آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دوم
۰۶ - ۱۴۰۵	۰۶/شهریور/۱۴۰۵

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۶

ویژگی‌های برنامه راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۰۶-۱۴۰۵

۱- دوره دروس پایه دهم
۲- دوره دروس پایه یازدهم
۳- مطالعه بخشی از دروس پایه دوازدهم
۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه / مرحله	اول ۲۳مرداد	دوم ۶شهریور	سوم ۲۰شهریور	چهارم ۳مهر
دهم	-	✓	✓	✓
یازدهم	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	-	✓	✓	-

- با توجه به موارد فوق دفترچه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۳ قسمت تشکیل شده است که هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پنل کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.
- آزمون مرحله دوم (همین دفترچه‌ای که در دست دارید) آغاز پیشروی پایه دهم، یازدهم و دوازدهم است.
- تمامی سرفصل‌های دوازدهم، مجدداً از مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: مازیار احمدی‌نائو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی مصطفی کرمی ـ محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: علی افضل‌زاده ـ سروش موئینی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: کیوان صارمی ـ حمید گلزاری کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب ـ سید عباس حسینی	حمید گلزاری
آمار و احتمال و ریاضیات و گسسته	طراح: سروش موئینی کارشناس علمی: سید عباس حسینی	سعید قندچی ـ سروش موئینی
فیزیک	طراحان: علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری ـ هادی نجفی	رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	طراحان: مهدی براتی ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ مرتضی نصیرزاده کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده ـ پارسا فراهانی ـ محمدمهدی کریمیان	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پایه دهم

چنان چه پایهٔ دهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۱۵	۱	۱۵	۳۰ دقیقه	ریاضی (۱) فصل ۱ (درس ۳ و ۴) و فصل ۲ صفحهٔ ۱۴ تا ۴۶
هندسه	۱۰	۱۶	۲۵	۲۰ دقیقه	هندسه (۱) فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۹ تا ۳۷
فیزیک	۲۰	۲۶	۴۵	۳۰ دقیقه	فیزیک (۱) فصل ۱ و ۲ صفحهٔ ۱ تا ۵۲
شیمی	۱۵	۴۶	۶۰	۲۰ دقیقه	شیمی (۱) فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۴۶
مجموع	۶۰ سؤال			۱۰۰ دقیقه	–

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز – رشته ریاضی

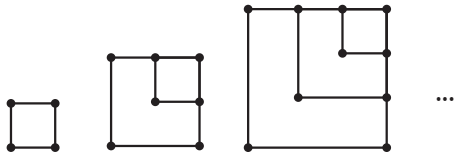
پایه دوازدهم – مرحله دوم – ۶ شهریور ۱۴۰۵

ریاضی دهم

۱- در یک الگوی خطی، جملهٔ هفتم برابر صفر است. جملهٔ دهم این الگو چند برابر جملهٔ پنجم آن است؟

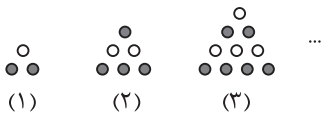
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $-۱/۵$ ۴) -۲

۲- با توجه به الگوی شکل‌های زیر، شکل چهل‌وپنجم چند نقطه دارد؟



۱) ۱۳۶
۲) ۱۳۷
۳) ۱۳۸
۴) ۱۳۹

۳- با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل بیست و پنجم، اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید کدام است؟



۱) ۱۳
۲) ۱۲
۳) ۲۶
۴) ۲۵

۴- جملات دنبالهٔ $t_n = ۳n - ۱$ را به صورت زیر دسته‌بندی کرده‌ایم:

$$\{۲\},\{۵,۸\},\{۱۱,۱۴,۱۷\},\ldots$$

میانگین اعداد دستهٔ بیستم کدام است؟

۱) $۵۹۹/۵$ ۲) ۶۰۰ ۳) $۶۰۰/۵$ ۴) ۶۰۱

۵- دنبالهٔ $۶+k, \ldots, ۱-۳k, k$ حسابی است. جملهٔ بیستم این دنباله کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) $۵۵/۵$ ۳) ۵۶ ۴) $۵۶/۵$

۶- بین دو عدد ۴ و ۱۲۸، نُه واسطهٔ هندسی قرار داده‌ایم، بزرگ‌ترین واسطه چند برابر کوچک‌ترین واسطه است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۷- دنبالهٔ $۱, x, y, \ldots$ هندسی و دنبالهٔ $x, \frac{۵}{۲}, ۲y-۱, \ldots$ حسابی است. حاصل $x+y$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) -۱ ۴) -۲

۸- دنبالهٔ حسابی a_n: $-۱, ۲, \ldots$ مفروض است، اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $k+a_۵, k+\frac{a_۴}{۴}, k-a_۳, \ldots$ برابر q باشد، مقدار q کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۸}{۷}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

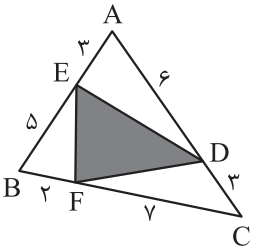
۹- اگر $\frac{۵\sin x - \cos x}{۲\sin x + \cos x} = ۳$ باشد، حاصل $\tan x - \cot x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۷}{۴}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث DEF است؟



۱) $\frac{۴۵}{۱۷}$

۲) $\frac{۵۴}{۱۹}$

۳) $\frac{۱۰۸}{۲۹}$

۴) $\frac{۱۰۸}{۴۱}$

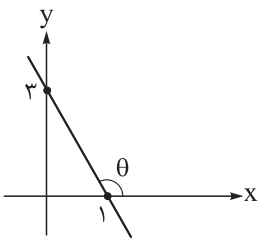
۱۱- انتهای کمان θ روی دایرهٔ مثلثاتی در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات، نقطهٔ $P(-\frac{۱}{۳}, a)$ است. مقدار $\cot\theta$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۱۲- اگر $\sin\alpha\cot\alpha = |\cos\alpha|$ و $\frac{۱}{\sqrt{\sin^۲\alpha}} - \cot\alpha = \frac{۱-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$ باشد، انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی در کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۳- با توجه به شکل زیر، حاصل عبارت $\sin^۳\theta - \cos^۳\theta$ چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



۱) ۰/۴

۲) ۰/۲۸

۳) ۰/۳

۴) ۰/۲۶

۱۴- اگر $\tan\theta + \cot\theta = \sqrt{۵}$ باشد، حاصل $\sin^۴\theta + \cos^۲\theta$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

۱۵- اگر α حاده و $\cos۲\alpha = \frac{۳}{۵}$ باشد، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دهم

۱۶- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند و می‌دانیم فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۲ و از B به فاصلهٔ $x^2 - x$ است. اگر x عددی مثبت باشد، آن‌گاه اختلاف مقادیر قابل قبول x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

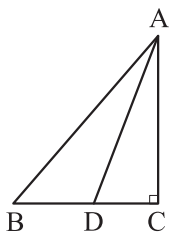
۱۷- مربعی به طول ضلع $2\sqrt{2}$ مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد، به طوری که فاصلهٔ آن از یکی از قطرهای آن برابر $\sqrt{5}$ باشد؟

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۸- در یک مستطیل به اضلاع ۳ و $\sqrt{6}$ عمودمنصف قطر، یکی از دو ضلع بزرگ‌تر مستطیل را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع فواصل M، از رأس‌های این مستطیل، کدام است؟ @fileaz فایلاز

۱) $6+\sqrt{10}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) $2(3+\sqrt{6})$

۱۹- در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ $\hat{BAC}$ است. اگر $BD = 5$ و $AB - AC = 3$ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

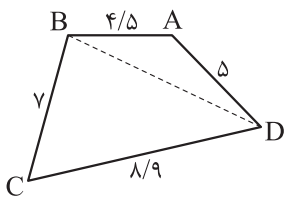


۱) ۵۴
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۴۰

۲۰- در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی B و C در نقطهٔ I و نیمسازهای زاویهٔ داخلی B و زاویهٔ خارجی C در نقطهٔ J یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر $B\hat{I}C = 3I\hat{J}C$، آن‌گاه زاویهٔ بین نیمسازهای خارجی زوایای B و C چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

۲۱- در چهارضلعی زیر، اگر طول قطر BD عددی طبیعی باشد، اختلاف بین حداقل و حداکثر مقادیر قابل قبول برای آن کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲- کدام‌یک از احکام کلی زیر، مثال نقض دارد؟

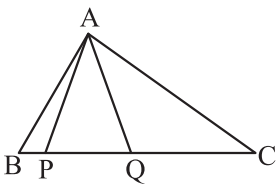
۱) مجموع زوایای خارجی هر مثلث، دو برابر مجموع زوایای داخلی آن است.

۲) چهارضلعی که سه زاویهٔ قائمه دارد، مستطیل است.

۳) نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های یک مثلث درون یا بیرون آن مثلث واقع است.

۴) طول ارتفاع وارد بر هر ضلع یک مثلث، حداکثر برابر با طول میانهٔ وارد بر آن ضلع است.

۲۳- در شکل زیر اگر $5BP = 3PQ = 2QC$، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ABQ به مساحت مثلث ACP کدام است؟



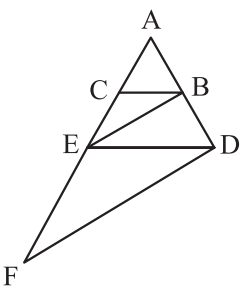
۱) ۰/۴۸

۲) ۰/۵۴

۳) ۰/۵۸

۴) ۰/۶۴

۲۴- در شکل زیر $DE \parallel BC$، $DF \parallel BE$، $AC = 2$ و $EF = 3$ است. طول پاره‌خط CE کدام است؟



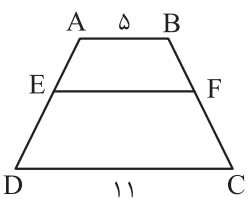
۱) $\sqrt{6}$

۲) $\frac{9}{5}$

۳) $\sqrt{7}-1$

۴) $\frac{3}{2}$

۲۵- در شکل زیر، EF موازی قاعده‌های ذوزنقه است. اگر $CF = 2BF$، آن‌گاه نسبت مساحت بزرگ‌ترین ذوزنقه، به مساحت کوچک‌ترین ذوزنقه کدام است؟



۱) ۴/۴

۲) ۳

۳) ۴/۵

۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دهم

۲۶- در کدام‌یک از موارد زیر، تعداد یکاهای اصلی SI بیشتر است؟

۱) ثانیه، کلوین، گرم، پاسکال
۲) متر، مول، کولن، درجهٔ سلسیوس
۳) کیلوگرم، کندلا، ژول، کیلومتر
۴) آمپر، درجهٔ سلسیوس، مول، کیلوگرم

۲۷- یکای کدام‌یک از کمیت‌های زیر برحسب یکاهای اصلی $\frac{kg}{m.s^2}$ است؟

۱) نیرو
۲) انرژی
۳) فشار
۴) توان

۲۸- نام وسیلهٔ اندازه‌گیری شکل زیر چیست و دقت اندازه‌گیری این وسیله در SI کدام است؟



۱) کولیس، 10^{-5}
۲) کولیس، 10^{-3}
۳) ریزسنج، 10^{-5}
۴) ریزسنج، 10^{-3}

۲۹- ارتفاع هواپیمایی برابر ۴۰۰۰۰ پا (فوت) است. این مقدار برحسب کیلومتر برابر کدام است؟ (هر فوت معادل ۱۲ اینچ و هر اینچ برابر ۲/۵ cm است.)

۱) ۱/۲
۲) ۱/۹۲
۳) ۱۲
۴) ۱۹/۲

۳۰- گیاهی در مدت ۲۵ شبانه‌روز، ۲/۷ m رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه چند میکرومتر بر دقیقه است؟

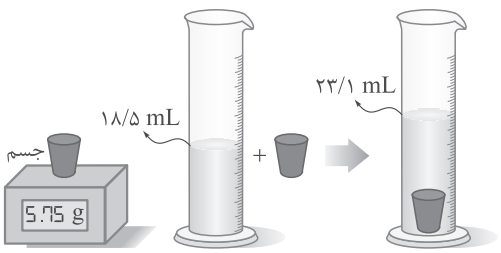
۱) ۱/۲۵
۲) ۷/۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۷۵

۳۱- جرم جسمی ۸ مرتبه اندازه‌گیری شده که حاصل این اندازه‌گیری‌ها برحسب گرم مقادیر زیر است. نتیجهٔ اندازه‌گیری جرم این جسم برحسب گرم با کدام مقدار زیر باید گزارش شود؟ @fileaz فایلاز

۳۹/۵ , ۴۰/۵ , ۵۱/۰ , ۴۲/۵ , ۴۳/۰ , ۲۶/۰ , ۴۱/۵ , ۳۹/۰

۱) ۴۰/۴
۲) ۴۱/۰
۳) ۴۱/۵
۴) ۴۲/۰

۳۲- برای تعیین چگالی یک جسم جامد، ابتدا جرم و حجم آن را مطابق شکل زیر اندازه‌گیری می‌کنیم. چگالی این جسم در SI برابر کدام است؟ (جسم در آب حل نمی‌شود.)



۱) ۰/۸
۲) ۱/۲۵
۳) ۸۰۰
۴) ۱۲۵۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

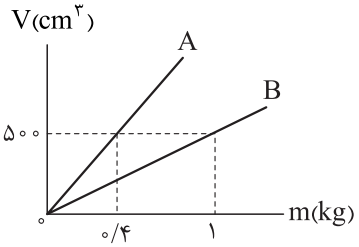
۳۳- شعاع قاعدهٔ یک مخروط همگن و توپر برابر ۱۰ cm و ارتفاع آن ۲۰ cm است. اگر چگالی مادهٔ سازندهٔ این مخروط $5\ g/cm^3$ باشد، جرم آن برابر چند کیلوگرم است؟ $(\pi = 3)$

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۱۰
۴) ۳۰

۳۴- در یک قطعه جواهر به حجم $3/5\ cm^3$، طلا و نقره به کار رفته است. اگر جرم آن ۴۸/۵ گرم باشد، طلای به‌کاررفته در قطعه چند گرم است؟ ($\rho_{طلا} = 19\ g/cm^3$ و $\rho_{نقره} = 10\ g/cm^3$)

۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۲۸/۵
۴) ۲۹/۵

۳۵- نمودار حجم برحسب جرم دو مایع A و B به شکل زیر است. اگر جرم یکسانی از این دو مایع مخلوط شوند، چگالی مخلوط حاصل چند کیلوگرم بر لیتر است؟



۱) $\frac{7}{8}$
۲) $\frac{8}{7}$
۳) $\frac{7000}{8}$
۴) $\frac{8000}{7}$

۳۶- چگالی سرب، $\frac{3}{2}$ برابر چگالی آهن است. اگر شعاع داخلی و خارجی کرهٔ توخالی سربی A به ترتیب برابر $2a$ و $4a$ و شعاع کرهٔ آهنی توپر B برابر $3a$ باشد، جرم کرهٔ A چند برابر جرم کرهٔ B است؟

۱) $\frac{28}{9}$
۲) $\frac{9}{28}$
۳) $\frac{4}{9}$
۴) $\frac{9}{4}$

۳۷- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) شیشه نوعی آمورف است و از سردکردن آهستهٔ مایع به وجود می‌آید.
۲) عموماً فاصلهٔ بین ذرات سازندهٔ مایع بیشتر از فاصلهٔ بین ذرات سازندهٔ جامد است.
۳) سرعت پدیدهٔ پخش در گازها از سرعت پدیدهٔ پخش در مایع‌ها بیشتر است.
۴) حالت ماده، تنها به چگونگی حرکت ذره‌های سازندهٔ آن بستگی دارد.

۳۸- وضعیت مایعی که یک لولهٔ مویین شیشه‌ای به طور قائم در آن فرورفته، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این مایع درست است؟



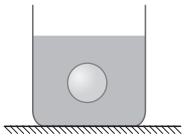
الف) نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، بزرگ‌تر است.
ب) نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، کوچک‌تر است.
پ) مایع، شیشه را تر می‌کند.
ت) مایع، شیشه را تر نمی‌کند.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹- در شکل زیر، کره‌ای به شعاع $20\ cm$ درون شاره‌ای به چگالی $1/5\ g/cm^3$ غوطه‌ور و در حال تعادل است. اختلاف فشار بین بالاترین و پایین‌ترین نقطهٔ کره چند کیلوپاسکال است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۳۰۰۰
۴) ۶۰۰۰

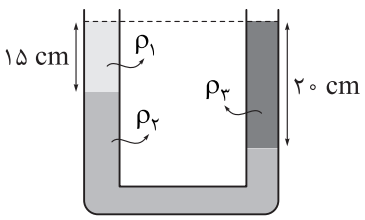
۴۰- درون استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ $10\ cm$، مقداری مایع به چگالی $850\ g/L$ می‌ریزیم و فشار در کف استوانه برابر $80\ cmHg$ می‌شود. اگر همین مقدار مایع را درون ظرفی مکعبی به ضلع $30\ cm$ بریزیم، فشار در کف ظرف چند سانتی‌متر جیوه می‌شود؟ ($\pi = 3$ و فشار هوا $71\ cmHg$ فرض شود.)

۱) ۷۲
۲) ۷۴
۳) ۷۶
۴) ۸۰

۴۱- فشار در عمق ۱۱۶ سانتی‌متری آب استخری برابر $100\ kPa$ است، فشار هوای محیط چند سانتی‌متر جیوه است؟
$(\rho_{آب} = 1\ g/cm^3\ ،\ \rho_{جیوه} = 13/6\ g/cm^3\ و\ g = 10\ N/kg)$

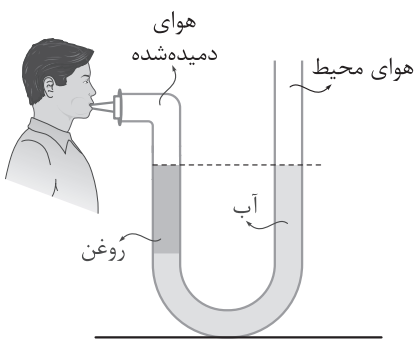
۱) ۶۳
۲) ۶۴
۳) ۶۵
۴) ۶۶

۴۲- در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 2\rho_1$ باشد، نسبت $\frac{\rho_3}{\rho_1}$ چه‌قدر است؟



۱) $\frac{4}{5}$
۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{7}{8}$
۴) $\frac{8}{7}$

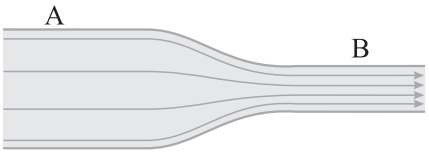
۴۳- در شکل زیر، شخص درون یک لولهٔ U‌شکل می‌دمد. اگر فشار پیمانه‌ای هوای درون ریهٔ این شخص برابر $1\ kPa$ باشد، ارتفاع روغن برابر چند سانتی‌متر است؟ $(\rho_{آب} = 1\ g/cm^3\ ،\ \rho_{روغن} = 0/8\ g/cm^3\ و\ g = 10\ N/kg)$



۱) ۱۰
۲) ۱۲/۵
۳) ۲۵
۴) ۵۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



۴۴- در شکل روبه‌رو، شارهٔ تراکم‌ناپذیری که حجم لوله را پر کرده است، در راستای افقی جاری است و شعاع مقطع لوله در قسمت A، ۲ برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) آهنگ شارش شاره در مقطع B، ۴ برابر آهنگ شارش شاره در مقطع A است.

ب) تندی شاره در مقطع B، ۲ برابر تندی شاره در مقطع A است.

پ) تندی شاره در مقطع B، ۴ برابر تندی شاره در مقطع A است.

ت) فشار شاره در مقطع B، کم‌تر از فشار شاره در مقطع A است.

۱) الف و ب
۲) الف و ت
۳) ب و ت
۴) پ و ت

۴۵- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) بال‌های هواپیما طوری طراحی شده‌اند که هنگام پرواز آن، تندی هوا در زیر بال بیشتر از بالای بال است.

۲) در روزهایی که باد می‌وزد، ارتفاع موج‌های دریا یا اقیانوس پایین‌تر از ارتفاع میانگین می‌شود.

۳) در مسیر حرکت شاره‌ای که به طور لایه‌ای و در امتداد قائم حرکت می‌کند، با افزایش تندی شاره، فشار آن الزاماً کاهش می‌یابد.

۴) چگالی جسمی که بر سطح مایعی شناور است، از چگالی مایع کم‌تر و نیروی شناوری وارد بر این جسم با وزن آن هم‌اندازه است.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

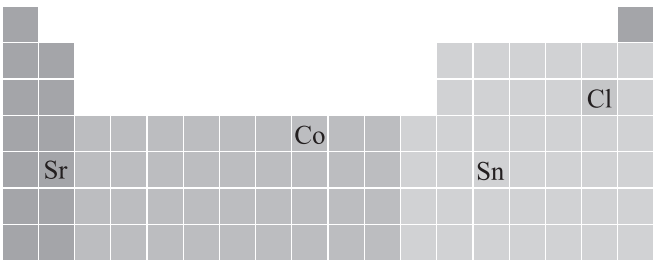
شیمی دهم

۴۶- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر دربارهٔ فراوان‌ترین عنصر در سیارهٔ مشتری به ترتیب چگونه است؟

- **دارای ۳ ایزوتوپ طبیعی و پایدار است.**
- **نافلز است و جزء ۸ عنصر فراوان‌تر سیارهٔ زمین محسوب نمی‌شود.**
- **اولین عنصری است که پس از مهبانگ پا به عرصهٔ جهان گذاشته است.**
- **در خورشید، طی واکنش‌های هسته‌ای به هلیم تبدیل می‌شود.**

۱) درست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۳) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست
۴) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

۴۷- با توجه به جدول زیر، در کدام گونهٔ شیمیایی، تعداد نوترون‌ها برابر با مجموع «تعداد پروتون‌ها و نصف تعداد الکترون‌ها» است؟



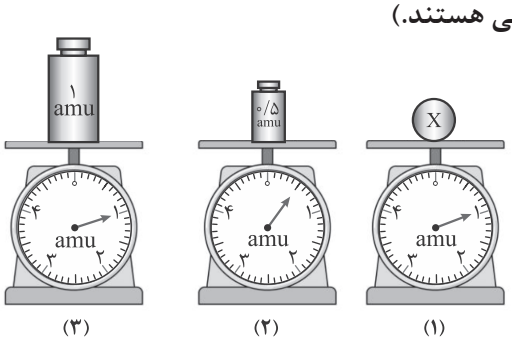
۱) ^{۹۰}Sr
۲) $^{۱۲۴}Sn^{۲+}$
۳) $^{۳۵}Cl^{-}$
۴) $^{۶۰}Co^{۳+}$

۴۸- کدام موارد زیر، دربارهٔ اورانیم ($_{۹۲}U$) درست است؟

الف) ایزوتوپی از آن با ۱۴۳ نوترون، فراوان‌ترین ایزوتوپ آن است.
ب) معروف‌ترین عنصر پرتوزای طبیعی است.
پ) غنی‌سازی ایزوتوپی آن، یکی از مراحل مهم چرخهٔ تولید سوخت هسته‌ای است.
ت) نخستین عنصری است که توسط انسان در راکتورهای هسته‌ای ساخته شد.

۱) ب ـ پ
۲) الف ـ ت
۳) الف ـ ب
۴) پ ـ ت

۴۹- با توجه به شکل‌های زیر، کدام مورد نادرست است؟ (اعداد تقریبی هستند.)



(۳) (۲) (۱)

۱) ترازوی (۱) را می‌توان مربوط به ذرهٔ زیراتمی با نماد $_{۰}^{۱}n$ دانست.
۲) X می‌تواند سنگین‌ترین ایزوتوپ طبیعی و پایدار هیدروژن باشد.
۳) اگر هر اتم $_{۶}^{۱۲}C$ را به ۲۴ قسمت تقسیم کنیم، ترازوی (۲) جرم هر یک از این قسمت‌ها را نشان می‌دهد.
۴) جرم فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم، حدود ۱۶ برابر مجموع جرم ترازوهای (۱) و (۲) است.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰- عنصر A دارای سه ایزوتوپ ^{۸۴}A، ^{۸۶}A و ^{۸۸}A است. اگر جرم اتمی میانگین A برابر ۸۶/۴ amu باشد، کدام گزینه به ترتیب می‌تواند مربوط به درصد فراوانی این ایزوتوپ‌ها از سبک به سنگین باشد؟ (جرم اتمی ایزوتوپ‌ها را معادل با عدد جرمی آن‌ها در نظر بگیرید.)

۱) ٪۲۰، ٪۵۰، ٪۳۰
۲) ٪۲۰، ٪۴۰، ٪۴۰
۳) ٪۳۰، ٪۴۰، ٪۳۰
۴) ٪۳۰، ٪۲۵، ٪۴۵

۵۱- یک نوع آلیاژ، شامل ۹۰ درصد جرمی مس و ۱۰ درصد جرمی قلع است. با ۲/۷ کیلوگرم مس، چند کیلوگرم از این آلیاژ را می‌توان تهیه کرد و شمار مول‌های قلع مورد نیاز برای تهیهٔ این مقدار آلیاژ به تقریب کدام است؟

$(Sn = ۱۱۹ , Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲/۵ ـ ۵
۲) ۳/۲ ـ ۵
۳) ۲/۵ ـ ۳
۴) ۳/۲ ـ ۳

۵۲- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ , N = ۱۴ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

الف) جرم اتم هیدروژن در ۱۰۰ گرم آب با جرم اتم هیدروژن در ۳۰۰ گرم HCN برابر است.

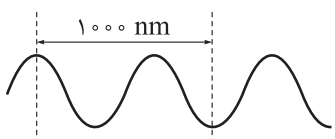
ب) در هر مول از یون پایدار نیتروژن، $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۴}$ الکترون وجود دارد.

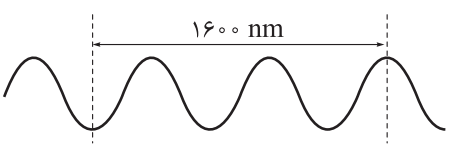
پ) جرم ۵ مول $CO_۲$ از جرم $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۴}$ مولکول $N_۲O$ بیشتر است.

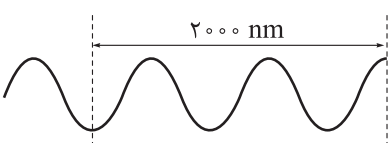
ت) اگر جرم مولی آسپرین $(C_۹H_۸O_x)$ برابر $۱۸۰ g.mol^{-۱}$ باشد، آسپرین یک مولکول ۲۰ اتمی است.

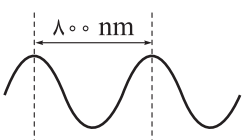
۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) الف ـ ت
۴) ب ـ پ

۵۳- پرتویی با طول موج ۸۰۰ nm در کدام محدودهٔ طیف الکترومغناطیسی قرار دارد و کدام شکل را می‌توان به آن نسبت داد؟

۱) فروسرخ ـ 

۲) فرابنفش ـ 

۳) فروسرخ ـ 

۴) فرابنفش ـ 

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴- با توجه به شکل داده‌شده که مربوط به طیف نشری خطی هیدروژن در گسترهٔ مرئی است، کدام موارد از مطالب داده‌شده درست است؟



الف) نوار شمارهٔ (۱) دارای بیشترین انرژی است.

ب) نوار شمارهٔ (۳) حاصل انتقال الکترون از لایهٔ پنجم به حالت پایهٔ اتم هیدروژن است.

پ) پرتو مربوط به نوار (۴) بنفش‌رنگ بوده و نسبت به پرتو مربوط به نوار (۲)، انحراف بیشتری در عبور از منشور دارد.

ت) طول موج ۷۵ درصد از نوارهای نشان داده شده، کوتاه‌تر از ۵۰۰ nm است.

۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) الف ـ ت

۵۵- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) هر زیرلایه، با اعداد کوانتومی n و l مشخص می‌شود.

۲) از رابطهٔ $a = 4l + 2$، گنجایش الکترونی هر زیرلایه (a) را می‌توان معین کرد.

۳) نسبت حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه با عدد کوانتومی اصلی n به شمار زیرلایه‌های الکترونی موجود در آن، برابر n است.

۴) مجموع عدد کوانتومی فرعی زیرلایه‌های موجود در لایهٔ الکترونی چهارم برابر ۶ است.

۵۶- شمار الکترون‌های ظرفیتی کدام اتم، با شمارهٔ دورهٔ آن در جدول تناوبی برابر است؟

۱) $_{12}A$
۲) $_{15}B$
۳) $_{22}M$
۴) $_{34}E$

۵۷- کدام مورد درست است؟

۱) در اتم یازدهمین عنصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی، نسبت شمار الکترون‌های دارای $l = 0$ به شمار الکترون‌های دارای $l = 2$، برابر ۰/۸ است.

۲) شمار زیرلایه‌های الکترونی پرشده در اتم عنصر A که در دورهٔ ۴ و گروه ۶ قرار دارد، با همین شمار در اتم عنصر B متعلق به دورهٔ ۴ و گروه ۱۲، برابر است.

۳) در اتم عنصر $_{35}M$، شمار الکترون‌های لایهٔ سوم، ۲/۵ برابر شمار الکترون‌های لایهٔ چهارم است.

۴) اختلاف عدد اتمی دو عنصری که زیرلایه با $l = 2$ در اتم آن‌ها برای اولین بار، پر و نیمه‌پر می‌شود، برابر ۵ است.

۵۸- اگر مجموع $(n + l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم A از دستهٔ p دورهٔ چهارم جدول تناوبی برابر ۲۸ باشد، آرایش الکترون ـ نقطه‌ای A به کدام صورت است؟

۱) $\dot{A}\cdot$
۲) $\cdot\dot{A}\cdot$
۳) $\cdot\ddot{A}\cdot$
۴) $\cdot\ddot{A}:$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹- کدام مورد درست است؟

۱) از میان عنصرهای جدول دوره‌ای، هفت عنصر به صورت دواتمی در طبیعت یافت می‌شوند.

۲) همهٔ اتم‌های نافلزی با گرفتن الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسند.

۳) نماد شیمیایی آنیون نافلز X که در آرایش الکترون ـ نقطه‌ای اتم آن یک جفت نقطه وجود دارد، به صورت X^- است.

۴) منیزیم کلرید یک ترکیب یونی سه‌تایی است؛ زیرا در هر واحد فرمولی آن، ۳ یون وجود دارد.

۶۰- شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل کدام مورد، ۳ برابر نسبت شمار کاتیون(ها) به آنیون(ها) در فرمول شیمیایی آلومینیم اکسید است؟

۱) سدیم سولفید ۲) کلسیم نیترید ۳) پتاسیم فلوئورید ۴) لیتیم کلرید

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز – رشته ریاضی

پایه دوازدهم – مرحله دوم – ۶ شهریور ۱۴۰۵

پایه یازدهم

چنان‌چه پایهٔ یازدهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۱۵	۶۱	۷۵	۲۵ دقیقه	حسابان (۱) فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۳۶
هندسه	۱۰	۷۶	۸۵	۲۰ دقیقه	هندسه (۲) فصل ۱ صفحهٔ ۹ تا ۳۰
آمار و احتمال	۱۰	۸۶	۹۵	۲۰ دقیقه	آمار و احتمال فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۳۴ ریاضی (۱) فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۱ تا ۱۳
فیزیک	۲۰	۹۶	۱۱۵	۳۰ دقیقه	فیزیک (۲) فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۴۴
شیمی	۱۵	۱۱۶	۱۳۰	۲۰ دقیقه	شیمی (۲) فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۵۰
مجموع	۷۰ سؤال			۱۱۵ دقیقه	–

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان یازدهم

۶۱- در دنبالهٔ حسابی ... , ۵ , ۲ , ۱−، حداقل چند جملهٔ ابتدایی آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۵۰ بیشتر شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۶۲- مجموع ده جملهٔ اول دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۱}{۲^n} + (-۱)^n$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲^{۱۰}}$ ۲) $\frac{۱}{۲^{۱۰}}$ ۳) $۱+\frac{۱}{۲^{۱۰}}$ ۴) $۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}$

۶۳- مجموع معکوس جذر جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲ + (k-۱)x + ۱ = ۰$ برابر ۳ است. مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲ - kx - ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۲−

۶۴- جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ۳x = ۱$ اعداد α و β هستند، اگر $\frac{\alpha+k}{\beta-۱} + \frac{\beta+k}{\alpha-۱} = ۲$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

۶۵- به ازای چند مقدار طبیعی m، سهمی $y = x^۲ + mx + ۳ - m$ فقط از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۶۶- حدود k کدام باشد تا معادلهٔ $k(x^۴ + x^۲ + \frac{۱}{۲}) = ۴x^۲ + \frac{۱}{۲}$، حداکثر تعداد جواب‌های ممکن را داشته باشد؟

۱) $(۱,۴)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۰,۲)$

۶۷- تنها جواب معادلهٔ $\frac{x+k}{x+۱} + \frac{x-۱}{x-۲} = ۳$، برابر $x = m$ است. حاصل $k+m$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۸- سرعت محمد در انجام کاری ۱/۵ برابر سرعت علی است و اگر این دو نفر کار را هم‌زمان شروع کنند، در ۶ ساعت به اتمام می‌رسانند. این دو نفر کار را با هم شروع می‌کنند و بعد از گذشت ۴ ساعت، محمد کار را رها می‌کند. علی چند ساعت دیگر باید کار کند تا آن را به اتمام برساند؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶ ۴) ۵

۶۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲ = x + \sqrt{۲x^۲ - x + ۲}$ چه‌قدر از حاصل‌ضرب آن‌ها بیشتر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰- معادلهٔ $x^{۲} - \sqrt{x-۲} = x - \sqrt{۲-\sqrt{۲x}}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

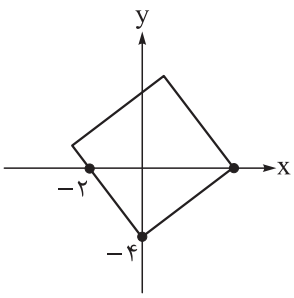
۷۱- معادلهٔ $\frac{|x+۲|}{۲} = x^{۲} + ۴x + m$ سه جواب دارد. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷۲- معادلهٔ $x - \frac{x}{|x|} = mx + m + ۱$ دو جواب دارد. حدود m کدام است؟

۱) $-۱ < m < ۱$ ۲) $m > ۱$ ۳) $m < -۱$ ۴) $-۲ < m < ۰$

۷۳- مساحت مربع شکل مقابل کدام است؟



۱) ۶۳
۲) ۶۴
۳) ۸۱
۴) ۸۰

۷۴- نقطهٔ A روی یکی از نیمسازهای دو خط $۲x - y = ۱$ و $x + ۲y = ۳$ قرار دارد. کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۱۰}}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۷۵- قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۱)$ نسبت به خط $y = ۲x - ۱$ نقطهٔ A' است. فاصلهٔ نقطهٔ A' از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۰/۴\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۶\sqrt{۵}$ ۳) $۰/۶\sqrt{۳}$ ۴) $۰/۴\sqrt{۳}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه یازدهم

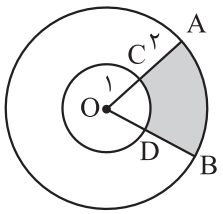
۷۶- در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۶ و ۸، دایرهٔ محاطی داخلی در نقطهٔ تماس، ضلع متوسط مثلث را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷۷- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نسبت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، به شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABH کدام است؟

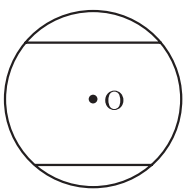
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

۷۸- مطابق شکل، دو دایره به مرکز O رسم شده‌اند. اگر $A\hat{O}B = ۷۲^\circ$، آن‌گاه مساحت قسمت رنگی به کدام عدد نزدیک‌تر است؟



۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۷

۷۹- مطابق شکل زیر، دو وتر موازی به طول‌های ۹ و ۷ در یک دایره رسم شده‌اند. اگر فاصلهٔ بین این دو وتر ۴ باشد، مساحت دایره، چند برابر π است؟



۱) ۲۰/۷۵
۲) ۲۱/۲۵
۳) ۲۱/۷۵
۴) ۲۲/۲۵

۸۰- مستطیل ABCD به اضلاع $AB = ۴$ و $AD = ۶$ مفروض است. اگر دایره‌ای به قطر AD رسم کنیم، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره از رأس C کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

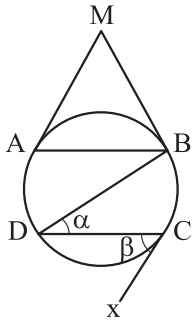
۸۱- طول مماس‌مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۷ برابر با ۱۲ است. بیشترین فاصلهٔ بین نقاط این دو دایره کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۳ ۳) ۲۲ ۴) ۲۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲- در شکل زیر MA، MB و Cx بر دایره مماس هستند. اگر $AB \parallel CD$ ، $\beta = 1/5\,\alpha$ و $\hat{M} = 30^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان CD چند درجه است؟



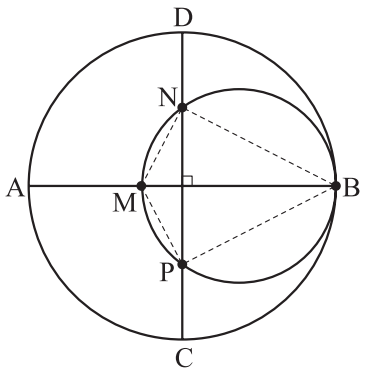
۱) ۱۰۰

۲) ۹۰

۳) ۱۱۰

۴) ۱۲۰

۸۳- مطابق شکل، دو دایره بر هم مماس و قطرهای AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM = 4$ و $DN = 3$ باشد، آن‌گاه مساحت چهارضلعی MNBP کدام است؟



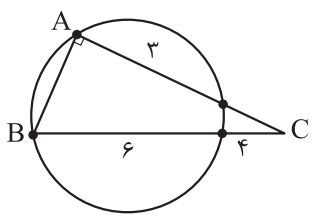
۱) ۷

۲) $6\sqrt{2}$

۳) ۷/۵

۴) $4\sqrt{5}$

۸۴- در شکل رسم‌شده، شعاع دایره کدام است؟



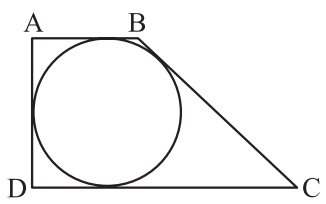
۱) ۳

۲) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$

۴) $2\sqrt{3}$

۸۵- مطابق شکل، در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD دایرهٔ محاطی آن رسم شده است. اگر $\hat{B} = 150^\circ$، آن‌گاه نسبت مساحت دایره به مساحت ذوزنقه کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{6}$

۲) $\frac{\pi}{3+\sqrt{3}}$

۳) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

۴) $\frac{\pi}{4+\sqrt{3}}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آمار و احتمال

۸۶- اگر A مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ باشد، متمم A نسبت به مرجع $U = (-2,7]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۷- از ۱۴۰ مشتری یک فروشگاه، ۷۰ نفر کارت بانکی نوع A و ۴۵ نفر کارت نوع B دارند. اگر تعداد افرادی که هیچ‌یک از دو کارت را ندارند، دو برابر تعداد افرادی باشد که هر دو نوع کارت را دارند، چند نفر از مشتریان فقط یک نوع کارت دارند؟

۱) ۹۰ ۲) ۶۵ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۰۰

۸۸- ریشهٔ دوم کدام عدد، عضو مجموعهٔ $\mathbb{Z} - (\mathbb{R} - \mathbb{Q}')$ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۲۵

۸۹- به ازای چند پیشامد A، گزاره‌نمای زیر ارزش درست دارد؟

«در پرتاب دو سکه، احتمال این‌که پیشامد A رخ دهد، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.»

