویسیم:

$$d_1 = 12/8 - 5/6 = 7/2\ m$$

از لحظهٔ رهاشدن تا رسیدن به ۵/۶ متری زمین: $d_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow 7/2 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = 1/44 \Rightarrow t_1 = 1/2\ s$

از لحظهٔ رهاشدن تا برخورد به زمین: $d_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow 12/8 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = 2/56 \Rightarrow t_2 = 1/6\ s$

در نهایت داریم:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1/6 - 1/2 = 0/4\ s$$

کنکور

سنگی را در شرایط خلأ از ارتفاع ۱۲/۸ متر رها می‌کنیم. این سنگ ۰/۶ ثانیه قبل از رسیدن به زمین از ارتفاع چند متری می‌گذرد؟ $(g = 10\ m/s^2)$ *(سؤال ۴۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) ۷/۸ ۲) ۶/۸ ۳) ۶ ۴) ۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۳ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها شده و بعد از ۴s به زمین برخورد می‌کند. تندی متوسط گلوله در ۰/۵ ثانیهٔ آخر حرکت خود قبل از رسیدن به زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۳۲/۵ ۲) ۳۵ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

سقوط آزاد، حرکتی با شتاب ثابت است و با فرض این‌که سرعت اولیه در آن صفر است، می‌توانیم بنویسیم:

شتاب گرانش $(m/s^۲)$

$|v| = gt$ ← تندی در لحظهٔ t (m/s) ، زمان (s) →

تندی ابتدا (m/s) ، تندی انتها (m/s)

$s_{av} = |v_{av}| = \frac{|v_۱| + |v_۲|}{۲}$ ← تندی متوسط (m/s)

اندازهٔ سرعت متوسط (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین را به دست می‌آوریم. طبق معادلهٔ سرعت ـ زمان در سقوط آزاد، داریم:

$$|v| = gt \xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲,\ t=۴\,s]{v_{\text{برخورد}}=v_۲} |v_۲| = ۱۰ \times ۴ = ۴۰\ m/s$$

گام دوم: تندی گلوله را ۰/۵ s قبل از برخورد آن به زمین به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که سقوط آزاد یک حرکت با شتاب ثابت است، داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۰/۵\,s,\ \Delta v=۴۰-|v_۱|]{a=g=۱۰\,m/s^۲} ۱۰ = \frac{۴۰ - |v_۱|}{۰/۵} \Rightarrow |v_۱| = ۳۵\ m/s$$

گام سوم: تندی متوسط گلوله را ۰/۵ s قبل از برخورد آن به زمین به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{|v_۱| + |v_۲|}{۲} = \frac{۳۵ + ۴۰}{۲} = ۳۷/۵\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۴ در شرایط خلأ، در لحظه‌ای گلولهٔ A از ارتفاع ۸۰متری و یک ثانیه بعد، گلولهٔ B از ارتفاع ۶۰متری سطح زمین رها می‌شوند. از لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ B تا لحظه‌ای که اولین گلوله به سطح زمین می‌رسد، فاصلهٔ دو گلوله چگونه تغییر می‌کند؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۲) به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک به صورت زیر است:

$$\text{مکان (m)} \leftarrow y = -\frac{۱}{۲}\underbrace{g}_{\text{شتاب گرانش}(m/s^۲)}\underbrace{t^۲}_{\text{زمان (s)}} + \underbrace{y_۰}_{\text{مکان اولیه (m)}} \rightarrow \text{مکان (m)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

تذکر: اگر دو متحرک A و B با اختلاف زمانی Δt حرکت خود را شروع نمایند، در صورتی که زمان را برای اولی $t_A = t$ در نظر بگیریم، برای دومی که حرکت خود را دیرتر شروع کرده، زمان به صورت $t_B = t - \Delta t$ خواهد بود.

گام اول: معادلهٔ مکان ـ زمان دو گلوله را به دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰ \xrightarrow[t_A = t\ ,\ t_B = t-۱\ s]{g = ۱۰\ m/s^۲} \begin{cases} y_A = -۵t^۲ + ۸۰ \\ y_B = -۵(t-۱)^۲ + ۶۰ \end{cases} \Rightarrow y_B = -۵t^۲ + ۱۰t + ۵۵$$

گام دوم: زمان و مکان به هم رسیدن دو گلوله را به دست می‌آوریم:

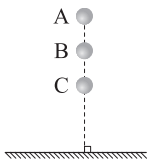
$$y_A = y_B \Rightarrow -۵t^۲ + ۸۰ = -۵t^۲ + ۱۰t + ۵۵ \Rightarrow ۱۰t = ۲۵ \Rightarrow t = ۲/۵\ s$$

$$y_A = y_B = -۵(۲/۵)^۲ + ۸۰ = ۴۸/۷۵\ m$$

گام سوم: با توجه به این‌که گلولهٔ A در ابتدا بالاتر از گلولهٔ B است، تا لحظهٔ $t = ۲/۵\ s$ که دو گلوله از یک مکان می‌گذرند، فاصله‌شان کاهش می‌یابد و پس از آن، تا رسیدن اولین گلوله به زمین، فاصلهٔ آن‌ها افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۵ در شکل زیر، سه گلوله به صورت هم‌زمان از نقطه‌های A، B و C رها می‌شوند و گلوله‌ها با اختلاف زمانی ۲ثانیه‌ای به سطح زمین می‌رسند. اگر فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر ۱۰۰ m باشد، فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C برابر چند متر است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