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۰- تعداد اعضای مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $۲x^۲ - x = ۱$ با کدام دامنه، با بقیه متفاوت است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{W}$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $\mathbb{Q}$

۹۱- اگر $p \wedge q$ درست و $p \Rightarrow r$ نادرست باشد، آن‌گاه گزارهٔ $\sim p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ هم‌ارز کدام است؟

۱) T ۲) F ۳) q ۴) $\sim r$

۹۲- نقیض گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی n، اگر n زوج باشد، آن‌گاه $n^۲$ حداقل برابر ۴ است»، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\forall n \in \mathbb{N}; n \in E \Rightarrow n^۲ < ۴$

۲) $\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \Rightarrow n^۲ < ۴$

۳) $\exists n \notin \mathbb{N}; n \in E \wedge n^۲ < ۴$

۴) $\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \wedge n^۲ < ۴$

۹۳- اگر $A = \{-۱,۲,x\}$ و $B = \{۲y,۳,\sqrt{z}\}$ و $A \cup B = A \cap B$، آن‌گاه مقدار xyz کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۱۲ ۳) -۳ ۴) -۲۴

۹۴- برای سه مجموعهٔ ناتهی A و B و C، حاصل $(A \cap B) - (A \cap C)$ برابر کدام است؟

۱) $A - (B \cup C)$ ۲) $A \cap (B - C)$ ۳) $(A - B) \cap (A - C)$ ۴) $(B - C) - A$

۹۵- یک مجموعهٔ ۶عضوی، چند افراز دارد که شامل زیرمجموعه‌های ۱ و ۲ و ۳ عضوی باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

محل انجام محاسبات

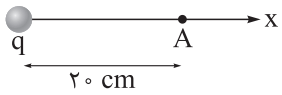
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک یازدهم

۹۶- بار الکتریکی هستهٔ اتم کربن یک بار یونیده ($^{11}_{6}C^{+}$) چند نانوکولن است؟ ($e = 1/6\times10^{-19}\ C$)

۱) $1/6\times10^{-10}$ ۲) 8×10^{-10} ۳) $9/6\times10^{-10}$ ۴) $1/92\times10^{-9}$

۹۷- در شکل زیر، میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -4\ nC$ در نقطهٔ A برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟ ($k = 9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2}$)



۱) $900\vec{i}$ ۲) $90\vec{i}$

۳) $-900\vec{i}$ ۴) $-90\vec{i}$

۹۸- دو کرهٔ رسانای باردار با قطر یکسان، هنگامی که به فاصلهٔ $2\ m$ از هم قرار می‌گیرند، به یکدیگر نیروی الکتریکی $0/108\ N$ وارد می‌کنند. کره‌ها را به وسیلهٔ یک سیم رسانا، به هم وصل می‌کنیم. در این حالت، نیروی الکتریکی که به هم وارد می‌کنند، $0/036\ N$ می‌شود. تعداد الکترون‌هایی که از یک کره به کرهٔ دیگر منتقل می‌شود، چه‌قدر است؟ ($e = 1/6\times10^{-19}\ C$ و $k = 9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2}$)

۱) 5×10^{13} ۲) $1/25\times10^{13}$

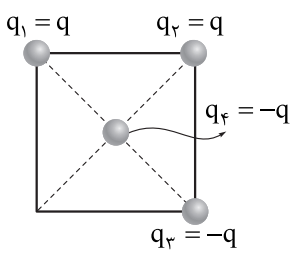
۳) 5×10^{15} ۴) $1/25\times10^{15}$

۹۹- روی محور x، بارهای الکتریکی $q_1 = 40\ \mu C$، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 0$، $x_2 = 4\ m$ و $x_3 = 5\ m$ قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_3 برابر صفر باشد، نیروی الکتریکی وارد بر بار q_2 از طرف بار q_1 برحسب نیوتون کدام است؟ ($k = 9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2}$)

۱) $0/36\vec{i}$ ۲) $-0/36\vec{i}$

۳) $0/036\vec{i}$ ۴) $-0/036\vec{i}$

۱۰۰- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس مربع و یک بار الکتریکی نقطه‌ای روی مرکز مربع قرار دارد. اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 چند برابر اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 است؟



۱) $\frac{\sqrt{30}}{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

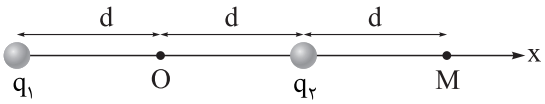
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱- بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 از فاصلهٔ r بر بار نقطه‌ای $q_2 = -5\ \mu C$، نیروی الکتریکی $8\ N$ وارد می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصلهٔ $2r$ از آن چند نیوتون بر کولن است؟

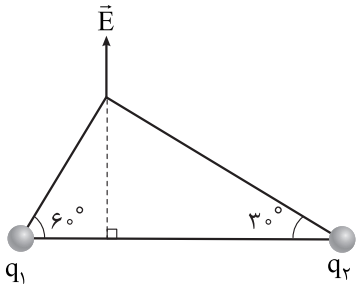
۱) $6/4\times10^{6}$
۲) $1/6\times10^{6}$
۳) 8×10^{5}
۴) 4×10^{5}

۱۰۲- در شکل زیر، یک دوقطبی الکتریکی منطبق بر محور x قرار دارد. اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O چند برابر اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M است؟



۱) $\frac{9}{5}$
۲) $\frac{9}{4}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) 3

۱۰۳- در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای روی دو رأس مثلثی قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در رأس سوم مثلث برابر $\vec{E}$ باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ برابر کدام است؟

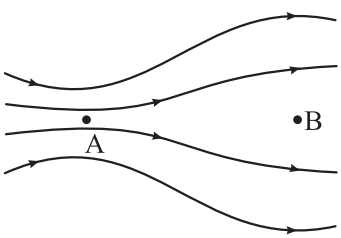


۱) $\sqrt{3}$
۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
۳) $3\sqrt{3}$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

۱۰۴- در نزدیکی سطح زمین، میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی $150\ N/C$ و جهت رو به پایین وجود دارد. یک الکترون در این فضا قرار دارد. نیروی الکتریکی وارد بر این الکترون چند نیوتون و در چه جهتی است؟ $(e = 1/6\times10^{-19}\ C)$

۱) $2/4\times10^{-17}$، به سمت بالا
۲) $2/4\times10^{-17}$، به سمت پایین
۳) $2/4\times10^{-18}$، به سمت بالا
۴) $2/4\times10^{-18}$، به سمت پایین

۱۰۵- آرایش خطوط میدان الکتریکی در یک ناحیه به شکل زیر است. کدام مورد، دربارهٔ مقایسهٔ پتانسیل الکتریکی (V) و اندازهٔ میدان الکتریکی (E) در نقاط A و B درست است؟

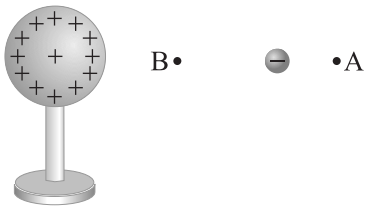


۱) $E_A > E_B\ ،\ V_A > V_B$
۲) $E_A > E_B\ ،\ V_A < V_B$
۳) $E_A < E_B\ ،\ V_A > V_B$
۴) $E_A < E_B\ ،\ V_A < V_B$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۶- در شکل زیر، ذره‌ای با بار منفی از نقطهٔ A، به سمت کرهٔ بارداری با بار مثبت تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌شود. در این جابه‌جایی، چه تعداد از موارد زیر درست است؟



الف) کاری که میدان الکتریکی روی ذره انجام می‌دهد، مثبت است.

ب) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره افزایش می‌یابد.

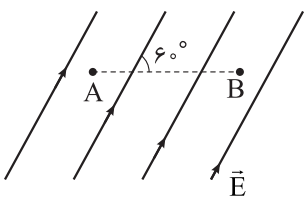
پ) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۰۷- اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های یک باتری برابر ۱۲ V است. اگر بار الکتریکی $q = -50\ nC$ از پایانهٔ مثبت به پایانهٔ منفی این باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۶۰۰، کاهش می‌یابد.
۲) ۶۰۰، افزایش می‌یابد.
۳) ۰/۶، کاهش می‌یابد.
۴) ۰/۶، افزایش می‌یابد.

۱۰۸- در شکل زیر، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت برابر $E = 5\times10^{3}\ N/C$ و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر ۶ cm است. اگر پتانسیل الکتریکی این دو نقطه به ترتیب برابر V_A و V_B باشد، $V_B - V_A$ برابر چند ولت است؟



۱) $150\sqrt{3}$
۲) $-150\sqrt{3}$
۳) ۱۵۰
۴) ۱۵۰-

۱۰۹- یک جسم فلزی دوکی‌شکل توپر که روی پایهٔ عایق قرار دارد، در تماس با کلاهک یک مولد واندوگراف، باردار شده است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این جسم درست است؟

الف) بار الکتریکی فقط در سطح خارجی آن توزیع می‌شود.

ب) پتانسیل الکتریکی نقاط نوک‌تیز جسم بیشتر از سایر نقاط آن است.

پ) تراکم بار الکتریکی در نقاط نوک‌تیز جسم بیشتر از سایر نقاط آن است.

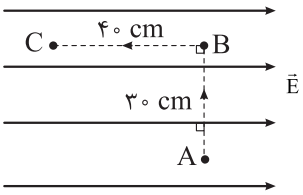
ت) میدان الکتریکی در داخل جسم، غیرصفر و یکنواخت است.

۱) الف و ب
۲) الف و پ
۳) ب و ت
۴) پ و ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۰- در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -8\ \mu C$ توسط یک عامل خارجی، از مسیر مشخص‌شده از نقطهٔ A تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌شود. اگر اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $4\times10^5\ N/C$ و تندی جسم در دو نقطهٔ A و C برابر باشد، در این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط عامل خارجی چند ژول است؟



۱) ۱/۲۸
۲) −۱/۲۸
۳) ۱/۶
۴) −۱/۶

۱۱۱- چگالی سطحی بار الکتریکی یک سطح فلزی بزرگ که بار الکتریکی به طور یکنواخت در آن توزیع شده، برابر $8\ nC/cm^2$ است. در هر میلی‌متر مربع از این سطح، اختلاف تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها برابر کدام است؟
$(e = 1/6\times10^{-19}\ C)$

۱) 5×10^7
۲) 5×10^8
۳) 5×10^9
۴) 5×10^{10}

۱۱۲- حجم کرهٔ فلزی A، ۸ برابر حجم کرهٔ فلزی B و بار الکتریکی کرهٔ A، ۲ برابر بار الکتریکی کرهٔ B است. چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ A، چند برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ B است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

۱۱۳- فاصلهٔ بین صفحات خازنی برابر d، مساحت هر یک از صفحه‌های آن $40\ cm^2$ و بین صفحات آن هوا است. اگر فاصلهٔ بین صفحات خازن $4\ mm$ کاهش یابد، ظرفیت خازن ۲۸/۸ پیکوفاراد افزایش می‌یابد. d برابر چند سانتی‌متر است؟

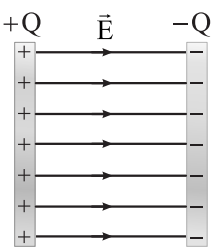
$(\varepsilon_\circ = 9\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N.m^2})$

۱) ۰/۵
۲) ۰/۶
۳) ۵
۴) ۶

۱۱۴- اختلاف پتانسیل دو سر خازنی به ظرفیت $5\ \mu F$، ۲۵ درصد افزایش می‌یابد و در اثر آن، انرژی ذخیره‌شده در خازن $90\ \mu J$ تغییر می‌کند. بار الکتریکی اولیهٔ ذخیره‌شده در خازن چند میکروکولن بوده است؟

۱) ۴۰
۲) ۶۲/۵
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۵

۱۱۵- در شکل زیر، دو صفحهٔ فلزی که بار الکتریکی آن‌ها هم‌اندازه و ناهمنام است، در فاصلهٔ معینی از هم قرار دارند. اگر فاصلهٔ دو صفحه نصف شود، چه تعداد از موارد زیر درست است؟



الف) اندازهٔ میدان الکتریکی بین دو صفحه، ۲ برابر می‌شود.
ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه، ۲ برابر می‌شود.
پ) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی بین دو صفحه، $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی یازدهم

۱۱۶- کدام مورد درست است؟

۱) در گذشته، استفادهٔ انسان‌ها از مواد، محدود به برخی مواد طبیعی مانند چوب، پشم، سفال و خاک بوده است.

۲) با گرمادادن به مواد و افزودن آن‌ها به یکدیگر، به یقین خواص آن‌ها بهبود می‌یابد.

۳) امروزه میزان تولید و مصرف نسبی سوخت‌های فسیلی نسبت به مواد معدنی و فلزها بیشتر است.

۴) با وجود استخراج مقادیر زیادی ماده از کرهٔ زمین، جرم کلی مواد در کرهٔ زمین به تقریب ثابت می‌ماند.

۱۱۷- با افزایش عدد اتمی عنصرها در هر دوره و هر گروه از جدول تناوبی، به ترتیب کدام ویژگی آن‌ها افزایش می‌یابد؟ (گاز نجیب هر دوره را در نظر نگیرید.)

۱) شعاع اتمی ـ خصلت فلزی

۲) تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده ـ تعداد الکترون‌های ظرفیتی

۳) خصلت نافلزی ـ شعاع اتمی

۴) تعداد الکترون‌های ظرفیتی ـ تعداد زیرلایه‌های الکترونی اشغال‌شده

۱۱۸- کدام مورد دربارهٔ جدول تناوبی درست است؟

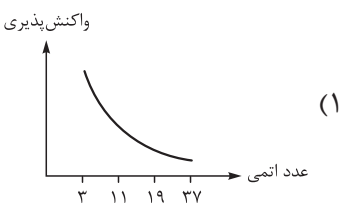
۱) در گروه ۱۴، بین اولین عنصر فلزی و اولین عنصر نافلزی، یک عنصر شبه‌فلزی وجود دارد.

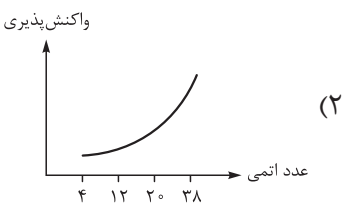
۲) در دورهٔ چهارم برخلاف دورهٔ سوم، تنها عنصرهای فلزی و نافلزی وجود دارد.

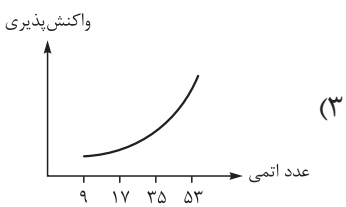
۳) در دورهٔ سوم، شمار عنصرهای فلزی با شمار عنصرهای نافلزی برابر است.

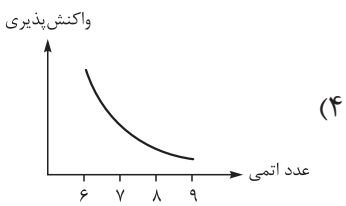
۴) شعاع اتمی یک عنصر شبه‌فلزی، به یقین از شعاع اتمی عنصر نافلزی هم‌دوره یا هم‌گروه آن بزرگ‌تر است.

۱۱۹- براساس مطالب کتاب درسی، کدام نمودار دربارهٔ مقایسهٔ واکنش‌پذیری عنصرها درست است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۰- با توجه به داده‌های جدول زیر که مربوط به عنصرهای دورهٔ چهارم جدول تناوبی است، کدام مورد درست است؟

ویژگی / یون	M^{2+}	E^{x-}	D^{3+}
نسبت شمار الکترون‌ها با $l=0$ به $l=2$	۱/۵	b	۱
شمار الکترون‌های آخرین لایهٔ اشغال‌شدهٔ اتم عنصر	a	۷	۲

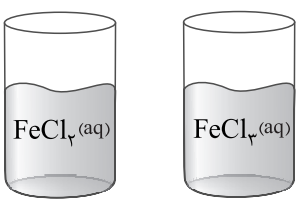
۱) نسبت مقدار b به x برابر ۱/۲ است.

۲) مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم M با عنصر $_{34}A$ برابر است.

۳) عنصر D با آلومینیم هم‌گروه بوده و دارای ۳ الکترون ظرفیتی است.

۴) مقدار a با شمار الکترون‌ها در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اشغال‌شدهٔ اتم نهمین عنصر واسطهٔ جدول، برابر است.

۱۲۱- در دو لولهٔ آزمایش جداگانه مطابق شکل‌های زیر، ۲۵ میلی‌لیتر از محلول‌های آهن (II) کلرید و آهن (III) کلرید با غلظت‌های مولی یکسان وجود دارد. اگر به هر دو لوله، مقدار کافی سدیم هیدروکسید اضافه کنیم تا واکنش به طور کامل انجام شود، در کدام لوله، رسوب قرمز ـ قهوه‌ای رنگ تولید می‌شود و مقایسهٔ شمار مول رسوب تولیدشده در آن‌ها به کدام صورت است؟



(a) (b)

۱) $a > b$ ،a

۲) $a = b$ ،a

۳) $a > b$ ،b

۴) $a = b$ ،b

۱۲۲- در بین واکنش‌های زیر، تنها یکی از آن‌ها به طور طبیعی انجام می‌شود. بر این اساس کدام مورد نادرست است؟

(MO، نماد اکسید فلز M است.)

I) $MO + Ag \rightarrow$

II) $MO + Zn \rightarrow$

۱) واکنش‌پذیری فلز نقره از فلز M کم‌تر است.

۲) واکنش $M + Na_2O \rightarrow$ به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۳) M می‌تواند فلز مس باشد.

۴) برای استخراج فلز روی از سنگ معدن آن، نمی‌توان از فلز M استفاده کرد.

۱۲۳- اگر در واکنش استخراج آهن به کمک کربن، به ازای مصرف ۱/۰ تن آهن (III) اکسید با خلوص ۸۰٪، ۸/۴ متر مکعب گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP تولید شود، بازده درصدی واکنش کدام است؟ $(O=16 , Fe=56 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۴- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) بستر دریا به طور معمول منبعی غنی از برخی فلزهای واسطه مانند منگنز، کبالت و نیکل است.

۲) بررسی چرخهٔ عمر به صنایع کمک می‌کند تا به سمت رفتارهای سازگارتر با محیط زیست و توسعهٔ پایدار پیش بروند.

۳) روش استفاده از گیاهان جاذب فلز، برای عنصرهای مس و نیکل مناسب است.

۴) فلزها منابعی تجدیدناپذیرند و در استخراج آن‌ها، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

۱۲۵- نمونه‌ای به جرم ۱۰۰ گرم آهن (III) کربنات ناخالص مطابق معادلهٔ زیر به طور کامل تجزیه می‌شود. اگر پس از پایان واکنش، جرم کل مواد جامد درون ظرف برابر ۷۶ / ۶۵ گرم باشد، درصد خلوص آهن (III) کربنات اولیه به تقریب کدام است؟ (ناخالصی‌ها در واکنش شرکت نمی‌کنند.) $(Fe = ۵۶ , C = ۱۲ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

$$۳Fe_۲(CO_۳)_۳\ (s) \xrightarrow{\Delta} ۴FeO(s) + Fe_۲O_۳(s) + ۹CO_۲(g) + O_۲(g)$$

۱) ۶۴ ۲) ۷۰

۳) ۸۰ ۴) ۸۵

۱۲۶- مخلوطی از سه آلکان راست‌زنجیر گازی (A، B و X) در دما و فشار اتاق موجود است. اگر با سردکردن این مخلوط آلکان B آسان‌تر به مایع تبدیل شود، کدام مورد درست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

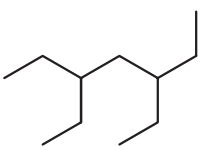
۱) میزان فراریت آلکان B از X بیشتر است.

۲) اگر B، سوخت فندک باشد، در ساختار آلکان A می‌تواند ۹ پیوند اشتراکی وجود داشته باشد.

۳) اگر X، پروپان باشد، در نام آلکان A پیشوندی که شمار اتم‌های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.

۴) اگر درصد جرمی کربن در آلکان A برابر ۸۰٪ باشد، درصد جرمی کربن در آلکان B کم‌تر از ۸۰٪ است.

۱۲۷- کدام موارد زیر دربارهٔ آلکان‌های داده‌شده، درست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$



(A)

$(CH_۳)_۲CH\,CH_۲CH(CH_۳)_۲$

(B)

الف) در نام‌گذاری A برخلاف B، برای بیان شاخه‌های فرعی از پیشوند استفاده نمی‌شود.

ب) شمار شاخه‌های فرعی متیل در B، دو برابر A است.

پ) جرم مولی B، ۶ / ۲۵ برابر نخستین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها است.

ت) آلکان راست‌زنجیر هم‌کربن با A، در دمای $۲۲\ ^\circ C$ و فشار ۱ atm به حالت مایع است.

۱) پ و ت ۲) الف و ب

۳) ب و ت ۴) الف و پ

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۸- کدام مورد دربارهٔ اتیلن (A) و استیلن (B)، نادرست است؟

۱) A، در بیشتر گیاهان وجود دارد.

۲) B، سبک‌ترین هیدروکربن سیرنشده است.

۳) شمار مول گاز اکسیژن مورد نیاز برای سوختن کامل ۱ مول B، بیشتر از سوختن کامل ۱ مول A است.

۴) درصد جرمی هیدروژن در A با درصد جرمی هیدروژن در همهٔ عضوهای هم‌خانوادهٔ آن، برابر است.

۱۲۹- کدام مطلب درست است؟

۱) هر چه در نفت خام، درصد نفت کوره بیشتر باشد، قیمت آن بیشتر است.

۲) در جرم یکسان از نفت برنت دریای شمال و نفت سنگین ایران، حجم نفت سنگین ایران بیشتر است.

۳) نفت برنت دریای شمال در مقایسه با نفت سنگین کشورهای عربی، قیمت کم‌تری دارد.

۴) نقطهٔ جوش ماده‌ای که سوخت هواپیما به طور عمده از آن تهیه می‌شود، از خوراک پتروشیمی بیشتر و از گازوئیل کم‌تر است.

۱۳۰- نسبت جرم کربن به هیدروژن در مولکول یک هیدروکربن برابر ۸ و شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آن برابر ۵۵ است. تفاوت جرم مولی این ترکیب با نفتالن، با جرم مولی کدام ترکیب برابر است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) اوکتن ۲) سیکلوهگزان ۳) دکان ۴) هپتین

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز – رشته ریاضی

پایه دوازدهم – مرحله دوم – ۶ شهریور ۱۴۰۵

پایه دوازدهم

چنان‌چه پایهٔ دوازدهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۱۵	۱۳۱	۱۴۵	۲۵ دقیقه	حسابان (۲) فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۲
هندسه	۱۰	۱۴۶	۱۵۵	۲۰ دقیقه	هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۹ تا ۲۱
ریاضیات گسسته	۱۰	۱۵۶	۱۶۵	۲۰ دقیقه	ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۸
فیزیک	۲۰	۱۶۶	۱۸۵	۳۰ دقیقه	فیزیک (۳) فصل ۱ (تا ابتدای حرکت با شتاب ثابت) صفحهٔ ۱ تا ۱۵
شیمی	۱۵	۱۸۶	۲۰۰	۲۰ دقیقه	شیمی (۳) فصل ۱ (تا ابتدای اسیدها و بازها) صفحهٔ ۱ تا ۱۳
مجموع	۷۰ سؤال			۱۱۵ دقیقه	–

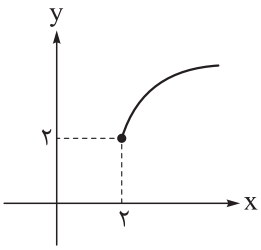
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان دوازدهم

۱۳۱- برای رسم نمودار کدام تابع، باید نمودار تابع f را در راستای افقی منقبض کنیم؟

۱) $y = ۲f(x)$ ۲) $y = \frac{۱}{۲}f(x)$ ۳) $y = f(۲x)$ ۴) $y = f(\frac{x}{۲})$

۱۳۲- نمودار تابع f صرفاً با انتقال نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = \sqrt{x}$ به دست می‌آید. اگر نمودار تابع f مطابق شکل زیر باشد، حاصل $(fog)(۹)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۳۳- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۳ - \sqrt{۲-x}$ مفروض است. نمودار کدام تابع محورهای دستگاه مختصات را قطع نمی‌کند؟

۱) $g(x) = f(x+۲) - ۳$ ۲) $g(x) = f(x-۲) + ۳$
۳) $g(x) = f(x+۳) - ۴$ ۴) $g(x) = f(x-۴) + ۳$

۱۳۴- برای رسم نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = ۲f(۱-x)$ از روی نمودار تابع f، کدام ترتیب تبدیلات درست است؟

۱) یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور y، انقباض عمودی با ضریب ۲
۲) یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور y، انبساط عمودی با ضریب ۲
۳) یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور y، انبساط عمودی با ضریب ۲
۴) یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور y، انقباض عمودی با ضریب ۲

۱۳۵- قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x = -۱$، نمودار کدام تابع است؟

۱) $y = f(-\frac{۱}{۲} - x)$ ۲) $y = f(-۱-x)$ ۳) $y = f(۱-x)$ ۴) $y = f(-۲-x)$

۱۳۶- نمودار تابع g، قرینهٔ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۳ - |x-۲|$ نسبت به نقطهٔ $(-۲,۱)$ است. ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x) = |x+۲| - ۱$ ۲) $g(x) = |x+۴| - ۲$
۳) $g(x) = |x| - ۲$ ۴) $g(x) = |x+۶| - ۱$

۱۳۷- نقطهٔ $A(-۱,۱)$ روی نمودار تابع f، به نقطهٔ $A'(\alpha,\beta)$ روی نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = ۳ - f(\frac{۱+x}{۲})$ تبدیل می‌شود. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

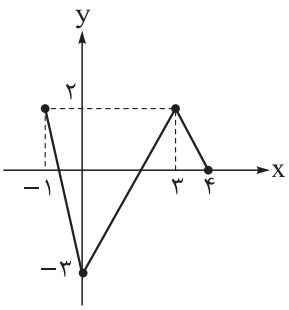
محل انجام محاسبات

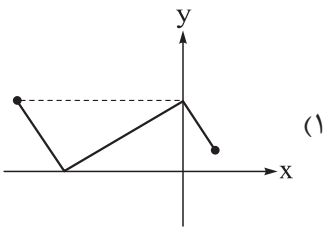
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

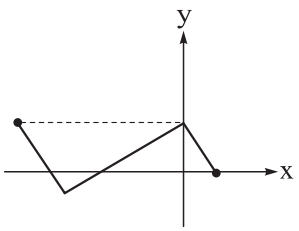
۱۳۸- مجموع صفرهای تابع f برابر -۳ و مجموع صفرهای تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(۲x-۱)$ برابر ۱ است. تعداد صفرهای هر تابع کدام است؟

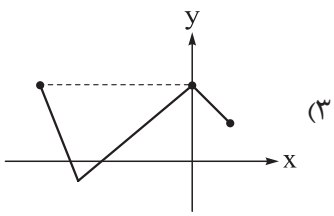
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

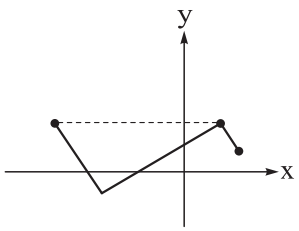
۱۳۹- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{f(x+۳)}{۲}+۱$ کدام است؟



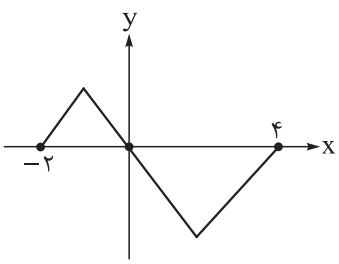
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۴۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{-xf(۴-x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

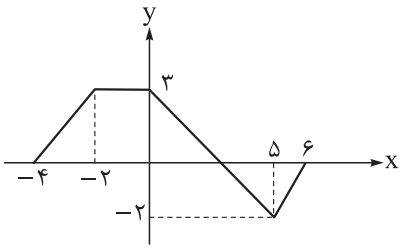
۱۴۱- قرینهٔ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ نسبت به محور y را دو واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. عرض نقطهٔ تقاطع نمودارهای توابع f و g کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۳}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۲- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مساحت سطح محدود به نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(۳-x)$ و محور x در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات کدام است؟



۱) ۱۳/۵

۲) ۱۲

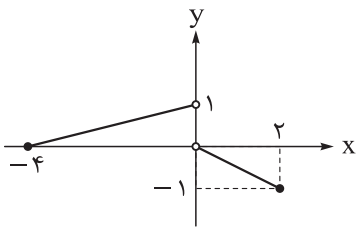
۳) ۱۴/۵

۴) ۱۲/۵

۱۴۳- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۳|$ مفروض است، اگر تابع $g(x)=f(|x|-m)$ ثابت باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

۱) $(-\infty,-۳]$ ۲) $(-۳,۱]$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $[-۱,۳]$

۱۴۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر معادلهٔ $f(x)=g(x)$ بی‌شمار جواب داشته باشد، ضابطهٔ تابع g کدام می‌تواند باشد؟



۱) $g(x)=۲f(\frac{x}{۲})+۱$

۲) $g(x)=f(\frac{x}{۲})-۱$

۳) $g(x)=f(-\frac{x}{۲})-۱$

۴) $g(x)=f(-۲x)-۱$

۱۴۵- تابع وارون‌پذیر f و تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۱}{۳}f(\frac{x}{۲})-۱$ مفروض‌اند. ضابطهٔ تابع $g^{-۱}$ کدام است؟

۱) $g^{-۱}(x)=۲f^{-۱}(۳x+۳)$

۲) $g^{-۱}(x)=۲f^{-۱}(۳x+۱)$

۳) $g^{-۱}(x)=۳f^{-۱}(۲x)+۳$

۴) $g^{-۱}(x)=۳f^{-۱}(۲x)+۱$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دوازدهم

۱۴۶- ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} x+y & z-2y & x-2 \\ 0 & y+z & 0 \\ x+y & 0 & z+x \end{bmatrix}$ مفروض است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+I$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -5 ۴) -4

۱۴۷- اگر $2A-B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A-2B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A چند برابر کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس B است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) -2 ۳) 2 ۴) $-\frac{4}{3}$

۱۴۸- اگر $A=[a_{ij}]_{4\times3}$، $B=[b_{ij}]_{3\times4}$ و $C=[c_{ij}]_{4\times4}$ باشد، کدام‌یک از ماتریس‌های زیر قابل تعریف نیست؟

۱) ABC ۲) CAB ۳) BCA ۴) BAC

۱۴۹- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 0 & |i-j|>1 \\ 1 & |i-j|=1 \\ -2 & |i-j|<1 \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^2 کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) 1 ۴) 2

۱۵۰- فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ باشند و $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. اگر $B=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $B+A\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ $A\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس ABC کدام است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) 6 ۴) 4

۱۵۱- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & b+3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۲- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & ۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $A(A-mI)=nI$ باشد، مقدار $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱) $-۰/۴۵$ ۲) $۰/۵$ ۳) $۰/۴۵$ ۴) $-۰/۵$

۱۵۳- اگر $\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۹\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۱\\ ۰ & ۲ & -۷\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A=\begin{bmatrix}e & i & a\\ d & f & g\\ b & c & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۹ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۷

۱۵۴- ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ مفروض است. اگر $A^۲=۳A+\alpha I$ و $A^۴=۲۱A+\beta I$ باشد، مقدار $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۵۵- اگر $A=[i-j]_{۲\times۲}$، $B=\begin{bmatrix}\cot x & ۰\\ ۰ & \tan x\end{bmatrix}$ و $C=AB$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^{۲۶}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۹

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضیات گسسته

۱۵۶- برای چند عضو از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ عدد $۲^{۲^n}+۱$ فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۷- کدام گزاره نادرست است؟

۱) جمع دو عدد متوالی، فرد است.
۲) جمع سه عدد متوالی، مضرب ۳ است.
۳) جمع دو عدد زوج متوالی، مضرب ۶ است.
۴) جمع دو عدد فرد متوالی، مضرب ۴ است.

۱۵۸- اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ مضرب ۵ باشد، برای عدد طبیعی n چند جواب یک‌رقمی وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹- در اثبات حکم زیر به روش برهان خلف، فرض خلف کدام است و به چه تناقضی می‌رسیم؟

«اگر x,y,z سه عدد صحیح و x',y',z' همان اعداد با ترتیب دیگری باشند، $n=(x-x')(y-y')(z-z')$ زوج است.»

۱) n فرد است، صفر زوج است.
۲) n زوج است، صفر فرد است.
۳) n فرد است، صفر فرد است.
۴) n زوج است، صفر زوج است.

۱۶۰- اگر $x>۰$ باشد، حاصل $f(x)=(x+۱)(\frac{۱}{x}+۱)$ حداقل چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶۱- در اثبات حکم $x^۲+y^۲\geq xy$ به روش اثبات بازگشتی به $(x-\frac{y}{۲})^۲+k\geq ۰$ رسیدیم. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۳y^۲}{۴}$ ۲) $\frac{y^۲}{۴}$ ۳) $\frac{y^۲}{۲}$ ۴) $y^۲$

۱۶۲- برای سه مجموعهٔ ناتهی A، B و C، با قراردادن کدام علامت به جای □ گزارهٔ $A□B=A□C\Rightarrow B=C$ درست می‌شود؟

۱) $\cap$ ۲) $\cup$ ۳) $-$ ۴) $\times$

۱۶۳- چند گزاره از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) جمع ۷ عدد طبیعی متوالی مضرب ۷ است.

ب) میانگین ۷ عدد طبیعی فرد متوالی، همان عدد وسطی است.

پ) اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_۷$ را در ترتیب دیگری $b_۱$، $b_۲$، ...، $b_۷$ بنویسیم، حاصل $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)...(a_۷-b_۷)$ زوج است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۴- موارد «الف» و «ب» به ترتیب کدام روش استدلال را نشان می‌دهند؟

الف) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow r$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۱) بررسی تمام حالت‌ها، برهان خلف

۲) بررسی تمام حالت‌ها، استدلال بازگشتی

۳) اثبات مستقیم، برهان خلف

۴) اثبات مستقیم، استدلال بازگشتی

۱۶۵- x و y دو عدد حقیقی غیرصفر هستند. اگر $\sqrt[3]{x-y} = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$، کدام نتیجه درست است؟

۱) $|y| = ۱$

۲) $x = y$

۳) $y = -x$

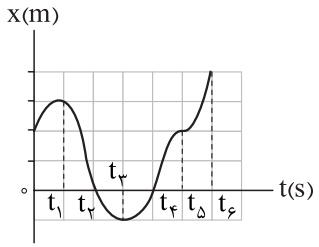
۴) نشدنی

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دوازدهم

۱۶۶- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این حرکت درست است؟



الف) جهت حرکت، ۳ مرتبه تغییر می‌کند.

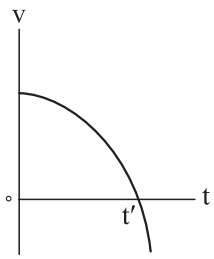
ب) جهت بردار مکان متحرک، ۲ مرتبه تغییر می‌کند.

پ) شتاب متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 در جهت محور x است.

ت) حرکت متحرک در بازهٔ زمانی t_5 تا t_6 تندشونده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۷- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازهٔ زمانی صفر تا t' چه تعداد از کمیت‌های زیر الزاماً در جهت محور x است؟



الف) بردار مکان متحرک

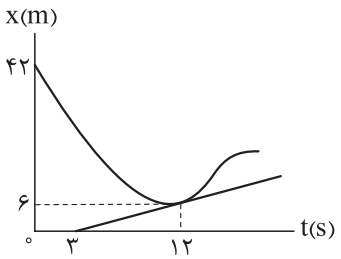
ب) سرعت متحرک

پ) شتاب متحرک

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

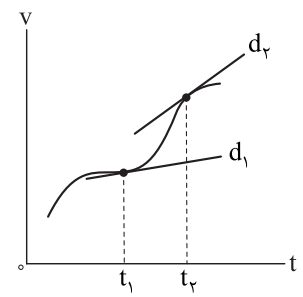
۱۶۸- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 12\ s$ رسم شده است. تندی متحرک در این لحظه چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن در ۱۲ ثانیهٔ اول است؟



۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$

۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۶۹- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب برابر a_1 و a_2 و اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر a_{av} باشد، کدام مقایسه درست است؟ (خط‌های d_1 و d_2 در لحظه‌های t_1 و t_2 بر نمودار مماس هستند.)



۱) $a_1 > a_{av} > a_2$

۲) $a_2 > a_{av} > a_1$

۳) $a_{av} > a_1 > a_2$

۴) $a_{av} > a_2 > a_1$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

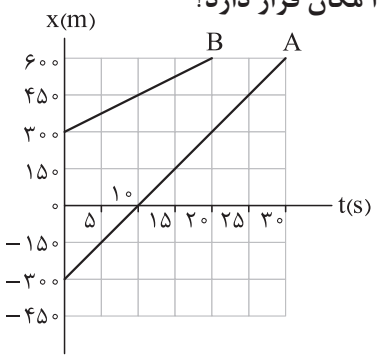
۱۷۰- متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t_1 = 2\ s$ از مکان $x_1 = 21\ m$ و در لحظهٔ $t_2 = 10\ s$ از مکان $x_2 = -7\ m$ عبور می‌کند. در کدام لحظه برحسب ثانیه، جهت بردار مکان تغییر می‌کند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۷۱- در مسیری مستقیم، قطاری به طول ۱۸۰ m که با تندی ثابت ۶۰ km / h در حال حرکت است، وارد تونلی به طول ۲۴۰ m می‌شود. از لحظه‌ای که نیمی از قطار درون تونل قرار گرفته است، چند ثانیه طول می‌کشد تا قطار به طور کامل از تونل خارج شود؟

۱) ۳۰/۶ ۲) ۱۹/۸ ۳) ۲۱/۶ ۴) ۲۵/۲

۱۷۲- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. ۵ s پس از عبور دو متحرک از کنار هم، متحرک B در فاصلهٔ چند متری مبدأ مکان قرار دارد؟

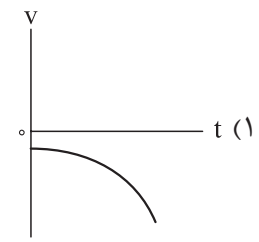


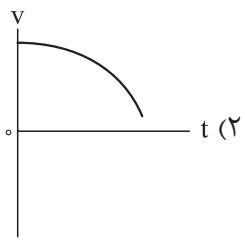
۱) ۸۲۵
۲) ۹۷۵
۳) ۱۰۵۰
۴) ۱۰۷۵

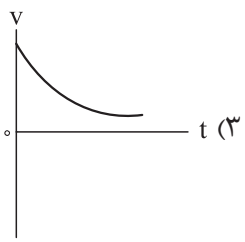
۱۷۳- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^2 - 4t - 5$ است. در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

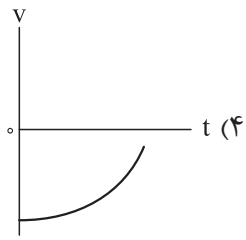
۱) ۱ ۲) ۲/۶ ۳) ۵ ۴) ۱۳

۱۷۴- جسمی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار سرعت ـ زمان این جسم به صورت کدام‌یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۷۵- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 4$ است. از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک برای دومین مرتبه تغییر می‌کند، شتاب متوسط متحرک برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $\vec{i}$ ۲) $-\vec{i}$ ۳) $2\vec{i}$ ۴) $-2\vec{i}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۶- دو متحرک با تندی‌های ثابت v_1 و $v_2 > v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر ثانیه، ۱۲ m تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر دقیقه، ۱۸۰ m تغییر می‌کند. $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۷۷- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -t^2 + 6t + 7$ است. در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، متحرک چند مرتبه از فاصلهٔ ۱۷متری مبدأ محور عبور می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۷۸- شتاب متوسط متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در ۴ ثانیهٔ اول، برابر $\vec{a}$ و در ۲ ثانیهٔ سوم، برابر $-۳\vec{a}$ است. اگر شتاب متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول برابر $(۴\ m/s^2)\vec{i}$ باشد، $\vec{a}$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $۱۲\vec{i}$
۲) $-۱۲\vec{i}$
۳) $۱/۲\vec{i}$
۴) $-۱/۲\vec{i}$

۱۷۹- متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان شروع به حرکت می‌کند. در بازهٔ زمانی صفر تا T بدون آن‌که جهت بردار مکان تغییر کند، جهت حرکت متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند. در این بازهٔ زمانی، اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک ۲ برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن باشد، بیشینهٔ اندازهٔ بردار مکان متحرک، چند برابر اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ T است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

۱۸۰- متحرکی در یک صفحهٔ افقی، ابتدا به اندازهٔ d در جهت شرق، سپس به اندازهٔ d در جهت جنوب و در نهایت به اندازهٔ $\frac{d}{۲}$ در جهت غرب حرکت می‌کند. در این حرکت، مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۵}$

۱۸۱- بردار مکان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب برابر $(۶\ m)\vec{i}$ و $(-۸\ m)\vec{i}$ است. اگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، سرعت متوسط متحرک برابر $(-۲\ m/s)\vec{i}$ و تندی متوسط آن برابر $۶\ m/s$ باشد، بردار مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر کرده، برحسب متر کدام می‌تواند باشد؟ (جهت حرکت متحرک تنها یک مرتبه تغییر کرده است.)

۱) $-۲۸\vec{i}$
۲) $۱۸\vec{i}$
۳) $۱۴\vec{i}$
۴) $-۲۲\vec{i}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۲- متحرکی روی محور x در حال حرکت است و در لحظه‌های $t_1 = 2\,s$، $t_2 = 4\,s$ و $t_3 = 7\,s$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 4\,m$، $x_2 = -6\,m$ و $x_3 = 8\,m$ عبور می‌کند. کدام موارد زیر، دربارهٔ این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 لزوماً درست است؟

الف) جهت بردار سرعت متحرک حداقل دو مرتبه تغییر کرده است.

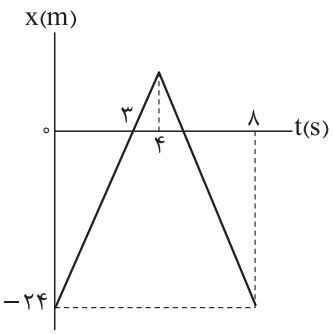
ب) جهت بردار مکان متحرک حداقل دو مرتبه تغییر کرده است.

پ) سرعت متوسط متحرک برابر $(0/8\,m/s)\vec{i}$ است.

ت) تندی متوسط متحرک برابر $4/8\,m/s$ است.

۱) ب و پ ۲) پ و ت ۳) الف و ت ۴) الف و ب

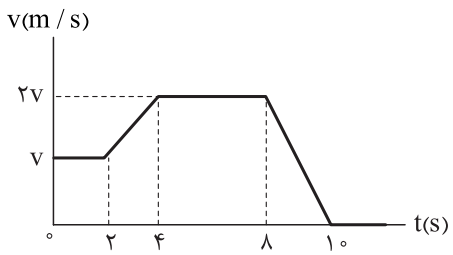
۱۸۳- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. در بازهٔ زمانی $t_1 = 1\,s$ تا $t_2 = 5\,s$ به ترتیب از راست به چپ، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه و اندازهٔ شتاب متوسط آن چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۴، ۴ ۲) ۴، ۸

۳) ۸، ۴ ۴) ۸، ۸

۱۸۴- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 3\,s$ تا $t_2 = 9\,s$، چند برابر اندازهٔ شتاب آن در لحظهٔ t_1 است؟



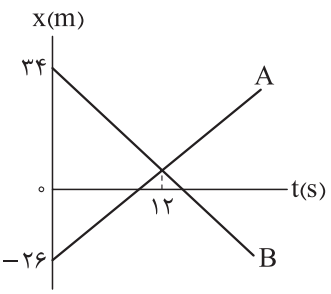
۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{9}$

۱۸۵- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در ۵ ثانیهٔ سوم، فاصلهٔ دو متحرک چند متر و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۵، کاهش می‌یابد.

۲) ۱۰، کاهش می‌یابد.

۳) ۵، افزایش می‌یابد.

۴) ۱۰، افزایش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دوازدهم

۱۸۶- کدام مورد، درست است؟

۱) در ۵۰ سال گذشته، شیب افزایش امید به زندگی در مناطق کم‌برخوردار کم‌تر از مناطق برخودار بوده است.

۲) نیروی بین مولکولی غالب در اسیدهای چرب برخلاف استرهای بلندزنجیر، از نوع پیوند هیدروژنی است.

۳) مولکول‌های سازندهٔ عسل، قطبی‌اند و در ساختار آن‌ها گروه هیدروکسیل وجود دارد.

۴) به لطف صابون‌ها و مواد شوینده که براساس خواص اسیدی و بازی عمل می‌کنند، امروزه بیماری وبا تهدیدی برای جوامع انسانی به حساب نمی‌آید.

۱۸۷- در کدام گزینه، ماده‌ای وجود دارد که برخلاف دو مادهٔ دیگر، انحلال‌پذیری آن در هگزان بیشتر از آب است؟

۱) نمک خوراکی ـ اتیلن گلیکول ـ شکر
۲) اوره ـ بنزین ـ روغن زیتون
۳) وازلین ـ متانول ـ اوره
۴) ید ـ بنزین ـ گریس

۱۸۸- درستی یا نادرستی کدام گزینه دربارهٔ اوره با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

$(H = ۱ , C = ۱۲ , N = ۱۴ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

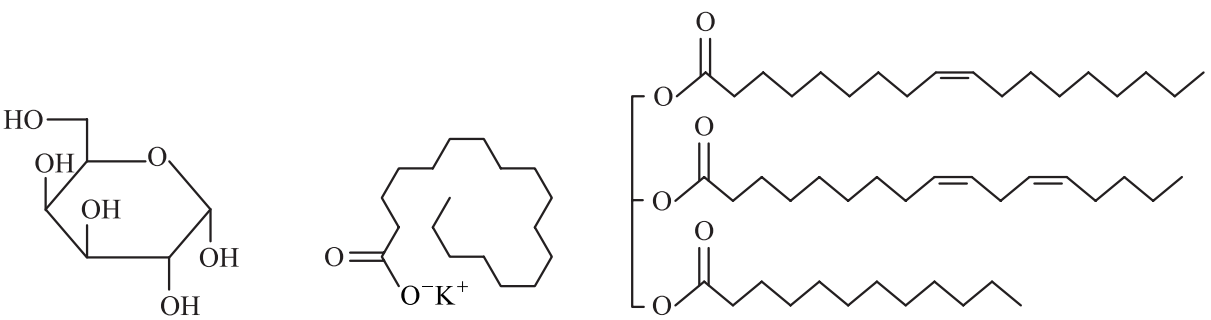
۱) مولکولی قطبی است و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.