۱) ۲۰

۲) ۴۰

۳) ۶۰

۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

اول با استفاده از رابطهٔ $d = \frac{۱}{۲}gt^۲$ و با داشتن اختلاف d_A و d_B و t_A و t_B، مدت‌زمان رسیدن به زمین هر سه گلوله رو به دست بیار. بعدش دوباره به کمک همون رابطهٔ $d = \frac{۱}{۲}gt^۲$ و داشتن t_B و t_C فاصلهٔ BC رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق رابطهٔ $d = \frac{۱}{۲}gt^۲$ و $d_A - d_B = ۱۰۰\ m$، فاصلهٔ گلوله‌ها را از سطح زمین به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{۱}{۲}gt^۲ \xrightarrow{g=۱۰\ m/s^۲} d = ۵t^۲ \xrightarrow{d_A - d_B = ۱۰۰\ m} ۵t_A^۲ - ۵t_B^۲ = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow t_A^۲ - t_B^۲ = ۲۰ \Rightarrow (t_A - t_B)(t_A + t_B) = ۲۰ \xrightarrow{t_A - t_B = ۲\ s} ۲(t_A + t_B) = ۲۰$$

$$\Rightarrow t_A + t_B = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} t_A - t_B = ۲ \\ t_A + t_B = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow t_A = ۶s\ ,\ t_B = ۴s \xrightarrow{t_C = t_B - ۲\ s} t_C = ۴ - ۲ = ۲\ s$$

$$\Rightarrow d_A = ۵(۶^۲) = ۱۸۰\ m\ ,\ d_B = ۱۸۰ - ۱۰۰ = ۸۰\ m\ ,\ d_C = ۵t_C^۲ = ۵(۲^۲) = ۲۰\ m$$

$$\Rightarrow d_B - d_C = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰\ m$$

تیزبازی

در سقوط آزاد، می‌دانیم مسافتی که گلوله در ثانیه‌های متوالی طی می‌کند، به صورت تصاعد حسابی به شکل زیر است:

ثانیهٔ اول	ثانیهٔ دوم	ثانیهٔ سوم	ثانیهٔ چهارم	ثانیهٔ پنجم	ثانیهٔ ششم
۵ m	۱۵ m	۲۵ m	۳۵ m	۴۵ m	۵۵ m

۲ s (ثانیهٔ سوم و چهارم) — ۲ s (ثانیهٔ پنجم و ششم)

۱۰۰ m ← فاصلهٔ گلولهٔ A و B

فاصلهٔ گلولهٔ B و C: $d_B - d_C = ۲۵ + ۳۵ = ۶۰\ m$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دوازدهم

۱۸۶ کدام مورد درست است؟

۱) نیروی بین مولکولی در وازلین، مشابه با نیروی بین مولکولی غالب در متانول است.

$C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$

۲) در فرمول شیمیایی روغن زیتون، شمار اتم‌های کربن نصف شمار اتم‌های هیدروژن است.

۳) علت انحلال‌پذیری عسل و اوره در آب، وجود گروه هیدروکسیل در ساختار آن‌ها است.

۴) نسبت تعداد پیوندهای اشتراکی به تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در ساختار اتیلن گلیکول برابر ۲/۲۵ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

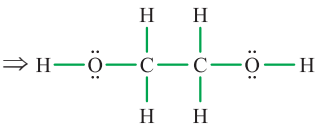
گزینهٔ (۱): وازلین $(C_{۲۵}H_{۵۲})$ ناقطبی بوده و نیروی بین مولکولی آن از نوع وان‌درواالسی است، در حالی که متانول $(CH_۳OH)$، مولکولی قطبی بوده و به دلیل داشتن پیوند $O-H$ در ساختار خود، نیروی بین مولکولی غالب آن، پیوند هیدروژنی است.

گزینهٔ (۲): فرمول شیمیایی روغن زیتون به صورت $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ است.

$$\frac{۵۷}{۱۰۴} \neq ۰/۵$$

گزینهٔ (۳): در ساختار مولکول‌های سازندهٔ عسل، گروه هیدروکسیل (OH) وجود دارد، اما مولکول اوره $(H_۲N-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-NH_۲)$، فاقد گروه هیدروکسیل است.

گزینهٔ (۴): ببینیم:

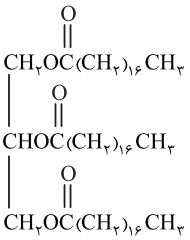
اتیلن گلیکول $\Rightarrow$ 

$$\frac{\text{شمار پیوندهای اشتراکی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۷ با توجه به شکل زیر که یک استر سنگین را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

$(O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$



الف) این ماده هم در چربی و هم در آب حل می‌شود.

ب) مخلوط آن با اسید چرب سازندهٔ صابونی با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{35}COONa$، چربی محسوب می‌شود.

پ) مخلوط حاصل از اضافه‌کردن آن به مخلوط آب و صابون، یک مخلوط پایدار است.

ت) بر اثر واکنش کامل ۴۴/۵ گرم از آن با مقدار کافی محلول سود، ۰/۰۵ مول صابون جامد تولید می‌شود.

۱) «الف» ـ «ب»
۲) «ب» ـ «پ»
۳) «الف» ـ «ت»
۴) «پ» ـ «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

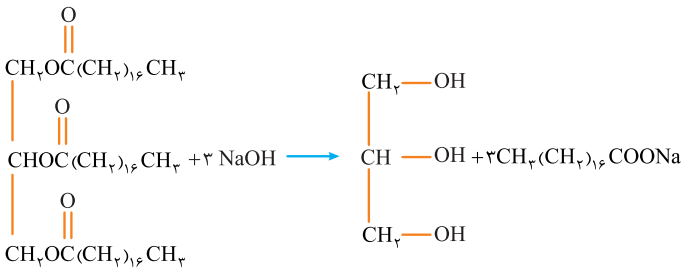
الف) استرهای سنگین در مجموع ناقطبی‌اند و در حلال‌های ناقطبی حل می‌شوند.

اون ماده‌ای که هم در چربی و هم در آب حل می‌شه، صابونه!

ب) *درسته!* زیرا چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای سنگین هستند.

پ) مخلوط آب، صابون و چربی (یا یکی از اجزای سازندهٔ آن)، کلوئید محسوب می‌شود. کلوئیدها جزو مخلوط‌های پایدارند.

ت) فرمول استر داده‌شده به صورت $C_{57}H_{110}O_6$ است. از واکنش هر مول از استرهای سنگین با ۳ مول NaOH، ۳ مول صابون حل می‌شود.



$$۴۴/۵\ g\ C_{57}H_{110}O_6 \times \frac{1\ mol\ C_{57}H_{110}O_6}{890\ g\ C_{57}H_{110}O_6} \times \frac{3\ mol\ \text{صابون}}{1\ mol\ C_{57}H_{110}O_6} = 0/15\ mol\ \text{صابون}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۸ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) سوسپانسیون‌ها، ناپایدار بوده و ذرات سازندهٔ آن‌ها با گذشت زمان ته‌نشین می‌شوند.

ب) برای پایدارسازی مخلوط آب و روغن و تبدیل آن به کلوئید پایدار، استفاده از یک عامل نظیر صابون ضروری است.

پ) پدیدهٔ پخش نور، راهی مؤثر برای تشخیص مخلوط‌های کلوئیدی از محلول‌ها است.

ت) ذرات سازندهٔ شیر، یون‌ها یا مولکول‌های کوچک و ذرات سازندهٔ سس مایونز، توده‌های مولکولی است.

۱) «ب» ـ «پ»

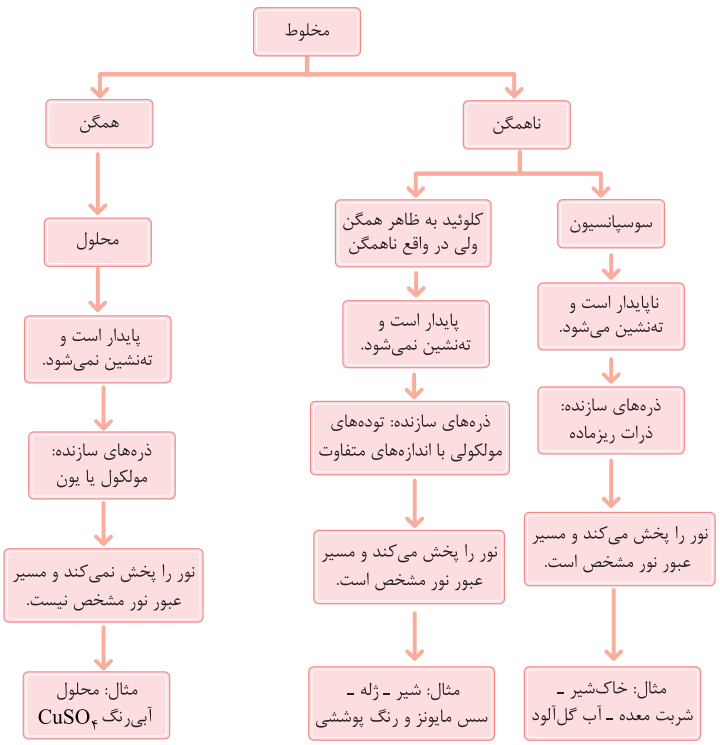
۲) «الف» ـ «ب» ـ «پ»

۳) «ب» ـ «پ» ـ «ت»

۴) «ب» ـ «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست‌اند.



در مورد عبارت «ت» دقت کنید که شیر و سس مایونز، هر دو جزء کلوئیدها هستند و از توده‌های مولکولی تشکیل شده‌اند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۹ **شمار کل اتم‌های کربن در یک پاک‌کنندهٔ صابونی با شمار کل اتم‌های کربن در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی برابر است. اگر شمار پیوندهای $C=C$ در این دو پاک‌کننده برابر باشد، شمار اتم‌های هیدروژن در پاک‌کنندهٔ صابونی (a_1) و غیرصابونی (a_2)، چه رابطه‌ای با هم دارند؟ (زنجیر هیدروکربنی در پاک‌کنندهٔ صابونی، سیرنشده و در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، سیرشده و کاتیون هر دو پاک‌کننده، یون سدیم است.)**

۱) $a_1 = a_2$

۲) $a_1 = a_2 - 2$

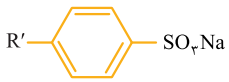
۳) $a_1 = a_2 + 4$

۴) $a_1 = a_2 + 2$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

پاک‌کنندهٔ صابونی: $RCOONa$

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی: $R'C_6H_4SO_3Na$ یا R' 

طبق اطلاعات سؤال، شمار کل اتم‌های کربن دو پاک‌کننده برابر است؛ پس می‌توان نوشت:

$$\underbrace{R\ \text{کربن}}_{n} + 1 = \underbrace{R'\ \text{کربن}}_{m} + 6 \Rightarrow n+1 = m+6 \Rightarrow m = n-5$$

از طرفی گروه R، سیرنشده و گروه R'، سیرشده و شمار پیوندهای $C=C$ در دو پاک‌کننده برابر است. در ساختار پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، ۳ پیوند $C=C$ در حلقهٔ بنزنی وجود دارد؛ پس گروه R در ساختار پاک‌کنندهٔ صابونی دارای ۳ پیوند $C=C$ است. هر پیوند $C=C$، ۲ اتم هیدروژن از هیدروژن‌های یک ترکیب کم می‌کند:

$$C_nH_{2n+1} \xrightarrow{-3\times2=6} R: C_nH_{2n+1-6} = C_nH_{2n-5}$$

$$R': C_mH_{2m+1} \xrightarrow{m=n-5} C_{n-5}H_{2(n-5)+1} = C_{n-5}H_{2n-9}$$

به این ترتیب، هر دو پاک‌کننده، دارای $2n-5$ اتم هیدروژن هستند.