۲) شمار گروه‌های $NH_۲$ در ساختار آن با شمار گروه‌های هیدروکسیل در ساختار اتیلن گلیکول برابر است.

۳) در ۱۲ گرم از آن، ۰/۸ مول اتم هیدروژن وجود دارد.

۴) همهٔ عنصرهای سازندهٔ آن در ساختار روغن زیتون نیز وجود دارد.

۱۸۹- با توجه به ساختارهای داده‌شده، کدام مورد نادرست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$



(a) (b) (c)

۱) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول (a) با این نسبت در اوره برابر است.

۲) حالت فیزیکی ترکیب (b) در دما و فشار اتاق، مانند اتیلن گلیکول است.

۳) از واکنش ترکیب (c) با پتاسیم هیدروکسید، می‌توان ترکیب (b) را تولید کرد.

۴) تفاوت جرم مولی ترکیب (c) با روغن زیتون برابر با ۹۸ گرم است.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۰- در نمونه‌ای به جرم ۱۰۲/۴ گرم از یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، $۱/۲۰۴\times۱۰^{۲۵}$ اتم وجود دارد. جرم مولی صابون جامد حاصل از این اسید چرب، چند گرم بر مول است؟ $(H=۱, C=۱۲, O=۱۶, Na=۲۳ : g.mol^{-1})$

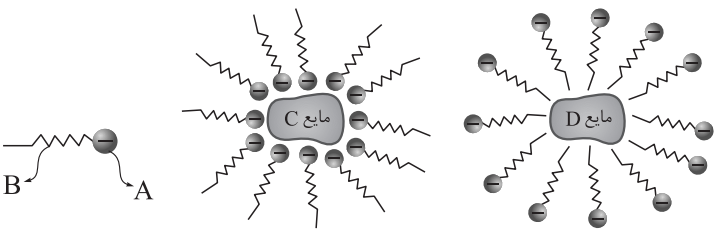
۱) ۲۴۲ ۲) ۲۷۰ ۳) ۲۷۸ ۴) ۳۰۶

۱۹۱- اگر فرمول مولکولی اسید چرب و الکل سازندهٔ یک استر سه‌عاملی به صورت $C_{۱۶}H_{۳۰}O_۲$ و $C_۳H_۸O_۳$ باشد، فرمول مولکولی این استر سنگین کدام است؟

۱) $C_{۱۹}H_{۳۶}O_۴$ ۲) $C_{۵۱}H_{۹۲}O_۶$ ۳) $C_{۱۹}H_{۳۲}O_۶$ ۴) $C_{۵۱}H_{۹۶}O_۶$

۱۹۲- شکل (۱) ساختار بخش آنیونی صابون و شکل‌های (۲) و (۳) نحوهٔ قرارگرفتن صابون در اطراف آب و روغن است. در شکل (۱)، کدام بخش، چربی‌گریز و کدام‌یک از مایع‌های (C) یا (D)، روغن است؟

۱) A ،C
۲) A ،D
۳) B ،C
۴) B ،D



(۱) (۲) (۳)

۱۹۳- در بین مواد «ژله، شربت معده، شیر، چسب، سس مایونز»، ماده‌ای که جزء کلوئیدها نیست، ..... .

۱) مخلوطی همگن و پایدار است
۲) از یون‌ها و مولکول‌ها ساخته شده است
۳) ناهمگن بوده و ذره‌های سازندهٔ آن با گذشت زمان، ته‌نشین می‌شوند
۴) با کلوئیدها، در پایداری، مشابه و در اندازهٔ ذرات، متفاوت است

۱۹۴- هرگاه مقداری صابون را به مخلوط آب و روغن اضافه کرده و مخلوط را به هم بزنیم، مخلوطی ..... به دست می‌آید که توانایی پخش نور را ..... .

۱) همگن ـ ندارد ۲) ناهمگن ـ دارد ۳) همگن ـ دارد ۴) ناهمگن ـ ندارد

۱۹۵- با توجه به جدول زیر که نتایج حاصل از یک آزمایش برای مقایسهٔ قدرت پاک‌کنندگی دو نوع صابون را نشان می‌دهد، مقدار چه تعداد از موارد a تا d بزرگ‌تر از ۱۰ است؟

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^\circ C$)	درصد لکهٔ باقی‌مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	۳۰	a
صابون بدون آنزیم	نخی	۴۰	b
صابون آنزیم‌دار	نخی	۳۰	۱۰
صابون آنزیم‌دار	نخی	۴۰	c
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	۴۰	d

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۶- کدام موارد زیر دربارهٔ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، درست است؟

الف) قدرت پاک‌کنندگی آن در آب چشمه به طور قابل توجهی بیشتر از آب دریا است.

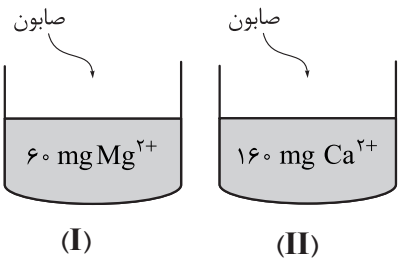
ب) اگر فرمول شیمیایی آن به صورت $C_{۲۰}H_{۲۹}SO_۳Na$ باشد، در ساختار آن (فاقد پیوند سه‌گانه)، ۵ پیوند دوگانه وجود دارد.

پ) خاصیت بازی دارد و با آلاینده‌ها، واکنش شیمیایی می‌دهد.

ت) عملکردی مشابه با صابون دارد و تهیهٔ آن با قیمت مناسب و در مقیاس انبوه امکان‌پذیر است.

۱) ب و ت ۲) الف و پ ۳) ب و پ ۴) الف و ت

۱۹۷- مطابق شکل زیر، به دو نمونه آب که حاوی یون‌های منیزیم و کلسیم هستند، مقدار کافی و یکسانی صابون رنده‌شده $(C_{۱۸}H_{۳۵}O_۲Na)$ اضافه می‌کنیم. پس از هم‌زدن و تشکیل رسوب، نسبت جرم رسوب در ظرف (II) به ظرف (I) به تقریب کدام است؟ $(Ca = ۴۰ , Mg = ۲۴ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$



۱) ۱/۶۴

۲) ۱/۸۴

۳) ۲/۴۴

۴) ۲/۴۸

۱۹۸- درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب چگونه است؟

- **صابون مراغه، خاصیت بازی ندارد و برای موهای معمولی مناسب است.**
- **پاک‌کننده‌های صابونی توانایی پاک‌کردن آلودگی‌هایی که به صورت رسوب روی سطوح گوناگون ته‌نشین شده‌اند را دارند.**
- **با اضافه‌کردن یون فسفات به آب، می‌توان سختی آب را برطرف کرد.**
- **نسبت شمار آنیون به کاتیون و شمار اتم‌های اکسیژن در فرمول شیمیایی، جزء شباهت‌های صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی است.**

۱) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست

۳) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ۴) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست

۱۹۹- تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده برابر ۱۰ است. جرم ۰/۲ مول از صابون مایعی که شمار اتم‌های کربن یکسانی با این پاک‌کننده دارد، چند گرم است؟ (کاتیون و آنیون سازندهٔ صابون مایع، جزء یون‌های چنداتمی هستند و زنجیر هیدروکربنی در آن یک پیوند $C=C$ دارد.)

$(H = ۱ , C = ۱۲ , N = ۱۴ , O = ۱۶ , Na = ۲۳ , K = ۳۹ : g.mol^{-۱})$

۱) ۵۷/۰ ۲) ۵۷/۴ ۳) ۶۱/۲ ۴) ۶۱/۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰۰- نوعی پاک‌کننده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. با توجه به الگوی زیر، کدام مورد درست است؟



۱) برخلاف واکنش تشکیل نمک خوراکی از عنصرهای سازنده، واکنشی گرماگیر است.

۲) X، گاز اکسیژن است که با ایجاد فشار، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.

۳) رنگ کاغذ pH در مخلوط پودر اولیه و آب، با رنگ کاغذ pH در محلول سرکهٔ سفید یکسان است.

۴) اگر فراوردهٔ دیگر واکنش، $NaAl(OH)_4$ باشد، مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش برابر ۱۵ است.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دوم
۰۶ - ۱۴۰۵	۰۶/شهریور/۱۴۰۵

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۶

ویژگی‌های برنامه راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۰۶-۱۴۰۵

۱- دوره دروس پایه دهم
۲- دوره دروس پایه یازدهم
۳- مطالعه بخشی از دروس پایه دوازدهم
۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه / مرحله	اول ۲۳ مرداد	دوم ۶ شهریور	سوم ۲۰ شهریور	چهارم ۳ مهر
دهم	-	✓	✓	✓
یازدهم	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	-	✓	✓	-

- با توجه به موارد فوق دفترچه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۳ قسمت تشکیل شده است.
- هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پنل کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.
- آزمون مرحله دوم (همین دفترچه‌ای که در دست دارید) آغاز پیشروی پایه دهم، یازدهم و دوازدهم است.
- تمامی سرفصل‌های دوازدهم، مجدد از مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoonkheilisabz.com
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه‌دوازدهم ـ مرحله‌دوم ـ ۶شهریور ۱۴۰۵

پایه دهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی ناو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی ـ مصطفی کرمی محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی ـ حمید گلزاری
فیزیک	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر سهند محمدکریم‌نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری‌آثار مریم گلی‌حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	آیدین طهماسقلی‌زاده مدیا عیدی امیر محمودی انزابی سعید محبی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	صدرا عبادی یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمدمهدی کریمیان	محمدتقی جهانیان علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضی دهم

۱ در یک الگوی خطی، جملهٔ هفتم برابر صفر است. جملهٔ دهم این الگو چند برابر جملهٔ پنجم آن است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $-۱/۵$ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box جملهٔ عمومی یک الگوی خطی، $a_n = \alpha n + \beta$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جملهٔ عمومی الگو را $a_n = \alpha n + \beta$ در نظر می‌گیریم. جملهٔ هفتم را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$a_۷ = ۷\alpha + \beta = ۰ \Rightarrow \beta = -۷\alpha$$

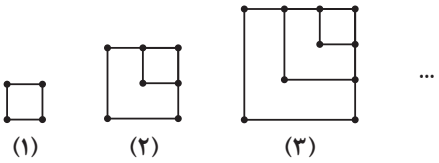
پس $a_n = \alpha(n-۷)$ است.

گام دوم: حالا خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_{۱۰}}{a_۵} = \frac{۳\alpha}{-۲\alpha} = -۱/۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ با توجه به الگوی شکل‌های زیر، شکل چهل‌وپنجم چند نقطه دارد؟



۱) ۱۳۶
۲) ۱۳۷
۳) ۱۳۸
۴) ۱۳۹

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در الگوی a_n، اگر اختلاف جملات متوالی یکسان یا به عبارت دقیق‌تر $a_{n+1} - a_n = c$ باشد که در آن c یک عدد ثابت است، الگو، خطی و جملهٔ عمومی آن $a_n = cn + h$ است، یعنی مقدار اختلاف جملات متوالی، ضریب n در الگوی خطی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هر شکل نسبت به شکل قبلی ۳ رأس بیشتر دارد، بنابراین طبق درس‌باکس، جملهٔ عمومی تعداد رأس‌های شکل nاُم برابر $t_n = 3n + h$ است.

گام دوم: شکل اول ۴ رأس دارد:

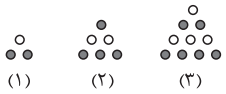
$$\Rightarrow t_1 = 3 + h = 4 \Rightarrow h = 1$$

گام سوم: در نتیجه $t_n = 3n + 1$ است و خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$t_{45} = 3 \times 45 + 1 = 136$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل بیست و پنجم، اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید کدام است؟



۱) ۱۳
۲) ۱۲
۳) ۲۶
۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته **مجموع‌های خاص:**

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲ \\ ۲+۴+۶+\cdots+۲n=n(n+۱) \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل بیست و پنجم شامل ۲۶ ردیف است که ردیف‌های فرد (شروع از بالا) مربوط به دایره‌های سفید و ردیف‌های زوج مربوط به دایره‌های سیاه است.

گام دوم: یعنی تعداد دایره‌های سفید در شکل بیست و پنجم برابر $۱+۳+۵+\cdots+۲۵$ و تعداد دایره‌های سیاه آن نیز برابر $۲+۴+۶+\cdots+۲۶$ است. طبق نکته داریم:

تعداد دایره‌های سفید: $w_{۲۵}=۱۳^۲=۱۶۹$

تعداد دایره‌های سیاه: $b_{۲۵}=۲\times\frac{۱۳\times۱۴}{۲}=۱۸۲$

گام سوم: خواستهٔ سؤال اختلاف $w_{۲۵}$ و $b_{۲۵}$ است که برابر ۱۳ است.

تیزپازی اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید در شکل (۱) برابر ۱، در شکل‌های (۲) و (۳) برابر ۲، در شکل‌های (۴) و (۵) برابر ۳، ... و در نتیجه در شکل‌های (۲۴) و (۲۵) برابر ۱۳ است.

یه‌جور دیگه الگوهای تعداد دایره‌های سفید و سیاه شکل nاُم به صورت زیر هستند:

$$w_n=\begin{cases} (\frac{n+۱}{۲})^۲ & ; \text{ فرد } n \\ \frac{n}{۲}(\frac{n}{۲}+۱) & ; \text{ زوج } n \end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases} \frac{n+۱}{۲}(\frac{n+۱}{۲}+۱) & ; \text{ فرد } n \\ (\frac{n}{۲}+۱)^۲ & ; \text{ زوج } n \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$b_n-w_n=\begin{cases} \frac{n+۱}{۲} & ; \text{ فرد } n \\ \frac{n}{۲}+۱ & ; \text{ زوج } n \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_{۲۵}-w_{۲۵}=\frac{۲۵+۱}{۲}=۱۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ جملات دنبالهٔ $t_n = 3n - 1$ را به صورت زیر دسته‌بندی کرده‌ایم:

$$\{2\},\{5,8\},\{11,14,17\},\dots$$

میانگین اعداد دستهٔ بیستم کدام است؟

۱) ۵۹۹/۵ ۲) ۶۰۰ ۳) ۶۰۰/۵ ۴) ۶۰۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته میانگین n عدد که تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، برابر میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تعداد اعداد هر دسته در دسته‌بندی داده‌شده، برابر شمارهٔ آن دسته است. یعنی تا انتهای دستهٔ نوزدهم، $1+2+3+\dots+19$ جمله از جملات دنبالهٔ t_n مصرف می‌شود.

گام دوم: طبق نکات پاسخ قبلی داریم:

$$1+2+3+\dots+19=\frac{19\times 20}{2}=190$$

یعنی عدد اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ اُمین جملهٔ دنبالهٔ t_n است:

$$t_{191}=3\times 191-1=572$$

به طریق مشابه، عدد آخر دستهٔ بیستم را نیز پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}1+2+3+\dots+20=\frac{20\times 21}{2}=210\\ t_{210}=3\times 210-1=629\end{cases}$$

گام سوم: یعنی دستهٔ بیستم به صورت زیر است:

$$\{572,575,578,\dots,626,629\}$$

که میانگین آن‌ها طبق نکتهٔ سؤال، برابر $\frac{572+629}{2}=600/5$ است.

یه‌جور دیگه دنبالهٔ میانگین اعداد دسته‌ها را می‌نویسیم:

$$2,\frac{13}{2},14,\frac{49}{2},\dots$$

این دنباله، درجه‌دوم است و جملهٔ عمومی آن $\bar{x}_n=\frac{3n^2+1}{2}$ است، پس داریم:

$$\bar{x}_{20}=\frac{3\times 400+1}{2}=600/5$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ دنبالهٔ $k, ۶+k, ۱-۳k, \ldots$ حسابی است. جملهٔ بیستم این دنباله کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۵/۵ ۳) ۵۶ ۴) ۵۶/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

- جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی a_n که قدرنسبت آن برابر d است، به صورت $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ است.
- اگر x، y و z سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، تساوی $x+z=۲y$ برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک ویژگی جملات متوالی دنبالهٔ حسابی مقدار k را حساب می‌کنیم:

$$k+۶+k=۲(۱-۳k) \Rightarrow ۲k+۶=۲-۶k \Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: پس دنبالهٔ حسابی زیر را داریم:

$$-\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}, \frac{۱۱}{۲}, \cdots$$

که قدرنسبت آن $d=\frac{۵}{۲}-(-\frac{۱}{۲})=۳$ است. جملهٔ عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$a_n=-\frac{۱}{۲}+(n-۱)\times ۳ \Rightarrow a_n=\frac{۶n-۷}{۲}$$

گام سوم: مقدار جملهٔ بیستم را پیدا می‌کنیم:

$$a_{۲۰}=\frac{۱۲۰-۷}{۲}=\frac{۱۱۳}{۲}=۵۶/۵$$

کنکور

مقادیر a ، $۲a+۱$ و $a-۵$ به‌ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جملهٔ نخست این دنباله باشد، جملهٔ نهم کدام است؟ (سؤال کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

۱) ۲/۷۵ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۱۲/۲۵ ۴) ۱۴/۷۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ بین دو عدد ۴ و ۱۲۸، نُه واسطهٔ هندسی قرار داده‌ایم، بزرگ‌ترین واسطه چند برابر کوچک‌ترین واسطه است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر بین دو عدد a و b به تعداد n واسطهٔ هندسی قرار دهیم، $n+۲$ عدد حاصل تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=\sqrt[n+۱]{\frac{b}{a}}$ می‌دهند.

اگر a و b هم‌علامت و n فرد باشد، q می‌تواند منفی نیز باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی تشکیل‌شده را به دست می‌آوریم:

$$q=\pm\sqrt[۹+۱]{\frac{۱۲۸}{۴}}=\pm\sqrt[۱۰]{۲^۵}=\pm\sqrt{۲}$$

گام دوم: بزرگ‌ترین واسطه، $M=\frac{۱۲۸}{q}$ و کوچک‌ترین واسطه، $m=۴q$ است و نسبت این دو برابر می‌شود با:

$$\frac{M}{m}=\frac{\frac{۱۲۸}{q}}{۴q}=\frac{۳۲}{q^۲}=\frac{۳۲}{۲}=۱۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ دنبالهٔ $1, x, y, \ldots$ هندسی و دنبالهٔ $x, \frac{5}{2}, 2y-1, \ldots$ حسابی است. حاصل $x+y$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) -1 ۴) -2

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، تساوی $b^2 = ac$ برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق ویژگی جملات متوالی دنبالهٔ هندسی، $x^2 = y$ و طبق ویژگی جملات متوالی دنبالهٔ حسابی، $x + 2y - 1 = 5$ است.

گام دوم: دو معادلهٔ بالا را با هم در نظر می‌گیریم، به معادلهٔ $x + 2x^2 - 1 = 5$ می‌رسیم:

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 6 = (x+2)(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{یا} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

گام سوم: در هر حالت مقدار y و در نتیجه حاصل $x+y$ را حساب می‌کنیم:

- $x = -2 \xrightarrow{y=x^2} y = 4 \Rightarrow x + y = 2$
- $x = \frac{3}{2} \xrightarrow{y=x^2} y = \frac{9}{4} \Rightarrow x + y = \frac{15}{4}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ دنبالهٔ حسابی $a_n : -۱, ۲, \ldots$ مفروض است، اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $k-a_۳ , k+\frac{a_۴}{۴}, k+a_۵, \ldots$ برابر q باشد، مقدار q کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۸}{۷}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_۱ = -۱ \\ d = ۲-(-۱) = ۳ \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_۱ + (n-۱)d} a_n = ۳(n-۱) - ۱ = ۳n - ۴$$

گام دوم: پس:

$$a_۳ = ۳(۳) - ۴ = ۵$$

$$a_۴ = ۳(۴) - ۴ = ۸$$

$$a_۵ = ۳(۵) - ۴ = ۱۱$$

یه‌جور دیگه

البته بعد از این‌که فهمیدیم که قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر ۳ است، می‌توانستیم دنباله را ادامه دهیم:

$$a_n : -۱, ۲, \underset{\downarrow a_۳}{۵}, \underset{\downarrow a_۴}{۸}, \underset{\downarrow a_۵}{۱۱}, ۱۴, \ldots$$

گام سوم: پس $k-۵$، $k+۲$ و $k+۱۱$ باید سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، یعنی باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$(k+۲)^۲ = (k-۵)(k+۱۱)$$

$$k^۲ + ۴k + ۴ = k^۲ + ۶k - ۵۵ \Rightarrow ۲k = ۵۹ \Rightarrow k = \frac{۵۹}{۲}$$

گام چهارم: یعنی $\frac{۴۹}{۲}$، $\frac{۶۳}{۲}$ و $\frac{۸۱}{۲}$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی مورد نظر هستند. قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$q = \frac{\frac{۸۱}{۲}}{\frac{۶۳}{۲}} = \frac{\frac{۶۳}{۲}}{\frac{۴۹}{۲}} = \frac{۹}{۷}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ اگر $\frac{۵\sin x-\cos x}{۲\sin x+\cos x}=۳$ باشد، حاصل $\tan x-\cot x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۷}{۴}$

۲) $-\frac{۱۵}{۴}$

۳) $\frac{۱۵}{۴}$

۴) $\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint طرفین‌وسطین کنین و $\tan x$ رو به دست بیارین.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در تساوی داده‌شده، طرفین‌وسطین می‌کنیم:

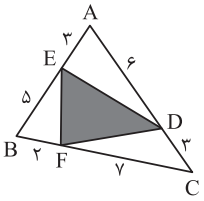
$$۵\sin x-\cos x=۶\sin x+۳\cos x \Rightarrow -\sin x=۴\cos x \Rightarrow \tan x=-۴$$

گام دوم: در نتیجه $\cot x=-\frac{۱}{۴}$ است و داریم:

$$\tan x-\cot x=-۴+\frac{۱}{۴}=-\frac{۱۵}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ در شکل زیر، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث DEF است؟



۱) $\frac{۴۵}{۱۷}$

۲) $\frac{۵۴}{۱۹}$

۳) $\frac{۱۰۸}{۲۹}$

۴) $\frac{۱۰۸}{۴۱}$

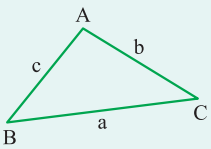
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مساحت مثلث‌های گوشه رو از مساحت مثلث ABC کم کن.

درس Box

کاربرد مثلثات در محاسبهٔ مساحت مثلث:



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا نسبت مساحت‌های مثلث‌های AED، BEF و CDF را به مساحت مثلث ABC حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AE.AD.\sin\hat{A}}{\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin\hat{A}}=\frac{۳\times۶}{۸\times۹}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{S_{BEF}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}BE.BF.\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}AB.BC.\sin\hat{B}}=\frac{۵\times۲}{۸\times۹}=\frac{۵}{۳۶}$$

$$\frac{S_{CDF}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}CD.CF.\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}AC.BC.\sin\hat{C}}=\frac{۳\times۷}{۹\times۹}=\frac{۷}{۲۷}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم نسبت مساحت مثلث DEF را به مساحت مثلث ABC حساب کنیم:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=۱-(\frac{S_{AED}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BEF}}{S_{ABC}}+\frac{S_{CDF}}{S_{ABC}})=۱-(\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۳۶}+\frac{۷}{۲۷})=۱-\frac{۳۵}{۵۴}=\frac{۱۹}{۵۴}$$

پس مساحت مثلث ABC، $\frac{۵۴}{۱۹}$ مساحت مثلث DEF است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ انتهای کمان θ روی دایرهٔ مثلثاتی در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات، نقطهٔ $P(-\frac{۱}{۳},a)$ است. مقدار $\cot\theta$ کدام است؟

فقط $\sin\theta$ مثبت است.

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

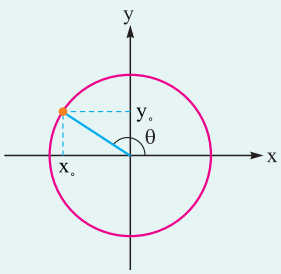
۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

دایرهٔ مثلثاتی: اگر انتهای کمان θ روی دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ باشد، داریم:



$$\begin{cases} x_۰^۲+y_۰^۲=۱ \\ x_۰=\cos\theta, y_۰=\sin\theta \\ \tan\theta=\frac{y_۰}{x_۰}, \cot\theta=\frac{x_۰}{y_۰} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا طبق روابط درس‌باکس داریم:

$$(-\frac{۱}{۳})^۲+a^۲=۱ \Rightarrow a^۲=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹} \Rightarrow a=\pm\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

اما طبق فرض نقطهٔ P در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قرار دارد و عرض آن باید مثبت باشد؛ بنابراین مقدار $a=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ قابل قبول است.

گام دوم: هم‌چنین طبق روابط درس‌باکس، $\cot\theta$ برابر است با:

$$\frac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ اگر $\sin\alpha\cot\alpha=|\cos\alpha|$ و $\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha}}-\cot\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$ باشد، انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی در کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\theta\times\cot\theta=1\\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\\ 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از تساوی اول استفاده می‌کنیم:

$$\sin\alpha\cot\alpha=\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cos\alpha\xrightarrow{\sin\alpha\cot\alpha=|\cos\alpha|}\cos\alpha=|\cos\alpha|$$

یعنی $\cos\alpha$ عددی مثبت است، پس انتهای کمان α می‌تواند در ناحیه‌های اول یا چهارم قرار بگیرد.

گام دوم: از رابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha}}-\cot\alpha=\frac{1}{|\sin\alpha|}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

$$\Rightarrow\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}\Rightarrow\sin\alpha=|\sin\alpha|$$

یعنی $\sin\alpha$ نیز عددی مثبت است، پس انتهای کمان α در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد.

کنکور

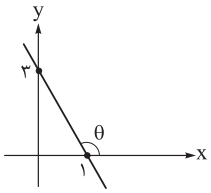
اگر $\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}$ و $-\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

(سؤال ۱۸ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ با توجه به شکل زیر، حاصل عبارت $\sin^۳\theta - \cos^۳\theta$ چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



۱) ۰/۴

۲) ۰/۲۸

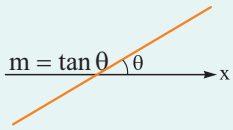
۳) ۰/۳

۴) ۰/۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

رابطهٔ بین شیب خط و مثلثات: شیب هر خط، برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شیب خط برابر -۳ است، پس $\tan\theta = -۳$ است.

گام دوم: انتهای کمان θ روی دایرهٔ مثلثاتی، در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قرار می‌گیرد، بنابراین $\sin\theta$ مثبت و $\cos\theta$ منفی است.

گام سوم: حالا مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\tan\theta=-۳} ۱+\tan^۲\theta = ۱+۹ = \frac{۱}{\cos^۲\theta} \Rightarrow \cos^۲\theta = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\cos\theta<۰} \cos\theta = -\frac{۱}{\sqrt{۱۰}} = -\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\tan\theta=-۳} -۳ = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\sin^۳\theta - \cos^۳\theta = (\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰})^۳ - (-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰})^۳ = \frac{۲۸\times۱۰\sqrt{۱۰}}{۱۰۰۰} = ۰/۲۸\sqrt{۱۰}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ اگر $\tan\theta+\cot\theta=\sqrt{۵}$ باشد، حاصل $\sin^۴\theta+\cos^۲\theta$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا عبارت $\sin^۴\theta+\cos^۲\theta$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sin^۴\theta+\cos^۲\theta=\sin^۴\theta+۱-\sin^۲\theta=۱-\sin^۲\theta\underbrace{(۱-\sin^۲\theta)}_{\cos^۲\theta}$$

$$\Rightarrow \sin^۴\theta+\cos^۲\theta=۱-(\sin\theta\cos\theta)^۲$$

گام دوم: حالا کافی است، طبق نکتهٔ بالا حاصل $\sin\theta\cos\theta$ را حساب کنیم:

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{۵} \Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \sin^۴\theta+\cos^۲\theta=۱-(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^۲=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

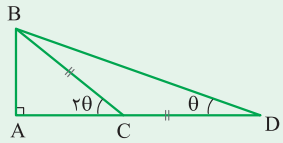
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ اگر α حاده و $\cos 2\alpha = \frac{۳}{۵}$ باشد، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

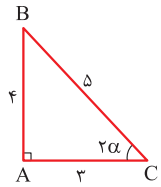
پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته مطابق شکل زیر، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی θ و ۲θ را به هم مرتبط کرد:

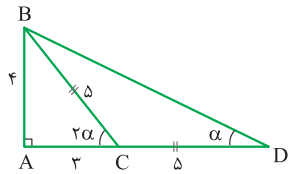


$BC = CD$ است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ ۲α را چنان فرض می‌کنیم که کسینوس آن برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد:



حالا اگر AC را به اندازهٔ BC امتداد دهیم، به زاویهٔ α می‌رسیم:



گام دوم: در شکل بالا $BD = \sqrt{AB^۲ + AD^۲} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$ و در نتیجه $\sin\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{۴}{۴\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دهم

۱۶ **دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند و می‌دانیم فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۲ و از B به فاصلهٔ $x^2 - x$ است. اگر x عددی مثبت باشد، آن‌گاه اختلاف مقادیر قابل قبول x کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

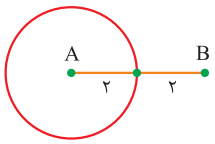
درس Box

مجموعهٔ نقاطی از یک صفحه که از نقطهٔ O واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت R باشند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R قرار دارند.



پاسخ خیلی تشریحی

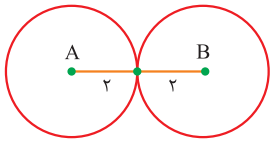
گام اول: همهٔ نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند.



گام دوم: تمام نقاطی که به فاصلهٔ $x^2 - x$ از B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $x^2 - x$ قرار دارند.

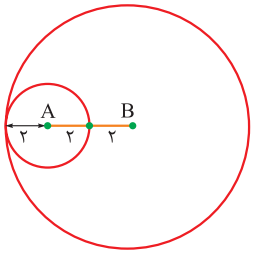
گام سوم: چون گفته شده فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که در شرایط مسئله صدق می‌کند، پس دو دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارند؛ بنابراین دو حالت زیر را داریم:

حالت اول:



$$\Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \xrightarrow{x>0} x = 2$$

حالت دوم:



$$\Rightarrow x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) = 0 \xrightarrow{x>0} x = 3$$

گام چهارم: اختلاف مقادیر x برابر $3 - 2 = 1$ می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

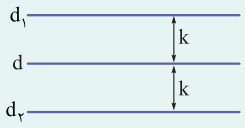
۱۷ **مربعی به طول ضلع $2\sqrt{2}$ مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد، به طوری که فاصلهٔ آن از یکی از قطرهای آن برابر $\sqrt{5}$ باشد؟**

۱) هیچ
۲) ۲
۳) ۴
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۱

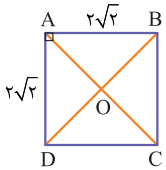
درس Box

مجموعهٔ نقاطی از یک صفحه که از خط d واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت k باشند، دو خط موازی با آن خط هستند که در طرفین آن خط و به فاصلهٔ k از آن قرار گرفته‌اند.



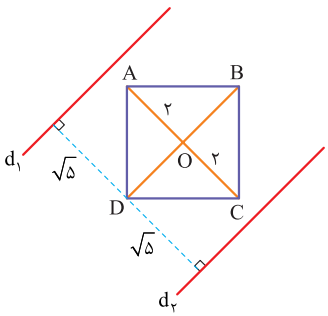
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مربع ABCD به طول ضلع $2\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم. طول قطر مربع می‌شود ۴ (قضیهٔ فیثاغورس در $\overset{\Delta}{ABD}$)، پس در این مربع داریم:



$$AC = BD = 4 \Rightarrow OA = OB = OC = OD = 2$$

گام دوم: می‌دانیم نقاطی از صفحه که از قطر BD به فاصلهٔ $\sqrt{5}$ واحد باشند، روی دو خط d_1 و d_2 موازی با BD و به فاصلهٔ $\sqrt{5}$ واحد از آن قرار دارند. چون $\sqrt{5} > 2$، پس مطابق شکل، هیچ‌کدام از دو خط d_1 و d_2، مربع را قطع نمی‌کنند و در نتیجه نقطه‌ای روی مربع وجود ندارد که از قطر BD به فاصلهٔ $\sqrt{5}$ واحد باشد.



به همین ترتیب، هیچ نقطه‌ای روی محیط مربع وجود ندارد که فاصلهٔ آن از قطر AC برابر با $\sqrt{5}$ باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ در یک مستطیل به اضلاع ۳ و $\sqrt{۶}$ عمودمنصف قطر، یکی از دو ضلع بزرگ‌تر مستطیل را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع فواصل M، از رأس‌های این مستطیل، کدام است؟

۱) $۶+\sqrt{۱۰}$ ۲) ۸

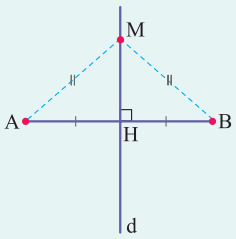
۳) ۹ ۴) $۲(۳+\sqrt{۶})$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط:

۱) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است:



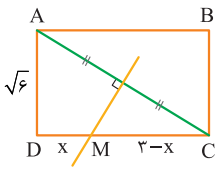
$M \in AB$ عمودمنصف $\Rightarrow MA = MB$

۲) هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد:

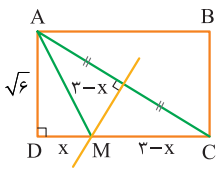
$MA = MB \Rightarrow M \in AB$ عمودمنصف

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون $\sqrt{۶} > ۳$ است، پس طول مستطیل ۳ و عرض آن $\sqrt{۶}$ می‌باشد. در مستطیل، عمودمنصف قطر را رسم می‌کنیم تا طول مستطیل را در M قطع کند. با فرض $DM = x$، MC برابر $۳-x$ است:



گام دوم: چون M روی عمودمنصف پاره‌خط AC است؛ پس $MA = MC = ۳-x$ می‌باشد:

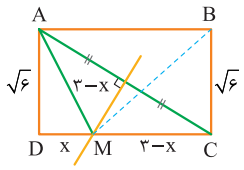


حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADM داریم:

$$(۳-x)^۲ = (\sqrt{۶})^۲ + x^۲ \Rightarrow ۹-۶x+x^۲ = ۶+x^۲ \Rightarrow ۶x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AM = ۳-x = \frac{۵}{۲}$$

گام سوم: به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BCM، داریم:

$$BM = \sqrt{BC^۲ + CM^۲} \Rightarrow BM = \sqrt{۶+\frac{۲۵}{۴}} = \sqrt{\frac{۴۹}{۴}} = \frac{۷}{۲}$$

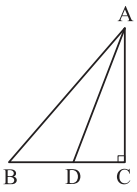


پس:

$$MA + MB + \underbrace{MC + MD}_{CD} = \frac{۵}{۲} + \frac{۷}{۲} + ۳ = ۹$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ $\hat{BAC}$ است. اگر $BD = ۵$ و $AB - AC = ۳$ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟



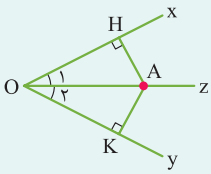
۱) ۵۴
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ویژگی نیمساز یک زاویه:

۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است:



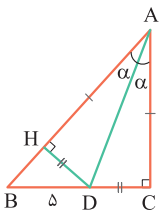
$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow AH = AK$$

۲) هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد:

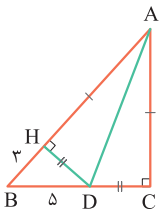
$$AH = AK \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

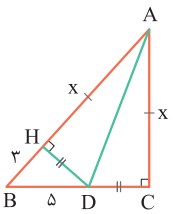
گام اول: چون D روی نیمساز زاویهٔ A می‌باشد، کافی است از D بر ضلع AB عمود DH را رسم کنیم. در این صورت $AC = AH$ و $DC = DH$ می‌باشند:



چون در صورت سؤال گفته شده $AB - AC = ۳$ است و از آن‌جایی که $AC = AH$ می‌باشد؛ پس $AB - AH$، یعنی BH برابر ۳ می‌باشد:



گام دوم: حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHD به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$BD^۲ = DH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۵^۲ = DH^۲ + ۳^۲ \Rightarrow DH = ۴$$

چون $DH = CD$ است؛ پس $CD = ۴$ می‌باشد.

گام سوم: به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، داریم:

$$AB^۲ = BC^۲ + AC^۲ \Rightarrow (x+۳)^۲ = ۹^۲ + x^۲ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ = ۸۱ + x^۲ \Rightarrow ۶x = ۷۲ \Rightarrow x = ۱۲$$

پس:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AC \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۹ = ۵۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

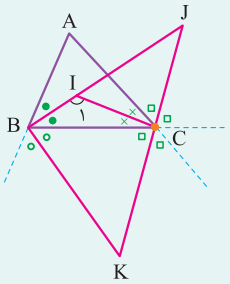
۲۰ در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی B و C در نقطهٔ I و نیمسازهای زاویهٔ داخلی B و زاویهٔ خارجی C در نقطهٔ J یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر $B\hat{I}C = 3I\hat{J}C$، آن‌گاه زاویهٔ بین نیمسازهای خارجی زوایای B و C چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در شکل زیر که I نقطهٔ برخورد نیمسازهای داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$، J نقطهٔ برخورد نیمساز داخلی $\hat{B}$ و نیمساز خارجی $\hat{C}$ و K نقطهٔ برخورد نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ است، داریم:



$$\hat{I}_1 = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad , \quad \hat{J} = \frac{\hat{A}}{2} \quad , \quad \hat{K} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

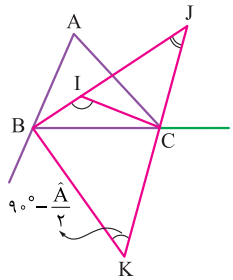
$$I\hat{C}J = I\hat{B}K = 90^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. از رابطهٔ $B\hat{I}C = 3I\hat{J}C$ نتیجه می‌گیریم:

$$(90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}) = 3(\frac{\hat{A}}{2}) \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

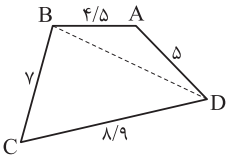
گام دوم: حالا مطابق شکل زیر، زاویهٔ بین نیمسازهای خارجی زوایای B و C برابر است با:



$$B\hat{K}C = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ در چهارضلعی زیر، اگر طول قطر BD عددی طبیعی باشد، اختلاف بین حداقل و حداکثر مقادیر قابل قبول برای آن کدام است؟



۱) ۴

۲) ۵

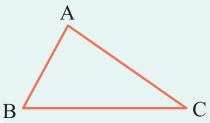
۳) ۶

۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

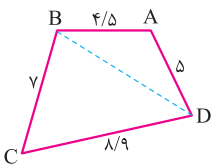
در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر کم‌تر و از اختلاف طول‌های دو ضلع دیگر بیشتر است، مثلاً در شکل زیر:



$$|AB-AC|<BC<AB+AC$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به قضیهٔ نامساوی مثلثی در مثلث ABD داریم:



$$AD-AB<BD<AD+AB$$

$$\Rightarrow 5-4/5<BD<5+4/5 \Rightarrow 0/5<BD<9/5 \quad (1)$$

گام دوم: به طور مشابه طبق قضیهٔ نامساوی مثلثی، در مثلث BCD می‌توان نوشت:

$$CD-BC<BD<CD+BC \Rightarrow 8/9-7<BD<8/9+7 \Rightarrow 1/9<BD<15/9 \quad (2)$$

گام سوم: رابطه‌های (۱) و (۲) باید هم‌زمان برقرار باشند؛ پس اشتراک آن‌ها را در نظر می‌گیریم و در نتیجه داریم:

$$1/9<BD<9/5 \quad (*)$$

گام چهارم: با توجه به (*)، کم‌ترین و بیشترین مقدار طبیعی قابل قبول برای طول BD، به ترتیب برابر است با ۲ و ۹ که اختلاف آن‌ها می‌شود $9-2=7$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ کدام‌یک از احکام کلی زیر، مثال نقض دارد؟

۱) مجموع زوایای خارجی هر مثلث، دو برابر مجموع زوایای داخلی آن است.

۲) چهارضلعی که سه زاویهٔ قائمه دارد، مستطیل است.

۳) نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های یک مثلث درون یا بیرون آن مثلث واقع است.

۴) طول ارتفاع وارد بر هر ضلع یک مثلث، حداکثر برابر با طول میانهٔ وارد بر آن ضلع است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

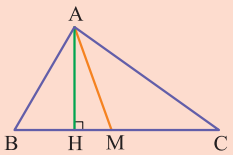
پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینه‌ها را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): مجموع زوایای داخلی و خارجی هر مثلث به ترتیب 180° و 360° است، پس این حکم کلی درست است.

گزینهٔ (۲): مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° است، پس در صورتی که اندازهٔ سه‌تا از زوایا 90° باشد، زاویهٔ چهارم آن هم 90° می‌شود و در این صورت چهارضلعی مستطیل است، پس این حکم کلی درست است.

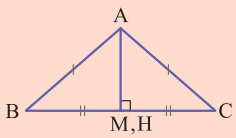
گزینهٔ (۳): در مثلث قائم‌الزاویه، محل تلاقی ارتفاع‌ها، رأس قائمه، یعنی روی محیط مثلث است؛ پس این حکم کلی درست نیست.

گزینهٔ (۴): به شکل زیر دقت کنید. اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آن‌گاه در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM داریم:



$AM > AH$

اما اگر $AB = AC$، آن‌گاه $AM = AH$، پس همواره داریم $AH \leq AM$؛ یعنی این حکم کلی درست است.



$AM = AH$

کنکور **برای کدام گزاره، می‌توان مثال نقض ارائه کرد؟** *(سؤال ۲۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

۱) هر چهارضلعی که قطرها یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

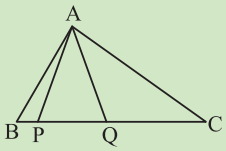
۲) اندازهٔ میانه‌های وارد بر اضلاع مساوی در هر مثلث، با هم برابرند.

۳) هر چهارضلعی با قطرهای برابر و عمود بر هم، مربع است.