پاک‌کنندهٔ صابونی: $C_nH_{2n-5}COONa \Rightarrow a_1 = 2n-5$

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی: $C_{n-5}H_{2n-9}C_6H_4SO_3Na \Rightarrow a_2 = 2n-9+4 = 2n-5$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۰ **اگر نمونه‌ای به جرم ۱۵۳ گرم از یک پاک‌کنندهٔ صابونی جامد با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده با ۲ لیتر آب سخت $(d = ۱\ g.mL^{-۱})$ که غلظت یون منیزیم در آن، ۳۰۰۰ ppm است، به طور کامل واکنش دهد، مجموع شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول صابون کدام است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶, Na = ۲۳, Mg = ۲۴ : g.mol^{-۱})$**

۱) ۴۷ ۲) ۵۳ ۳) ۵۶ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

یکی از عواملی که بر روی قدرت پاک‌کنندگی صابون اثر می‌گذارند، نوع آب است:

- در آب سخت، قدرت پاک‌کنندگی صابون کم‌تر است.
- آب سخت، مقادیر چشم‌گیری از یون‌های $(Ca^{۲+})$ و منیزیم $(Mg^{۲+})$ دارد، مثل آب دریا و مناطق کویری (شور).
- صابون در این آب‌ها به خوبی کف نمی‌کند.
- صابون با یون‌های موجود در آب سخت رسوب تشکیل می‌دهد.

$$۲RCOONa(aq) + Mg^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + ۲Na^{+}(aq)$$

$$۲RCOONa(aq) + Ca^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Ca(s) + ۲Na^{+}(aq)$$

- لکه‌های سفیدی که پس از شستن لباس با صابون روی آن‌ها بر جای می‌ماند، نشانه‌ای از تشکیل چنین رسوب‌هایی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا مقدار یون $Mg^{۲+}$ در آب سخت را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ mol\ Mg^{۲+} : \overbrace{۲۰۰۰\ g\ \text{محلول}}^{۲L} \times \frac{۳۰۰۰\ g\ Mg^{۲+}}{۱۰^{۶}\ g\ \text{محلول}} \times \frac{۱\ mol\ Mg^{۲+}}{۲۴\ g\ Mg^{۲+}} = ۰/۲۵\ mol$$

گام دوم: واکنش صابون با آب سخت منیزیم‌دار به صورت زیر است:

$$۲\underbrace{C_nH_{۲n-۱}O_۲Na}_{\text{جرم مولی: } ۱۴n+۵۴} + Mg^{۲+} \rightarrow (C_nH_{۲n-۱}O_۲)_۲Mg + ۲Na^{+}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$۱۵۳\ g\ \text{صابون} = ۰/۲۵\ mol\ Mg^{۲+} \times \frac{۲\ mol\ \text{صابون}}{۱\ mol\ Mg^{۲+}} \times \frac{(۱۴n+۵۴)\ g\ \text{صابون}}{۱\ mol\ \text{صابون}} \Rightarrow n = ۱۸$$

گام سوم: فرمول صابون به صورت $C_{۱۸}H_{۳۵}O_۲Na$ بوده و مجموع شمار اتم‌های C و H در ساختار صابون برابر با ۵۳ است:

$$۱۸ + ۳۵ = ۵۳$$

کنکور

اگر از واکنش ۰/۰۶ مول صابون جامد دارای زنجیر هیدروکربنی سیرشده، با مقدار کافی محلول منیزیم کلرید، ۱۷/۷ گرم رسوب تشکیل شود، شمار اتم‌های کربن در مولکول صابون کدام است و چند مول یون به حالت محلول باقی می‌ماند؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود، $Mg = ۲۴, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

$$RCOONa(aq) + MgCl_۲(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + NaCl(aq)$$

(سؤال ۱۰۱ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) ۱۷، ۰/۰۶ ۲) ۱۸، ۰/۱۲
۳) ۱۷، ۰/۱۲ ۴) ۱۸، ۰/۰۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۱ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) برای فرمول شیمیایی پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی جامد، نمی‌توان فرمول عمومی ویژه‌ای نوشت.

۲) طبق نظریهٔ آرنیوس، هر ماده‌ای که در ساختار آن اتم هیدروژن وجود دارد، اسید است.

۳) همهٔ رساناهای الکترونی متعلق به دستهٔ عناصر فلزی هستند و رسانایی آن‌ها به وسیلهٔ الکترون‌ها انجام می‌شود.

۴) پس از توصیف علمی اسید و باز توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با واکنش‌های میان آن‌ها آشنا شدند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۱): برخلاف سایر گزینه‌ها درست است. فرمول عمومی پاک‌کننده‌های صابونی جامد به صورت $RCOONa$ است، اما پاک‌کننده‌های خورنده (مانند HCl، $NaOH$ و...) فرمول عمومی ندارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): هر ماده‌ای که با حل‌شدن در آب، غلظت H^+ را افزایش دهد، اسید آرنیوس است. بعضی مواد در ساختار خود، اتم هیدروژن دارند، اما اسید محسوب نمی‌شوند، مانند CH_4!

گزینهٔ (۳): علاوه بر فلزها، گرافیت که نافلز می‌باشد، جزء رساناهای الکترونی است.