۴) نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ در شکل زیر اگر $۵BP = ۳PQ = ۲QC$، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ABQ به مساحت مثلث ACP کدام است؟

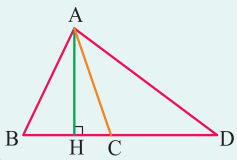


۱) ۰/۴۸
۲) ۰/۵۴
۳) ۰/۵۸
۴) ۰/۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

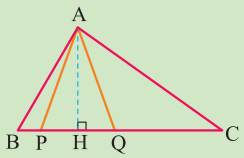
اگر دو مثلث، دارای یک ارتفاع مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک، مثلاً در شکل زیر، داریم:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{CD} \quad , \quad \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از $۵BP = ۳PQ = ۲QC$ نتیجه می‌گیریم:



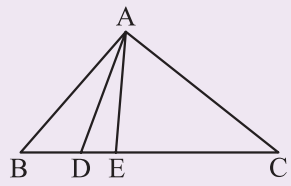
$$\frac{۵BP}{۳۰} = \frac{۳PQ}{۳۰} = \frac{۲QC}{۳۰} \Rightarrow \frac{BP}{۶} = \frac{PQ}{۱۰} = \frac{QC}{۱۵} = x$$
$$\Rightarrow BP = ۶x \ , \ PQ = ۱۰x \ , \ QC = ۱۵x$$

گام دوم: با توجه به درس‌باکس، داریم:

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{ACP}} = \frac{BQ}{CP} = \frac{۶x + ۱۰x}{۱۰x + ۱۵x} = \frac{۱۶}{۲۵} \times \frac{۴}{۴} = ۰/۶۴$$

کتاب درسی

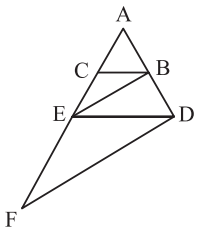
در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



(هندسه (۱) ـ تمرین ۳ صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ در شکل زیر $DE \parallel BC$، $DF \parallel BE$، $AC = ۲$ و $EF = ۳$ است. طول پاره‌خط CE کدام است؟



۱) $\sqrt{۶}$

۲) $\frac{۹}{۵}$

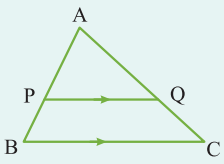
۳) $\sqrt{۷}-۱$

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در شکل زیر دو نقطهٔ P و Q را به ترتیب روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که $PQ \parallel BC$، در این صورت:

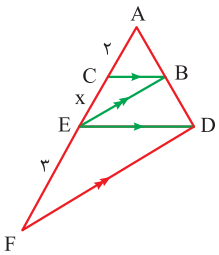


$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$ (قضیهٔ تالس)

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$ (تعمیم قضیهٔ تالس)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنید طول پاره‌خط CE برابر x باشد:



قضیهٔ تالس را با توجه به پاره‌خط‌های موازی در مثلث‌های ADE و ADF می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ADE} : BC \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD} \\ \overset{\Delta}{ADF} : BE \parallel DF \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AE}{EF} \qquad (*)$$

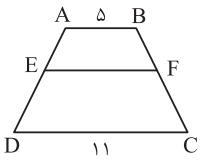
گام دوم: اندازهٔ پاره‌خط‌ها را در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۲}{x} = \frac{۲+x}{۳} \Rightarrow ۲x + x^۲ = ۶ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۷ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱ = \sqrt{۷} \Rightarrow x = \sqrt{۷}-۱ \\ x+۱ = -\sqrt{۷} \Rightarrow x = -\sqrt{۷}-۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ در شکل زیر، EF موازی قاعده‌های ذوزنقه است. اگر $CF = 2BF$، آن‌گاه نسبت مساحت بزرگ‌ترین ذوزنقه، به مساحت کوچک‌ترین ذوزنقه کدام است؟



۱) ۴ / ۴

۲) ۳

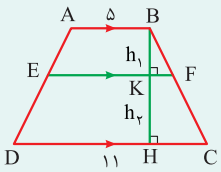
۳) ۴ / ۵

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در شکل زیر، EF با قاعده‌های ذوزنقهٔ ABCD موازی است، داریم:



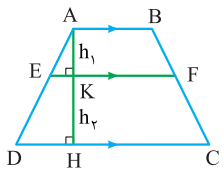
۱) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

۲) $\frac{AE}{ED} = \frac{BK}{KH}$

۳) $\frac{AE}{ED} = \frac{EF - AB}{CD - EF}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به درس‌باکس داریم:



$$\frac{BF}{FC} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{EF - AB}{CD - EF} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EF - 5}{11 - EF} \Rightarrow 11 - EF = 2EF - 10 \Rightarrow EF = 7$$

گام دوم: نسبت مساحت ذوزنقه‌های کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{\frac{1}{2}(5+7)\times h_1}{\frac{1}{2}(11+7)\times h_2} \Rightarrow \frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{12}{18} \times \frac{\frac{1}{2}h_1}{h_2} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گام سوم: از $\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{1}{3}$ نتیجه می‌گیریم:

$$S_{ABFE} = S \ , \ S_{EFCD} = 3S \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{ABFE}} = \frac{S + 3S}{S} = 4$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دهم

۲۶ در کدام‌یک از موارد زیر، تعداد یکاهای اصلی SI بیشتر است؟

۱) ثانیه، کلوین، گرم، پاسکال
۲) متر، مول، کولن، درجهٔ سلسیوس
۳) کیلوگرم، کندلا، ژول، کیلومتر
۴) آمپر، درجهٔ سلسیوس، مول، کیلوگرم

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مجمع عمومی اوزان و مقیاس‌ها، هفت کمیت را به عنوان کمیت‌های اصلی انتخاب کرده است. کمیت‌هایی که یکای آن‌ها برحسب یکاهای اصلی بیان می‌شوند، کمیت‌های فرعی هستند. در جدول زیر، ۷ کمیت اصلی و یکای آن‌ها و در جدول بعدی، چند نمونه کمیت فرعی آمده است.

کمیت‌های اصلی و یکاهای اصلی دستگاه بین‌المللی (SI):

کمیت	نام یکا	نماد یکا
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
زمان	ثانیه	s
دما	کِلوین	K
مقدار ماده	مُول	mol
جریان الکتریکی	آمپر	A
شدت روشنایی	کندلا (شمع)	cd

چند مثال از یکاهای فرعی دستگاه بین‌المللی (SI):

کمیت	نام یکا	یکای فرعی بر حسب یکاهای اصلی
تندی و سرعت	متر بر ثانیه (m/s)	m/s
شتاب	متر بر مربع ثانیه (m/s^2)	m/s^2
نیرو	نیوتون (N)	$\frac{kg.m}{s^2}$
فشار	پاسکال (Pa)	$\frac{kg}{m.s^2}$
انرژی	ژول (J)	$\frac{kg.m^2}{s^2}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): دو یکای ثانیه و کلوین، یکای اصلی SI هستند. یکای اصلی جرم، کیلوگرم است و پاسکال، یکایی فرعی است.

گزینهٔ (۲): متر و مول، یکای اصلی SI هستند. یکای اصلی دما، کلوین و کولن، یکایی فرعی است.

گزینهٔ (۳): کیلوگرم و کندلا یکای اصلی SI هستند، اما ژول و کیلومتر یکای اصلی نیستند.

گزینهٔ (۴): به‌جز درجهٔ سلسیوس، سه یکای دیگر اصلی هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ یکای کدام‌یک از کمیت‌های زیر برحسب یکاهای اصلی $\frac{kg}{m.s^2}$ است؟

۱) نیرو
۲) انرژی
۳) فشار
۴) توان

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در تساوی کمیت‌های فیزیکی، یکای دو طرف باید یکسان باشد، هم‌چنین یکاهای یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق کنیم. مثلاً در رابطهٔ $A = B + CD$، اگر A از جنس شتاب با یکای m/s^2 باشد، B هم باید از جنس کمیت شتاب باشد، پس یکای آن m/s^2 است و یکای CD هم باید برابر m/s^2 باشد، پس اگر C از جنس تندی با یکای m/s باشد، D باید از جنس عکس زمان با یکای $\frac{1}{s}$ باشد.

$$[A] = [B] + [C] \times [D]$$

نکته

وقتی می‌خواهیم یکای فرعی یک کمیت فیزیکی را در SI نشان دهیم، برای سادگی در نوشتار، می‌توانیم نماد آن کمیت را داخل یک کروشه قرار دهیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} [A] = [B] \Rightarrow [B] = m/s^2 \\ [A] = [C] \times [D] \Rightarrow m/s^2 = m/s \times [D] \Rightarrow [D] = \frac{1}{s} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

یکای کمیت‌های هر گزینه را برحسب یکاهای اصلی می‌نویسیم:

(۱) گزینهٔ: $F = ma \Rightarrow [F] = [m][a] = \frac{kg.m}{s^2}$ ×

(۲) گزینهٔ: $K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [K] = [m][v^2] = kg \times (\frac{m}{s})^2 = \frac{kg.m^2}{s^2}$ ×

(۳) گزینهٔ: $P = \frac{F}{A} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\frac{kg.m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m.s^2}$ ✓

(۴) گزینهٔ: $P = \frac{U}{t} \Rightarrow [P] = \frac{[U]}{[t]} = \frac{\frac{kg.m^2}{s^2}}{s} = \frac{kg.m^2}{s^3}$ ×

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ نام وسیلهٔ اندازه‌گیری شکل زیر چیست و دقت اندازه‌گیری این وسیله در SI کدام است؟



۱) کولیس، 10^{-5}

۲) کولیس، 10^{-3}

۳) ریزسنج، 10^{-5}

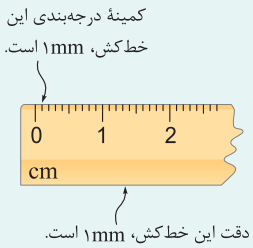
۴) ریزسنج، 10^{-3}

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) یکی از عوامل مهم در دقت اندازه‌گیری، دقت و حساسیت وسیلهٔ اندازه‌گیری است.

- دقت هر ابزار اندازه‌گیری مدرج، برابر با کمینهٔ درجه‌بندی آن ابزار است.

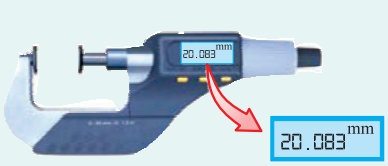


- دقت اندازه‌گیری در ابزارهای رقمی (دیجیتال)، برابر یک واحد از آخرین رقمی است که آن ابزار می‌خواند.



دقت این دماسنج، $0/1\ ^{\circ}C$ است.

۲) در بسیاری از کارگاه‌های صنعتی، اندازه‌گیری طول با ابزارهای دقیق‌تر از خط‌کش میلی‌متری انجام می‌شود، این ابزارها کولیس و ریزسنج نام دارند که به دو صورت مدرج و رقمی ساخته می‌شوند. شکل‌های (الف) و (ب) به ترتیب یک ریزسنج رقمی و یک کولیس رقمی را نشان می‌دهند.



(الف)



(ب)

۳) پیشوندهای یکاها و نماد آن‌ها را در جدول زیر می‌بینید. از ردیف چهارم به بعد آن‌ها را حتماً به خاطر بسپارید که از این‌جا به بعد از آن‌ها خیلی استفاده می‌کنیم.

پیشوندهای یکاها

ضریب	پیشوند	نماد	ضریب	پیشوند	نماد
10^{24}	یوتا	Y	10^{-24}	یوکتو	y
10^{21}	زِتا	Z	10^{-21}	زِپتو	z
10^{18}	اِگزا	E	10^{-18}	آتو	a
10^{15}	پتا	P	10^{-15}	فِمتو	f
10^{12}	تِرا	T	10^{-12}	پیکو	p
10^{9}	گیگا (جیگا)	G	10^{-9}	نانو	n
10^{6}	مِگا	M	10^{-6}	میکرو	μ
10^{3}	کیلو	k	10^{-3}	میلی	m
10^{2}	هِکتو	h	10^{-2}	سانتی	c
10^{1}	دِکا	da	10^{-1}	دِسی	d

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شکل، یک کولیس رقمی را نشان می‌دهد و دقت آن براساس آخرین رقمی که بیان می‌کند، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{دقت اندازه‌گیری: } ۰/۰۱\,\text{mm} \xrightarrow{\text{در SI}} \text{دقت} = ۱۰^{-۲}\,\text{mm} \times \frac{۱۰^{-۳}\,\text{m}}{۱\,\text{mm}} = ۱۰^{-۵}\,\text{m}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ **ارتفاع هواپیمایی برابر ۴۰۰۰۰ پا (فوت) است. این مقدار برحسب کیلومتر برابر کدام است؟ (هر فوت معادل ۱۲ اینچ و هر اینچ برابر ۲/۵ cm است.)**

۱) ۱/۲
۲) ۱/۹۲
۳) ۱۲
۴) ۱۹/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint *فقط کافیه از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده کنی.*

درس Box **روش تبدیل زنجیره‌ای:** برای تبدیل یکای یک کمیت به یکاهای دیگر، از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم، به این صورت که ابتدا تساوی بین دو یکا را که از یک نوع هستند، می‌نویسیم، مثلاً:

$$1\,cm = 10^{-2}\,m$$

کسر تبدیل حاصل از تساوی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1\,cm}{10^{-2}\,m} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{10^{-2}\,m}{1\,cm} = 1$$

برای تبدیل یکاها، باید کسری را انتخاب کنیم که پس از ساده‌شدن به یکای مورد نظر سؤال برسیم، مثلاً برای نوشتن تندی $6\ km/s$ برحسب m/s داریم:

$$6\,km/s = 6\,\frac{km}{s} \times \frac{10^{3}\,m}{1\,km} = 6\times10^{3}\,m/s$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$\text{ارتفاع هواپیما} = 40000\ \text{فوت} \times \frac{12\ \text{اینچ}}{1\ \text{فوت}} \times \frac{2/5\,cm}{1\ \text{اینچ}} \times \frac{10^{-2}\,m}{1\,cm} \times \frac{1\,km}{10^{3}\,m} = 12\,km$$

کتاب درسی **دستگاه بریتانیایی یکاها، دستگاهی است که در برخی از کشورها مانند آمریکا و انگلستان هم‌چنان استفاده می‌شود. یکای اصلی طول در این دستگاه پا (فُوت) و یکای کوچک‌تر آن اینچ است، به طوری که $1\,ft = 12\,in$ است. ارتفاع هواپیمایی را که در فاصلهٔ ۳۰۰۰۰ پا از سطح آزاد دریاها در حال پرواز است، برحسب متر به دست آورید؟ هر اینچ ۲/۵۴ سانتی‌متر است.** *(فیزیک (۱) ـ سؤال ۱۱ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ گیاهی در مدت ۲۵ شبانه‌روز، ۲/۷ m رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه چند میکرومتر بر دقیقه است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تغییر هر کمیت نسبت به زمان را آهنگ آن کمیت می‌گویند، یعنی آهنگ تغییر کمیت A به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{آهنگ تغییر کمیت A} = \frac{\text{تغییر کمیت A}}{\text{تغییر زمان}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

برای مثال، آهنگ تغییر حجم برابر است با:

$$\text{آهنگ تغییر حجم} = \frac{\text{تغییر حجم}}{\text{مدت‌زمان تغییر حجم}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

آهنگ رشد گیاه طبق اطلاعات سؤال برابر است با:

$$\text{آهنگ رشد گیاه} = \frac{۲/۷\ \text{m}}{\text{شبانه‌روز } ۲۵}$$

خواستهٔ سؤال، آهنگ رشد گیاه برحسب میکرومتر بر دقیقه است؛ از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$\text{آهنگ رشد گیاه} = \frac{۲/۷\ \text{m}}{۲۵\ \text{day}} \times \frac{۱\ \mu\text{m}}{۱۰^{-۶}\ \text{m}} \times \frac{۱\ \text{day}}{۲۴\ \text{h}} \times \frac{۱\ \text{h}}{۶۰\ \text{min}} = ۷۵\ \mu\text{m} / \text{min}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ **جرم جسمی ۸ مرتبه اندازه‌گیری شده که حاصل این اندازه‌گیری‌ها برحسب گرم مقادیر زیر است. نتیجهٔ اندازه‌گیری جرم این جسم برحسب گرم با کدام مقدار زیر باید گزارش شود؟**

۳۹/۰ , ۴۱/۵ , ۲۶/۰ , ۴۳/۰ , ۴۲/۵ , ۵۱/۰ , ۴۰/۵ , ۳۹/۵

۱) ۴۰/۴ ۲) ۴۱/۰

۳) ۴۱/۵ ۴) ۴۲/۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

عوامل مؤثر در دقت اندازه‌گیری:

۱) دقت وسیلهٔ اندازه‌گیری: کم‌ترین مقداری که با آن وسیله می‌توانیم اندازه بگیریم.

۲) مهارت کسی که اندازه می‌گیرد.

۳) تعداد دفعات اندازه‌گیری: برای دقت بیشتر در اندازه‌گیری، آزمایش را چند بار تکرار می‌کنیم، سپس داده‌های پرت را کنار گذاشته و از سایر داده‌ها میانگین می‌گیریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

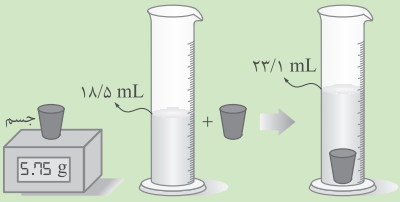
۲۶/۰ , ۳۹/۰ , ۳۹/۵ , ۴۰/۵ , ۴۱/۵ , ۴۲/۵ , ۴۳/۰ , ۵۱/۰

گام دوم: ۲۶/۰ و ۵۱/۰ داده‌های پرت هستند و از محاسبات خارج می‌شوند، زیرا با سایر داده‌ها، اختلاف قابل توجهی دارند، میانگین سایر داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{میانگین گزارش شده} = \frac{۳۹/۰+۳۹/۵+۴۰/۵+۴۱/۵+۴۲/۵+۴۳/۰}{۶} = \frac{۲۴۶/۰}{۶} = ۴۱/۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ برای تعیین چگالی یک جسم جامد، ابتدا جرم و حجم آن را مطابق شکل زیر اندازه‌گیری می‌کنیم. چگالی این جسم در SI برابر کدام است؟ (جسم در آب حل نمی‌شود.)



۱) ۰/۸
۲) ۱/۲۵
۳) ۸۰۰
۴) ۱۲۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا به کمک شکل، جرم و حجم استوانهٔ توخالی را به دست آورید، سپس با جای‌گذاری آن‌ها در رابطهٔ چگالی $(\rho = \frac{m}{V})$، چگالی را برحسب یکای SI به دست آورید.

درس Box چگالی، نسبت جرم به حجم یک ماده است؛ یکای آن در SI، کیلوگرم بر مترمکعب (kg/m^3) و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{m \to (kg)\ \text{جرم}}{V \to (m^3)\ \text{حجم}} \downarrow (kg/m^3)\ \text{چگالی}$$

یکی از یکاهای متداول چگالی g/cm^3 است که برای تبدیل آن به یکاهای kg/m^3 و $\frac{g}{L}$ (و برعکس) به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{g}{cm^3} \xrightarrow{\times 10^3} \frac{kg}{m^3} = \frac{g}{L} \quad (\xrightarrow{\times 10^{-3}} \frac{g}{cm^3})$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق شکل، جرم جسم جامد، برابر با ۵/۷۵ g است. حجم آن هم برابر با حجم مایع جابه‌جا شده است، پس:

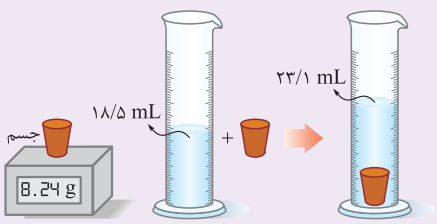
$$V_{\text{جسم}} = ۲۳/۱ - ۱۸/۵ = ۴/۶\ mL$$

گام دوم: خواستهٔ سؤال، محاسبهٔ چگالی جسم در SI است، پس:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{۵/۷۵}{۴/۶} = ۱/۲۵\ g/mL \times \frac{۱\ mL}{۱۰^{-۳}\ L} = ۱۲۵۰\ g/L = ۱۲۵۰\ kg/m^3$$

گول نخوری *اگه به یکا دقت نکنی و یکا رو برحسب SI ننویسی، توی دام گزینهٔ (۲) می‌افتی.*

کتاب درسی **برای تعیین چگالی یک جسم جامد، ابتدا جرم و حجم آن را مطابق شکل زیر پیدا کرده‌ایم. با توجه به داده‌های روی شکل، چگالی جسم را برحسب g/L و g/cm^3 حساب کنید.** *(فیزیک (۱) ـ سؤال ۱۸ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)*



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

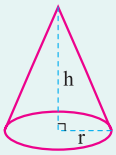
۳۳ شعاع قاعدهٔ یک مخروط همگن و توپر برابر ۱۰ cm و ارتفاع آن ۲۰ cm است. اگر چگالی مادهٔ سازندهٔ این مخروط $۵\ g/cm^۳$ باشد، جرم آن برابر چند کیلوگرم است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۱۰ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

یادآوری محاسبهٔ حجم مخروط:



$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

V: حجم $(m^۳)$

r: شعاع قاعده (m)

h: ارتفاع (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا حجم مخروط را محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰)^۲(۲۰) = \frac{۲۰۰۰\pi}{۳}\ cm^۳$$

گام دوم: با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ چگالی، جرم را برحسب گرم به دست آورده و در نهایت به کیلوگرم تبدیل می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = ۵ \times \frac{۲۰۰۰\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳} \times ۱۰^۴\ g \xrightarrow{\pi=۳} m = ۱۰^۴\ g \times \frac{۱\ kg}{۱۰^۳\ g} = ۱۰\ kg$$

کنکور

شعاع قاعدهٔ یک مخروط توپر برابر ۱۰ cm و ارتفاع آن ۲۰ cm است. اگر جرم این مخروط ۵/۴ kg باشد، چگالی مخروط در SI چه‌قدر است؟ $(\pi = ۳)$ *(سؤال ۷۲ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) ۲۷۰۰ ۲) ۸۱۰۰

۳) ۲/۷ ۴) ۸/۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ در یک قطعه جواهر به حجم $۳/۵\ cm^۳$، طلا و نقره به کار رفته است. اگر جرم آن $۴۸/۵$ گرم باشد، طلای به‌کاررفته در قطعه چند گرم است؟ ($\rho_{طلا}=۱۹\ g/cm^۳$ و $\rho_{نقره}=۱۰\ g/cm^۳$)

۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) $۲۸/۵$
۴) $۲۹/۵$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ جواهر از طلا و نقره ساخته شده، پس با استفاده از جرم کل و چگالی طلا و نقره، جرم طلای به‌کاررفته را به دست می‌آوریم:

$$m_{جواهر}=m_{طلا}+m_{نقره}\Rightarrow ۴۸/۵=m_{طلا}+m_{نقره}\Rightarrow m_{نقره}=۴۸/۵-m_{طلا}\quad (۱)$$

$$V_{جواهر}=V_{طلا}+V_{نقره}\xrightarrow{\rho=\frac{m}{V}}V_{جواهر}=\frac{m_{طلا}}{\rho_{طلا}}+\frac{m_{نقره}}{\rho_{نقره}}\xrightarrow{(۱)}V_{جواهر}=\frac{m_{طلا}}{\rho_{طلا}}+\frac{(۴۸/۵-m_{طلا})}{\rho_{نقره}}$$

$$\Rightarrow ۳/۵=\frac{m_{طلا}}{۱۹}+\frac{۴۸/۵-m_{طلا}}{۱۰}=\frac{۱۰m_{طلا}+۹۲۱/۵-۱۹m_{طلا}}{۱۹۰}\Rightarrow ۶۶۵=۹۲۱/۵-۹\,m_{طلا}$$

$$\Rightarrow m_{طلا}=۲۸/۵\ g$$

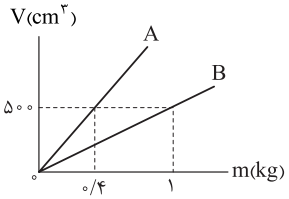
کنکور

در یک قطعه جواهر به حجم $۵\ cm^۳$، طلا و نقره به کار رفته است. اگر جرم آن ۶۸ گرم باشد، نقرهٔ به‌کاررفته در قطعه چند گرم است؟ ($\rho_{طلا}=۱۹\ g/cm^۳$ و $\rho_{نقره}=۱۰\ g/cm^۳$) (سؤال ۶۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ نمودار حجم برحسب جرم دو مایع A و B به شکل زیر است. اگر جرم یکسانی از این دو مایع مخلوط شوند، چگالی مخلوط حاصل چند کیلوگرم بر لیتر است؟



۱) $\frac{۷}{۸}$

۲) $\frac{۸}{۷}$

۳) $\frac{۷۰۰۰}{۸}$

۴) $\frac{۸۰۰۰}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

چگالی مخلوط: اگر دو یا چند ماده را با هم مخلوط کنیم، چگالی مخلوط حاصل از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود: (در صورت تغییرنکردن حجم)

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_۱ + m_۲ + \dots}{V_۱ + V_۲ + \dots}$$

- اگر جرم و چگالی، جزء داده‌ها یا خواسته‌های سؤال باشد:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_۱ + m_۲ + \dots}{\frac{m_۱}{\rho_۱} + \frac{m_۲}{\rho_۲} + \dots}$$

- اگر حجم و چگالی، جزء داده‌ها یا خواسته‌های سؤال باشد:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_۱V_۱ + \rho_۲V_۲ + \dots}{V_۱ + V_۲ + \dots}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با کمک رابطهٔ چگالی مخلوط داریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} = \frac{m_A + m_B}{\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_B}{\rho_B}} \xrightarrow{m_A = m_B} \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{۲}{\frac{۱}{\rho_A} + \frac{۱}{\rho_B}}$$

طبق رابطهٔ بالا، به چگالی دو مایع نیاز داریم، پس:

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \rho_A = \frac{۰/۴}{۵۰۰\times۱۰^{-۳}} = \frac{۴}{۵}\ \text{kg/L}$$

$$\rho_B = \frac{m_B}{V_B} \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \rho_B = \frac{۱}{۵۰۰\times۱۰^{-۳}} = ۲\ \text{kg/L}$$

حالا داده‌ها را در رابطهٔ چگالی به‌دست‌آمده قرار می‌دهیم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{۲}{\frac{۱}{\rho_A} + \frac{۱}{\rho_B}} = \frac{۲}{\frac{۱}{\frac{۴}{۵}} + \frac{۱}{۲}} = \frac{۸}{۷}\ \text{kg/L}$$

گول نخوری ✘ *اگه خواست به یکای خواسته‌شده در صورت سؤال نباشه، توی دام گزینهٔ (۴) می‌افتی.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ چگالی سرب، $\frac{۳}{۲}$ برابر چگالی آهن است. اگر شعاع داخلی و خارجی کرهٔ توخالی سربی **A** به ترتیب برابر **۲a** و **۴a** و شعاع کرهٔ آهنی توپر **B** برابر **۳a** باشد، جرم کرهٔ **A** چند برابر جرم کرهٔ **B** است؟

۱) $\frac{۲۸}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۲۸}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

حجم کره‌ها را به دست آورید و سپس به کمک رابطهٔ $\rho_A = \frac{۳}{۲}\rho_B \Rightarrow \frac{m_A}{V_A} = \frac{۳}{۲}\frac{m_B}{V_B}$، نسبت جرم‌ها را به دست آورید.

درس Box

۱) حجم کرهٔ توپر از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ (حجم: $m^۳$، شعاع کره: m)

۲) حجم کرهٔ توخالی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$V = \frac{۴}{۳}\pi(r^۳ - r'^۳)$ (شعاع خارجی، شعاع داخلی)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا حجم کرهٔ توخالی A و کرهٔ توپر B را محاسبه می‌کنیم:

$$V_A = \frac{۴}{۳}\pi(r^۳_{\text{خارجی}} - r^۳_{\text{داخلی}}) = \frac{۴}{۳}\pi(۶۴a^۳ - ۸a^۳) = \frac{۴\times ۵۶}{۳}\pi a^۳$$

$$V_B = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۳a)^۳ = ۳۶\pi a^۳$$

گام دوم: از نسبت چگالی‌ها کمک می‌گیریم تا نسبت جرم‌ها را به دست آوریم:

$$\rho_A = \frac{۳}{۲}\rho_B \Rightarrow \frac{m_A}{V_A} = \frac{۳}{۲}\times\frac{m_B}{V_B} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{۳}{۲}\times\frac{V_A}{V_B} = \frac{۳}{۲}\times\frac{\frac{۴\times ۵۶}{۳}\pi a^۳}{۳۶\pi a^۳} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{۴\times ۵۶}{۲\times ۳۶} = \frac{۲۸}{۹}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) شیشه نوعی آمورف است و از سردکردن آهستهٔ مایع به وجود می‌آید.

۲) عموماً فاصلهٔ بین ذرات سازندهٔ مایع بیشتر از فاصلهٔ بین ذرات سازندهٔ جامد است.

۳) سرعت پدیدهٔ پخش در گازها از سرعت پدیدهٔ پخش در مایع‌ها بیشتر است.

۴) حالت ماده، تنها به چگونگی حرکت ذره‌های سازندهٔ آن بستگی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینه‌ها را تک‌به‌تک بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): نادرست است؛ در اثر سردکردن سریع مایع، جامد بی‌شکل (آمورف) به دست می‌آید که ذرات آن در طرح‌های نامنظمی کنار هم قرار دارند، مثل شیشه.

گزینهٔ (۲): نادرست است؛ فاصلهٔ ذرات سازندهٔ جامد و مایع تقریباً یکسان و در حدود یک آنگستروم است.

گزینهٔ (۳): درست است؛ پدیدهٔ پخش در مایع‌ها کندتر از گازها رخ می‌دهد، زیرا تندی میانگین مولکول‌های مایع، بسیار کم‌تر از گازهاست.

گزینهٔ (۴): نادرست است؛ ذره‌های سازندهٔ مواد همواره در حرکت‌اند و به یکدیگر نیرو وارد می‌کند، بنابراین حالت ماده به چگونگی حرکت این ذره‌ها و اندازهٔ نیروی بین آن‌ها بستگی دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ وضعیت مایعی که یک لولهٔ مویین شیشه‌ای به طور قائم در آن فرورفته، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این مایع درست است؟



الف) نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، بزرگ‌تر است.

ب) نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، کوچک‌تر است.

پ) مایع، شیشه را تر می‌کند.

ت) مایع، شیشه را تر نمی‌کند.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اثر مویینگی:

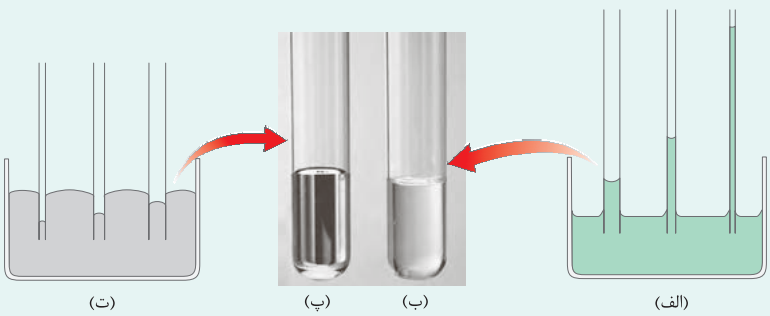
لوله‌هایی که قطر داخلی آن‌ها در حدود یک‌دهم میلی‌متر باشد، معمولاً لولهٔ مویین نامیده می‌شوند. مایعات درون لولهٔ مویین بر اثر اختلاف نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و سطح با نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع، رفتار خاصی از خود نشان می‌دهند:

الف) رفتار آب در لولهٔ مویین:

اگر چند لولهٔ مویین شیشه‌ای و تمیز را وارد یک ظرف آب کنیم، آب در لوله‌های مویین بالا می‌رود، ارتفاع آب در لولهٔ مویین بالاتر از سطح آب داخل ظرف است و سطح آب در داخل لوله فرورفته ( ) است (اصطلاحاً می‌گوییم آب شیشه را تر می‌کند.)، هم‌چنین هر چه‌قدر قطر لولهٔ مویین کم‌تر باشد، ارتفاع ستون آب در آن بیشتر می‌شود.

ب) رفتار جیوه در لولهٔ مویین:

اگر همین آزمایش را با جیوه انجام دهیم، ارتفاع جیوه در لولهٔ مویین پایین‌تر از سطح جیوهٔ داخل ظرف است، سطح جیوه در داخل لوله برآمده ( ) است (اصطلاحاً می‌گوییم جیوه شیشه را تر نمی‌کند.)، هر چه‌قدر قطر لولهٔ مویین کم‌تر باشد، ارتفاع ستون جیوه کم‌تر می‌شود.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

سطح مایع در لوله به صورت برآمده است، پس نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، بزرگ‌تر است. هم‌چنین مایع سطح شیشه را تر نمی‌کند (حالت قرارگرفتن مایع در لولهٔ مویین مشابه حالت قرارگرفتن جیوه است).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

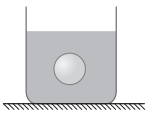
۳۹ در شکل زیر، کره‌ای به شعاع $20\ cm$ درون شاره‌ای به چگالی $1/5\ g/cm^3$ غوطه‌ور و در حال تعادل است. اختلاف فشار بین بالاترین و پایین‌ترین نقطهٔ کره چند کیلوپاسکال است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۳۰۰۰

۴) ۶۰۰۰



پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

فشار به صورت نسبت اندازهٔ نیروی عمودی وارد بر سطح به مساحت تعریف می‌شود.

$$P = \frac{F}{A}$$

F: نیروی عمودی سطح (N)، A: مساحت سطح (m^2)، P: فشار (Pa)

- فشار ناشی از شاره‌ها به عمق شاره وابسته است و طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \rho g h$$

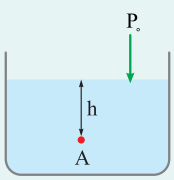
ρ: چگالی (kg/m^3)، h: عمق (m)، g: شتاب گرانش زمین (N/kg)

- فشار کل در عمق h از سطح یک مایع که سطح آزاد آن در تماس با هوا است به صورت زیر محاسبه می‌شود که در این رابطه P_0 فشار هوا، یعنی فشار در سطح مایع.

$$P = P_0 + \rho gh$$

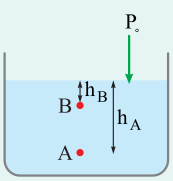
P_0: فشار هوا، ρgh: فشار ناشی از مایع

مثال در شکل زیر، فشار نقطهٔ A برابر است با:



$$P_A = P_0 + \rho gh$$

- اختلاف فشار بین دو نقطه از مایع، به دلیل اختلاف عمق دو نقطه ایجاد می‌شود در شکل زیر، برای دو نقطهٔ A و B داریم:



$$\begin{cases} P_A = P_0 + \rho g h_A \\ P_B = P_0 + \rho g h_B \end{cases} \Rightarrow P_A - P_B = \Delta P = P_0 + \rho g h_A - P_0 - \rho g h_B \Rightarrow \Delta P = \rho g (h_A - h_B)$$

پاسخ خیلی تشریحی

چون کرهٔ درون شاره، غوطه‌ور و در حال تعادل است، چگالی کره و شاره با هم برابرند.

اختلاف فشار بین بالاترین و پایین‌ترین نقطهٔ کره ناشی از اختلاف ارتفاع دو نقطه (به اندازهٔ قطر کره) است، یعنی:

$$\Delta P = \rho g \Delta h = 1/5 \times 10^3 \times 10 \times 40 \times 10^{-2} = 6000\ Pa = 6\ kPa$$

گول نخوری

اگر هواست به تبدیل یکا نباشه، توی دام گزینهٔ (۱) می‌افتی و اگر به جای قطر، شعاع کره رو به عنوان اختلاف ارتفاع در نظر بگیری، اشتباهاً سراغ گزینه‌های (۱) یا (۳) می‌ری.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

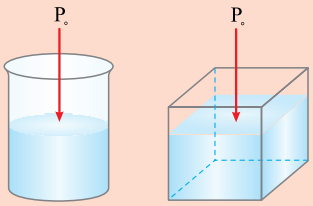
۴۰ درون استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱۰ cm، مقداری مایع به چگالی ۸۵۰ g / L می‌ریزیم و فشار در کف استوانه برابر ۸۰ cmHg می‌شود. اگر همین مقدار مایع را درون ظرفی مکعبی به ضلع ۳۰ cm بریزیم، فشار در کف ظرف چند سانتی‌متر جیوه می‌شود؟ ($\pi = ۳$ و فشار هوا ۷۱ cmHg فرض شود.)

۱) ۷۲ ۲) ۷۴ ۳) ۷۶ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فشار در کف استوانه را داریم، پس فشار ناشی از مایع را به دست می‌آوریم: (فشار ناشی از مایع در استوانه را با $P_۱$ و فشار ناشی از مایع در مکعب را با $P_۲$ نشان می‌دهیم.)



$$P_{کل} = P_۰ + P_۱ \Rightarrow P_۱ = P_{کل} - P_۰ = ۸۰ - ۷۱ = ۹ \text{ cmHg}$$

گام دوم: چون مایع تغییر نکرده، از رابطهٔ نسبتی فشار داریم:

$$\frac{P_۱}{P_۲} = \frac{\frac{F_{استوانه}}{A_{استوانه}}}{\frac{F_{مکعب}}{A_{مکعب}}} = \frac{F_{استوانه}}{F_{مکعب}} \times \frac{A_{مکعب}}{A_{استوانه}} \xrightarrow{F_{استوانه}=F_{مکعب}=mg} \frac{۹}{P_۲} = \frac{A_{مکعب}}{\underbrace{A_{استوانه}}_{\pi a^۲}} = \frac{(۳۰)^۲}{۳\times(۱۰)^۲} \Rightarrow P_۲ = ۳ \text{ cmHg}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال، فشار در کف ظرف مکعبی شکل است، پس:

$$P'_{کل} = P_۰ + P_۲ = ۷۱ + ۳ = ۷۴ \text{ cmHg}$$

دقت کنین چگالی مایع، دادهٔ اضافی بوده و نیازی بهش نداشتیم.

کنکور

درون استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱۰ cm، مقداری مایع به چگالی ۱۲۰۰ g / L می‌ریزیم و فشار در کف استوانه برابر ۱۰۶ kPa می‌شود. اگر همین مقدار مایع را درون ظرفی مکعبی به ضلع ۳۰ cm بریزیم، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال می‌شود؟ ($\pi = ۳$ ، $g = ۱۰ \text{ N / kg}$ و فشار هوا $۱۰^۵ \text{ Pa}$ فرض شود.) *(سؤال ۶۵ کنکور تجربی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))*

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱ فشار در عمق ۱۱۶ سانتی‌متری آب استخری برابر ۱۰۰ kPa است، فشار هوای محیط چند سانتی‌متر جیوه است؟

$(g = ۱۰\ N/kg \text{ و } \rho_{\text{جیوه}} = ۱۳/۶\ g/cm^۳ ،\ \rho_{\text{آب}} = ۱\ g/cm^۳)$

۱) ۶۳ ۲) ۶۴ ۳) ۶۵ ۴) ۶۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تبدیل یکای فشار از پاسکال به cmHg :

$$P_{(Pa)} = \rho_{\text{جیوه}} \times g \times h_{(m)} \xrightarrow{\text{تبدیل cm به m}} P_{(Pa)} = \frac{\rho_{\text{جیوه}}}{۱۰} \times P_{(cmHg)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فشار در عمق ۱۱۶ سانتی‌متری استخر ناشی از آب و فشار هواست، پس:

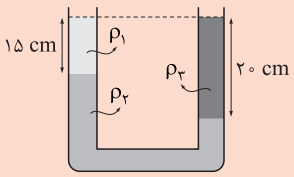
$$P = P_۰ + \rho gh \Rightarrow ۱۰۰\times۱۰^۳ = P_۰ + ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۱۱۶ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow P_۰ = ۱۰^۵ - ۱۱۶۰۰ = ۸۸۴۰۰\ Pa$$

گام دوم: فقط کافی است فشار به‌دست‌آمده برحسب پاسکال را برحسب سانتی‌متر جیوه بنویسیم تا تست حل شود:

$$P_{(Pa)} = \frac{\rho_{\text{جیوه}}}{۱۰} \times P_{(cmHg)} \Rightarrow ۸۸۴۰۰ = \frac{۱۳۶۰۰}{۱۰} \times P_{(cmHg)} \Rightarrow P = ۶۵\ cmHg$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 2\rho_1$ باشد، نسبت $\frac{\rho_3}{\rho_1}$ چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۴}$

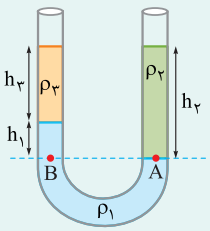
۳) $\frac{۷}{۸}$

۴) $\frac{۸}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

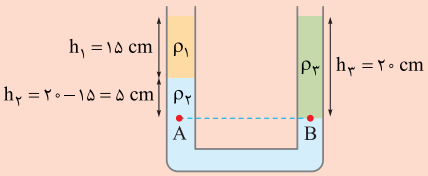
طبق اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، اگر دو نقطه در یک مایع قرار داشته باشند و هم‌تراز باشند، فشار دو نقطه با هم برابر است. در شکل مقابل، نقاط A و B در یک مایع هم‌تراز هستند، پس هم‌فشار هم هستند، یعنی:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g h_2 + P_0 = \rho_1 g h_1 + \rho_3 g h_3 + P_0$$
$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_1 h_1 + \rho_3 h_3$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای دو نقطهٔ هم‌فشار A و B داریم:

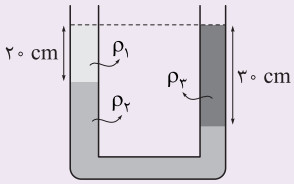


$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + P_0 = \rho_3 g h_3 + P_0$$
$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = \rho_3 g h_3$$
$$\xrightarrow{\rho_2 = 2\rho_1} \rho_1(۱۵) + 2\rho_1(۵) = \rho_3(۲۰) \Rightarrow ۲۵\rho_1 = ۲۰\rho_3$$
$$\Rightarrow \frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{۲۵}{۲۰} = \frac{۵}{۴}$$

کنکور

در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 2\rho_1$ باشد، نسبت $\frac{\rho_3}{\rho_1}$ چه‌قدر است؟

(سؤال ۷۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))



۱) $\frac{۴}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۳}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

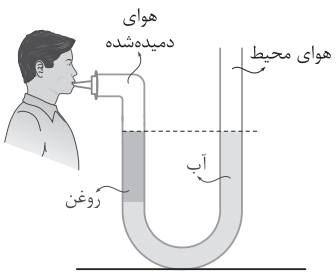
۴۳ در شکل زیر، شخص درون یک لولهٔ U‌شکل می‌دمد. اگر فشار پیمانه‌ای هوای درون ریهٔ این شخص برابر ۱ kPa باشد، ارتفاع روغن برابر چند سانتی‌متر است؟ ($\rho_{آب} = 1\ g/cm^3$ ، $\rho_{روغن} = 0/8\ g/cm^3$ و $g = 10\ N/kg$)

۱) ۱۰

۲) ۱۲/۵

۳) ۲۵

۴) ۵۰

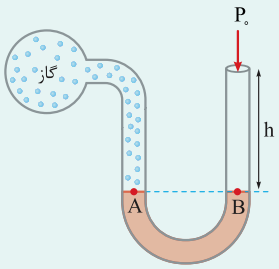


پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

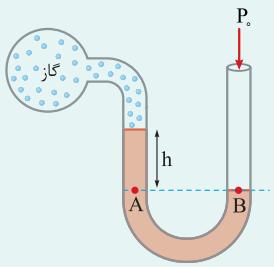
مانومتر وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری فشار گاز درون مخزن به کار می‌رود. مطابق شکل زیر، یک سر لولهٔ U‌شکل مانومتر، به مخزن گاز متصل است و سر دیگر آن باز بوده در تماس با هوا است. کافی است دو نقطهٔ هم‌تراز در آن را مشخص کنیم. در این صورت سه حالت رخ می‌دهد:

حالت ۱: ارتفاع مایع در دو لوله یکسان باشد:



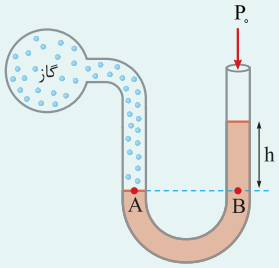
$$P_A = P_B \Rightarrow P_{گاز} = P_0$$

حالت ۲: ارتفاع مایع در لولهٔ متصل به مخزن بیشتر باشد:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{گاز} + \rho gh = P_0 \Rightarrow P_{گاز} = P_0 - \rho gh \Rightarrow P_{گاز} < P_0$$

حالت سوم: ارتفاع مایع در لولهٔ متصل به مخزن کم‌تر باشد:



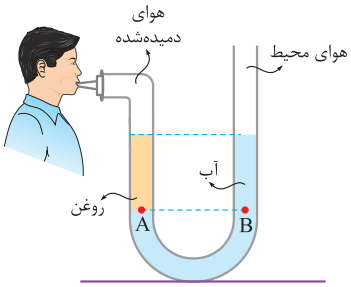
$$P_A = P_B \Rightarrow P_{گاز} = \rho gh + P_0 \Rightarrow P_{گاز} > P_0$$

فشار پیمانه‌ای: تفاوت فشار مطلق و فشار هوا است و آن را با P_g نمایش می‌دهند.

$$\underbrace{P_g}_{\text{فشار پیمانه‌ای (فشار مایع)}} = \overbrace{P}^{\text{فشار هوا}} - P_0 = \underbrace{\rho gh}_{\text{فشار مایع}}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نقاط هم‌تراز را مشخص می‌کنیم، به کمک اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز در یک مایع، داریم: (روغن را با اندیس O و آب را با اندیس W نمایش می‌دهیم.)



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{ریه}} + \rho_o g h_o = P_\circ + \rho_W g h_W$$

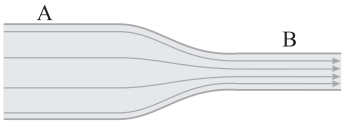
$$\Rightarrow P_g = P_{\text{ریه}} - P_\circ = \rho_W g h_W - \rho_o g h_o$$

$$\xrightarrow{h_W = h_o = h} ۱\times۱۰^۳ = ۱۰^۳ \times ۱۰ \times h - ۰/۸ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times h$$

$$\Rightarrow ۱ = ۱۰h - ۸h = ۲h \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}\,m = ۵۰\,cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ در شکل روبه‌رو، شارهٔ تراکم‌ناپذیری که حجم لوله را پر کرده است، در راستای افقی جاری است و شعاع مقطع لوله در قسمت A، ۲ برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟



الف) آهنگ شارش شاره در مقطع B، ۴ برابر آهنگ شارش شاره در مقطع A است.

ب) تندی شاره در مقطع B، ۲ برابر تندی شاره در مقطع A است.

پ) تندی شاره در مقطع B، ۴ برابر تندی شاره در مقطع A است.

ت) فشار شاره در مقطع B، کم‌تر از فشار شاره در مقطع A است.

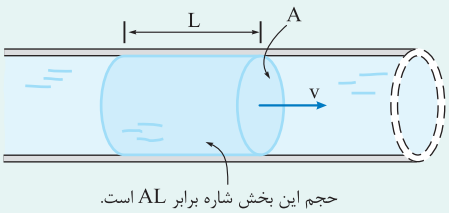
۱) الف و ب
۲) الف و ت
۳) ب و ت
۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

آهنگ شارش حجمی شاره:

برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر، اگر در مدت زمان Δt، حجم معینی از شاره به اندازهٔ $\Delta V = AL$ و با تندی v، از مقطع A یک لوله عبور کند:



$$\text{آهنگ شارش حجمی شاره} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{AL}{\Delta t} = Av$$

معادلهٔ پیوستگی:

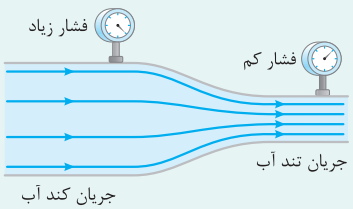
هنگامی که یک شاره از دو سطح مقطع متفاوت لوله‌ای می‌گذرد، تندی یکسانی ندارد ولی آهنگ شارش شاره در هر مقطع، یکسان است.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

در یک شارهٔ تراکم‌ناپذیر، مقدار شاره‌ای که در مدت Δt از سطح مقطع A_1 می‌گذرد، درست برابر مقدار شاره‌ای است که در همین مدت از سطح مقطع A_2 می‌گذرد.

اصل برنولی:

برای شاره‌ای که به طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره و با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به معادلهٔ پیوستگی، آهنگ شارش حجمی شاره در هر دو مقطع A و B یکسان است؛ بنابراین عبارت «الف» نادرست است.

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ پیوستگی، تندی شاره در دو مقطع A و B را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{A_A}{A_B} = \frac{\pi r_A^2}{\pi r_B^2} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \xrightarrow{r_A = 2r_B} \frac{v_B}{v_A} = 2^2 = 4$$

بنابراین عبارت «ب» نادرست و عبارت «پ» درست است.

گام سوم: با توجه به اصل برنولی، از آن‌جا که تندی شاره در قسمت B بیشتر از تندی شاره در قسمت A است، بنابراین فشار شاره در قسمت B، کم‌تر از فشار شاره در قسمت A است و عبارت «ت» درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ **کدام‌یک از موارد زیر درست است؟**

۱) بال‌های هواپیما طوری طراحی شده‌اند که هنگام پرواز آن، تندی هوا در زیر بال بیشتر از بالای بال است.

۲) در روزهایی که باد می‌وزد، ارتفاع موج‌های دریا یا اقیانوس پایین‌تر از ارتفاع میانگین می‌شود.

۳) در مسیر حرکت شاره‌ای که به طور لایه‌ای و در امتداد قائم حرکت می‌کند، با افزایش تندی شاره، فشار آن الزاماً کاهش می‌یابد.

۴) چگالی جسمی که بر سطح مایعی شناور است، از چگالی مایع کم‌تر و نیروی شناوری وارد بر این جسم با وزن آن هم‌اندازه است.

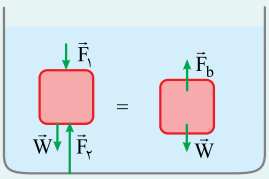
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نیروی شناوری:

ارشمیدس پی برد که وقتی تمام یا قسمتی از یک جسم در شاره‌ای فرو رود، شاره نیروی بالاسوی خالصی بر آن وارد می‌کند که نیروی شناوری نام دارد.

هرچه حجم قسمتی از جسم که درون شاره غوطه‌ور است، بزرگ‌تر باشد، نیروی شناوری بیشتری بر آن وارد می‌شود.



$$F_2 > F_1$$

$$F_b = \text{نیروی شناوری } (N)$$

$$F_b = F_2 - F_1$$

وقتی جسمی به وزن W و چگالی ρ' کاملاً وارد شاره‌ای به چگالی ρ می‌شود، سه حالت زیر ممکن است:

الف) اگر $\rho' > \rho$ باشد، $W > F_b$ بوده و جسم رو به پایین حرکت می‌کند تا ته‌نشین شود.

ب) اگر $\rho' = \rho$ باشد، $W = F_b$ بوده و تمام جسم درون شاره غوطه‌ور می‌ماند.

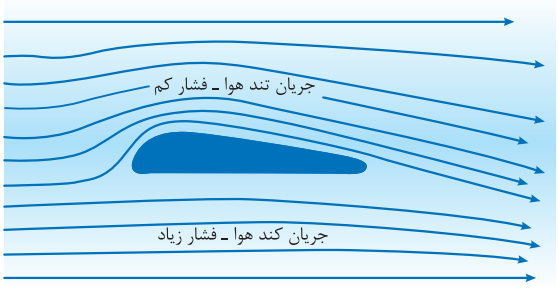
پ) اگر $\rho' < \rho$ باشد، $W < F_b$ بوده و جسم رو به بالا حرکت می‌کند تا به سطح شاره برسد.

در حالت «پ»، پس از رسیدن جسم به سطح شاره و برقراری حالت تعادل، بخشی از جسم، درون شاره غوطه‌ور و بخشی دیگر بیرون از شاره، شناور می‌شود. F_b نیز کاهش یافته و با W برابر خواهد شد، زیرا پس از شناورشدن جسم فقط حجم قسمت غوطه‌ور در تعیین نیروی F_b نقش دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

درستی یا نادرستی موارد مطرح‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): نادرست است؛ شکل زیر، قسمتی از یک بال هواپیما را نشان می‌دهد. بال‌های هواپیما طوری طراحی شده‌اند که تندی هوا در بالای بال بیشتر از زیر آن است. در نتیجه با توجه به اصل برنولی، فشار هوای بالای بال، کم‌تر از فشار هوای زیر آن است، به این ترتیب نیرویی رو به بالا به بال هواپیما وارد می‌شود.

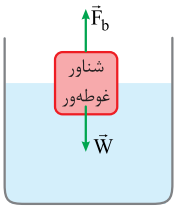


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گزینهٔ (۲): نادرست است؛ طبق اصل برنولی، وزش باد در بالای سطح آب دریا و اقیانوس، سبب کاهش فشار هوای روی سطح آب دریا و اقیانوس، نسبت به حالت معمولی $(P_{\circ})$ می‌شود و با ایجاد مکش رو به بالا، به افزایش ارتفاع میانگین موج‌های دریا کمک می‌کند.

گزینهٔ (۳): نادرست است؛ برای شاره‌ای تراکم‌ناپذیر که به صورت لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند، با افزایش تندی شاره، فشار آن الزاماً کاهش می‌یابد، اما در این‌جا، مسیر حرکت شاره در امتداد قائم است و باید تغییر ارتفاع مایع نیز در نظر گرفته شود. (بررسی حرکت قائم شاره، خارج از سطح کتاب فیزیک دبیرستان است.)

گزینهٔ (۴): درست است؛ با توجه به مطالب ارائه‌شده در درس‌باکس، باید چگالی جسم از چگالی مایع کم‌تر باشد تا بتواند بر سطح مایع شناور شود. از طرفی چون جسم ساکن است، نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و داریم:



$$F_b - W = \circ \Rightarrow F_b = W$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دهم

۴۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر دربارهٔ فراوان‌ترین عنصر در سیارهٔ مشتری به ترتیب چگونه است؟

هیدروژن

- دارای ۳ ایزوتوپ طبیعی و پایدار است.
- نافلز است و جزء ۸ عنصر فراوان‌تر سیارهٔ زمین محسوب نمی‌شود.
- اولین عنصری است که پس از مهبانگ پا به عرصهٔ جهان گذاشته است.
- در خورشید، طی واکنش‌های هسته‌ای به هلیم تبدیل می‌شود.

۱) درست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۳) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست
۴) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت اول، نادرست و عبارت‌های دوم و سوم و چهارم درست‌اند.

فراوان‌ترین عنصر در مشتری، هیدروژن است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: **یک نمونهٔ طبیعی از عنصر هیدروژن**، مخلوطی از **سه ایزوتوپ** است.

در بین ایزوتوپ‌های طبیعی، ایزوتوپ‌های $_{1}^{1}H$ و $_{1}^{2}H$ پایدار هستند، اما ایزوتوپ $_{1}^{3}H$ ناپایدار است.

عبارت دوم: عنصر هیدروژن، یک عنصر نافلزی است. عنصر هیدروژن در بین عناصر اصلی سازندهٔ زمین قرار ندارد:

۸ عنصر اصلی سازندهٔ زمین: $Fe > O > Si > Mg > Ni > S > Ca > Al$

عبارت سوم: طبق نظریهٔ مهبانگ، چند میلیارد سال پیش، *فیلی یوویی* یک انفجار بسیار بزرگ رخ داده است که در نتیجهٔ آن، انرژی بسیار زیادی آزاد شده و در آن شرایط، ذره‌های زیراتمی مانند الکترون، پروتون و نوترون پدید آمده‌اند و پس از مدتی، عنصرهای هیدروژن و هلیم، چشم به جهان گشوده‌اند!

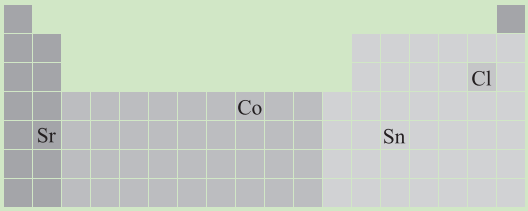
نکته روند تشکیل عنصرها *به صورت مختصر و مفید!* به شکل زیر است:

عنصرهای سنگین‌تر مانند آهن و طلا ← عنصرهای سبک مانند لیتیم و کربن ← هلیم ← هیدروژن

عبارت چهارم: انرژی گرمایی و نور خیره‌کنندهٔ *خورشید خانم!* به دلیل تبدیل هیدروژن به هلیم (تبدیل عنصر سبک‌تر به عنصر سنگین‌تر!) در واکنش‌های هسته‌ای است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ با توجه به جدول زیر، در کدام گونهٔ شیمیایی، تعداد نوترون‌ها برابر با مجموع «تعداد پروتون‌ها و نصف تعداد الکترون‌ها» است؟



۱) ^{۹۰}Sr

۲) $^{۱۲۴}Sn^{۲+}$

۳) $^{۳۵}Cl^{-}$

۴) $^{۶۰}Co^{۳+}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته برای همهٔ یون‌ها، چه مثبت و چه منفی، رابطهٔ تعداد الکترون و پروتون را می‌توان به صورت زیر نوشت:

بار یون (با در نظر گرفتن علامت) − تعداد پروتون = تعداد الکترون

پاسخ خیلی تشریحی بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به جدول تناوبی، عدد اتمی استرانسیم (Sr) برابر ۳۸ است:

$$^{۹۰}_{۳۸}Sr \begin{cases} e^{-} = ۳۸ \\ n = ۹۰ - ۳۸ = ۵۲ \end{cases} \Rightarrow ۵۲ \neq ۳۸ + \frac{۳۸}{۲} \quad \times$$

گزینهٔ (۲): با توجه به جدول تناوبی، عدد اتمی قلع (Sn) برابر ۵۰ است:

$$^{۱۲۴}_{۵۰}Sn^{۲+} \begin{cases} e^{-} = ۵۰ - ۲ = ۴۸ \\ n = ۱۲۴ - ۵۰ = ۷۴ \end{cases} \Rightarrow ۷۴ = ۵۰ + \frac{۴۸}{۲} \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۳): عدد اتمی کلر (Cl) برابر ۱۷ است:

$$^{۳۵}_{۱۷}Cl^{-} \begin{cases} e^{-} = ۱۷ + ۱ = ۱۸ \\ n = ۳۵ - ۱۷ = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow ۱۸ \neq ۱۷ + \frac{۱۸}{۲} \quad \times$$

گزینهٔ (۴): با توجه به جدول تناوبی، عدد اتمی کبالت (Co) برابر ۲۷ است:

$$^{۶۰}_{۲۷}Co^{۳+} \begin{cases} e^{-} = ۲۷ - ۳ = ۲۴ \\ n = ۶۰ - ۲۷ = ۳۳ \end{cases} \Rightarrow ۳۳ \neq ۲۷ + \frac{۲۴}{۲} \quad \times$$

کتاب درسی

با مراجعه به جدول دوره‌ای عنصرها، در کدام گونه‌های شیمیایی زیر، تعداد نوترون‌ها برابر با مجموع «تعداد پروتون‌ها و نصف تعداد الکترون‌ها» است؟ *(شیمی (۱) - تمرین‌های دوره‌ای صفحهٔ ۴۶ کتاب درسی)*

$^{۲۴}Mg^{۲+}$, ^{۴۷}Cr , $^{۶۰}Co^{۳+}$, $^{۳۵}Cl^{-}$, $^{۱۲۴}Sn^{۲+}$, ^{۹۰}Sr

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ کدام موارد زیر، دربارهٔ اورانیم ($_{92}U$) درست است؟

الف) ایزوتوپی از آن با ۱۴۳ نوترون، فراوان‌ترین ایزوتوپ آن است.

ب) معروف‌ترین عنصر پرتوزای طبیعی است.

پ) غنی‌سازی ایزوتوپی آن، یکی از مراحل مهم چرخهٔ تولید سوخت هسته‌ای است.

ت) نخستین عنصری است که توسط انسان در راکتورهای هسته‌ای ساخته شد.

۱) ب ـ پ
۲) الف ـ ت
۳) الف ـ ب
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

الف) عدد جرمی ایزوتوپی از اورانیم با ۱۴۳ نوترون برابر است با:

$$A = Z + n \Rightarrow A = ۹۲ + ۱۴۳ = ۲۳۵$$

این ایزوتوپ، $_{92}^{235}U$ بوده که فراوانی آن در مخلوط طبیعی از ۰/۷ درصد کم‌تر است.

ب) *درسته!* اورانیم عنصری **طبیعی** و پرتوزا است و شناخته‌شده‌ترین عنصر پرتوزا به حساب می‌آید.

پ) از ایزوتوپ $_{92}^{235}U$، اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود، اما فراوانی این ایزوتوپ در مخلوط طبیعی ایزوتوپ‌های اورانیم، کم است؛ به همین دلیلی فرایند غنی‌سازی ایزوتوپی به منظور افزایش مقدار این ایزوتوپ انجام می‌شود. این فرایند یکی از مراحل مهم چرخهٔ تولید سوخت هسته‌ای است.

ت) **تکنسیم** ($_{43}^{99}Tc$) نخستین عنصری بود که در **واکنشگاه (راکتور)** هسته‌ای ساخته شد.

کنکور

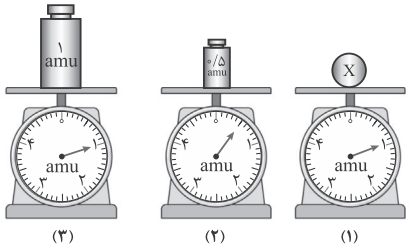
چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ *(سؤال ۷۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)*

- **اورانیم ۲۳۵، فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم است.**
- **اورانیم ،معروف‌ترین عنصر پرتوزای طبیعی است.**
- **از اورانیم ۲۳۵، در واکنشگاه‌های اتمی استفاده می‌شود.**
- **غنی‌سازی ایزوتوپی، یکی از مراحل مهم چرخهٔ تولید سوخت هسته‌ای می‌باشد.**

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ با توجه به شکل‌های زیر، کدام مورد نادرست است؟ (اعداد تقریبی هستند.)



۱) ترازوی (۱) را می‌توان مربوط به ذرهٔ زیراتمی با نماد ${}^{1}_{0}n$ دانست.

۲) X می‌تواند سنگین‌ترین ایزوتوپ طبیعی و پایدار هیدروژن باشد.

۳) اگر هر اتم ${}^{12}_{6}C$ را به ۲۴ قسمت تقسیم کنیم، ترازوی (۲) جرم هر یک از این قسمت‌ها را نشان می‌دهد.

۴) جرم فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم، حدود ۱۶ برابر مجموع جرم ترازوهای (۱) و (۲) است.

${}^{24}_{12}Mg$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *درسته!* جرم نوترون حدود ۱ amu است.

در جدول زیر، برخی از ویژگی‌های الکترون، پروتون و نوترون آورده شده است:

نام ذره	نماد	بار الکتریکی نسبی	جرم amu
الکترون	${}^{0}_{-1}e$	−۱	۰/۰۰۰۵
پروتون	${}^{1}_{+1}p$	+۱	۱/۰۰۷۳
نوترون	${}^{1}_{0}n$	۰	۱/۰۰۸۷

گزینهٔ (۲): ایزوتوپ مورد نظر ${}^{2}_{1}H$ است. جرم اتمی ${}^{2}_{1}H$ به تقریب برابر با ۲ amu یا ۲ u است.

گزینهٔ (۳): اتم کربن ـ۱۲ (${}^{12}_{6}C$)، تنها اتمی است که از نظر عددی، مقدار جرم اتمی آن دقیقاً با عدد جرمی‌اش برابر است؛ بنابراین اگر هر اتم ${}^{12}_{6}C$ را به ۲۴ قسمت تقسیم کنیم، ترازوی (۲) جرم هر یک از قسمت‌ها را ۰/۵ amu نشان می‌دهد.

گزینهٔ (۴): جرم اتمی فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم (${}^{24}_{12}Mg$) به تقریب برابر ۲۴ است.

$$\frac{\text{جرم اتمی فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم}}{\text{مجموع جرم ترازوهای (۱) و (۲)}} = \frac{۲۴}{(۱+۰/۵)_{۱/۵}} = ۱۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ عنصر A دارای سه ایزوتوپ ^{84}A، ^{86}A و ^{88}A است. اگر جرم اتمی میانگین A برابر ۸۶/۴ amu باشد، کدام گزینه به ترتیب می‌تواند مربوط به درصد فراوانی این ایزوتوپ‌ها از سبک به سنگین باشد؟ (جرم اتمی ایزوتوپ‌ها را معادل با عدد جرمی آن‌ها در نظر بگیرید.)

۱) ٪۲۰، ٪۵۰، ٪۳۰
۲) ٪۲۰، ٪۴۰، ٪۴۰
۳) ٪۳۰، ٪۴۰، ٪۳۰
۴) ٪۳۰، ٪۲۵، ٪۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

جرم اتمی میانگین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M = \underbrace{M_1}_{\text{جرم اتمی ایزوتوپ سبک‌تر}} + \frac{F_2}{F_{کل}}\underbrace{(M_2 - M_1)}_{\text{تفاوت جرم اتمی ایزوتوپ دوم با ایزوتوپ سبک‌تر}} + \frac{F_3}{F_{کل}}\underbrace{(M_3 - M_1)}_{\text{تفاوت جرم اتمی ایزوتوپ سوم با ایزوتوپ سبک‌تر}} + \dots$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به این‌که فراوانی هر ۳ ایزوتوپ مجهول است و با یک معادله نمی‌توان آن‌ها را به دست آورد، باید *یکی‌یکی* گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$M = ۸۴ + \frac{۵۰}{۱۰۰}(۸۶ - ۸۴) + \frac{۳۰}{۱۰۰}(۸۸ - ۸۴) = ۸۶/۲ \quad ✖$$

گزینهٔ (۲):

$$M = ۸۴ + \frac{۴۰}{۱۰۰}(۸۶ - ۸۴) + \frac{۴۰}{۱۰۰}(۸۸ - ۸۴) = ۸۶/۴ \quad ✔$$

گزینهٔ (۳):

$$M = ۸۴ + \frac{۴۰}{۱۰۰}(۸۶ - ۸۴) + \frac{۳۰}{۱۰۰}(۸۸ - ۸۴) = ۸۶ \quad ✖$$

گزینهٔ (۴):

$$M = ۸۴ + \frac{۲۵}{۱۰۰}(۸۶ - ۸۴) + \frac{۴۵}{۱۰۰}(۸۸ - ۸۴) = ۸۶/۳ \quad ✖$$

یه‌جور دیگه

اگر درصد فراوانی ایزوتوپ‌های ^{86}A و ^{88}A را به ترتیب برابر a و b در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$۸۶/۴ = ۸۴ + \frac{a}{۱۰۰}\times ۲ + \frac{b}{۱۰۰}\times ۴ \Rightarrow ۲۴۰ = ۲a + ۴b \Rightarrow a + ۲b = ۱۲۰$$

فقط با اعداد گزینهٔ (۲)، این رابطه برقرار می‌شود.

گول نخوری

امیدواریم گول نخورده باشین و بدون محاسبه، گزینهٔ (۱) رو انتخاب نکرده باشین!

برای عنصرهایی با دو ایزوتوپ، جرم اتمی میانگین همواره به جرم اتمی ایزوتوپی نزدیک‌تر است که درصد فراوانی بیشتری دارد؛ مثلاً لیتیم دو ایزوتوپ طبیعی ^{6}Li و ^{7}Li دارد که درصد فراوانی ^{7}Li بیشتر است؛ به همین دلیل جرم اتمی میانگین لیتیم (۶/۹۴ amu) به جرم اتمی ایزوتوپ ^{7}Li نزدیک‌تر است.

ولی *هواستون باشه* که برای عنصرهایی با ۳ ایزوتوپ به بالا، **این نکته لزوماً برقرار نیست؛** یعنی جرم اتمی میانگین همواره به جرم ایزوتوپی که درصد فراوانی بیشتری دارد، نزدیک‌تر نیست، مثلاً در این‌جا دیدیم که با این‌که جرم اتمی میانگین به جرم اتمی ایزوتوپ ^{86}A نزدیک‌تر است، اما درصد فراوانی این ایزوتوپ با ^{88}A برابر است.

این نکته برای عنصرهایی با چند ایزوتوپ، زمانی برقرار است که درصد فراوانی یکی از ایزوتوپ‌ها، به طور فاحشی از دیگر ایزوتوپ‌ها بیشتر باشد؛ مثلاً نئون دارای ۳ ایزوتوپ ^{20}Ne (با فراوانی ٪۹۰/۵)، ^{21}Ne (با فراوانی ٪۰/۲۷) و ^{22}Ne (با فراوانی ٪۹/۲۳) است و چون فراوانی ایزوتوپ ^{20}Ne خیلی بیشتر از دو ایزوتوپ دیگر است، جرم اتمی میانگین نئون (۲۰/۱۸ amu) به جرم اتمی این ایزوتوپ نزدیک‌تر می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ **یک نوع آلیاژ، شامل ۹۰ درصد جرمی مس و ۱۰ درصد جرمی قلع است. با ۲/۷ کیلوگرم مس، چند کیلوگرم از این آلیاژ را می‌توان تهیه کرد و شمار مول‌های قلع مورد نیاز برای تهیهٔ این مقدار آلیاژ به تقریب کدام است؟**

$(Sn = ۱۱۹ , Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱})$

۱) ۵ ـ ۲/۵ ۲) ۵ ـ ۳/۲

۳) ۳ ـ ۲/۵ ۴) ۳ ـ ۳/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به درصد جرمی فلز مس (Cu) در آلیاژ، جرم آلیاژی که با استفاده از ۲/۷ کیلوگرم فلز مس می‌توان تهیه کرد را محاسبه می‌کنیم:

$$۲/۷\ kg\ Cu \times \frac{۱۰۰۰\ g}{۱\ kg} \times \frac{۱۰۰\ g\ آلیاژ}{۹۰\ g\ Cu} \times \frac{۱\ kg}{۱۰۰۰\ g} = ۳\ kg\ آلیاژ$$

گام دوم: با توجه به درصد جرمی فلز قلع (Sn) در آلیاژ، شمار مول‌های این فلز را در ۳ کیلوگرم از آلیاژ مورد نظر حساب می‌کنیم:

$$۳\ kg\ آلیاژ \times \frac{۱۰۰۰\ g}{۱\ kg} \times \frac{۱۰\ g\ Sn}{۱۰۰\ g\ آلیاژ} \times \frac{۱\ mol\ Sn}{۱۱۹\ g\ Sn} \simeq ۲/۵\ mol\ Sn$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16: g.mol^{-1})$

الف) جرم اتم هیدروژن در ۱۰۰ گرم آب با جرم اتم هیدروژن در ۳۰۰ گرم HCN برابر است.

ب) در هر مول از یون پایدار نیتروژن، $6/02\times10^{24}$ الکترون وجود دارد.

پ) جرم ۵ مول CO_2 از جرم $3/01\times10^{24}$ مولکول N_2O بیشتر است.

ت) اگر جرم مولی آسپرین $(C_9H_8O_x)$ برابر $180\ g.mol^{-1}$ باشد، آسپرین یک مولکول ۲۰ اتمی است.

۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) الف ـ ت
۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) برای مقایسهٔ جرم اتم‌های هیدروژن (H) موجود در ۱۰۰ گرم آب (H_2O) و ۳۰۰ گرم HCN، کافی است شمار مول‌های H را در آن‌ها مقایسه کنیم:

$$100\ g\ H_2O\times\frac{1\ mol\ H_2O}{18\ g\ H_2O}\times\frac{2\ mol\ H}{1\ mol\ H_2O}=\frac{100}{9}\ mol\ H$$

$$300\ g\ HCN\times\frac{1\ mol\ HCN}{27\ g\ HCN}\times\frac{1\ mol\ H}{1\ mol\ HCN}=\frac{100}{9}\ mol\ H$$

با توجه به این‌که شمار مول‌های H موجود در ۱۰۰ گرم H_2O و ۳۰۰ گرم HCN برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که جرم اتم‌های H نیز در آن‌ها یکسان است.

ب) یون $^{14}_{7}N^{3-}$ به آرایش الکترونی گاز نجیب نئون $(_{10}Ne)$ می‌رسد و به همین دلیل دارای ۱۰ الکترون است؛ بنابراین شمار الکترون‌های موجود در هر مول یون $^{14}_{7}N^{3-}$ برابر است با:

$$1\ mol\ {}^{14}_{7}N^{3-}\times\frac{6/02\times10^{23}\ \text{یون}\ {}^{14}_{7}N^{3-}}{1\ mol\ {}^{14}_{7}N^{3-}}\times\frac{10\ e^-}{1\ \text{یون}\ {}^{14}_{7}N^{3-}}=6/02\times10^{24}\ e^-$$

پ)

$$5\ mol\ CO_2\times\frac{44\ g\ CO_2}{1\ mol\ CO_2}=220\ g\ CO_2$$

$$3/01\times10^{24}\ \text{مولکول}\ N_2O\times\frac{1\ mol\ N_2O}{6/02\times10^{23}\ \text{مولکول}\ N_2O}\times\frac{44\ g\ N_2O}{1\ mol\ N_2O}=220\ g\ N_2O$$

بنابراین می‌توان گفت که جرم ۵ مول CO_2 و $3/01\times10^{24}$ مولکول N_2O، با هم برابر است.

یه‌جور دیگه

CO_2 جرم‌مولی $=12+2(16)=44\ g.mol^{-1}$

N_2O جرم‌مولی $=12(14)+16=44\ g.mol^{-1}$

از آن‌جا که جرم مولی این دو ماده یکسان است؛ بنابراین جرم شمار مول‌های یکسان از آن‌ها، برابر خواهد بود. با توجه به این‌که $3/01\times10^{24}$ مولکول N_2O معادل ۵ مول از آن است؛ بنابراین می‌توان گفت که جرم ۵ مول CO_2 و $3/01\times10^{24}$ مولکول N_2O، با هم برابر است.

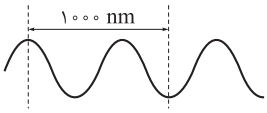
ت) با توجه به جرم مولی آسپرین، مقدار x در فرمول مولکولی آن را حساب می‌کنیم:

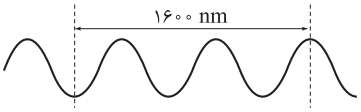
$$\text{جرم‌مولی آسپرین}=9(12)+8(1)+x(16)=180\ g.mol^{-1}\ \Rightarrow\ 16x=64\ \Rightarrow\ x=4$$

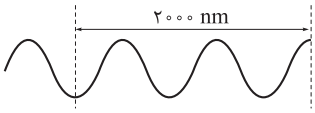
بنابراین فرمول مولکولی آسپرین به صورت $C_9H_8O_4$ بوده و آسپرین یک مولکول ۲۱ اتمی است!

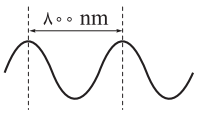
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ پرتویی با طول موج ۸۰۰ nm در کدام محدودهٔ طیف الکترومغناطیسی قرار دارد و کدام شکل را می‌توان به آن نسبت داد؟

۱) فروسرخ – 

۲) فرابنفش – 

۳) فروسرخ – 

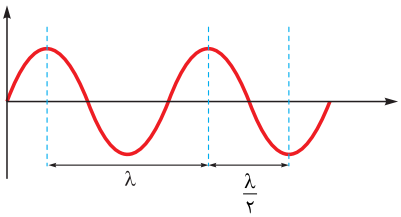
۴) فرابنفش – 

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طول موج نور مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است. طول موج پرتوهای فروسرخ بلندتر از پرتوهای موجود در گسترهٔ مرئی است.

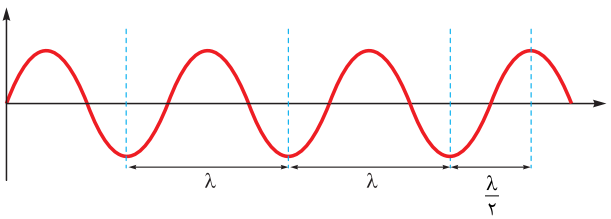
برای بررسی شکل‌ها باید بدانیم که طول موج، معادل با فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی یا دو درهٔ متوالی است.

گزینهٔ (۱):



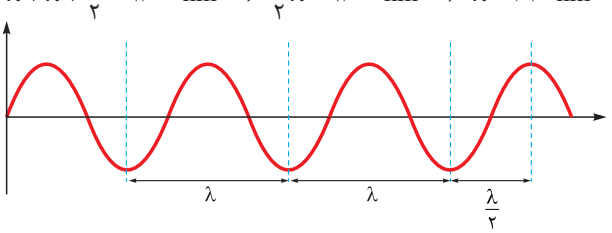
$\lambda + \frac{\lambda}{2} = 1000\ \text{nm} \Rightarrow \frac{3}{2}\lambda = 1000\ \text{nm} \Rightarrow \lambda = \frac{2000}{3} \simeq 667\ \text{nm}$ ✖

گزینهٔ (۲):



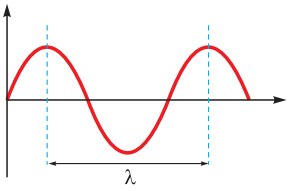
$\lambda + \lambda + \frac{\lambda}{2} = 1600\ \text{nm} \Rightarrow \frac{5}{2}\lambda = 1600\ \text{nm} \Rightarrow \lambda = 640\ \text{nm}$ ✖

گزینهٔ (۳):



$\lambda + \lambda + \frac{\lambda}{2} = 2000\ \text{nm} \Rightarrow \frac{5}{2}\lambda = 2000\ \text{nm} \Rightarrow \lambda = 800\ \text{nm}$ ✓

گزینهٔ (۴):



$\lambda = 800\ \text{nm}$ ✓

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ **با توجه به شکل داده‌شده که مربوط به طیف نشری خطی هیدروژن در گسترهٔ مرئی است، کدام موارد از مطالب داده‌شده درست است؟**


(۱) (۲) (۳) (۴)

الف) نوار شمارهٔ (۱) دارای بیشترین انرژی است.

ب) نوار شمارهٔ (۳) حاصل انتقال الکترون از لایهٔ پنجم به حالت پایهٔ اتم هیدروژن است.

پ) پرتو مربوط به نوار (۴) بنفش‌رنگ بوده و نسبت به پرتو مربوط به نوار (۲)، انحراف بیشتری در عبور از منشور دارد.

ت) طول موج ۷۵ درصد از نوارهای نشان داده شده، کوتاه‌تر از ۵۰۰ nm است.

۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت

۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

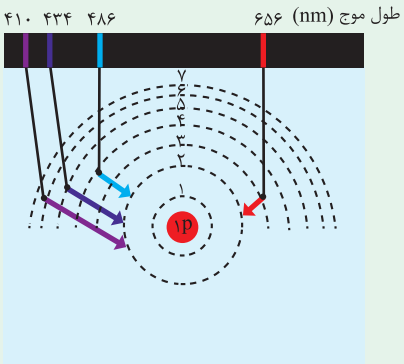
پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

نکته

در **گسترهٔ مرئی** طیف نشری خطی اتم‌های هیدروژن، چهار خط یا نوار رنگی وجود دارد. این خطوط مربوط به انتقال الکترون از لایه‌های بالاتر $(n = ۳ , ۴ , ۵ , ۶)$ به لایهٔ دوم $(n = ۲)$ هستند. ویژگی‌ها و چگونگی تشکیل این خطوط *این‌چوریاست*:

رنگ نوار	طول موج (nm)	چگونگی تشکیل
بنفش	۴۱۰	مربوط به انتقال الکترون از $n = ۶$ به $n = ۲$
نیلی	۴۳۴	مربوط به انتقال الکترون از $n = ۵$ به $n = ۲$
آبی	۴۸۶	مربوط به انتقال الکترون از $n = ۴$ به $n = ۲$
سرخ	۶۵۶	مربوط به انتقال الکترون از $n = ۳$ به $n = ۲$



بررسی عبارت‌ها:

الف) رنگ نوار شمارهٔ (۱)، سرخ است و دارای کم‌ترین انرژی است.

ب) نوار شمارهٔ (۳) مربوط به انتقال الکترون از لایهٔ پنجم به لایهٔ دوم است.

پ) رنگ نوار شمارهٔ (۴) و (۲) به ترتیب بنفش و آبی است. انحراف رنگ بنفش از آبی بیشتر است (انرژی با انحراف رابطهٔ مستقیم دارد).

نکته

هر چه طول موج یک نور مرئی کوتاه‌تر باشد یا انرژی آن بیشتر باشد، میزان انحراف آن پس از عبور از منشورها بیشتر است:

انرژی پرتو $\propto$ میزان شکست و انحراف پرتو

ت) از بین ۴ پرتو نشان داده شده: بنفش (۴۱۰ nm)، نیلی (۴۳۴ nm) و آبی (۴۸۶ nm)، طول موجی کم‌تر از ۵۰۰ nm دارند؛ یعنی ۳ پرتو از ۴ پرتو (٪۷۵).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) هر زیرلایه، با اعداد کوانتومی n و l مشخص می‌شود.

۲) از رابطهٔ $a = 4l + 2$، گنجایش الکترونی هر زیرلایه (a) را می‌توان معین کرد.

۳) نسبت حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه با عدد کوانتومی اصلی n به شمار زیرلایه‌های الکترونی موجود در آن، برابر n است.

۴) مجموع عدد کوانتومی فرعی زیرلایه‌های موجود در لایهٔ الکترونی چهارم برابر ۶ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هر لایهٔ الکترونی، خود از یک یا چند زیرلایه ساخته شده است. در واقع زیرلایه‌ها، بخش‌های کوچک‌تر یک لایهٔ الکترونی هستند. در مدل کوانتومی اتم، برای مشخص‌کردن نوع زیرلایه‌ها، از عدد کوانتومی فرعی (l) استفاده می‌شود و به ازای هر عدد کوانتومی فرعی (l)، یک نماد حرفی خاص به زیرلایهٔ مربوطه اختصاص داده شده است. برای درک بهتر موضوع جدول زیر را ببینید:

عدد کوانتومی فرعی (l)	۰	۱	۲	۳	۴
نماد حرف زیرلایه	s	p	d	f	g

گزینهٔ (۲): یک زیرلایه با عدد کوانتومی فرعی l، حداکثر گنجایش $4l + 2$ الکترون را دارد:

$4l + 2$ = حداکثر گنجایش الکترونی در یک زیرلایه

نماد زیرلایه	s	p	d	f
عدد کوانتومی فرعی (l)	۰	۱	۲	۳
حداکثر گنجایش الکترونی زیرلایه $(4l + 2)$	$4(0) + 2 = 2$	$4(1) + 2 = 6$	$4(2) + 2 = 10$	$4(3) + 2 = 14$

گزینهٔ (۳): یک لایهٔ الکترونی با عدد کوانتومی اصلی n، حداکثر گنجایش $2n^2$ الکترون را دارد. هر لایهٔ الکترونی با عدد کوانتومی اصلی n، n تا زیرلایه دارد:

$$\frac{\text{حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه}}{\text{شمار زیرلایه‌های الکترونی موجود در آن}} = \frac{2n^2}{n} = 2n$$

گزینهٔ (۴): در لایهٔ چهارم، ۴ زیرلایه با $l = 0$ تا $l = 3$ وجود دارد $(4s\ ,\ 4p\ ,\ 4d\ ,\ 4f)$.

مجموع عدد کوانتومی فرعی زیرلایه‌های موجود در لایهٔ الکترونی چهارم $= 0 + 1 + 2 + 3 = 6$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ شمار الکترون‌های ظرفیتی کدام اتم، با شمارهٔ دورهٔ آن در جدول تناوبی برابر است؟

۱) $_{12}A$ ۲) $_{15}B$

۳) $_{22}M$ ۴) $_{34}E$

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته با توجه به آرایش الکترونی اتم‌ها، می‌توان شمار الکترون‌های ظرفیتی آن‌ها و موقعیت آن‌ها در جدول دوره‌ای را پیدا کرد.

نوع دسته	آرایش الکترون‌های ظرفیت	تعداد الکترون‌های ظرفیت	رابطهٔ شمارهٔ گروه و تعداد الکترون‌های ظرفیت
s (گروه‌های ۱ و ۲ و هلیم)	ns	توان ns (تعداد الکترون‌های بیرونی‌ترین لایهٔ الکترونی)	تعداد الکترون‌های ظرفیت = شمارهٔ گروه (به‌جز هلیم)
d (گروه‌های ۳ تا ۱۲)	$(n-1)d\ ns$	مجموع توان ns و $(n-1)d$ (تعداد الکترون‌های دو زیرلایهٔ آخر)	تعداد الکترون‌های ظرفیت = شمارهٔ گروه
p (گروه‌های ۱۳ تا ۱۸)	$ns\ np$	مجموع توان ns و np (تعداد الکترون‌های بیرونی‌ترین لایهٔ الکترونی)	تعداد الکترون‌های ظرفیت + ۱۰ = شمارهٔ گروه

در همهٔ دسته‌ها، شمارهٔ دوره، برابر با بزرگ‌ترین ضریب (n) در آرایش الکترونی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$_{12}A:[_{10}Ne]\,3s^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شمارهٔ دوره} = 3 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 2 \end{cases}$$

گزینهٔ (۲):

$$_{15}B:[_{10}Ne]\,3s^2 3p^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شمارهٔ دوره} = 3 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 5 \end{cases}$$

گزینهٔ (۳):

$$_{22}M:[_{18}Ar]\,3d^2 4s^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شمارهٔ دوره} = 4 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 4 \end{cases}$$

گزینهٔ (۴):

$$_{34}E:[_{18}Ar]\,3d^{10} 4s^2 4p^4 \Rightarrow \begin{cases} \text{شمارهٔ دوره} = 4 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 6 \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷ کدام مورد درست است؟

۱) در اتم یازدهمین عنصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی، نسبت شمار الکترون‌های دارای $l=0$ به شمار الکترون‌های دارای $l=2$، برابر ۰/۸ است.

۲) شمار زیرلایه‌های الکترونی پرشده در اتم عنصر A که در دورهٔ ۴ و گروه ۶ قرار دارد، با همین شمار در اتم عنصر B متعلق به دورهٔ ۴ و گروه ۱۲، برابر است.

۳) در اتم عنصر $_{35}M$، شمار الکترون‌های لایهٔ سوم، ۲/۵ برابر شمار الکترون‌های لایهٔ چهارم است.