گزینهٔ (۴): قبل از آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با برخی ویژگی‌های اسیدها و بازها و واکنش‌های بین آن‌ها آشنا بودند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۲ **شمار یون‌های حاصل از انحلال ۰/۱ مول سدیم اکسید در آب با شمار یون‌های حاصل از انحلال ..... در آب برابر است.**

۱) ۰/۲ مول دی‌نیتروژن پنتااکسید
۲) ۰/۱ مول پتاسیم فسفات
۳) ۰/۰۵ مول گوگرد تری‌اکسید
۴) ۰/۱ مول باریم اکسید

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا شمار مول یون‌های حاصل از انحلال ۰/۱ مول سدیم اکسید در آب را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{Na_2O}_{0/1\ mol} + H_2O \rightarrow \underbrace{2Na^+ + 2OH^-}_{0/1\times4=0/4\ mol}$$

حالا شمار مول یون‌ها در گزینه‌ها را حساب می‌کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$\underbrace{N_2O_5}_{0/2\ mol} + H_2O \rightarrow \underbrace{2H^+ + 2NO_3^-}_{0/2\times4=0/8\ mol}$$

گزینهٔ (۲):

$$\underbrace{K_3PO_4}_{0/1\ mol} \rightarrow \underbrace{3K^+ + PO_4^{3-}}_{0/1\times4=0/4\ mol}$$

گزینهٔ (۳):

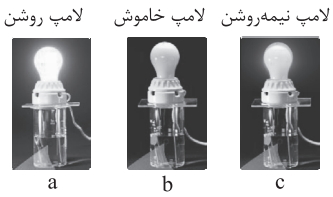
$$\underbrace{SO_3}_{0/05\ mol} + H_2O \rightarrow \underbrace{2H^+ + SO_4^{2-}}_{0/05\times3=0/15\ mol}$$

گزینهٔ (۴):

$$\underbrace{BaO}_{0/1\ mol} + H_2O \rightarrow \underbrace{Ba^{2+} + 2OH^-}_{0/1\times3=0/3\ mol}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۳ با توجه به شکل زیر که رسانایی چند مایع را نشان می‌دهد، کدام گزینه به یقین درست است؟



۱) b یک محلول غیرالکترولیت مانند محلول استیک اسید یا محلول شکر در آب است.

۲) حل‌شوندهٔ a در مقایسه با c، به میزان بیشتری به یون‌های سازنده‌اش تفکیک شده است.

۳) اگر a و c حاوی اسید تک‌ظرفیتی باشند، غلظت یون هیدرونیوم در a بیشتر است.

۴) حل‌شوندهٔ محلول b نمی‌تواند با آب پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که رسانایی الکتریکی محلول a از c بیشتر باشد، قطعاً غلظت یون‌ها در محلول a بیشتر است. بیشتربودن غلظت یون‌ها در محلول اسیدهای تک‌ظرفیتی معادل با بیشتربودن غلظت یون هیدرونیوم در محلول است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

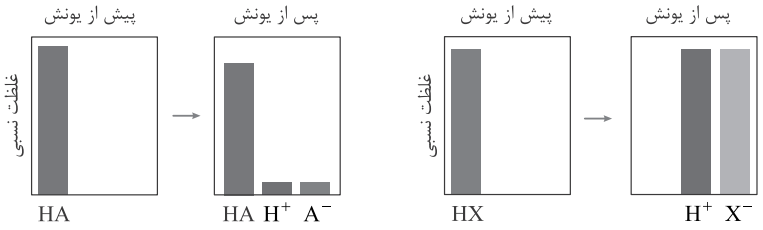
گزینهٔ (۱): b، رسانای جریان برق نیست و غیرالکترولیت محسوب می‌شود، اما استیک اسید (CH_3COOH)، الکترولیت ضعیف است.

گزینهٔ (۲): بستگی به غلظت محلول‌ها هم دارد. ممکن است a به میزان کم‌تری تفکیک شده باشد اما به دلیل غلظت بالاتر محلول، رسانایی الکتریکی آن بیشتر باشد. در ضمن شاید حل‌شونده‌های a و c اصلاً ترکیب یونی نباشد، مثلاً اگر محلول a حاوی HCl (ترکیب مولکولی) باشد، *باید بگیم a یونش پیدا کرده است و نه این‌که به یون‌هاش تفکیک شده!*

گزینهٔ (۴): حل‌شوندهٔ b می‌تواند متانول (CH_3OH) باشد که توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۴ **با توجه به شکل زیر، که فرایند یونش محلول دو اسید HA و HX (با حجم، دما و غلظت یکسان) را نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟**



۱) در محلول ۱ مولار از هر دو اسید، تفاوت غلظت A^- و X^-، ۱ مولار است.

۲) X می‌تواند هر یک از هالوژن‌های جدول دوره‌ای باشد.

۳) رسانایی الکتریکی محلول ۰/۰۱ مولار HX(aq)، به مراتب بیشتر از رسانایی الکتریکی محلول ۰/۰۱ مولار HA(aq) است.

۴) اگر به هر دو محلول مقدار کافی آب اضافه شود، درصد یونش اسید HA کاهش می‌یابد، در حالی که درصد یونش اسید HX بدون تغییر می‌ماند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

HA به طور جزئی یونیده است، بنابراین اسید ضعیف محسوب می‌شود، در حالی که HX به طور کامل یونیده شده و اسیدی قوی است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در محلول ۱ مولار HX، غلظت X^- برابر ۱ مولار و در محلول ۱ مولار HA، غلظت A^- کم‌تر از ۱ مولار است؛ بنابراین تفاوت غلظت X^- و A^- کم‌تر از ۱ مولار می‌باشد.

گزینهٔ (۲): X نمی‌تواند فلوئور باشد، زیرا HF یک اسید ضعیف است، در حالی که با توجه به شکل، HX یک اسید قوی می‌باشد.