۴) اختلاف عدد اتمی دو عنصری که زیرلایه با $l=2$ در اتم آن‌ها برای اولین بار، پر و نیمه‌پر می‌شود، برابر ۵ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عدد اتمی عنصرهای دورهٔ چهارم از ۱۹ تا ۳۶ است؛ بنابراین عدد اتمی یازدهمین عنصر دورهٔ چهارم برابر ۲۹ است:

$$_{29}Cu:[Ar]3d^{10}4s^{1} \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2}=\frac{7(1s^{2}2s^{2}3s^{2}4s^{1})}{10(3d^{10})}=0/7$$

گزینهٔ (۲):

$$3d^{5}4s^{1} \Rightarrow \text{دورهٔ ۴، گروه ۶} \quad \Rightarrow \quad 1s^{2}2s^{2}2p^{6}3s^{2}3p^{6} \Rightarrow \text{۵ زیرلایه} \quad :\text{زیرلایه‌های پرشده}$$

$$3d^{10}4s^{2} \Rightarrow \text{دورهٔ ۴، گروه ۱۲} \quad \Rightarrow \quad 1s^{2}2s^{2}2p^{6}3s^{2}3p^{6}3d^{10}4s^{2} \Rightarrow \text{۷ زیرلایه} \quad :\text{زیرلایه‌های پرشده}$$

گزینهٔ (۳):

$$_{35}M:[Ar]3d^{10}4s^{2}4p^{5} \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } n=3}{\text{شمار الکترون‌ها با } n=4}=\frac{18(3s^{2}3p^{6}3d^{10})}{7(4s^{2}4p^{5})}\neq 2/5$$

گزینهٔ (۴): زیرلایه با عدد کوانتومی $l=2$، همان زیرلایهٔ d است که حداکثر گنجایش ۱۰ الکترون را دارد:

$$\left.\begin{array}{l}_{29}Cu:[Ar]3d^{10}4s^{1} \text{ :نخستین اتم با زیرلایهٔ 3d پر}\\ _{24}Cr:[Ar]3d^{5}4s^{1} \text{ :نخستین اتم با زیرلایهٔ 3d نیمه‌پر}\end{array}\right. \Rightarrow 29-24=5$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ **اگر مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم A از دستهٔ p دورهٔ چهارم جدول تناوبی برابر ۲۸ باشد، آرایش الکترون ـ نقطه‌ای A به کدام صورت است؟**

۱) $\dot{A}\cdot$ ۲) $\cdot\dot{A}\cdot$ ۳) $\cdot\ddot{A}\cdot$ ۴) $\cdot\ddot{A}:$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

آرایش الکترونی عنصرهای دستهٔ p به ns^2np^x ختم می‌شود:

$$4s^2 4p^x \Rightarrow (n+l) = 2(\underbrace{4+0}_{4s}) + x(\underbrace{4+1}_{4p}) = 28 \Rightarrow 8+5x=28 \Rightarrow 5x=20 \Rightarrow x=4$$

آرایش الکترونی اتم A به $4s^2 4p^4$ ختم می‌شود، یعنی دارای ۶ الکترون ظرفیتی است و آرایش الکترون ـ نقطه‌ای آن به صورت $\cdot\ddot{A}:$ می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ کدام مورد درست است؟

۱) از میان عنصرهای جدول دوره‌ای، هفت عنصر به صورت دواتمی در طبیعت یافت می‌شوند.

۲) همهٔ اتم‌های نافلزی با گرفتن الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسند.

۳) نماد شیمیایی آنیون نافلز X که در آرایش الکترون ـ نقطه‌ای اتم آن یک جفت نقطه وجود دارد، به صورت X^- است.

۴) منیزیم کلرید یک ترکیب یونی سه‌تایی است؛ زیرا در هر واحد فرمولی آن، ۳ یون وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

همهٔ نافلزها با گرفتن الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسند؛ مثلاً اکسیژن با گرفتن الکترون از سدیم (تشکیل ترکیب یونی سدیم اکسید)، به آرایش گاز نجیب نئون $(_{10}Ne)$ می‌رسد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هفت عنصر (H_2 ، N_2 ، O_2 ، F_2 ، Cl_2 ، Br_2 و I_2)، در دما و فشار اتاق به شکل مولکول‌های دواتمی وجود دارند اما دقت کنید که فقط N_2 و O_2 در طبیعت یافت می‌شوند.

گزینهٔ (۳): آرایش الکترون ـ نقطه‌ای نافلز X به صورت $\cdot\ddot{X}\cdot$ است و یون سه بار منفی (X^{3-}) تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ (۴): منیزیم کلرید $(MgCl_2)$ یک ترکیب یونی دوتایی است، زیرا فقط از دو عنصر ساخته شده است. ملاک تشکیل ترکیب‌های یونی به دوتایی یا چندتایی، تعداد عنصرهای سازندهٔ آن‌ها است و نه تعداد یون‌ها در فرمول شیمیایی!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ **شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل کدام مورد، ۳ برابر نسبت شمار کاتیون(ها) به آنیون(ها) در فرمول شیمیایی آلومینیم اکسید است؟**

۱) سدیم سولفید
۲) کلسیم نیترید
۳) پتاسیم فلوئورید
۴) لیتیم کلرید

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نسبت شمار کاتیون به آنیون در آلومینیم اکسید را به دست می‌آوریم:

$$Al^{3+}, O^{2-} \Rightarrow Al_2O_3 \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{3}$$

گام دوم: چک می‌کنیم که در تشکیل کدام ترکیب، شمار الکترون‌های مبادله‌شده، ۳ برابر نسبت شمار کاتیون به آنیون در آلومینیم اکسید است:

$$\text{شمار الکترون‌های مبادله‌شده} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

نکته

شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل ترکیب‌های یونی را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

تعداد آنیون × قدرمطلق بار آنیون = تعداد کاتیون × بار کاتیون = شمار الکترون‌های مبادله‌شده

به عنوان نمونه، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل هر واحد فرمولی از Na_2O برابر با $1 \times 2 = 2$ است.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) گزینهٔ: $Na^+, S^{2-} \Rightarrow Na_2S \Rightarrow$ شمار الکترون‌های مبادله‌شده $= 1 \times 2 = 2$ ✓

(۲) گزینهٔ: $Ca^{2+}, N^{3-} \Rightarrow Ca_3N_2 \Rightarrow$ شمار الکترون‌های مبادله‌شده $= 3 \times 2 = 6$ ×

(۳) گزینهٔ: $K^+, F^- \Rightarrow KF \Rightarrow$ شمار الکترون‌های مبادله‌شده $= 1 \times 1 = 1$ ×

(۴) گزینهٔ: $Li^+, Cl^- \Rightarrow LiCl \Rightarrow$ شمار الکترون‌های مبادله‌شده $= 1 \times 1 = 1$

کنکور

شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل کدام مورد، ۳ برابر نسبت شمار کاتیون(ها) به آنیون(ها) در فرمول شیمیایی آلومینیم سولفات است؟ *(سؤال ۷۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*

۱) سدیم کربنات
۲) کبالت (III) اکسید
۳) پتاسیم استات
۴) لیتیم فرمات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه‌دوازدهم ـ مرحله‌دوم ـ ۶شهریور ۱۴۰۵

پایه یازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی ناو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی ـ مصطفی کرمی محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی ـ حمید گلزاری
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیک	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر سهند محمدکریم‌نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابولفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری‌آثار مریم گلی‌حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	آیدین طهماسقلی‌زاده مدیا عیدی امیر محمودی انزابی سعید محبی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	صدرا عبادی یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمدمهدی کریمیان	محمدتقی جهانیان علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان یازدهم

۶۱ در دنبالهٔ حسابی ... , ۵ , ۲ , ۱−، حداقل چند جملهٔ ابتدایی آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۵۰ بیشتر شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a_n با قدرنسبت d از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جملهٔ اول دنبالهٔ داده‌شده ۱− و قدرنسبت آن ۳ است؛ بنابراین طبق روابط درس‌باکس داریم:

$$S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$$

گام دوم: باید نامعادلهٔ $S_n > 550$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow \frac{3n^2 - 5n}{2} > 550 \Rightarrow 3n^2 - 5n - 1100 > 0$$

با تجزیهٔ عبارت $3n^2 - 5n - 1100$ به کمک روش روسی داریم:

$$(n-20)(3n+55) > 0 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n > 20 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \geq 21$$

پس باید حداقل ۲۱ جملهٔ اول را جمع کنیم تا حاصل از ۵۵۰ بیشتر شود.

یه‌جور دیگه

بعد از به دست آوردن S_n، با استفاده از گزینه‌ها داریم:

$$S_{20} = \frac{20 \times 55}{2} = 550$$

یعنی مجموع ۲۰ جملهٔ اول برابر ۵۵۰ شده است و چون ما بیشتر از ۵۵۰ را می‌خواهیم باید حداقل ۲۱ جمله را جمع کنیم.

کتاب درسی

در دنبالهٔ حسابی ... , ۱۱ , ۸ , ۵، حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

(حسابان (۱) ـ تمرین ۳ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ مجموع ده جملهٔ اول دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۱}{۲^n} + (-۱)^n$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲^{۱۰}}$

۲) $\frac{۱}{۲^{۱۰}}$

۳) $۱+\frac{۱}{۲^{۱۰}}$

۴) $۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

مجموع دو دنبالهٔ هندسی رو می‌بینی.

درس Box

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی a_n با قدرنسبت q از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_۱(q^n - ۱)}{q - ۱} = \frac{qa_n - a_۱}{q - ۱}$$

پاسخ خیلی تشریحی

اگر فرض کنیم $b_n = (\frac{۱}{۲})^n$ و $c_n = (-۱)^n$ باشد، مجموع ده جملهٔ اول این دو دنباله، برابر مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ a_n است:

$$\begin{cases} b_n = (\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow S_n = \frac{\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۲^n})}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۱-\frac{۱}{۲^n} \Rightarrow S_{۱۰} = ۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}} \\ c_n = (-۱)^n \Rightarrow S_n = \begin{cases} -۱ & ; \text{فرد } n \\ ۰ & ; \text{زوج } n \end{cases} \Rightarrow S_{۱۰} = ۰ \end{cases}$$

در نهایت خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ مجموع معکوس جذر جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲+(k-۱)x+۱=۰$ برابر ۳ است. مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-kx-۱=۰$ کدام است؟

$\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، مجموع جواب‌ها $S=-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P=\frac{c}{a}$ است.

روابط دیگر بین α و β به صورت زیر است:

$$\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$$

$$\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳SP$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{S^۲}{P}-۲$$

$$\xrightarrow{\alpha,\beta>۰}\begin{cases}\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\\ \alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=\sqrt{SP+۲P\sqrt{P}}\\ \alpha\sqrt{\alpha}+\beta\sqrt{\beta}=\sqrt{S^۳-۳SP+۲P\sqrt{P}}\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲+(k-۱)x+۱=۰$ را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{۱-k}{۴},P=\alpha\beta=\frac{۱}{۴}$$

گام دوم: مجموع معکوس جذر α و β برابر $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ است که طبق فرض باید برابر ۳ قرار دهیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=۳$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{\frac{۱-k}{۴}+۲(\frac{۱}{۲})}}{\frac{۱}{۲}}=۳\Rightarrow\sqrt{\frac{۵-k}{۴}}=\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۲}\frac{۵-k}{۴}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow k=-۴$$

گام سوم: مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-kx-۱=۰$ برابر $\frac{k}{۳}$ است که به ازای $k=-۴$ برابر $-\frac{۴}{۳}$ است.

کنکور

مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله $۳۶x^۲-(m+۱۴)x+۱=۰$ برابر ۵ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲+۳x+۲=۰$ کدام است؟ (سؤال ۱۱۸ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ۳x = ۱$ اعداد α و β هستند، اگر $\frac{\alpha+k}{\beta-۱} + \frac{\beta+k}{\alpha-۱} = ۲$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = -۳$$

$$P = \alpha\beta = -۱$$

گام دوم: حالا عبارت $\frac{\alpha+k}{\beta-۱} + \frac{\beta+k}{\alpha-۱}$ را برحسب S و P می‌نویسیم:

$$\frac{\alpha+k}{\beta-۱} + \frac{\beta+k}{\alpha-۱} = \frac{(\alpha+k)(\alpha-۱)+(\beta+k)(\beta-۱)}{(\alpha-۱)(\beta-۱)} = \frac{\alpha^۲+\beta^۲+(k-۱)(\alpha+\beta)-۲k}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+۱}$$

بنابراین به کمک روابط درس‌باکس پاسخ قبل داریم:

$$\frac{\alpha+k}{\beta-۱} + \frac{\beta+k}{\alpha-۱} = \frac{S^۲-۲P+(k-۱)S-۲k}{P-S+۱}$$

گام سوم: از مقادیر گام اول استفاده می‌کنیم و حاصل عبارت بالا را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۹+۲-۳(k-۱)-۲k}{-۱+۳+۱} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۴-۵k}{۳} = ۲ \Rightarrow k = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ به ازای چند مقدار طبیعی m، سهمی $y = x^۲ + mx + ۳ - m$ فقط از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

براساس چهار مشخصهٔ a، b، c و $\Delta = b^۲ - ۴ac$، می‌توان وضعیت سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ را در دستگاه مختصات تعیین کرد:

ردیف	وضعیت	شرایط
۱	سهمی بالا محور x است.	$a > ۰, \Delta < ۰$
۲	سهمی پایین محور x است.	$a < ۰, \Delta < ۰$
۳	سهمی از بالا بر محور x مماس است.	$a > ۰, \Delta = ۰$
۴	سهمی از پایین بر محور x مماس است.	$a < ۰, \Delta = ۰$
۵	سهمی حداکثر از سه ناحیه می‌گذرد.	$\Delta < ۰$ یا $\Delta > ۰, \frac{c}{a} \geq ۰$
۶	سهمی دقیقاً از سه ناحیه می‌گذرد.	$\Delta > ۰, \frac{c}{a} \geq ۰$
۷	سهمی فقط از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.	$\Delta > ۰, a < ۰, b < ۰, c \leq ۰$
۸	سهمی فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.	$\Delta > ۰, a < ۰, b > ۰, c \leq ۰$
۹	سهمی فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد.	$\Delta > ۰, a > ۰, b < ۰, c \geq ۰$
۱۰	سهمی فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.	$\Delta > ۰, a > ۰, b > ۰, c \geq ۰$
۱۱	سهمی از هر چهار ناحیه می‌گذرد.	$\frac{c}{a} < ۰$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا Δ ی سهمی را برحسب m به دست می‌آوریم:

$$\Delta = m^۲ - ۴(۳ - m) = m^۲ + ۴m - ۱۲ = (m + ۶)(m - ۲)$$

گام دوم: حالا طبق ردیف ۱۰ جدول درس‌باکس داریم:

$$\begin{cases} \Delta = (m+۶)(m-۲) > ۰ \Rightarrow m < -۶ \text{ یا } m > ۲ & (۱) \\ a = ۱ > ۰ \quad ✓ \\ b > ۰ \Rightarrow m > ۰ & (۲) \\ c \geq ۰ \Rightarrow ۳ - m \geq ۰ \Rightarrow m \leq ۳ & (۳) \end{cases}$$

گام سوم: از اشتراک مجموعه‌های (۱)، (۲) و (۳)، مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای m بازهٔ $(۲, ۳]$ به دست می‌آید که فقط یک عدد صحیح را شامل می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶ حدود k کدام باشد تا معادلهٔ $k(x^۴+x^۲+\frac{۱}{۲})=۴x^۲+\frac{۱}{۲}$، حداکثر تعداد جواب‌های ممکن را داشته باشد؟

۴ جواب

۱) $(۱,۴)$
۲) $(۲,۴)$
۳) $(۱,۲)$
۴) $(۰,۲)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ را با شرط $a\neq ۰$، معادلهٔ درجه‌چهارم دومجذوری می‌نامند. این معادله با تغییر متغیر $t=x^۲\geq ۰$ به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌شود.

با در نظر گرفتن پارامترهای a، b و c، $\Delta=b^۲-۴ac$، حالت‌های زیر را برای جواب‌های این معادله داریم:

ردیف	شرایط	وضعیت جواب‌های معادله
۱	$\Delta<۰$	جواب حقیقی ندارد.
۲	$\Delta=۰, ab>۰$	جواب حقیقی ندارد.
۳	$\Delta=۰, ab<۰$	$x=\pm\sqrt{-\frac{b}{۲a}}$ جواب‌های معادله هستند.
۴	$ab>۰, c=۰$	$x=۰$ تنها جواب معادله است.
۵	$ab<۰, c=۰$	$x=۰$ ، $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ ، سه جواب معادله هستند.
۶	$\Delta>۰, ac>۰, ab>۰$	معادله جواب حقیقی ندارد.
۷	$\Delta>۰, ac>۰, ab<۰$	معادله چهار جواب دارد که دوبه‌دو قرینهٔ یکدیگرند.
۸	$ac<۰$	معادله دو جواب دارد که قرینهٔ یکدیگرند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$kx^۴+kx^۲+\frac{k}{۲}=۴x^۲+\frac{۱}{۲}\Rightarrow kx^۴+(k-۴)x^۲+\frac{k-۱}{۲}=۰$$

معادله درجه‌چهارم است، پس حداکثر تعداد جواب‌های آن برابر ۴ است.

گام دوم: مطابق شرایط ردیف ۷ جدول درس‌باکس، معادله در شرایط زیر ۴ جواب حقیقی دارد:

$$\Delta=(k-۴)^۲-۴k(\frac{k-۱}{۲})=k^۲-۸k+۱۶-۲k^۲+۲k=-k^۲-۶k+۱۶=-(k+۸)(k-۲)>۰$$

$$\Rightarrow -۸<k<۲ \quad (۱)$$

$$k(\frac{k-۱}{۲})>۰ \xrightarrow{\text{خارج ریشه‌ها}} k<۰ \text{ یا } k>۱ \quad (۲)$$

$$k(k-۴)<۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} ۰<k<۴ \quad (۳)$$

گام سوم: از اشتراک مجموعه‌های (۱)، (۲) و (۳)، مجموعه مقادیر قابل قبول برای k، بازهٔ $(۱,۲)$ به دست می‌آید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ تنها جواب معادلهٔ $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+k}{x+1}=3$، برابر $x=m$ است. حاصل $k+m$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در سمت چپ تساوی، مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+k}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)+(x-2)(x+k)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+(k-2)x-2k-1}{x^2-x-2}=3$$

با طرفین‌وسطین داریم:

$$3x^2-3x-6=2x^2+(k-2)x-2k-1$$

$$\Rightarrow x^2-(k+1)x+2k-5=0 \quad (*)$$

در حالت‌های زیر معادلهٔ بالا، فقط یک جواب دارد:

گام دوم: الف) Δ ی معادله برابر صفر باشد:

$$\Delta=(k+1)^2-4(2k-5)=k^2-6k+21=0$$

هیچ مقدار حقیقی برای k پیدا نمی‌شود.

گام سوم: ب) معادلهٔ $(*)$ دو جواب داشته باشد که یکی از آن‌ها به دلیل این‌که ریشهٔ مخرج است، قابل قبول نباشد:

$\xrightarrow{x=2 \text{ قابل قبول نباشد.}}$ غیرممکن $4-2(k+1)+2k-5=0 \Rightarrow -3=0$

$\xrightarrow{x=-1 \text{ قابل قبول نباشد.}} 1+k+1+2k-5=0 \Rightarrow k=1$

در این شرایط، معادلهٔ $\frac{x-1}{x-2}+1=3$ را داریم:

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x-2}=2 \Rightarrow 2x-4=x-1 \Rightarrow x=3$$

که تنها جواب آن $m=3$ است. خواستهٔ سؤال $k+m=4$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ **سرعت محمد در انجام کاری ۱/۵ برابر سرعت علی است و اگر این دو نفر کار را هم‌زمان شروع کنند، در ۶ ساعت به اتمام می‌رسانند. این دو نفر کار را با هم شروع می‌کنند و بعد از گذشت ۴ ساعت، محمد کار را رها می‌کند. علی چند ساعت دیگر باید کار کند تا آن را به اتمام برساند؟**

۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

فرض کنید شیء ۱ کاری را در مدت‌زمان t_1، شیء ۲ در مدت‌زمان t_2، ...، شیء n در مدت‌زمان t_n به اتمام برساند. اگر این n شیء هم‌زمان با هم شروع به کار کنند و کار در مدت‌زمان T به اتمام برسد، رابطهٔ زیر را داریم:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\ldots+\frac{1}{t_n}=\frac{1}{T}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مدت‌زمان انجام کار توسط علی را a و مدت‌زمان انجام کار توسط محمد را m در نظر می‌گیریم. طبق فرض، سرعت محمد ۱/۵ برابر سرعت علی است، پس $m=\frac{2}{3}a$ است و طبق رابطهٔ درس‌باکس داریم:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{a}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}a}+\frac{1}{a}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{2a}=\frac{1}{6} \Rightarrow a=15 \text{ ساعت}$$

و در نتیجه $m=10$ ساعت است.

گام دوم: این دو نفر اگر با هم کار کنند، در هر یک ساعت $\frac{1}{6}$ کار انجام می‌شود، بنابراین در ۴ ساعت، $\frac{2}{3}$ کار به اتمام می‌رسد.

حالا اگر محمد انصراف دهد، $\frac{1}{3}$ باقی‌مانده را علی باید به تنهایی انجام دهد که مدت‌زمان انجام آن برابر است با:

$$\Delta t=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{15}}=5 \text{ ساعت}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ $2x^2 = x + \sqrt{2x^2 - x + 2}$ چه‌قدر از حاصل‌ضرب آن‌ها بیشتر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint $2x^2 - x$ رو متغیر جدید بگیر.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ زیر را داریم:

$$2x^2 - x = \sqrt{2x^2 - x + 2}$$

که اگر $2x^2 - x$ را t بگیریم به معادلهٔ $t = \sqrt{t+2}$ می‌رسیم.

گام دوم: طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{t>0} t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 2$$

گام سوم: یعنی در اصل باید معادلهٔ $2x^2 - x = 2$ را برحسب x حل کنیم:

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$$

مجموع جواب‌های این معادله برابر $\frac{1}{2}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -1 است. مجموع به اندازهٔ $\frac{3}{2}$ از حاصل‌ضرب بیشتر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ معادلهٔ $x^{۲} - \sqrt{x-۲} = x - \sqrt{۲-\sqrt{۲x}}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مشاوره اغلب معادلات گنگی که ظاهر بسیار ترسناکی دارند و با به توان رسانیدن چند بارهٔ آن، به معادلات مرتبهٔ بالاتری می‌رسند، در ابتدا با به دست آوردن محدودهٔ قابل قبول برای جواب‌ها، بسیار ساده‌تر حل می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint به حدود x دقت کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** بهتر است ابتدا محدودهٔ قابل قبول برای x را به دست آوریم:

$$\sqrt{x-۲}: x-۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{۲x}}: ۲-\sqrt{۲x} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲x} \leq ۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲x \leq ۴ \Rightarrow x \leq ۲$$

از اشتراک دو محدودهٔ به‌دست‌آمده برای x، تنها جواب ممکن برای معادله، $x = ۲$ است.

گام دوم: اگر $x = ۲$ را نیز در معادله جای‌گذاری کنیم، می‌بینیم که صدق نمی‌کند؛ بنابراین معادله جواب ندارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ معادلهٔ $\frac{|x+۲|}{۲} = x^۲ + ۴x + m$ سه جواب دارد. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

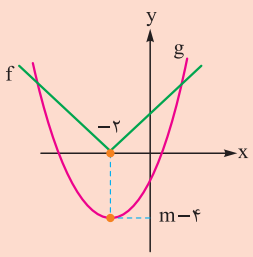
Hint از روش رسم کمک بگیر.

درس Box اگر مقصود سؤال صرفاً تعداد جواب‌های یک معادله باشد، می‌توانیم از روش هندسی کمک بگیریم؛ بدین ترتیب که دو تابع مناسب مانند f و g پیدا می‌کنیم که:

- اولاً نمودارهای آن‌ها قابل رسم باشند.
- ثانیاً تعداد نقاط تقاطع این دو نمودار، یعنی تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$، تعداد جواب‌های معادلهٔ اصلی را نتیجه بدهد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** اگر فرض کنیم $f(x) = \frac{|x+۲|}{۲}$ و $g(x) = x^۲ + ۴x + m = (x+۲)^۲ - ۴ + m$ باشد، معادلهٔ صورت سؤال $f(x) = g(x)$ است و طبیعتاً تعداد نقاط تلاقی نمودارهای توابع f و g، برابر تعداد جواب‌های معادله است.

گام دوم: حالا این دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



گام سوم: برای این‌که تعداد نقاط مشترک دو نمودار برابر ۳ شود، لازم است که رأس سهمی بر نقطهٔ $(-۲,۰)$ منطبق شود؛ یعنی:

$$m - ۴ = ۰ \Rightarrow m = ۴$$

گام چهارم: در این شرایط جواب‌های معادله α، -۲ و $-۴-\alpha$ هستند. دقت کنید که دو جواب α و $-۴-\alpha$ نسبت به -۲ متقارن‌اند. حالا α را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x>-۲} \frac{x+۲}{۲} = (x+۲)^۲ \xrightarrow{(x+۲)\neq ۰} x+۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$$

گام پنجم: در نتیجه بزرگ‌ترین جواب $\alpha = -۱/۵$ و کوچک‌ترین جواب $-۴-\alpha = -۲/۵$ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱ است.

کنکور **اگر معادلهٔ $|۴x-۲| = x^۲ - x + a$ دارای سه ریشهٔ حقیقی باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر معادله کدام است؟**

(سؤال ۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) ۴ ۲) ۴/۴ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

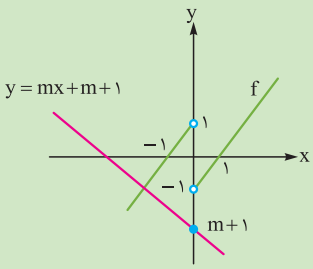
۷۲ معادلهٔ $x - \frac{x}{|x|} = mx + m + ۱$ دو جواب دارد. حدود m کدام است؟

۱) $-۱ < m < ۱$
۲) $m > ۱$
۳) $m < -۱$
۴) $-۲ < m < ۰$

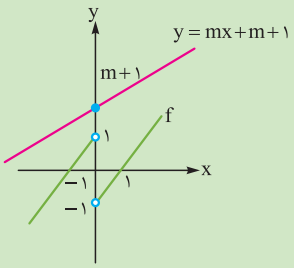
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: خط $y = mx + m + ۱$ و نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



$m < ۰$



$m > ۰$

گام دوم: با توجه به شکل بالا، تعداد نقاط مشترک، هنگامی برابر ۲ است که m منفی باشد و ثانیاً عرض از مبدأ خط، یعنی $m + ۱$ در بازهٔ $(-۱, ۱)$ باشد:

$$\begin{cases} m < ۰ & (۱) \\ -۱ < m + ۱ < ۱ \Rightarrow -۲ < m < ۰ & (۲) \end{cases}$$

از اشتراک دو محدودهٔ به‌دست‌آمده، محدودهٔ قابل قبول برای m، $-۲ < m < ۰$ است.

کتاب درسی

نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y = ۳$ معادله‌های به‌دست‌آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

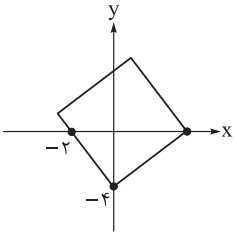
(حسابان (۱) ـ تمرین ۵ (قسمت الف) صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = |x^۲ - ۶x|$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ مساحت مربع شکل مقابل کدام است؟



۱) ۶۳

۲) ۶۴

۳) ۸۱

۴) ۸۰

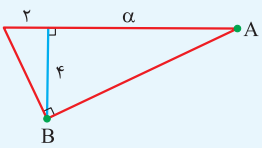
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از شیب خطوط استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شیب خط گذرنده از نقاط $(\alpha,0)$ و $(0,-4)$ باید قرینه و معکوس شیب خط گذرنده از نقاط $(0,-4)$ و $(-2,0)$ باشد:

$$\Rightarrow \frac{0-(-4)}{\alpha-0}=-\frac{1}{\frac{0-(-4)}{-2-0}} \Rightarrow \frac{4}{\alpha}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=8$$

یه‌جور دیگه رأسی را که روی محور x قرار گرفته است، نقطهٔ $A(\alpha,0)$ در نظر می‌گیریم، براساس شکل زیر و روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$2\alpha=4^2=16 \Rightarrow \alpha=8$$

گام دوم: دو رأس این مربع نقاط $A(8,0)$ و $B(0,-4)$ هستند و به سادگی می‌توانیم طول ضلع آن را حساب کنیم:

$$AB=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}$$

مساحت مربع برابر ۸۰ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ نقطهٔ A روی یکی از نیمسازهای دو خط $2x-y=1$ و $x+2y=3$ قرار دارد. کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

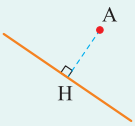
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

- فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از یکدیگر برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

- فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:



$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو نیم‌خط آن زاویه به یک فاصله است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ روی نیمسازهای دو خط $2x-y-1=0$ و $x+2y-3=0$ قرار دارد، بنابراین از این دو خط به یک فاصله است:

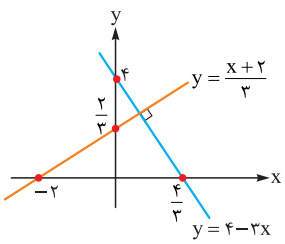
$$AH=\frac{|2\alpha-\beta-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2\alpha-\beta-1|}{\sqrt{5}}$$

$$AH'=\frac{|\alpha+2\beta-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|\alpha+2\beta-3|}{\sqrt{5}}$$

گام دوم: AH و AH' را برابر قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow |2\alpha-\beta-1|=|\alpha+2\beta-3| \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta-1=\alpha+2\beta-3 \Rightarrow \beta=\frac{\alpha+2}{3} \\ 2\alpha-\beta-1=-\alpha-2\beta+3 \Rightarrow \beta=4-3\alpha \end{cases}$$

گام سوم: یعنی نقطهٔ A روی یکی از خط‌های $y=\frac{x+2}{3}$ یا $y=4-3x$ قرار دارد:



گام چهارم: فاصلهٔ مبدأ مختصات را از این دو خط حساب می‌کنیم:

- $y=\frac{x+2}{3} \Rightarrow x-3y+2=0 \Rightarrow OA=\frac{2}{\sqrt{10}}$
- $y=4-3x \Rightarrow 3x+y-4=0 \Rightarrow OA=\frac{4}{\sqrt{10}}$

گام پنجم: از بین مقادیر به‌دست‌آمده برای OA، کم‌ترین مقدار $\frac{2}{\sqrt{10}}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۱)$ نسبت به خط $y=۲x-۱$ نقطهٔ A' است. فاصلهٔ نقطهٔ A' از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۰/۴\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۶\sqrt{۵}$

۳) $۰/۶\sqrt{۳}$ ۴) $۰/۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

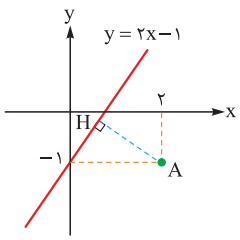
نکته

- اگر شیب خطی m باشد، شیب خط عمود بر آن $-\frac{۱}{m}$ است.
- اگر A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O باشد، داریم:

$$A'=۲O-A$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا باید مختصات نقطهٔ H را در شکل زیر به دست آوریم:



شیب خط گذرا از نقاط A و H برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. حالا معادلهٔ این خط را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} m=-\frac{۱}{۲} \\ A(۲,-۱) \end{cases} \Rightarrow y-(-۱)=-\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x$$

گام دوم: حالا دو خط $y=۲x-۱$ و $y=-\frac{۱}{۲}x$ را تقاطع می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ H به دست آید:

$$۲x-۱=-\frac{۱}{۲}x \Rightarrow \frac{۵}{۲}x=۱ \Rightarrow x=\frac{۲}{۵} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y=-\frac{۱}{۵}$$

گام سوم: بنابراین باید قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۱)$ را نسبت به نقطهٔ $H(\frac{۲}{۵},-\frac{۱}{۵})$ به دست آوریم:

$$A'=۲H-A \Rightarrow A'(-\frac{۶}{۵},\frac{۳}{۵})$$

گام چهارم: فاصلهٔ نقطهٔ A' را از مبدأ مختصات حساب می‌کنیم:

$$OA'=\sqrt{(-\frac{۶}{۵})^۲+(\frac{۳}{۵})^۲}=\frac{۳}{۵}\sqrt{۵}=۰/۶\sqrt{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه یازدهم

۷۶ در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۶ و ۸، دایرهٔ محاطی داخلی در نقطهٔ تماس، ضلع متوسط مثلث را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

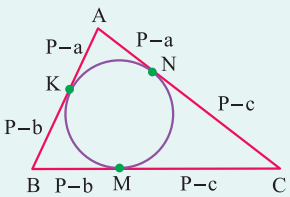
مشاوره این سؤال براساس تمرین ۶ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است و از ایده‌های مورد توجه و پرتکرار در سؤالات کنکور به شمار می‌رود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) اندازهٔ مماس‌های رسم‌شده از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن دایره، برابر یکدیگرند.

۲) مطابق شکل، اگر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به طول اضلاع $BC=a$، $AC=b$، $AB=c$، به ترتیب در نقاط M، N و K بر اضلاع BC، AC و AB مماس باشد، آن‌گاه:



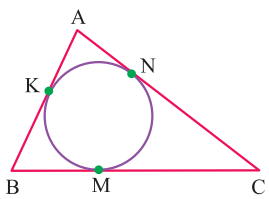
$$\begin{cases} AN = AK = P - a \\ BM = BK = P - b \\ CM = CN = P - c \end{cases}$$

در روابط فوق P نصف محیط مثلث ABC است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنید در مثلث ABC، $a=۸$، $b=۶$ و $c=۴$ باشد. در این صورت نصف محیط مثلث ABC برابر است با:

$$P = \frac{۴+۶+۸}{۲} = ۹$$

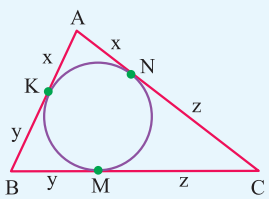


گام دوم: ضلع $AC=b=۶$، ضلع متوسط مثلث ABC است، پس نسبت قطعات ایجادشده روی این ضلع توسط نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{P-a}{P-c} = \frac{۹-۸}{۹-۴} = \frac{۱}{۵}$$

یه‌جور دیگه

می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، پس مطابق شکل و با توجه به مقادیر داده‌شده، داریم:



$$\begin{cases} x+y=۴ \\ x+z=۶ \\ y+z=۸ \end{cases}$$

از طرفی طبق فرض $x+y+z=\frac{۱۸}{۲}=۹$، بنابراین:

$$\begin{cases} x=(x+y+z)-(y+z)=۹-۸=۱ \\ z=(x+y+z)-(x+y)=۹-۴=۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{z}=\frac{۱}{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نسبت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، به شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABH کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

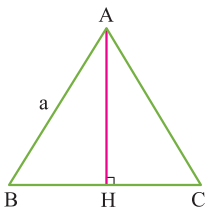
۱) شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع، $\frac{۲}{۳}$ طول ارتفاع آن است.

۲) طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a، برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$.

۳) شعاع دایرهٔ محیطی هر مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با نصف طول وتر آن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طول ضلع مثلث ABC را a در نظر می‌گیریم، بنا به درس‌باکس، اگر شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را با $R_۱$ نمایش دهیم، داریم:



$$R_۱ = \frac{۲}{۳}AH = \frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

گام دوم: $\overset{\Delta}{ABH}$، مثلثی قائم‌الزاویه، به طول وتر a است، پس اگر شعاع دایرهٔ محیطی آن را با $R_۲$ نمایش دهیم، داریم:

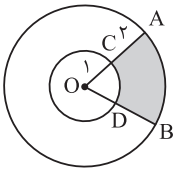
$$R_۲ = \frac{۱}{۲}a$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال، برابر است با:

$$\frac{R_۱}{R_۲} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}a}{\frac{۱}{۲}a} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} = \sqrt{\frac{۴}{۳}}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ مطابق شکل، دو دایره به مرکز O رسم شده‌اند. اگر $A\hat{O}B = ۷۲^\circ$، آن‌گاه مساحت قسمت رنگی به کدام عدد نزدیک‌تر است؟



۱) ۵

۲) ۶

۳) ۸

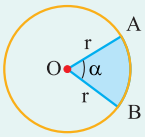
۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

به سطح محصور بین دو شعاع از یک دایره، قطاع می‌گوییم، مثلاً قسمت رنگی در شکل زیر، یک قطاع α درجه با شعاع r است.

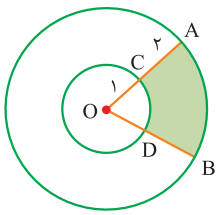
مساحتش هم از این رابطه محاسبه می‌شود:



$$S_{\text{قطاع AOB}} = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} \times (\pi r^۲)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مساحت ناحیهٔ رنگی، برابر است با اختلاف مساحت‌های دو قطاع OAB و OCD:



گام دوم: ابتدا مساحت هر کدام از قطاع‌ها را به دست می‌آوریم:

مساحت قطاع OAB: $S_۱ = \frac{۷۲^\circ}{۳۶۰^\circ}(\pi \times ۳^۲) = \frac{۹}{۵}\pi$

مساحت قطاع OCD: $S_۲ = \frac{۷۲^\circ}{۳۶۰^\circ}(\pi \times ۱^۲) = \frac{۱}{۵}\pi$

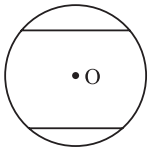
گام سوم: مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با:

$$S_۱ - S_۲ = \frac{۹}{۵}\pi - \frac{۱}{۵}\pi = \frac{۸}{۵}\pi$$

با فرض $\pi \simeq ۳$ و با در نظر گرفتن گزینه‌ها، مقدار $\frac{۸}{۵}\pi$، به عدد ۵ نزدیک‌تر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ **مطابق شکل زیر، دو وتر موازی به طول‌های ۹ و ۷ در یک دایره رسم شده‌اند. اگر فاصلهٔ بین این دو وتر ۴ باشد، مساحت دایره، چند برابر π است؟**



۱) ۲۰/۷۵

۲) ۲۱/۲۵

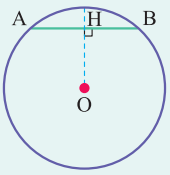
۳) ۲۱/۷۵

۴) ۲۲/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

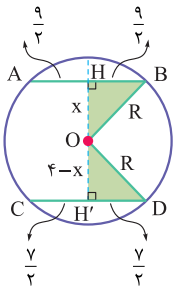
اگر از مرکز دایره، عمودی بر یک وتر دلخواه رسم شود، حتماً آن وتر را نصف می‌کند، مثلاً در شکل زیر اگر $OH \perp AB$ باشد، می‌توانیم بگوییم $AH = HB$ است:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: وترهای AB و CD موازی‌اند، بنابراین اگر از مرکز دایره، عمودی بر یکی از آن‌ها رسم کنیم بر دیگری هم عمود خواهد بود. این کار را در شکل زیر انجام داده‌ایم. این عمودها هر دو وتر را نصف می‌کنند، یعنی $HB = \frac{۹}{۲}$ و $H'D = \frac{۷}{۲}$ است. در ادامه فرض می‌کنیم $OH = x$ باشد، در این صورت چون فاصلهٔ دو وتر موازی ۴ است، $OH' = ۴ - x$ می‌شود.

گام دوم: با نوشتن فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ رنگی، مقدار x را پیدا می‌کنیم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{OHB}: R^۲ = x^۲ + (\frac{۹}{۲})^۲ \\ \overset{\Delta}{OH'D}: R^۲ = (۴-x)^۲ + (\frac{۷}{۲})^۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ تساوی‌ها برابرند.}} x^۲ + \frac{۸۱}{۴} = (۴-x)^۲ + \frac{۴۹}{۴}$$

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{۸۱}{۴} = (۱۶ + x^۲ - ۸x) + \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow ۸x = ۸ \Rightarrow x = ۱$$

گام سوم: در آخر با جای‌گذاری $x = ۱$ در تساوی «$R^۲ = x^۲ + (\frac{۹}{۲})^۲$»، شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$R^۲ = x^۲ + \frac{۸۱}{۴} = ۱ + \frac{۸۱}{۴} = \frac{۸۵}{۴} \Rightarrow S = \pi R^۲ = \frac{۸۵}{۴}\pi = ۲۱/۲۵\pi$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ مستطیل $ABCD$ به اضلاع $AB=۴$ و $AD=۶$ مفروض است. اگر دایره‌ای به قطر AD رسم کنیم، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره از رأس C کدام است؟

۱) ۲

۲) ۱/۵

۳) $\sqrt{۵}$

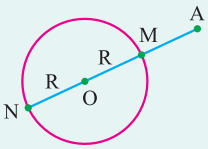
۴) $۱+\sqrt{۲}$

مشاوره یک سؤال متوسط از مبحث «وضعیت نقطه و دایره». توجه داشته باشید با این‌که روش یافتن نزدیک‌ترین و دورترین نقطهٔ دایره از یک نقطه در کتاب درسی مطرح نشده است، اما در کنکور خواسته شده است.

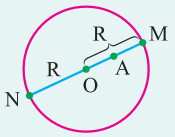
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض‌اند. اگر خط گذرنده از A و O، دایرهٔ C را در M و N قطع کند، آن‌گاه M و N به ترتیب نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره از نقطهٔ A هستند و داریم:



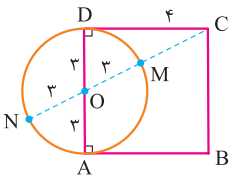
$$AM=OA-R\ ,\ AN=OA+R$$



$$AN=OA+R\ ,\ AM=R-OA$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون پاره‌خط AD به طول ۶ واحد، قطر دایره است، پس شعاع دایره $\frac{۶}{۲}=۳$ واحد است. خط گذرنده از C و O را رسم می‌کنیم تا دایره را در M و N قطع کند. با توجه به درس‌باکس باید طول CM را بیابیم:



گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODC بنا به قضیهٔ فیثاغورس، داریم:

$$OC=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

در نهایت می‌توان گفت:

$$\text{کم‌ترین فاصلهٔ } C \text{ از نقاط دایره} = CM=OC-OM=۵-۳=۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ **طول مماس‌مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۷ برابر با ۱۲ است. بیشترین فاصلهٔ بین نقاط این دو دایره کدام است؟**

۱) ۲۴

۲) ۲۳

۳) ۲۲

۴) ۲۱

مشاوره محاسبهٔ طول مماس‌های مشترک، از تیپ سؤال‌های مهم، هم در آزمون‌های چهارگزینه‌ای و هم آزمون‌های تشریحی است. حتماً فرمول‌های آن را بلد باشید و حواستان باشد که فرمول مماس‌مشترک خارجی و فرمول مماس‌مشترک داخلی را جابه‌جا حفظ نکنید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از فرمول مماس‌مشترک داخلی، فاصلهٔ بین مرکزها را به دست آورید و برای محاسبهٔ بیشترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایره، از رسم شکل استفاده کنید.

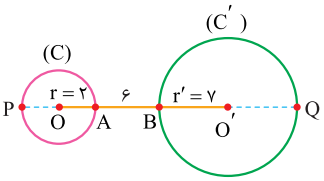
درس Box اگر دو دایرهٔ $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ مماس‌مشترک داخلی داشته باشند، طول مماس‌مشترک داخلی آن‌ها برابر است با $\sqrt{OO'^2-(r+r')^2}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سؤال می‌گوید طول مماس‌مشترک داخلی دو دایرهٔ $C(O,2)$ و $C'(O',7)$ برابر با ۱۲ است و خودمان می‌دانیم که طول مماس‌مشترک داخلی این دو دایره $\sqrt{OO'^2-(7+2)^2}$ است، پس:

$$12=\sqrt{OO'^2-9^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 144=OO'^2-81 \Rightarrow OO'^2=225 \Rightarrow OO'=15$$

گام دوم: با توجه به این‌که فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره $OO'=15$ است، شکل مناسب را رسم می‌کنیم:

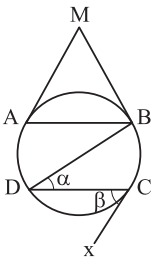


همان‌طور که می‌بینید، بیشترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایرهٔ C و C' برابر با طول پاره‌خط PQ است و داریم:

$$PQ=OO'+(r+r') \Rightarrow PQ=15+(2+7)=24$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ در شکل زیر MA، MB و Cx بر دایره مماس هستند. اگر $AB \parallel CD$ ، $\alpha = 1/5\beta$ و $\hat{M} = 30^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان CD چند درجه است؟



۱) ۱۰۰

۲) ۹۰

۳) ۱۱۰

۴) ۱۲۰

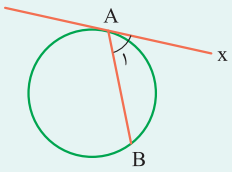
مشاوره این سؤال ترکیبی از مفاهیم زوایای محاطی و ظلی و ویژگی وترهای موازی در دایره است که مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۹۸ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint به برابری اندازهٔ کمان‌های $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BC}$ دقت کنید.