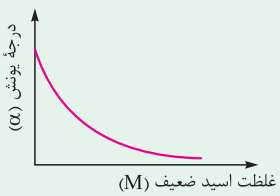
گزینهٔ (۳): با توجه به این‌که HX اسیدی قوی‌تر از HA است، در غلظت اولیهٔ یکسان، غلظت یون‌ها در محلول HX بیشتر می‌باشد. از این‌رو محلول HX، رساناتر است.

گزینهٔ (۴): HX اسید قوی و درصد یونش آن برابر با ۱۰۰٪ است و با اضافه‌کردن آب به محلول آن، درصد یونش آن تغییری نمی‌کند، اما در اسیدهای ضعیف مانند HA با رقیق‌شدن محلول، درصد یونش اسید افزایش می‌یابد.

نکته

برای اسیدهای ضعیف، رابطهٔ تقریبی $K_a \simeq M\alpha^2$ برقرار است. در دمای معین، K_a عدد ثابتی است. بنابراین از این رابطه نتیجه می‌گیریم که درجهٔ یونش اسیدهای ضعیف با غلظت محلول آن‌ها رابطهٔ وارونه دارد؛ یعنی هر چه محلول غلیظ‌تر باشد، درجهٔ یونش اسید در آن کم‌تر است.

$$K_a = M\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{M}} \begin{cases} \alpha \text{ با } M \text{ رابطهٔ وارونه دارد.} \\ \text{نمودار } \alpha \text{ برحسب } M \text{ خطی نیست.} \end{cases} \Rightarrow$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۵ در دمای یکسان، کدام مقایسه نادرست است؟ $(H=1, F=19 : g.mol^{-1})$

۱) رسانایی الکتریکی:

محلول ۰/۵ مولار استیک اسید با $\alpha=0/2$ > محلول ۱۰ گرم بر لیتر هیدروفلوئوریک اسید با $\alpha=0/1$

۲) سرعت واکنش با فلز منیزیم:

محلول ۱ مولار HNO_2 > محلول ۰/۵ مولار H_2SO_4

۳) شمار مولکول‌های یونیده‌نشده:

نیم لیتر محلول ۰/۲ مولار HX با $\alpha=0/25$ < $\alpha=0/5$ با HA ۱/۵ مولار میلی‌لیتر محلول ۱۰۰

۴) رسانایی الکتریکی:

محلول ۲ مولار اتانول < محلول ۲ مولار سدیم کلرید

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در محلول اسیدهای تک‌پروتون‌دار (HA)، محلولی رساناتر است که غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر باشد.

$$\text{غلظت محلول HF}: 10\ g/L \times \frac{1\ mol}{20\ g} = 0/5\ mol.L^{-1}$$

$$[H^+] = M\alpha \begin{cases} \text{محلول استیک اسید}: [H^+] = 0/5 \times 0/2 = 0/1 \\ \text{محلول هیدروفلوئوریک اسید}: [H^+] = 0/5 \times 0/1 = 0/05 \end{cases}$$

گزینهٔ (۲): سرعت واکنش محلول اسیدها با فلز منیزیم، به $[H^+]$ موجود در محلول بستگی دارد، به طوری که هر چه $[H^+]$ در محلول بیشتر باشد، سرعت واکنش نیز بیشتر است.

H_2SO_4 یک اسید قوی است و در محلول ۰/۵ مولار آن، $[H^+]$ نزدیک به $2 \times 0/5 = 1$ مولار است، اما HNO_2 یک اسید ضعیف می‌باشد و $[H^+]$ در محلول ۱ مولار آن، خیلی کم‌تر از ۱ مولار است.

گزینهٔ (۳): باید تعداد مول‌های یونیده‌نشدهٔ دو اسید را مقایسه کنیم.

$$[HA]_{\text{یونیده‌نشده}} = M - \underbrace{[H^+]}_{M\alpha} = M - [HA]_{\text{یونیده‌شده}}$$

$$\text{محلول HX} = [HX]_{\text{یونیده‌نشده}} = 0/2 - (0/2 \times \frac{25}{100}) = 0/15\ mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول HX یونیده‌نشده} = 0/5\ L \times 0/15\ mol.L^{-1} = 0/075\ mol$$

$$\text{محلول HA}: [HA]_{\text{یونیده‌نشده}} = 1/5 - (1/5 \times 0/5) = 0/75\ mol.L^{-1}$$

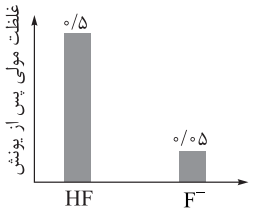
$$\Rightarrow \text{تعداد مول HA یونیده‌نشده} = \frac{100}{1000} L \times 0/75\ mol.L^{-1} = 0/075\ mol$$

تعداد مولکول‌های یونیده‌نشده در دو محلول برابر است.

گزینهٔ (۴): سدیم کلرید (NaCl) الکترولیت و اتانول (C_2H_5OH)، غیرالکترولیت است؛ بنابراین در غلظت اولیهٔ یکسان، رسانایی الکتریکی محلول سدیم کلرید بیشتر است. (در محلول اتانول، یون وجود ندارد.)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۶ در اثر انحلال m گرم هیدروفلوئوریک اسید در ۲۰۰ میلی‌لیتر آب، نمودار غلظت گونه‌ها پس از یونش به شکل زیر درآمده است. به ترتیب، m کدام و درصد یونش اسید به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ (از تغییر حجم آب صرف‌نظر کنید، $H=1, F=19 : g.mol^{-1}$)



۱) ۲ ـ ۱۰

۲) ۲/۲ ـ ۹

۳) ۲/۲ ـ ۱۰

۴) ۲ ـ ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا غلظت اولیهٔ محلول را به دست می‌آوریم:

$$M=[HF]_{\text{تعادلی}}+\underbrace{[HF]_{\text{یونیده‌شده}}}_{=[F^-]}=0/5+0/05=0/55\ mol.L^{-1}$$

حالا به کمک حجم و غلظت مولی محلول‌ها، به مول HF و سپس جرم آن می‌رسیم:

$$\text{غلظت مولی}=\frac{\text{شمار مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول (L)}}\Rightarrow \text{شمار مول HF}=0/55\ mol.L^{-1}\times\frac{200}{1000}L=0/11\ mol$$

$$\text{جرم HF}=0/11\ mol\ HF\times\frac{20\ g\ HF}{1\ mol\ HF}=2/2\ g$$

به کمک $[F^-]$ و غلظت اولیهٔ محلول، درصد یونش اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد یونش}=\frac{[F^-]}{M}\times100=\frac{\cancel{0/05}^{\,1}}{\cancel{0/55}^{\,11}}\times100\simeq9$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۷ کدام مورد درست است؟

۱) پس از برقراری تعادل در واکنش یونش اسیدهای ضعیف در آب، غلظت همهٔ گونه‌های شرکت‌کننده با یکدیگر برابر می‌شود.

۲) با برقراری تعادل در یک واکنش و ثابت‌ماندن غلظت مواد، سرعت متوسط تولید یا مصرف آن‌ها برابر صفر می‌شود.

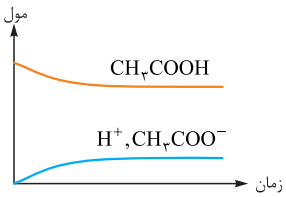
۳) در فرایند یونش استیک اسید در آب، پیش از برقراری تعادل، شمار مولکول‌های CH_3COOH کاهش و شمار یون‌های H^+ و CH_3COO^- افزایش می‌یابد.

۴) با توجه به رابطهٔ ثابت یونش نیترواسید ($K_a = \frac{[H^+][NO_2^-]}{[HNO_2]}$)، با افزایش $[H^+]$ در دمای معین، ثابت یونش این اسید افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ معادلهٔ واکنش یونش استیک اسید در آب و نمودار مول ـ زمان مواد به صورت زیر است:

$$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons H^+ + CH_3COO^-$$



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): پس از برقراری تعادل، غلظت گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش، ثابت می‌شود. لزوماً با هم برابر نمی‌شود.

گزینهٔ (۲): حتی پس از برقراری تعادل، مواد واکنش‌دهنده و فراورده به یکدیگر تبدیل می‌شوند. از لحظهٔ تعادل به بعد، سرعت واکنش‌های رفت‌وبرگشت با هم برابر است. *(صفر نیست!)*

گزینهٔ (۴): در دمای معین، ثابت یونش اسیدی یک عدد معین است و با تغییر غلظت مواد، تغییری نمی‌کند. (ثابت یونش فقط با تغییر دما، تغییر می‌کند.)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۸ با توجه به جدول زیر، غلظت مولی محلول اسید ضعیف‌تر، به تقریب چند برابر غلظت مولی محلول اسید قوی‌تر است؟

اسید	K_a	غلظت مولی یون هیدرونیوم
HX	۹×۱۰^{-۷}	m
HY	۴×۱۰^{-۶}	۲m

۱) $\frac{۱۰}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

رابطهٔ ثابت یونش اسیدهای ضعیف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq)+A^-(aq) \quad K_a=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \quad ([H^+]=[A^-])$$

در این رابطه، غلظت همهٔ گونه‌ها، همان غلظت‌های تعادلی آن‌ها (پس از یونش اسید) است.

ما در بیشتر سؤالات با غلظت اولیهٔ محلول (نه غلظت تعادلی اسید!) سروکار داریم. *در این حالت، کارمون یه‌فرده بیشتره!* فرض کنید غلظت اولیهٔ اسید HA، M مولار است و در آب، به اندازهٔ x مولار یونیده شده و به یون‌های $H^+(aq)$ و $A^-(aq)$ تبدیل شده است. با توجه به معادلهٔ یونش $(HA \rightleftharpoons H^+ + A^-)$، اگر x مولار HA یونیده شود، x مولار $H^+(aq)$ و x مولار $A^-(aq)$ تولید می‌شود و غلظت HA پس از برقراری تعادل به $M-x$ مولار می‌رسد. این توضیحات را می‌توان به صورت جدول زیر نشان داد:

غلظت اولیه	M	۰	۰
تغییر غلظت	$-x$	$+x$	$+x$
غلظت نهایی (تعادلی یا پس از یونش)	$M-x$	x	x

حالا رابطهٔ ثابت یونش را براساس غلظت تعادلی گونه‌ها می‌نویسیم:

$$K_a=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]}=\frac{x\times x}{M-x}$$

بنابراین رابطهٔ ثابت یونش با داشتن غلظت اولیهٔ اسید را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$K_a=\frac{x^۲}{M-x}=\frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]}$$

اگر K_a از حدود $۱۰^{-۴}$ و یا درجهٔ یونش اسید از حدود ۰/۰۵ کوچک‌تر باشد، می‌توان از x (غلظت یونیده‌شدهٔ اسید) در مقابل M (غلظت اولیهٔ اسید) صرف‌نظر کرد و $(M-x)$ را معادل M در نظر گرفت:

$$K_a<۱۰^{-۴} \text{ یا } \alpha<۰/۰۵ \xrightarrow{M-x=M} K_a=\frac{x\times x}{M}=\frac{[H^+]^۲}{M}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به کوچک‌بودن ثابت یونش اسیدها، می‌توانیم از رابطهٔ تقریبی ثابت یونش استفاده کنیم:

$$K_a=\frac{[H^+]^۲}{M} \Rightarrow M=\frac{[H^+]^۲}{K_a}$$

HX که ثابت یونش کوچک‌تری دارد، اسید ضعیف‌تر محسوب می‌شود؛ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{M(HX)}{M(HY)}=\frac{\frac{m^۲}{۹\times۱۰^{-۷}}}{\frac{(۲m)^۲}{۴\times۱۰^{-۶}}}=\frac{۴\times۱۰^{-۶}\times m^۲}{۹\times۱۰^{-۷}\times ۴m^۲}=\frac{۱۰}{۹}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۹ کدام مورد، **نادرست** است؟

۱) در محلول ۰/۱ مولار هیدرویدیک اسید، غلظت یون یدید برابر ۰/۱ مولار است.