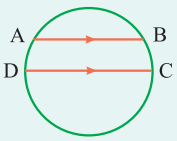
درس Box

۱) اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، برابر نصف اندازهٔ کمان مقابل آن است:



$$\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

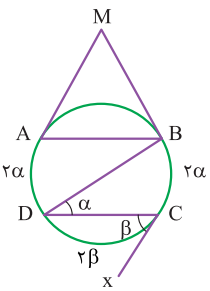
۲) اندازهٔ کمان‌های محصور به دو وتر موازی در دایره برابر یکدیگر است:



$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو زاویهٔ $M\hat{A}B$ و $M\hat{B}A$ هر دو ظلی هستند، پس داریم:



$$M\hat{A}B = M\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\overset{\Delta}{AMB}: \hat{M} + M\hat{B}A + M\hat{A}B = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2M\hat{A}B = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 150^\circ$$

گام دوم: می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابر یکدیگرند، از طرفی کمان BC روبه‌رو به زاویهٔ محاطی $\hat{D} = \alpha$ است، پس داریم:

$$\overset{\frown}{BC} = 2\alpha$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 2\alpha$$

از طرفی Cx بر دایره مماس است، پس زاویهٔ $D\hat{C}x$ ظلی است و داریم:

$$D\hat{C}x = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 2\beta \xrightarrow{B=1/5\alpha} \overset{\frown}{CD} = 3\alpha$$

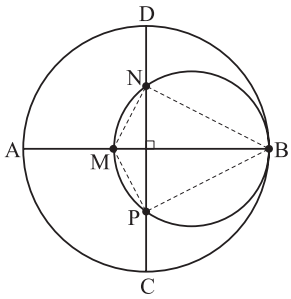
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = 360^\circ \Rightarrow 150^\circ + 2\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow 7\alpha = 210^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

گام سوم: در نهایت، داریم:

$$\overset{\frown}{CD} = 2\beta = 3\alpha = 90^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ مطابق شکل، دو دایره بر هم مماس و قطرهای AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM = ۴$ و $DN = ۳$ باشد، آن‌گاه مساحت چهارضلعی MNBP کدام است؟



۱) ۷

۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) ۷/۵

۴) $۴\sqrt{۵}$

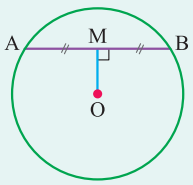
مشاوره شکل این سؤال را در یکی از تمرین‌های کتاب درسی داریم و با ایده‌گرفتن از این شکل، در کنکور هم سؤال داشته‌ایم. این سؤال، مشابه سوال کنکور طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

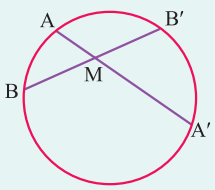
درس Box

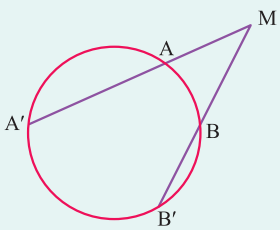
۱) نقطهٔ تقاطع هر دو قطر دلخواه یک دایره، مرکز آن است.

۲) اگر از مرکز یک دایره به وتری از آن دایره عمود کنیم، پای عمود، وتر را نصف می‌کند:



۳) **روابط طولی در دایره:** در هر دو شکل زیر، داریم:

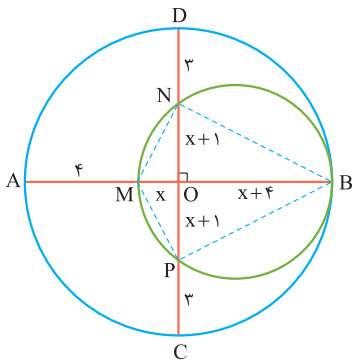




$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در دایرهٔ کوچک قطر MB عمود بر وتر NP آن را نصف می‌کند. فرض کنیم $OM = x$، در این صورت شعاع دایرهٔ بزرگ برابر $OA = OB = OD = OC = x + ۴$ است. داریم:



$$PC = OC - OP = OD - ON = DN = ۳$$

$$ON = OP = (x + ۴) - ۳ = x + ۱$$

گام دوم: بنا به رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ کوچک در نقطهٔ O داریم:

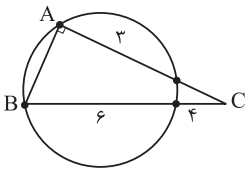
$$OM \times OB = ON \times OP \Rightarrow x(x + ۴) = (x + ۱)(x + ۱) \Rightarrow x^۲ + ۴x = x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

گام سوم: قطرهای چهارضلعی BPMN بر هم عمودند، پس:

$$S_{BPMN} = \frac{۱}{۲} BM \times NP = \frac{۱}{۲}(۲x + ۴)(۲x + ۲) = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۳ = ۷/۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ در شکل رسم‌شده، شعاع دایره کدام است؟

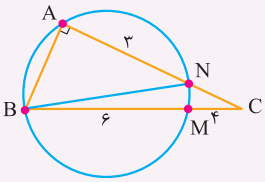


۱) ۳
۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

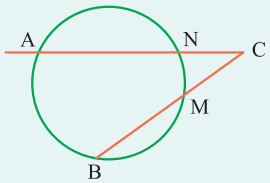
Hint

BN قطر دایره است.



درس Box

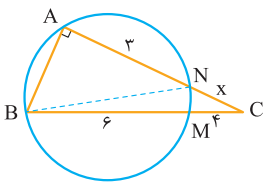
اگر مطابق شکل، امتدادهای دو وتر AN و BM در نقطهٔ C متقاطع باشند، داریم:



$$CN \times CA = CM \times CB$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ طول CN): با استفاده از روابط طولی در دایره، داریم:



$$CN \times CA = CM \times CB \Rightarrow x(x+۳) = ۴ \times ۱۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x = ۴۰ \Rightarrow x^۲ + ۳x - ۴۰ = ۰ \Rightarrow (x+۸)(x-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۸ \times \\ x = ۵ \checkmark \end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ طول AB): از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC استفاده می‌کنیم. داریم:

$$AB = \sqrt{BC^۲ - AC^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶$$

گام سوم: از آن‌جا که زاویهٔ محاطی A قائمه است، داریم:

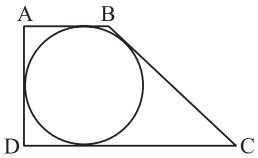
$$\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BMN} = ۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BMN} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow$$ BN قطر نیم‌دایره است.

گام چهارم: بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABN، داریم:

$$BN = \sqrt{AB^۲ + AN^۲} \Rightarrow BN = \sqrt{۶^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۴۵} \Rightarrow ۲R = ۳\sqrt{۵} \Rightarrow R = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ مطابق شکل، در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ **ABCD** دایرهٔ محاطی آن رسم شده است. اگر $\hat{B} = ۱۵۰^\circ$، آن‌گاه نسبت مساحت دایره به مساحت ذوزنقه کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۳+\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{\pi}{۴+\sqrt{۳}}$

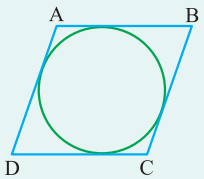
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

در چهارضلعی محیطی ABCD داریم: $AB + DC = AD + BC$.

درس Box

چهارضلعی ABCD، محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اضلاع روبه‌روی آن با هم برابر باشد، مثلاً در شکل زیر داریم:

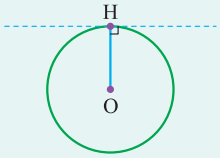


$$ABCD \text{ محیطی} \iff AB + DC = AD + BC$$

نکته

۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر و ضلع رو به زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

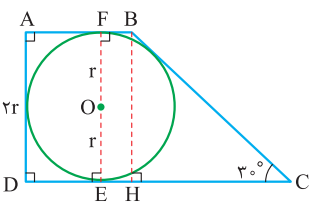
۲) شعاع دایره، در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ارتفاع ذوزنقهٔ محیطی برابر قطر دایرهٔ محاطی آن است و مجموع قاعده‌های ذوزنقهٔ محیطی هم برابر مجموع ساق‌های آن است؛ در نتیجه با داشتن این اطلاعات، مساحت ذوزنقه که برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع ذوزنقه، محاسبه می‌شود.

گام دوم: ابتدا توجه کنید که اگر $\hat{B} = ۱۵۰^\circ$ آن‌گاه $\hat{C} = ۳۰^\circ$. مطابق شکل، OE و OF در نقاط تماس بر قاعده‌های CD و AB عمودند، پس OE و OF در یک امتدادند و EF قطر دایرهٔ محاطی است و برابر با ارتفاع ذوزنقه است:



$$AD = BH = EF = ۲r$$

گام سوم: مطابق با درس‌باکس، چون ABCD ذوزنقهٔ محیطی است؛ پس:

$$AB + DC = AD + BC = ۲r + BC \qquad (۱)$$

برای محاسبهٔ طول BC در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم:

$$\hat{C} = ۳۰^\circ \ , \ BH = ۲r \Rightarrow BC = ۲BH = ۴r$$

پس در رابطهٔ (۱) داریم:

$$AB + DC = ۲r + ۴r = ۶r$$

در نهایت:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BH(AB + DC) = \frac{۱}{۲} \times ۲r \times ۶r = ۶r^۲$$

پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{\pi r^۲}{۶r^۲} = \frac{\pi}{۶}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آمار و احتمال

۸۶ اگر A مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ باشد، متمم A نسبت به مرجع $U=(-2,7]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

مفهوم و ویژگی‌های متمم:

تعریف: متمم مجموعهٔ A نسبت به مرجع U را با A' نشان می‌دهیم:

$$A'=U-A=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

ویژگی‌ها:

$$A\cup A'=U\ ,\ A\cap A'=\varnothing\ ,\ A-A'=A\ ,\ A'-A=A'$$

$$(\varnothing)'=U\ ,\ U'=\varnothing\ ,\ (A')'=A$$

متمم در روابط مجموعه‌ها:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow B'\subseteq A'$$

$$A'-B'=B-A\ ,\ (A\cup B)'=A'\cap B'\ ,\ (A\cap B)'=A'\cup B'\ ,\ A\cap B'=A-B$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

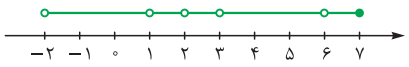
گام اول: شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ عبارت‌اند از $1,2,3,6$ پس:

$$A=\{1,2,3,6\}$$

گام دوم: متمم A نسبت به U برابر است با:

$$A'=U-A=(-2,7]-\{1,2,3,6\}$$

روی محور هم نشان می‌دهیم:



گام سوم: در A' اعداد صحیح -1 و 0 و 4 و 5 و 7 را داریم. یعنی:

$$n(A'\cap\mathbb{Z})=5$$

به بیان دیگر A' شامل ۵ عدد صحیح است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ از ۱۴۰ مشتری یک فروشگاه، ۷۰ نفر کارت بانکی نوع A و ۴۵ نفر کارت نوع B دارند. اگر تعداد افرادی که هیچ‌یک از دو کارت را ندارند، دو برابر تعداد افرادی باشد که هر دو نوع کارت را دارند، چند نفر از مشتریان فقط یک نوع کارت دارند؟

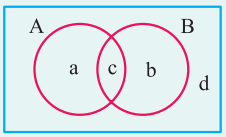
۱) ۹۰ ۲) ۶۵

۳) ۱۱۵ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

محاسبهٔ تعداد اعضا در اجتماع و اشتراک و تفاضل:



تعداد اعضای A': $n(A') = n(U) - n(A)$

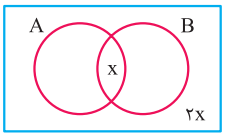
ناحیهٔ a و b و c ⇐ تعداد اعضای اجتماع: $n(\underbrace{\text{در A یا B یا هر دو}}_{\text{حداقل یکی از آن‌ها}}) = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ناحیهٔ a ⇐ تعداد اعضای تفاضل: $n(\text{فقط در A}) = n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$

ناحیهٔ d ⇐ تعداد اعضای بیرون A و B: $n(\text{هیچ‌کدام}) = n(\underbrace{A' \cap B'}_{\text{نه در A نه در B}}) = n(U) - n(A \cup B)$

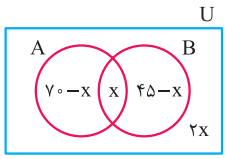
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اطلاعات سؤال را در نمودار ون می‌آوریم:



$n(A) = ۷۰ \;,\; n(B) = ۴۵ \;,\; n(\underbrace{A' \cap B'}_{\text{هیچ یک}}) = ۲n(\underbrace{A \cap B}_{\text{هر دو}})$

گام دوم: پس $n(A - B) = ۷۰ - x$ و $n(B - A) = ۴۵ - x$ و نمودار به شکل زیر تکمیل می‌شود:



گام سوم: از $n(U) = ۱۴۰$ داریم:

$$۷۰ - x + x + ۴۵ - x + ۲x = ۱۱۵ + x = ۱۴۰ \Rightarrow x = ۲۵$$

گام چهارم: مشتری‌هایی که «فقط یک نوع» کارت دارند در $(A - B) \cup (B - A)$ هستند و تعداد آن‌ها برابر است با:

$$۷۰ - x + ۴۵ - x = ۱۱۵ - ۲x = ۱۱۵ - ۵۰ = ۶۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ ریشهٔ دوم کدام عدد، عضو مجموعهٔ $\mathbb{Z}-(\mathbb{R}-\mathbb{Q}')$ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مجموعه‌های مهم و پرکاربرد اعداد:

نام	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{W}$	P	O	E	$\mathbb{N}$
توصیف	اعداد حقیقی	اعداد گنگ	اعداد گویا	اعداد صحیح	اعداد حسابی	اعداد اول	اعداد فرد	اعداد زوج	اعداد طبیعی

خواص اعداد گنگ $(x \in \mathbb{Q}')$:

۱) اعداد گنگ نمایش کسری (با صورت و مخرج صحیح) ندارند.

۲) در نمایش اعشاری آن‌ها، ارقام بعد از ممیز تا ∞ بدون تکرار می‌آیند.

۳) انواع مختلف دارند، $\sqrt{۲}$، $\log ۳$، π، $\sin ۱^\circ$ همگی گنگ هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ریشه‌های دوم گزینه‌ها را بنویسیم:

گزینهٔ (۱): $\pm\sqrt{۲}$ گزینهٔ (۲): ± ۲ گزینهٔ (۳): $\pm\sqrt{۲/۵}$ گزینهٔ (۴): $\pm ۱/۵$

گام دوم: $(\mathbb{R}-\mathbb{Q}')$ یعنی اعداد حقیقی که گنگ نباشند؛ پس می‌شود اعداد گویا. حالا $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ یعنی اعداد گویای غیرصحیح.

در بین گزینه‌ها فقط ریشه‌های دوم گزینهٔ (۴) یعنی $\pm ۱/۵$ گویای غیرصحیح‌اند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ به ازای چند پیشامد A، گزاره‌نمای زیر ارزش درست دارد؟

«در پرتاب دو سکه، احتمال این‌که پیشامد A رخ دهد، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.»

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

گزاره‌نما، دامنه، متغیر و جواب:

گزاره‌نما جمله‌ای خبری و دارای یک یا چند متغیر است که با جای‌گذاری مقادیر متغیر، به گزاره‌ای درست یا نادرست تبدیل می‌شود. مجموعهٔ مقادیری که به جای متغیر گزاره‌نما می‌توان قرار داد را «دامنه» می‌نامیم. مجموعهٔ مقادیری از دامنه که گزاره‌نما را به گزارهٔ درست تبدیل می‌کنند، «جواب» می‌نامیم.

گزاره‌نما	دامنهٔ x (D)	جواب x (S)
x مضرب ۳ است.	اعداد صحیح	$\{\ldots,-۶,-۳,۰,۳,۶,\ldots\}$
$X \subseteq \{۱,۲,۳\}$	مجموعه‌ها	تمام زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,۳\}$
در پرتاب دو سکه $P(X)=\frac{۱}{۴}$	پیشامدهای پرتاب دو سکه	پیشامدهای تک‌عضوی {رر}،{پر}،{رپ}،{پپ}
$x^۲-۵x-۶=۰$	اعداد حقیقی	ریشه‌های معادله: $x=-۱\ ,\ x=۶$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در پرتاب دو سکه، فضای نمونه‌ای ۴ عضو دارد: $S=\{\text{ر پ}\ ،\ \text{پ ر}\ ،\ \text{ر ر}\ ،\ \text{پ پ}\}$

گام دوم: در این فضای ۴عضوی، وقتی $P(A)=\frac{۳}{۴}$ است، یعنی پیشامد A سه عضو دارد: $n(A)=۳$

گام سوم: پس سؤال می‌پرسد چند پیشامد ۳عضوی داریم، یعنی مجموعهٔ ۴عضویِ S چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی دارد؟ جواب می‌شود:

$$\binom{۴}{۳}=۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ تعداد اعضای مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $2x^2 - x = 1$ با کدام دامنه، با بقیه متفاوت است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{W}$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $\mathbb{Q}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مجموعهٔ جواب گزاره‌نما به دامنه بستگی دارد.

در معادله‌ها و نامعادله‌ها، با کمک اطلاعات حسابان جواب را پیدا می‌کنیم. بعد با توجه به دامنهٔ متغیر، مجموعهٔ جواب را به دست می‌آوریم. مثلاً گزاره‌نمای $x^2 - 4 = 0$ در دامنهٔ $\mathbb{N}$، جواب $S = \{2\}$ را دارد و در دامنهٔ $\mathbb{Z}$، جواب $\{\pm 2\}$ را دارد. در دامنهٔ $\mathbb{Q}'$، جواب $\varnothing$ دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در معادلهٔ $2x^2 - x - 1 = 0$، ریشه‌ها اعداد $+1$ و $-\frac{1}{2}$ هستند. (چون جمع ضرایب معادله صفر است، یک ریشه ۱ و یک ریشه $\frac{c}{a}$ است.)

گام دوم: با دامنهٔ $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{W}$ فقط جواب $x = 1$ را داریم، پس:

$$\begin{cases} D = \mathbb{N} \\ D = W \end{cases} \Rightarrow S = \{1\}$$

در دامنهٔ $D = (-1,0)$ فقط جواب $x = -\frac{1}{2}$ را داریم:

$$D = (-1,0) \Rightarrow S = \{-\frac{1}{2}\}$$

اما در دامنهٔ $\mathbb{Q}$ هر دو جواب را داریم؛ بنابراین:

$$D = \mathbb{Q} \Rightarrow S = \{1, -\frac{1}{2}\}$$

یعنی با این دامنه، تعداد اعضای جواب با بقیهٔ گزینه‌ها متفاوت است.

(گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) جواب تک‌عضوی دارند و گزینهٔ (۴) جواب دوعضوی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ اگر $p \wedge q$ درست و $p \Rightarrow r$ نادرست باشد، آن‌گاه گزارهٔ $\sim p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ هم‌ارز کدام است؟

۱) T ۲) F ۳) q ۴) $\sim r$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

جبر گزاره‌ها ($\wedge$ ، $\vee$ ، $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$):

گزاره	$p \wedge q$ ترکیب عطفی	$p \vee q$ ترکیب فصلی	$p \Rightarrow q$ شرطی	$p \Leftrightarrow q$ دوشرطی
شرط درستی	p و q هر دو درست	حداقل یکی از p و q درست	هر دو درست باشند یا p نادرست باشد.	p و q مثل هم باشند.
حالت خاص یا نکته	$p \wedge F \equiv F$ $p \wedge \sim p \equiv F$	$p \vee T \equiv T$ $p \vee \sim p \equiv T$	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ شرطی به فصلی تبدیل می‌شود.	$p \Leftrightarrow p \equiv T$ $p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$
نقیض	$\sim p \vee \sim q$ تک‌تک نقیض و علامت برعکس	$\sim p \wedge \sim q$ هر کدام نقیض و علامت برعکس	$p \wedge \sim q$ شرط، درست و جواب، نادرست باشد.	$\sim p \Leftrightarrow q$ فقط یکی نقیض می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $p \wedge q$ درست است، یعنی هم p و هم q درست هستند.

گام دوم: $p \Rightarrow r$ نادرست است، پس p درست و r نادرست است.

گام سوم: با این ارزش‌ها داریم: $q \wedge r \equiv T \wedge F \equiv F$ و $\sim p \equiv F$، پس در گزارهٔ دوشرطی هر دو طرف نادرست‌اند و $F \Leftrightarrow F$ درست خواهد بود، یعنی گزارهٔ نهایی هم‌ارز T است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ نقیض گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی n، اگر n زوج باشد، آن‌گاه $n^۲$ حداقل برابر ۴ است»، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\forall n \in \mathbb{N}; n \in E \Rightarrow n^۲ < ۴$

۲) $\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \Rightarrow n^۲ < ۴$

۳) $\exists n \notin \mathbb{N}; n \in E \wedge n^۲ < ۴$

۴) $\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \wedge n^۲ < ۴$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

گزاره‌های سوردار و نقیض آن‌ها:

∀ **سور عمومی:** وقتی می‌گوییم $\forall x; P(x)$، یعنی گزاره زمانی درست می‌شود که همهٔ xهای دامنه در $P(x)$ صدق کنند.

∃ **سور وجودی:** وقتی می‌گوییم $\exists x; P(x)$، یعنی گزاره زمانی درست است که حداقل یک x در $P(x)$ صدق کند.

نکته

اگر گزاره‌ای سوردار را نقیض کنیم، نوع سور هم عوض می‌شود:

$$\sim (\exists x\ ; P(x)) \equiv \forall x\ ; \sim P(x)$$

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: خود گزاره می‌گوید:

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}}_{\text{برای هر عدد طبیعی } n}\ ;\ \underbrace{n \in E}_{\text{اگر } n \text{ زوج باشد.}} \Rightarrow \underbrace{n^۲ \geq ۴}_{\text{آن‌گاه } n^۲ \text{ حداقل ۴ است.}}$$

گام دوم: برای نقیض‌کردن، نوع سور عوض می‌شود:

$$\exists n \in \mathbb{N}$$

گام سوم: نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \wedge \sim q$ است، پس:

$$\sim (n \in E \Rightarrow n^۲ \geq ۴) \equiv n \in E \wedge n^۲ < ۴$$

گام چهارم: پس نقیض گزاره به صورت $\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \wedge n^۲ < ۴$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳ اگر $A=\{-1,2,x\}$ و $B=\{2y,3,\sqrt{z}\}$ و $A\cap B=A\cup B$، آن‌گاه مقدار xyz کدام است؟

۱) -6 ۲) -12 ۳) -3 ۴) -24

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

شرط تساوی دو مجموعه و بیان‌های آن:

اگر دو مجموعهٔ A و B مساوی باشند، هر کدام زیرمجموعهٔ دیگری است: $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \ , \ B\subseteq A$

به جای $A=B$ ممکن است بیان‌های زیر گفته شود:

الف) $A\times B=B\times A$

ب) $A\cup B=A\cap B$

وقتی A و B مساوی‌اند، تمام اعضای A در B هستند و بالعکس. دقت کنید که با این تعریف، ترتیب و تکرار اعضا، اثری در مجموعه ندارد:

$\{1,1,2,2,2\}=\{2,1\}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $A\cup B=A\cap B$ یعنی $A=B$، پس $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، یعنی اعضای A در B هستند و اعضای B هم در A هستند.

گام دوم: عضو ۳ در B باید در A باشد، پس $x=3$.

عضو -1 در A باید در B باشد ($\sqrt{z}$ هرگز -1 نیست)، پس $2y=-1$.

عضو ۲ در A باید در B باشد، پس $\sqrt{z}=2$.

گام سوم: بنابراین داریم: $x=3$ و $y=-\frac{1}{2}$ و $z=4$ و در نتیجه:

$$xyz=3(-\frac{1}{2})(4)=-6$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ برای سه مجموعهٔ ناتهی A و B و C، حاصل $(A\cap B)-(A\cap C)$ برابر کدام است؟

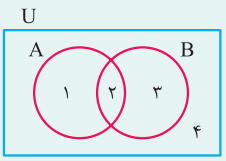
۱) $A-(B\cup C)$ ۲) $A\cap(B-C)$

۳) $(A-B)\cap(A-C)$ ۴) $(B-C)-A$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

روابط جبر مجموعه‌ها و کاربرد نمودار ون:



برای دو مجموعهٔ A و B، در نمودار ون می‌توانیم $A\cup B$ و $A\cap B$ و ... را ببینیم:

مجموعه	A	A'	B	B'	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	$B-A$	$A'\cap B'$
نواحی	۱ و ۲	۳ و ۴	۲ و ۳	۱ و ۴	۲	۱ و ۲ و ۳	۱	۳	۴

ویژگی‌ها و روابط جبر مجموعه‌ها:

جابه‌جایی: $A\cup B=B\cup A\ ,\ A\cap B=B\cap A$

شرکت‌پذیری: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\ ,\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پخشی (توزیع‌پذیری): $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ و $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

جذب: $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$

شبه‌جذب: $A\cap(A'\cup B)=A\cap B\ ,\ A\cup(A'\cap B)=A\cup B$

دمورگان: $(A\cup B)'=A'\cap B'\ ,\ (A\cap B)'=A'\cup B'$

تبدیل «$-$» به اشتراک: $A-B=A\cap B'$

روابط با $\varnothing$: $A-\varnothing=A\cup\varnothing=A\ ,\ A\cap\varnothing=\varnothing$

روابط با U: $A\cup U=U\ ,\ A\cap U=A\ ,\ A-U=\varnothing\ ,\ U-A=A'$

روابط با A': $A\cup A'=U\ ,\ A\cap A'=\varnothing\ ,\ A-A'=A\ ,\ A'-A=A'$

روابط با زیرمجموعه: $A\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\cup B=B\\A\cap B=A\\A-B=\varnothing\end{cases}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگرچه در آزمون کار خوبی نیست! اما حل به روش جبر مجموعه را ببینید:

$$(A\cap B)-(A\cap C)\xrightarrow{\text{تبدیل «-» به }\cap}(A\cap B)\cap(A\cap C)'\xrightarrow{\text{دمورگان}}(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$

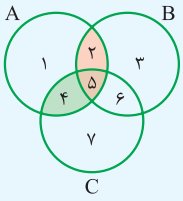
$$\xrightarrow{\text{پخشی}}\underbrace{[(A\cap B)\cap A']}_{\text{این می‌شود }\varnothing}\cup[(A\cap B)\cap C']\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}A\cap(B\cap C')\xrightarrow{\text{تبدیل }\cap\text{ به «-»}}A\cap(B-C)$$

که همان گزینهٔ (۲) است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

یه‌جور دیگه در آزمون، از نمودار ون کمک می‌گیریم:

گام اول:

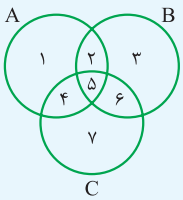


$A \cap C : ۴,۵$

$A \cap B : ۲,۵$

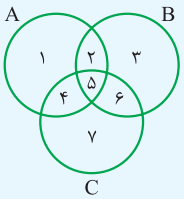
$(A \cap B) - (A \cap C)$ ناحیه‌ای است که ۲ و ۵ هست و ۴ و ۵ نیست که در شکل آن را با ۲ نشان داده‌ایم.

گام دوم: حالا گزینه‌ها را هم نشان می‌دهیم:



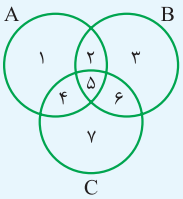
گزینهٔ (۱)

در A هست ولی در $B \cup C$ نیست می‌شود {۱}



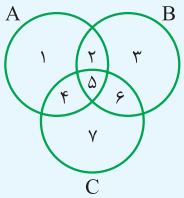
گزینهٔ (۲)

بین A و $B - C$ مشترک است. می‌شود {۲}



گزینهٔ (۳)

بین $A - B$ و $A - C$ مشترک است. می‌شود {۱}



گزینهٔ (۴)

در $B - C$ هست و در A نیست. می‌شود {۳}

پس جواب گزینهٔ (۲)، درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ یک مجموعهٔ ۶عضوی، چند افراز دارد که شامل زیرمجموعه‌های ۱ و ۲ و ۳ عضوی باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

افراز یک مجموعه: افراز یعنی تفکیک مجموعهٔ A به زیرمجموعه‌های ناتهی و جدا از هم که اجتماعشان A شود. مثلاً $A=\{1,2,3,4\}$ افرازهای زیر را دارد:

یک‌قسمتی	دوقسمتی	سه‌قسمتی	چهارقسمتی
$\{1,2,3,4\}$	مثلاً $\{3,4\}$ ، $\{1,2\}$ یا مثلاً $\{4\}$ ، $\{1,2,3\}$	مثلاً $\{4\}$ ، $\{3\}$ ، $\{1,2\}$	$\{4\}$ ، $\{3\}$ ، $\{2\}$ ، $\{1\}$

تعداد کل افرازها:

n(A)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد افراز A	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳

تعداد حالت‌های افراز به بخش‌های مشخص:

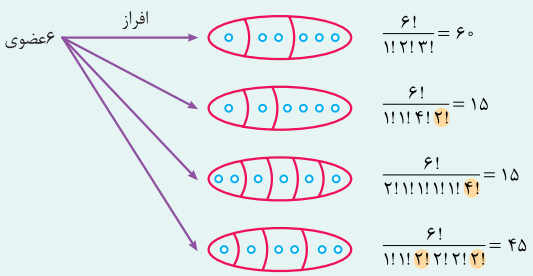
اگر یک مجموعهٔ nعضوی را به زیرمجموعه‌های n_1 و n_2 و n_3 و ... عضوی افراز کنیم، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots}\text{، یعنی }\frac{\text{!کل}}{\text{!هر قسمت}}$$

و اگر در تعداد، اعضای تکراری داریم:

$$\frac{\text{!کل}}{\text{!تکرار !هر قسمت}}$$

مثلاً:



پاسخ خیلی تشریحی ✔ می‌خواهیم افراز به شکل $\{a\},\{b,c\},\{d,e,f\}$ بسازیم. طبق درس‌باکس تعداد حالت برابر است با:

$$\frac{\text{!کل}}{\text{!هرقسمت}}=\frac{۶!}{۱!۲!۳!}=\frac{\overset{3}{\cancel{۶}}\times۵\times۴\times\cancel{۳\times۲\times۱}}{\cancel{۲}\times\cancel{۳\times۲\times۱}}=۶۰$$

یه‌جور دیگه

ابتدا برای زیرمجموعهٔ ۳عضوی، ۳ تا ۶ عضو برداریم: $\binom{۶}{۳}$

پس از ۳ عضو مانده، دوتا برداریم و در زیرمجموعهٔ دوعضوی قرار دهیم: $\binom{۳}{۲}$

یک عضو دیگر را هم در زیرمجموعهٔ ۱عضوی می‌گذاریم: $\binom{۱}{۱}$

پس جواب می‌شود:

$$\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}=۲۰\times۳\times۱=۶۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک یازدهم

۹۶ بار الکتریکی هستهٔ اتم کربن یک بار یونیده ($_{6}^{11}C^{+}$) چند نانوکولن است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19}\ C$)

۱) $1/6 \times 10^{-10}$
۲) 8×10^{-10}
۳) $9/6 \times 10^{-10}$
۴) $1/92 \times 10^{-9}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

به کمک اصل‌های پایستگی و کوانتیده‌بودن بار الکتریکی و با توجه به این‌که هستهٔ اتم کربن یک بار یونیده، ۶ پروتون دارد، بار الکتریکی هسته را محاسبه کنید.

درس Box

اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: بار یک جسم همواره مضرب صحیحی از بار الکترون ($e = 1/6 \times 10^{-19}\ C$) است. در واقع هرگاه از یک جسم nتا الکترون بگیریم، بار جسم برابر با $+ne$ و اگر به جسم nتا الکترون بدهیم، بار جسم برابر با $-ne$ می‌شود.

$$q = \pm ne \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

اگر جسم به اندازهٔ nتا الکترون بگیرد، علامت بار منفی می‌شود و اگر جسم nتا الکترون از دست بدهد، علامت بار مثبت می‌شود.

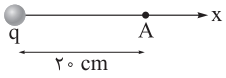
پاسخ خیلی تشریحی ✔

هستهٔ اتم کربن یک بار یونیده ۶ پروتون دارد، پس بار هسته $+6e$ است:

$$q = ne \Rightarrow q = 6e = 6 \times 1/6 \times 10^{-19} = 9/6 \times 10^{-19}\ C \times \frac{1\ nC}{10^{-9}\ C} = 9/6 \times 10^{-10}\ nC$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷ در شکل زیر، میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -۴\ nC$ در نقطهٔ A برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$



۱) $۹۰۰\vec{i}$

۲) $۹۰\vec{i}$

۳) $-۹۰۰\vec{i}$

۴) $-۹۰\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

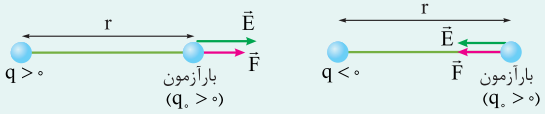
کافی است، داده‌ها را در رابطهٔ میدان الکتریکی $(E = k\frac{|q|}{r^{۲}})$ جای‌گذاری کنید و سپس با قراردادن بار مثبت آزمون در نقطهٔ A، جهت میدان الکتریکی را مشخص کنید.

درس Box

بزرگی میدان الکتریکی بار q در فاصلهٔ r از آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = k\frac{|q|}{r^{۲}} \quad (k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$$

برای تشخیص جهت میدان الکتریکی حاصل از یک ذرهٔ باردار، بار آزمون مثبت $(q_{۰} > ۰)$ را در نقطهٔ مورد نظر قرار می‌دهیم، جهت نیروی واردشده به بار $q_{۰}$ هم‌جهت با میدان الکتریکی حاصل از بار q در آن نقطه است.



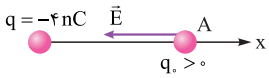
طبق شکل‌های بالا، میدان الکتریکی بار مثبت در جهتی است که از بار دور شود و میدان الکتریکی بار منفی در جهتی است که به بار نزدیک شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فقط کافی است، داده‌ها را در رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^{۲}}$ جای‌گذاری کنیم:

$$E = \frac{k|q|}{r^{۲}} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times۴\times۱۰^{-۹}}{(۲۰\times۱۰^{-۲})^{۲}} = ۹۰۰\ N/C$$

گام دوم: بار آزمون مثبت را در نقطهٔ A قرار می‌دهیم تا جهت میدان مشخص شود:



پس میدان در جهت منفی محور x است، یعنی:

$$\vec{E} = (-۹۰۰\ N/C)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ دو کرهٔ رسانای باردار با قطر یکسان، هنگامی که به فاصلهٔ $2\ m$ از هم قرار می‌گیرند، به یکدیگر نیروی الکتریکی $0/108\ N$ وارد می‌کنند. کره‌ها را به وسیلهٔ یک سیم رسانا، به هم وصل می‌کنیم. در این حالت، نیروی الکتریکی که به هم وارد می‌کنند، $0/036\ N$ می‌شود. تعداد الکترون‌هایی که از یک کره به کرهٔ دیگر منتقل می‌شود، چه‌قدر است؟

$(e = 1/6\times10^{-19}\ C$ و $k = 9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2})$

۱) 5×10^{13}
۲) $1/25\times10^{13}$
۳) 5×10^{15}
۴) $1/25\times10^{15}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) طبق قانون کولن، دو بار الکتریکی q_1 و q_2 که در فاصلهٔ r از هم قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که بزرگی این نیرو از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F = \underbrace{k}_{\text{ثابت کولن } (9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2})}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

۲) پایستگی بار الکتریکی: جمع جبری بارهای الکتریکی در یک دستگاه همواره ثابت است، یعنی بار نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود، فقط از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌شود، پس وقتی دو جسم را با هم تماس می‌دهیم، مجموع جبری بار اجسام قبل از تماس با مجموع بارها بعد از تماس برابر است، یعنی:

$$\underbrace{q_1+q_2}_{\text{بارها قبل از تماس}} = \underbrace{q'_1+q'_2}_{\text{بارها بعد از تماس}}$$

اگر دو کرهٔ رسانای مشابه را به هم تماس دهیم و از هم جدا کنیم، بار هر کره پس از تماس از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$q_1+q_2 = q'_1+q'_2 \xrightarrow{q'_1=q'_2} q_1+q_2 = 2q'_1 \Rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{q_1+q_2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که نیروی الکتریکی بین کره‌ها در همان فاصله، بعد از تماس کاهش یافته، پس بار آن‌ها ناهمنام است و در اثر تماس، اندازهٔ بارها کاهش پیدا کرده؛ به کمک رابطهٔ کولن داریم:

$$F = \frac{k|q_1q_2|}{r^2} \xrightarrow[r=2\ m,\ F=0/108\ N]{k=9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2}} 0/108 = \frac{9\times10^{9}\times|q_1q_2|}{4} \Rightarrow |q_1q_2| = 48\times10^{-12}\ C^2$$

$$\xrightarrow{q_1\ و\ q_2\ ناهمنام} q_1q_2 = -48\times10^{-12}C^2 \xrightarrow{C^2\ به\ (\mu C)^2\ تبدیل} q_1q_2 = -48\ (\mu C)^2 \qquad (I)$$

$$F' = \frac{k|q'|^2}{r^2} \xrightarrow[r=2\ m,\ F'=0/036\ N]{k=9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2}} 0/036 = \frac{9\times10^{9}\times q'^2}{4}$$

$$\Rightarrow q'^2 = 16\times10^{-12}C^2 \Rightarrow q' = \pm4\times10^{-6}\ C \Rightarrow q' = \pm4\ \mu C$$

گام دوم: با توجه به این‌که دو کره مشابه هستند، داریم:

$$q'_1 = q'_2 = q' = \frac{q_1+q_2}{2} \Rightarrow q_1+q_2 = 2q' = 2\times\pm4 = \pm8\ \mu C \qquad (II)$$

گام سوم: حالا با حل معادلات (I) و (II)، بار اولیهٔ کره‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} q_1+q_2 = 8\ \mu C \\ q_1q_2 = -48\ (\mu C)^2 \end{cases} \Rightarrow q_1 = 12\ \mu C\ ,\ q_2 = -4\ \mu C\ ,\ q' = 4\ \mu C$$

$$\begin{cases} q_1+q_2 = -8\ \mu C \\ q_1q_2 = -48\ (\mu C)^2 \end{cases} \Rightarrow q_1 = -12\ \mu C\ ,\ q_2 = 4\ \mu C\ ,\ q' = -4\ \mu C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: مقدار بار جابه‌جاشده بین کره‌ها را محاسبه می‌کنیم و سپس تعداد الکترون‌هایی که از یک کره به کرهٔ دیگر منتقل شده را پیدا کنیم.

$$\Delta q = |q' - q_1| = |۴ - ۱۲| = ۸\,\mu C$$

$$\Delta q = ne \Rightarrow n = \frac{\Delta q}{e} = \frac{۸\times۱۰^{-۶}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۵\times۱۰^{۱۳}$$

کنکور

دو کرهٔ رسانای باردار مشابه، هنگامی که به فاصلهٔ $۲\ m$ از هم قرار می‌گیرند، به یکدیگر نیروی الکتریکی $۰/۰۲۷\ N$ وارد می‌کنند. کره‌ها را به وسیلهٔ یک سیم رسانا، به هم وصل می‌کنیم. در این حالت، نیروی الکتریکی که به هم وارد می‌کنند، $۰/۰۰۹\ N$ می‌شود. تعداد الکترون‌هایی که از یک کره به کرهٔ دیگر منتقل می‌شود، چه‌قدر است؟

$$(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C \text{ و } k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$$

(سؤال ۶۹ کنکور تجربی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$
۲) $۶/۲۵\times۱۰^{۱۲}$
۳) $۲/۵\times۱۰^{۱۵}$
۴) $۶/۲۵\times۱۰^{۱۴}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ روی محور x، بارهای الکتریکی $q_1 = 40\ \mu C$، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 0$، $x_2 = 4\ m$ و $x_3 = 5\ m$ قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_3 برابر صفر باشد، نیروی الکتریکی وارد بر بار q_2 از طرف بار q_1 برحسب نیوتون کدام است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

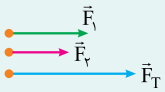
۱) $0/36\ \vec{i}$
۲) $-0/36\ \vec{i}$
۳) $0/036\ \vec{i}$
۴) $-0/036\ \vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

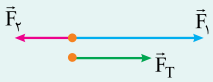
- اگر به جای دو ذره، تعدادی بار الکتریکی نقطه‌ای داشته باشیم، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره، برایند نیروهایی است که هر یک از ذره‌های دیگر در غیاب سایر ذره‌ها، بر آن ذره وارد می‌کنند. برای محاسبهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر بار الکتریکی، سه حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) نیروها هم‌راستا و هم‌جهت:



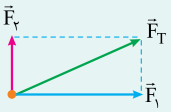
$$F_T = F_1 + F_2$$

ب) نیروها هم‌راستا و خلاف جهت:



$$F_T = F_1 - F_2$$

پ) نیروهای عمود بر هم:



$$F_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

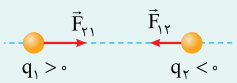
- نیرویی که دو بار الکتریکی نقطه‌ای به هم وارد می‌کند:

الف) اگر دو بار الکتریکی نقطه‌ای **همنام** باشند، نیروی الکتریکی بین آن‌ها **دافعه** است.



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}\ ,\ F_{21} = F_{12}$$

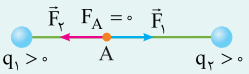
ب) اگر دو بار الکتریکی نقطه‌ای **ناهمنام** باشند، نیروی الکتریکی بین آن‌ها **جاذبه** است.



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}\ ,\ F_{21} = F_{12}$$

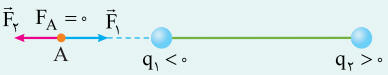
- تعیین نقطه‌ای که نیروی الکتریکی خالص دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در آن نقطه صفر است:

۱) اگر دو بار همنام باشند، نیروی الکتریکی خالص در نقطه‌ای بین دو بار، روی خط واصل بارها و نزدیک بار کوچک‌تر صفر است.



$$|q_2| > |q_1|$$

۲) اگر دو بار ناهمنام باشند، نیروی الکتریکی خالص در نقطه‌ای خارج دو بار، روی خط واصل دو بار و نزدیک بار کوچک‌تر صفر است.



$$|q_2| > |q_1|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: وضعیت بارهای الکتریکی را روی محور x نشان می‌دهیم:



بار q_3 خارج دو بار قرار دارد و نیروی الکتریکی وارد بر آن صفر است، پس علامت بارهای q_1 و q_2 مخالف هم است و چون $q_1 > 0$ است در نتیجه $q_2 < 0$ است.

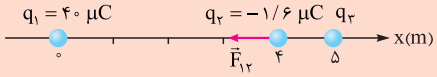
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 صفر است، پس طبق قانون کولن داریم:

$$F_{13}=F_{23} \Rightarrow \frac{k|q_1||q_3|}{r_{13}^2}=\frac{k|q_2||q_3|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{40}{5^2}=\frac{|q_2|}{1^2}$$

$$\Rightarrow |q_2|=1/6\ \mu C \xrightarrow{q_2<0} q_2=-1/6\ \mu C$$

گام سوم: نیروی الکتریکی وارد بر بار q_2 از طرف بار q_1 برابر است با:



$$F_{12}=\frac{k|q_1q_2|}{r^2}=9\times10^9\times\frac{40\times10^{-6}\times1/6\times10^{-6}}{4^2}=36\times10^{-3}\ N \Rightarrow \vec{F}_{12}=(-36\times10^{-3}\ N)\vec{i}$$

کنکور

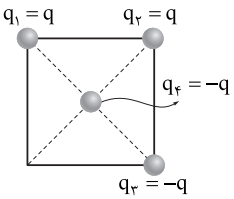
روی محور x، بارهای الکتریکی $q_1=50\ \mu C$، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1=0$، $x_2=4\ m$ و $x_3=5\ m$ قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_3 برابر صفر باشد، q_2 چند میکروکولن است؟

(سؤال ۶۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) ۱۲/۵
۲) ۲
۳) −۲
۴) −۱۲/۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰ در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس مربع و یک بار الکتریکی نقطه‌ای روی مرکز مربع قرار دارد. اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ چند برابر اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۴$ است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳۰}}{۱۰}$
۲) $\frac{\sqrt{۳۰}}{۳}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

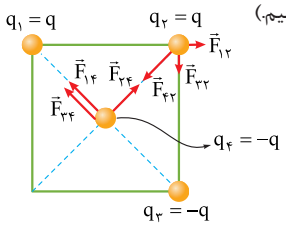
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

نیروهای وارد بر بارهای $q_۲$ و $q_۴$ را محاسبه و نیروی خالص وارد بر هر کدام را به دست آورید و سپس نسبت نیروهای خالص $(\frac{F_{net,۲}}{F_{net,۴}})$ را طبق خواستهٔ سؤال محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بارهای $q_۲$ و $q_۴$ را رسم می‌کنیم: (q را مثبت فرض می‌کنیم.)



گام دوم: ضلع مربع را a و F را برابر با $\frac{kq^۲}{a^۲}$ می‌گیریم، سپس نیروی وارد بر $q_۲$ را برحسب F می‌نویسیم:

$$F_{۱۲} = \frac{kq_۱q_۲}{a^۲} \xrightarrow{q_۱=q_۲=q} F_{۱۲} = F$$

$$F_{۳۲} = \frac{k|q_۳||q_۲}{a^۲} \xrightarrow{q_۲=|q_۳|=q} F_{۳۲} = F$$

$$F_{۴۲} = \frac{k|q_۴||q_۲}{(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲} \xrightarrow{q_۲=|q_۴|=q} F_{۴۲} = ۲F$$

$\vec{F}_{۱۲}$ و $\vec{F}_{۳۲}$ بر هم عمود هستند، پس برایند آن‌ها برابر می‌شود با:

$$F' = \sqrt{۲}F$$

$\vec{F}_{۴۲}$ و $\vec{F}'$ نیز بر هم عمود هستند، در نتیجه داریم:

$$F_{net,۲} = \sqrt{(\sqrt{۲}F)^۲ + (۲F)^۲} = F\sqrt{۶}$$

گام سوم: گام دوم را برای بار $q_۴$ تکرار می‌کنیم:

$$F_{۱۴} = \frac{kq_۱|q_۴|}{(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲} \xrightarrow{q_۱=|q_۴|=q} F_{۱۴} = ۲F$$

$$\xrightarrow[F_{۴۲}=۲F]{F_{۲۴}=F_{۴۲}} F_{۲۴} = ۲F$$

$$F_{۳۴} = \frac{k|q_۳||q_۴|}{(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲} \xrightarrow{|q_۳|=|q_۴|=q} F_{۳۴} = ۲F$$

$\vec{F}_{۱۴}$ و $\vec{F}_{۳۴}$ در یک جهت هستند، پس:

$$F'' = F_{۱۴} + F_{۳۴} = ۴F$$

$\vec{F}''$ و $\vec{F}_{۲۴}$ بر هم عمود هستند، در نتیجه:

$$F_{net,۴} = \sqrt{(۴F)^۲ + (۲F)^۲} = ۲F\sqrt{۵}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال نسبت $\frac{F_{net,۲}}{F_{net,۴}}$ است:

$$\frac{F_{net,۲}}{F_{net,۴}} = \frac{F\sqrt{۶}}{۲F\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۳۰}}{۱۰}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱ بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 از فاصلهٔ r بر بار نقطه‌ای $q_2 = -5\ \mu C$، نیروی الکتریکی $8\ N$ وارد می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصلهٔ $2r$ از آن چند نیوتون بر کولن است؟

۱) $6/4\times10^6$
۲) $1/6\times10^6$
۳) 8×10^5
۴) 4×10^5

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با کمک رابطهٔ کولن و جای‌گذاری داده‌ها، داریم:

$$F=\frac{k|q_1||q_2|}{r^2}\Rightarrow 8=\frac{k|q_1|(5\times10^{-6})}{r^2}\Rightarrow \frac{k|q_1|}{r^2}=\frac{8}{5}\times10^6=1/6\times10^6\ N/C$$

رابطهٔ $\frac{k|q_1|}{r^2}$، میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصلهٔ r است و خواستهٔ سؤال میدان الکتریکی در فاصلهٔ $2r$، پس:

$$E=\frac{k|q_1|}{(2r)^2}=\frac{k|q_1|}{4r^2}=\frac{1}{4}\times(1/6\times10^6)=0/4\times10^6=4\times10^5\ N/C$$

گول نخوری ✘

سؤال، بزرگی میدان را در فاصلهٔ $2r$ می‌خواهد، اگر با محاسبهٔ $\frac{k|q_1|}{r^2}=1/6\times10^6\ N/C$ که میدان در فاصلهٔ r است سراغ گزینه‌ها بری، توی دام گزینهٔ (۲) می‌افتی.

یه جور دیگه

$$F=|q_1|E\Rightarrow 8=5\times10^{-6}\times E\Rightarrow E=1/6\times10^6\ N/C$$

$$E=k\frac{|q|}{r^2}\Rightarrow\frac{E'}{E}=(\frac{r}{r'})^2\xrightarrow[E=1/6\times10^6\ N/C]{r'=2r}\frac{E'}{1/6\times10^6}=(\frac{r}{2r})^2$$

$$\Rightarrow E'=1/6\times10^6\times\frac{1}{4}=0/4\times10^6=4\times10^5\ N/C$$

کنکور

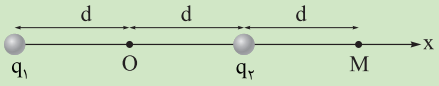
بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 از فاصلهٔ ۶۰ سانتی‌متری، بر بار نقطه‌ای $q_2 = -5\ \mu C$، نیروی جاذبهٔ الکتریکی $2\times10^{-2}\ N$ وارد می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصلهٔ ۲۰ سانتی‌متری آن چند نیوتون بر کولن است؟

(سؤال ۶۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱) 6×10^3
۲) 4×10^3
۳) $3/6\times10^4$
۴) $1/2\times10^4$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ در شکل زیر، یک دوقطبی الکتریکی منطبق بر محور x قرار دارد. اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O چند برابر اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M است؟



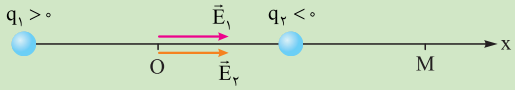
۱) $\frac{۹}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته دوقطبی الکتریکی، آرایشی از دو بار هم‌اندازه و غیرهمنام است که در فاصلهٔ مشخصی از هم قرار دارند.

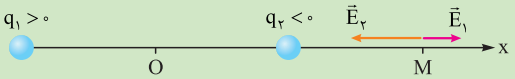
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با قراردادن بار فرضی مثبت q_0 در نقطهٔ O، میدان الکتریکی بارهای q_1 و q_2 را رسم می‌کنیم: (چون شکل مربوط به دوقطبی الکتریکی است، فرض می‌کنیم $q_1 > ۰$ و $q_2 < ۰$ است.)



$$E_O = E_1 + E_2 \xrightarrow[r_1 = r_2 = d]{|q_1| = |q_2| = q} E_O = \frac{۲kq}{d^۲}$$

گام دوم: برای نقطهٔ M هم گام اول را تکرار می‌کنیم:



$$E_M = |E_2 - E_1| = |\frac{kq}{d^۲} - \frac{kq}{۹d^۲}| = \frac{۸kq}{۹d^۲}$$

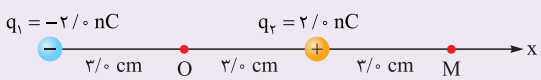
گام سوم: فقط کافیه نسبت $\frac{E_O}{E_M}$ را به دست آوریم:

$$\frac{E_O}{E_M} = \frac{\frac{۲kq}{d^۲}}{\frac{۸kq}{۹d^۲}} = \frac{۹}{۴}$$

کتاب درسی

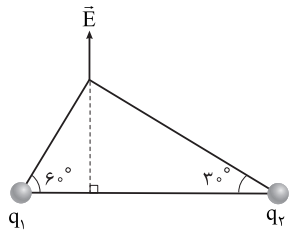
شکل زیر، آرایشی از دو بار الکتریکی هم‌اندازه و غیرهمنام (دوقطبی الکتریکی) را نشان می‌دهد که در آن فاصلهٔ دو بار از هم ۶/۰ cm است. میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌های O و M به دست آورید.

(فیزیک (۲) ـ تمرین ۱ ـ ۵ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای روی دو رأس مثلثی قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در رأس سوم مثلث برابر $\vec{E}$ باشد، $\frac{q_۲}{q_۱}$ برابر کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

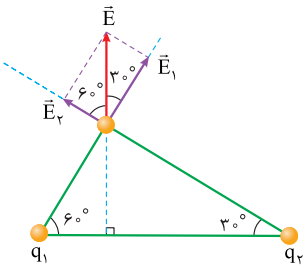
۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$

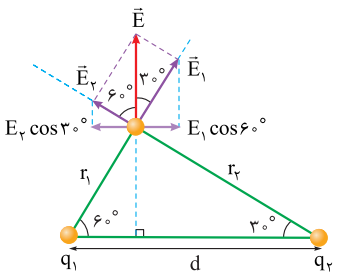
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به جهت میدان الکتریکی خالص $\vec{E}$، جهت میدان‌های $E_۱$ و $E_۲$ را رسم می‌کنیم. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید هر دو میدان $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ در جهت دورشدن از بارها هستند؛ یعنی هر دو بار، مثبت هستند.



گام دوم: برای این‌که میدان الکتریکی خالص در جهت $\vec{E}$ باشد، مؤلفه‌های افقی $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ باید یکدیگر را خنثی کنند، یعنی:



$$E_۱\cos۶۰° = E_۲\cos۳۰° \Rightarrow \frac{kq_۱}{r_۱^۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{kq_۲}{r_۲^۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{q_۱}{r_۱^۲} = \frac{q_۲\sqrt{۳}}{r_۲^۲} \quad (۱)$$

گام سوم: از طرفی $r_۱$ ضلع روبه‌روی به زاویهٔ $۳۰°$ است، پس:

$$r_۱ = \frac{\text{وتر}}{۲} = \frac{d}{۲}$$

از فیثاغورس: $d^۲ = r_۱^۲ + r_۲^۲ \Rightarrow r_۲ = \sqrt{d^۲ - r_۱^۲} = \sqrt{d^۲ - \frac{d^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}d$

گام چهارم: داده‌های مربوط به $r_۱$ و $r_۲$ را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{q_۱}{(\frac{d}{۲})^۲} = \frac{q_۲\sqrt{۳}}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲}d)^۲} \Rightarrow \frac{۴q_۱}{d^۲} = \frac{۴q_۲\sqrt{۳}}{۳d^۲} \Rightarrow \frac{q_۲}{q_۱} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ **در نزدیکی سطح زمین، میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی $150\ N/C$ و جهت رو به پایین وجود دارد. یک الکترون در این فضا قرار دارد. نیروی الکتریکی وارد بر این الکترون چند نیوتون و در چه جهتی است؟ $(e = 1/6\times10^{-19}\ C)$**

۱) $2/4\times10^{-17}$، به سمت بالا
۲) $2/4\times10^{-17}$، به سمت پایین
۳) $2/4\times10^{-18}$، به سمت بالا
۴) $2/4\times10^{-18}$، به سمت پایین

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint داده‌ها را در رابطهٔ $F = Eq$ جای‌گذاری کنید تا اندازهٔ نیروی الکتریکی محاسبه شود، سپس برای مشخص‌کردن جهت نیرو به علامت بار توجه کنید.

درس Box اگر ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی E قرار بگیرد، از طرف میدان به ذره نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

میدان الکتریکی (N/C) — نیروی الکتریکی (N)

$$F = qE$$

بار الکتریکی (C)

- اگر $q > 0 \Leftarrow \vec{F}$ و $\vec{E}$ هم‌جهت هستند.
- اگر $q < 0 \Leftarrow \vec{F}$ و $\vec{E}$ در خلاف جهت هم هستند.

پاسخ خیلی تشریحی بار الکتریکی الکترون، منفی است، پس جهت نیروی الکتریکی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی و به سمت بالا است.

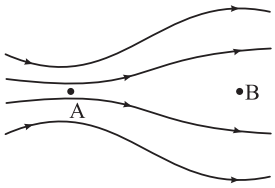
برای محاسبهٔ اندازهٔ نیرو طبق رابطهٔ $F = Eq$ داریم:

$$F = 150\times1/6\times10^{-19} = 240\times10^{-19} = 2/4\times10^{-17}\ N$$

گول نخوری *اگه به منفی‌بودن بار الکترون توجه نکنی، توی دام گزینهٔ (۲) می‌افتی.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ آرایش خطوط میدان الکتریکی در یک ناحیه به شکل زیر است. کدام مورد، دربارهٔ مقایسهٔ پتانسیل الکتریکی (V) و اندازهٔ میدان الکتریکی (E) در نقاط A و B درست است؟



۱) $E_A > E_B \, , V_A > V_B$

۲) $E_A > E_B \, , V_A < V_B$

۳) $E_A < E_B \, , V_A > V_B$

۴) $E_A < E_B \, , V_A < V_B$

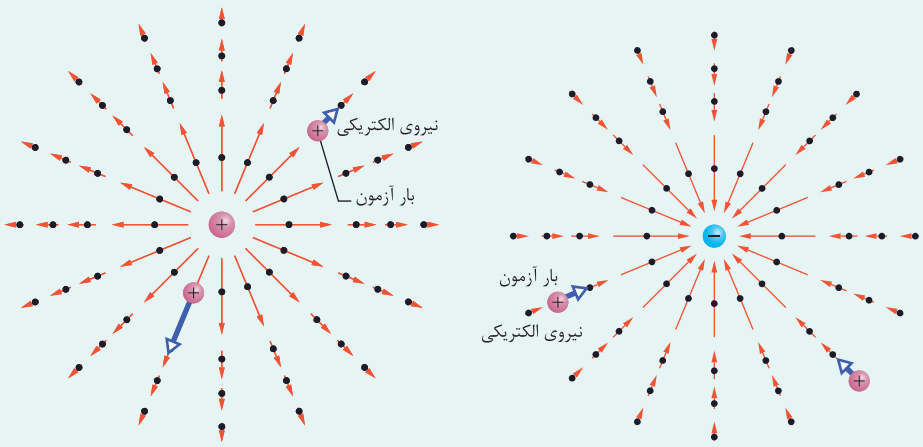
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

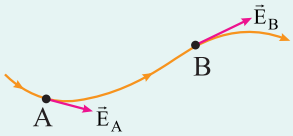
برای مجسم‌کردن میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار، از خط‌های جهت‌داری موسوم به خطوط میدان الکتریکی استفاده می‌کنند.

خطوط میدان الکتریکی ویژگی‌های زیر را دارند:

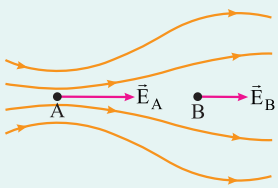
۱) با توجه به جهت نیروی وارد بر بار مثبت آزمون، خط‌های میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند.



۲) در هر نقطه، بردار میدان الکتریکی باید مماس بر خط میدان الکتریکی عبوری از آن نقطه و در همان جهت باشد.



۳) میزان تراکم خطوط میدان در هر نقطه از فضا، نشان‌دهندهٔ اندازهٔ میدان در آن ناحیه است.



۴) خطوط میدان الکتریکی برایند هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی از هر نقطهٔ فضا فقط یک خط میدان الکتریکی می‌گذرد.

به نسبت تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به بار ذره که مستقل از نوع و اندازهٔ بار الکتریکی است، اختلاف پتانسیل الکتریکی می‌گوییم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

طبق رابطهٔ بالا می‌توان نوشت:

اگر ذره در جهت میدان حرکت کند، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد و اگر در خلاف جهت میدان حرکت کند، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تراکم خطوط میدان الکتریکی در نقطهٔ A بیشتر از نقطهٔ B است، پس:

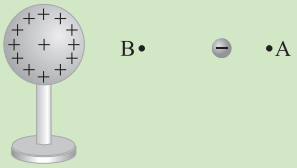
$$E_A > E_B$$

گام دوم: با حرکت در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، یعنی:

$$V_A > V_B$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۶ در شکل زیر، ذره‌ای با بار منفی از نقطهٔ A، به سمت کرهٔ بارداری با بار مثبت تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌شود. در این جابه‌جایی، چه تعداد از موارد زیر درست است؟



الف) کاری که میدان الکتریکی روی ذره انجام می‌دهد، مثبت است.

ب) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره افزایش می‌یابد.

پ) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

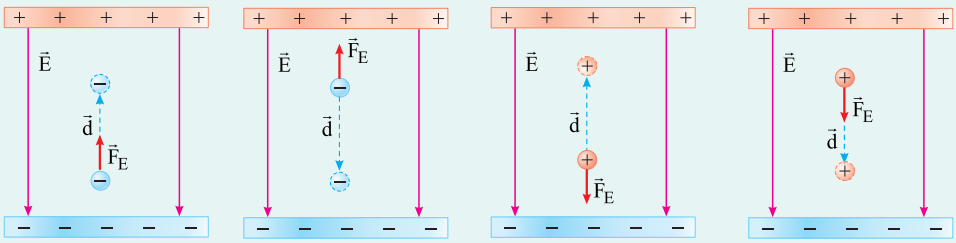
درس Box

اگر بار الکتریکی q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا شود، روی بار کار انجام می‌شود که اندازهٔ این کار برابر با تغییرات انرژی پتانسیل است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta U_E = -W_E = -|q|E\,d\cos\theta \rightarrow \theta: \text{زاویهٔ بین } \vec{d} \text{ و } \vec{F}_E$$

(q: بار الکتریکی (C)، E: میدان الکتریکی (N/C)، d: جابه‌جایی (m))

مطابق شکل‌های زیر، کاهشی یا افزایشی بودن انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت زیر مشخص می‌شود:



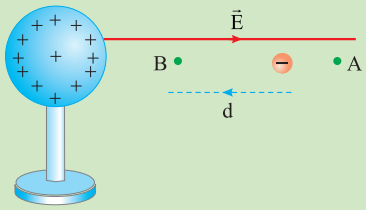
الف) بار مثبت را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.

ب) بار مثبت را در خلاف میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.

پ) بار منفی را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.

ت) بار منفی را در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا جهت میدان کرهٔ باردار را رسم می‌کنیم. (می‌دانیم میدان الکتریکی بار مثبت در جهت دورشدن از بار است.)



با توجه به شکل، عبارات را بررسی می‌کنیم:

ذره‌ای با بار منفی در خلاف جهت میدان حرکت می‌کند، پس انرژی پتانسیل ذره کاهش می‌یابد $(\Delta U_E < 0)$ و طبق رابطهٔ $W_E = -\Delta U_E$ کاری که میدان الکتریکی روی ذره انجام می‌دهد، مثبت است $(W_E > 0)$. (درستی عبارت «الف» و نادرستی عبارت «ب»)

با حرکت در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، پس:

$V_A < V_B$ (نادرستی عبارت «پ»)

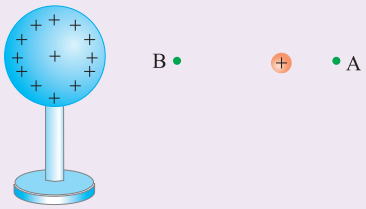
بنابراین فقط عبارت «الف» درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کتاب درسی

در شکل زیر ذرهٔ باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطهٔ **A** به سمت کرهٔ باردار که روی پایهٔ عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطهٔ **B** قرار می‌دهیم. (الف) در این جابه‌جایی، کار نیروی الکتریکی مثبت است یا منفی؟ (ب) کاری که ما در این جابه‌جایی انجام می‌دهیم، مثبت است یا منفی؟ (پ) انرژی پتانسیل ذرهٔ باردار در این جابه‌جایی چگونه تغییر می‌کند؟ (ت) پتانسیل نقطه‌های **A** و **B** را با هم مقایسه کنید.

(فیزیک (۲) ـ سؤال ۱۷ صفحهٔ ۴۲ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۷ **اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های یک باتری برابر $12\ V$ است. اگر بار الکتریکی $q = -50\ nC$ از پایانهٔ مثبت به پایانهٔ منفی این باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟**

۱) ۶۰۰، کاهش می‌یابد.
۲) ۶۰۰، افزایش می‌یابد.
۳) ۰/۶، کاهش می‌یابد.
۴) ۰/۶، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

هرگاه بار q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ جابه‌جا شود و انرژی پتانسیل آن از U_1 به U_2 تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین این دو نقطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ داریم:

$$\Delta U = q\ \underbrace{(\Delta V)}_{(V_- - V_+)} = (-50\times10^{-9})(0-12) = +600\times10^{-9}\ J = +0/6\ \mu J$$

(بار الکتریکی از پایانه مثبت به پایانهٔ منفی جابه‌جا شده، یعنی $\Delta V = V_- - V_+$)

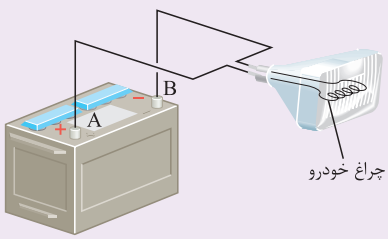
گول نخوری ✘

اگه به جهت حرکت که از پایانهٔ مثبت به پایانهٔ منفی است، توجه نکنی و ΔV رو مثبت در نظر بگیری و یا به علامت بار توجه نکنی توی دام گزینهٔ (۳) می‌افتی و اگر اشتباهاً به جای 10^{-9}، 10^{-6} را برای یکای نانو کولن در رابطه قرار بدی، توی دام گزینه‌های (۱) و (۲) می‌افتی.

کتاب درسی

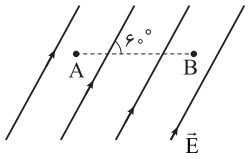
اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری خودروی نشان داده شده در شکل برابر $12/0\ V$ است. اگر بار الکتریکی $-50/0$ کولن از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چه‌قدر تغییر می‌کند؟

(فیزیک (۲) ـ مثال ۱ـ۱۲ صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۸ در شکل زیر، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت برابر $E = ۵\times۱۰^{۳}\ N/C$ و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر ۶ cm است. اگر پتانسیل الکتریکی این دو نقطه به ترتیب برابر V_A و V_B باشد، $V_B - V_A$ برابر چند ولت است؟



۱) $۱۵۰\sqrt{۳}$

۲) $-۱۵۰\sqrt{۳}$

۳) ۱۵۰

۴) −۱۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta U_E = -|q|Ed\cos\theta$$

که اگر بار را مثبت و θ را صفر در نظر بگیریم، داریم:

$$\Delta U_E = -qEd \qquad (۱)$$

از طرفی، با توجه به تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی به صورت $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$ داریم:

$$\Delta U_E = q\Delta V \xrightarrow{(۱)} q\Delta V = -qEd \Rightarrow E = -\frac{\Delta V}{d}$$

که اگر در خلاف جهت میدان حرکت کنیم:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

و اگر در جهت میدان حرکت کنیم، چون $\Delta V < ۰$ است:

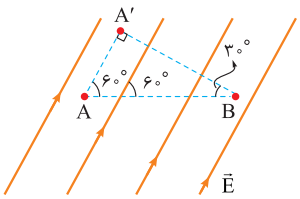
$$E = \frac{-(-\Delta V)}{d} = \frac{\Delta V}{d}$$

پس در حالت کلی، میدان الکتریکی یکنواخت طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d}$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، پاره‌خط $A'B$، عمود بر میدان الکتریکی قرار گرفته و نقاط A' و B هم‌پتانسیل هستند، پس برای محاسبهٔ خواستهٔ سؤال، کافی است $V_{A'} - V_A$ را به دست آوریم:



$$|\Delta V| = Ed = E(\overline{AA'}) = ۵\times۱۰^{۳}\times۳\times۱۰^{-۲} = ۱۵۰\ V$$

↓

اندازهٔ ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است.

$V_{A'} - V_A$ در جهت میدان است، در نتیجه $\Delta V < ۰$ می‌شود، یعنی:

$$V_B - V_A = V_{A'} - V_A = -۱۵۰\ V$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۹ **یک جسم فلزی دوکی‌شکل توپر که روی پایهٔ عایق قرار دارد، در تماس با کلاهک یک مولد واندوگراف، باردار شده است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این جسم درست است؟**

الف) بار الکتریکی فقط در سطح خارجی آن توزیع می‌شود.

ب) پتانسیل الکتریکی نقاط نوک‌تیز جسم بیشتر از سایر نقاط آن است.

پ) تراکم بار الکتریکی در نقاط نوک‌تیز جسم بیشتر از سایر نقاط آن است.

ت) میدان الکتریکی در داخل جسم، غیرصفر و یکنواخت است.

۱) الف و ب ۲) الف و پ

۳) ب و ت ۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

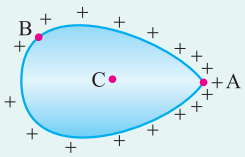
درس Box

هرگاه به یک جسم رسانا، بار داده شود یا جسم در یک میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، پس از مدت‌زمان بسیار کوتاهی بار در سطح خارجی رسانا توزیع می‌شود و نحوهٔ توزیع بار در رسانا به گونه‌ای است که میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر می‌شود (در واقع بارها در تعادل الکتروستاتیکی قرار می‌گیرند).

از آن‌جایی که میدان الکتریکی داخل رسانایی که در تعادل الکتروستاتیکی است، برابر با صفر است؛ بنابراین همهٔ نقاط رسانا پتانسیل یکسانی دارند.

هرگاه به یک جسم رسانای دوکی‌شکل که روی پایهٔ عایق قرار دارد، بار بدهیم، تراکم بار در نقاط نوک‌تیز سطح از سایر نقاط بیشتر خواهد بود.

در شکل مقابل، تراکم بار در نقطهٔ A بیشتر از نقطهٔ B است.



$q_C = 0$

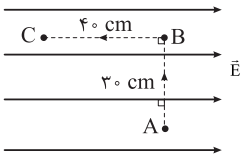
پاسخ خیلی تشریحی

الف) وقتی بار q به یک جسم رسانا داده می‌شود، بار به سطح جسم منتقل می‌شود تا جسم به تعادل الکتروستاتیکی برسد. در این حالت، تراکم بار در نقاط نوک‌تیز بیشتر از سایر نقاط است و هنگامی که یک رسانا در تعادل است، پتانسیل الکتریکی تمام نقاط آن با هم برابر است، هم‌چنین میدان الکتریکی خالص درون رسانا صفر است.

طبق توضیحات بالا، عبارت‌های «الف» و «پ» (گزینهٔ (۲)) درست هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۰ در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -8\ \mu C$ توسط یک عامل خارجی، از مسیر مشخص‌شده از نقطهٔ A تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌شود. اگر اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $4\times10^{5}\ N/C$ و تندی جسم در دو نقطهٔ A و C برابر باشد، در این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط عامل خارجی چند ژول است؟



۱) ۱/۲۸

۲) −۱/۲۸

۳) ۱/۶

۴) −۱/۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint کافی است برای هر قسمت از مسیر، جداگانه رابطهٔ $W_E = |q|Ed\cos\theta$ را بنویسید.

درس Box

۱) کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی بر ذره‌ای با بار q که در میدان الکتریکی به اندازهٔ d جابه‌جا شده است از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$W_E = |q| E d\cos\theta$ ← زاویهٔ بین نیروی $\vec{F}_E$ و جابه‌جایی $\vec{d}$

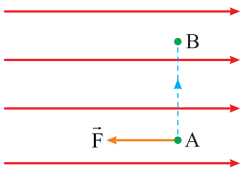
کار نیروی الکتریکی (J) — میدان الکتریکی (N/C) — بار الکتریکی (C) — جابه‌جایی (m)

۲) کار کل یا مجموع کار انجام‌شده توسط میدان و عامل خارجی، برابر تغییرات انرژی جنبشی است:

$$W_{\text{میدان}} + W_{\text{خارجی}} = \Delta K$$

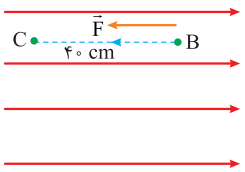
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جابه‌جایی AB بر خط‌های میدان الکتریکی عمود است، پس $\theta = 90^\circ$، در رابطهٔ کار انجام‌شده توسط عامل خارجی داریم:



$$W_{AB} = |q|Ed\cos\theta \xrightarrow{\theta=90^\circ \Rightarrow \cos90^\circ=0} W_{AB} = 0$$

گام دوم: در جابه‌جایی B تا C، θ برابر با صفر درجه است و میدان الکتریکی روی بار q کار انجام می‌دهد، پس:



$$W_{BC} = |q|Ed\cos\theta = 8\times10^{-6}\times4\times10^{5}\times40\times10^{-2}\times\cos0^\circ \Rightarrow W_{BC} = +1/28\ J$$

گام سوم: تندی ذره در نقطه‌های A و C یکسان است، پس تغییرات انرژی جنبشی از A تا C برابر صفر است و داریم:

$$W_{\text{میدان}} + W_{\text{خارجی}} = \Delta K \xrightarrow[W_{\text{میدان}} = W_{AB} + W_{BC} = 0 + 1/28\ J]{\Delta K = 0} 1/28 + W_{\text{خارجی}} = 0 \Rightarrow W_{\text{خارجی}} = -1/28\ J$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۱ چگالی سطحی بار الکتریکی یک سطح فلزی بزرگ که بار الکتریکی به طور یکنواخت در آن توزیع شده، برابر $۸\ nC/cm^۲$ است. در هر میلی‌متر مربع از این سطح، اختلاف تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها برابر کدام است؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) ۵×۱۰^{۷}
۲) ۵×۱۰^{۸}
۳) ۵×۱۰^{۹}
۴) ۵×۱۰^{۱۰}

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

چگالی سطحی بار الکتریکی:

تراکم بار الکتریکی در سطح یک جسم را چگالی سطحی بار الکتریکی می‌گوییم.

σ : چگالی سطحی بار $(C/m^۲)$

Q : بار الکتریکی موجود در سطح (C)

A : مساحت سطحی که بار الکتریکی روی آن توزیع شده است. $(m^۲)$

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به رابطهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی، بار موجود در هر میلی‌متر مربع از این سطح فلزی را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = \sigma A \xrightarrow[A=۱\ mm^۲=۱۰^{-۲}\ cm^۲]{\sigma=۸\ nC/cm^۲}$$

$$Q = ۸\times۱۰^{-۲}\ nC = ۸\times۱۰^{-۲}\ nC\times\frac{۱۰^{-۹}\ C}{۱\ nC} = ۸\times۱۰^{-۱۱}\ C$$

گام دوم: در یک جسم خنثی، تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها برابرند، پس Q بار موجود در سطح خارجی جسم رسانا است که به دلیل اختلاف تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها ایجاد شده است. کافی است به کمک رابطهٔ $Q = ne$ تعداد بار بنیادی که این اختلاف را به وجود آورده، محاسبه کنیم:

$$Q = ne \Rightarrow n = \frac{Q}{e} = \frac{۸\times۱۰^{-۱۱}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۵\times۱۰^{۸}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۲ **حجم کرهٔ فلزی A، ۸ برابر حجم کرهٔ فلزی B و بار الکتریکی کرهٔ A، ۲ برابر بار الکتریکی کرهٔ B است. چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ A، چند برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ B است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

از رابطهٔ $\sigma = \frac{Q}{A}$، نسبت چگالی سطحی جسم (۱) به چگالی سطحی جسم (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲} = \frac{Q_۱}{Q_۲} \times \frac{A_۲}{A_۱}$$

اگر جسم‌ها کروی باشند، با توجه به این‌که مساحت کره برابر با $A = ۴\pi r^۲$ است، داریم:

$$\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲} = \frac{Q_۱}{Q_۲} \times (\frac{r_۲}{r_۱})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ حجم دو کرهٔ فلزی، نسبت شعاع‌ها را به دست می‌آوریم:

$$V_A = ۸V_B \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi r_A^۳ = ۸(\frac{۴}{۳}\pi r_B^۳) \Rightarrow r_A = ۲r_B$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ به‌دست‌آمده در درس‌باکس، داریم:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A}{Q_B} \times (\frac{r_B}{r_A})^۲ = \frac{۲Q_B}{Q_B} \times (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۳ فاصلهٔ بین صفحات خازنی برابر **d**، مساحت هر یک از صفحه‌های آن $۴۰\ cm^۲$ و بین صفحات آن هوا است. اگر فاصلهٔ بین صفحات خازن $۴\ mm$ کاهش یابد، ظرفیت خازن $۲۸/۸$ پیکوفاراد افزایش می‌یابد. **d** برابر چند سانتی‌متر است؟

$(\varepsilon_۰ = ۹\times ۱۰^{-۱۲}\ \frac{C^۲}{N.m^۲})$

۱) $۰/۵$ ۲) $۰/۶$ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ظرفیت خازن از ویژگی‌های ساختاری خازن است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d}$

ثابت دی الکتریک

A: مساحت هر یک از صفحه‌ها $(m^۲)$

d: فاصلهٔ صفحه‌ها از هم (m)

$\varepsilon_۰$: ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $(\frac{C^۲}{N.m^۲}$ یا $F/m)$

- ثابت دی‌الکتریک یکا ندارد.
- ثابت دی‌الکتریک هوا برابر یک فرض می‌شود و ثابت دی‌الکتریک سایر مواد نارسانا بزرگ‌تر از یک است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

رابطهٔ ظرفیت خازن را در دو حالت می‌نویسیم و اختلاف آن‌ها را برابر با $۲۸/۸\ pF$ قرار می‌دهیم تا فاصلهٔ **d** را به دست آوریم:

$$C_۲ - C_۱ = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d_۲} - \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d_۱} = \kappa\varepsilon_۰A(\frac{۱}{d_۲} - \frac{۱}{d_۱})$$

$$\xrightarrow[\varepsilon_۰=۹\times۱۰^{-۱۲}\frac{C^۲}{N.m^۲},\ A=۴۰\ cm^۲=۴۰\times۱۰^{-۴}m^۲]{C_۲-C_۱=۲۸/۸\ pF=۲۸/۸\times۱۰^{-۱۲}F,\ \kappa=۱} ۲۸/۸\times ۱۰^{-۱۲} = ۱\times۹\times ۱۰^{-۱۲}\times ۴۰\times ۱۰^{-۴}(\frac{d_۱-d_۲}{d_۱d_۲})$$

$$\xrightarrow{d_۱-d_۲=۴\ mm=۴\times۱۰^{-۳}m} ۸۰۰ = \frac{۴\times۱۰^{-۳}}{d_۱d_۲} \xrightarrow[d_۲=d-۴\times۱۰^{-۳}]{d_۱=d}$$

$$۲۰۰ = \frac{۱۰^{-۳}}{d(d-۴\times۱۰^{-۳})} \Rightarrow d^۲ - ۴\times۱۰^{-۳}d = ۵\times۱۰^{-۶}$$

$$\Rightarrow d^۲ - ۴\times۱۰^{-۳}d - ۵\times۱۰^{-۶} = ۰ \Rightarrow (d-۵\times۱۰^{-۳})(d+۱۰^{-۳}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} d = ۵\times۱۰^{-۳}\ m = ۰/۵\ cm & \text{ق ق} \\ d = -۱۰^{-۳}\ m & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۴ **اختلاف پتانسیل دو سر خازنی به ظرفیت $۵\ \mu F$، ۲۵ درصد افزایش می‌یابد و در اثر آن، انرژی ذخیره شده در خازن $۹۰\ \mu J$ تغییر می‌کند. بار الکتریکی اولیهٔ ذخیره‌شده در خازن چند میکروکولن بوده است؟**

۱) ۴۰ ۲) ۶۲/۵

۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

انرژی ذخیره‌شده در خازن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$U\ (\text{J}) = \frac{۱}{۲} C\ (\text{F})\, V^۲\ (\text{V})$$

(U: انرژی، C: ظرفیت، V: اختلاف پتانسیل)

ظرفیت خازن: نسبت بار الکتریکی ذخیره‌شده روی صفحه‌های یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌های آن، همواره عدد ثابتی است که به این نسبت ثابت، ظرفیت خازن می‌گویند:

$$C\ (\text{F}) = \frac{Q\ (\text{C})}{V\ (\text{V})}$$

(Q: بار ذخیره‌شده روی صفحه‌ها)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به رابطهٔ $U = \frac{۱}{۲} CV^۲$ و ثابت‌بودن ظرفیت خازن، وقتی اختلاف پتانسیل دو سر خازن افزایش می‌یابد، انرژی ذخیره‌شده در آن نیز افزایش می‌یابد.

$$V_۲ = V_۱ + ۰/۲۵V_۱ = ۱/۲۵V_۱ = \frac{۵}{۴}V_۱ \Rightarrow U_۲ > U_۱ \Rightarrow \Delta U > ۰$$

گام دوم: با توجه به معلوم‌بودن تغییرات انرژی خازن، اختلاف پتانسیل خازن در حالت اول را به دست می‌آوریم:

$$U_۲ - U_۱ = \frac{۱}{۲}CV_۲^۲ - \frac{۱}{۲}CV_۱^۲ \Rightarrow \Delta U = \frac{۱}{۲}C(V_۲^۲ - V_۱^۲) \xrightarrow[C=۵\ \mu F]{\Delta U = ۹۰\ \mu J\ ,\ V_۲ = \frac{۵}{۴}V_۱} ۹۰ = \frac{۱}{۲} \times ۵((\frac{۵}{۴}V_۱)^۲ - V_۱^۲)$$

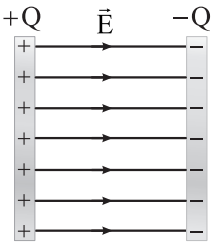
$$\Rightarrow ۳۶ = \frac{۲۵}{۱۶}V_۱^۲ - V_۱^۲ \Rightarrow ۳۶ = \frac{۹}{۱۶}V_۱^۲ \xrightarrow{\sqrt{\ }} ۶ = \frac{۳}{۴}V_۱ \Rightarrow V_۱ = ۸\ V$$

گام سوم: بار الکتریکی اولیهٔ ذخیره‌شده در خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_۱ = CV_۱ \xrightarrow[V_۱ = ۸\ V]{C = ۵\ \mu F} Q_۱ = ۵ \times ۸ = ۴۰\ \mu C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۵ در شکل زیر، دو صفحهٔ فلزی که بار الکتریکی آن‌ها هم‌اندازه و ناهمنام است، در فاصلهٔ معینی از هم قرار دارند. اگر فاصلهٔ دو صفحه نصف شود، چه تعداد از موارد زیر درست است؟



الف) اندازهٔ میدان الکتریکی بین دو صفحه، ۲ برابر می‌شود.

ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه، ۲ برابر می‌شود.

پ) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی بین دو صفحه، $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) ظرفیت خازن با ثابت دی‌الکتریک (κ) و مساحت صفحه‌های آن (A) نسبت مستقیم دارد، ولی با فاصلهٔ میان دو صفحهٔ آن (d) نسبت وارون دارد.

$$\frac{C_۲}{C_۱}=\frac{\kappa_۲}{\kappa_۱}\times\frac{A_۲}{A_۱}\times\frac{d_۱}{d_۲}$$

۲) انرژی ذخیره‌شده در یک خازن به صورت زیر به دست می‌آید:

بار ذخیره‌شده در خازن (C)

انرژی (J) ← $U=\frac{Q^۲}{۲C}$

ظرفیت خازن (F)

۲) میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن، یکنواخت است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)

میدان الکتریکی یکنواخت (V/m) ← $E=\frac{V}{d}$

فاصلهٔ بین دو صفحه (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به ثابت‌بودن κ و A، نسبت ظرفیت این خازن در حالت دوم به حالت اول را حساب می‌کنیم.

$$\frac{C_۲}{C_۱}=\frac{d_۱}{d_۲}\xrightarrow{d_۲=\frac{۱}{۲}d_۱}\frac{C_۲}{C_۱}=\frac{d_۱}{\frac{۱}{۲}d_۱}=۲$$

بنابراین ظرفیت خازن، ۲ برابر می‌شود.

گام دوم: بار الکتریکی خازن ثابت می‌ماند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$V=\frac{Q}{C}\Rightarrow\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{C_۱}{C_۲}\xrightarrow{\frac{C_۲}{C_۱}=۲}\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۱}{۲}$$

یعنی اختلاف پتانسیل دو سر خازن، نصف می‌شود و مورد «ب» نادرست است.

گام سوم: نسبت میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ خازن در حالت دوم به حالت اول را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{V}{d}\Rightarrow\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{V_۲}{V_۱}\times\frac{d_۱}{d_۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{d_۱}{\frac{۱}{۲}d_۱}=۱$$

یعنی میدان الکتریکی بین دو صفحه، ثابت می‌ماند و مورد «الف» نادرست است.

گام چهارم: نسبت انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در حالت دوم به حال اول را محاسبه می‌کنیم:

$$U=\frac{Q^۲}{۲C}\xrightarrow{Q_۱=Q_۲}\frac{U_۲}{U_۱}=\frac{C_۱}{C_۲}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین فقط مورد «پ» درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی یازدهم

۱۱۶ **کدام مورد درست است؟**

۱) در گذشته، استفادهٔ انسان‌ها از مواد، محدود به برخی مواد طبیعی مانند چوب، پشم، سفال و خاک بوده است.

۲) با گرمادادن به مواد و افزودن آن‌ها به یکدیگر، به یقین خواص آن‌ها بهبود می‌یابد.

۳) امروزه میزان تولید و مصرف نسبی سوخت‌های فسیلی نسبت به مواد معدنی و فلزها بیشتر است.

۴) با وجود استخراج مقادیر زیادی ماده از کرهٔ زمین، جرم کلی مواد در کرهٔ زمین به تقریب ثابت می‌