۲) محلول آبی اسیدهایی با $\alpha < 1$، الکترولیت ضعیف محسوب می‌شود.

۳) هر یون اکسید در محلول‌های آبی، با یک مولکول آب واکنش داده و دو یون هیدروکسید تولید می‌کند.

۴) اگر درجهٔ یونش اسید HA برابر ۰/۰۶ باشد، با اضافه‌کردن ۱۰۰۰ مولکول آن به آب، تنها ۶۰ مولکول آن در آب حل می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هیدرویدیک اسید (HI) یک اسید قوی است و در محلول آن، غلظت یون‌های حاصل از یونش با غلظت اولیهٔ محلول برابر است.

گزینهٔ (۲): اسیدهایی با درجهٔ یونش کوچک‌تر از ۱، به صورت یونی ـ مولکولی در آب حل می‌شوند و الکترولیت ضعیف محسوب می‌شوند.

گزینهٔ (۳): معادلهٔ واکنش یون اکسید با آب به صورت زیر است:

$$O^{2-}(aq) + H_2O(l) \rightarrow 2OH^-(aq)$$

گزینهٔ (۴): وقتی $\alpha = 0/06$ باشد، یعنی از ۱۰۰۰ مولکول اسید، $0/06 \times 1000 = 60$ مولکول آن یونیده می‌شود، *ربطی به انفلال‌پذیری اسید نداره! یعنی ممکنه* هر ۱۰۰۰ مولکول اسید در آب حل شوند، اما فقط ۶۰تای آن‌ها به یون تبدیل شوند و بقیهٔ آن‌ها به صورت مولکولی باقی بمانند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰۰ در دمای ثابت، ۵/۴ گرم اسید ضعیف HA (محلول I) و ۳ گرم اسید ضعیف HB (محلول II) در دو ظرف جداگانه، به ترتیب در ۲ و ۱ لیتر آب‌مقطر حل شده‌اند. اگر غلظت مولی آنیون‌ها در دو محلول حاصل برابر باشد، کدام مقایسه‌های زیر درست است؟ $(HA = ۶۰, HB = ۵۰ : g.mol^{-۱})$

الف) حجم گاز تولیدشده در واکنش با مقدار کافی فلز منیزیم: $I > II$

ب) قدرت اسیدی: $HA > HB$

پ) رسانایی الکتریکی محلول: $I > II$

ت) شمار یون‌های هیدرونیوم در محلول: $I = II$

۱) «الف» ـ «ب»
۲) «پ» ـ «ت»
۳) «الف» ـ «ب» ـ «ت»
۴) «ب» ـ «پ» ـ «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مقایسه‌های «الف» و «ب» درست است.

ابتدا غلظت اولیهٔ محلول‌ها را حساب می‌کنیم:

$$M(HA) = \frac{۵/۴\ g \times \frac{۱\ mol}{۶۰\ g}}{۲\ L} = ۰/۰۴۵\ mol.L^{-۱}$$

$$M(HB) = \frac{۳\ g \times \frac{۱\ mol}{۵۰\ g}}{۱\ L} = ۰/۰۶\ mol.L^{-۱}$$

اگر غلظت مولی آنیون‌ها در دو محلول را x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$			$HB \rightleftharpoons H^+ + B^-$		
غلظت اولیه :	۰/۰۴۵	۰	۰	۰/۰۶	۰	۰
غلظت نهایی :	۰/۰۴۵ − x	x	x	۰/۰۶ − x	x	x

بررسی موارد:

الف) تعداد مول اولیهٔ HA $(\frac{۵/۴}{۶۰} = ۰/۰۹)$ از تعداد مول اولیهٔ HB $(\frac{۳}{۵۰} = ۰/۰۶)$ بیشتر است؛ بنابراین حجم گاز تولیدشده در واکنش محلول (I) با فلز منیزیم بیشتر است.

ب) HA با وجود غلظت اولیهٔ کم‌تر، به اندازهٔ HB، H^+ تولید کرده است! بنابراین اسید قوی‌تری است.

پ) با توجه به برابربودن غلظت یون‌ها در دو محلول، رسانایی الکتریکی آن‌ها برابر است.

ت) $[H^+]$ در دو محلول برابر است، اما دقت کنید که حجم محلول‌ها با هم یکسان نیست؛ بنابراین شمار مول و در نتیجه شمار یون هیدرونیوم در آن‌ها برابر نمی‌باشد. با توجه به بیشتربودن حجم محلول (I)، شمار یون‌های هیدرونیوم در آن بیشتر است.

کتاب درسی **HX و HY دو اسید ضعیف هستند. اگر ۱۲ گرم از HX و ۸ گرم از HY جداگانه در یک لیتر آب حل شوند، pH این دو محلول برابر خواهد شد. با مقایسهٔ درجهٔ یونش آن‌ها مشخص کنید کدام اسید قوی‌تر است؟ چرا؟ $(۱\ mol\ HX = ۱۵۰\ g, ۱\ mol\ HY = ۵۰\ g)$**

(شیمی (۳)ـ سؤال ۹ تمرین‌های دوره‌ای صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir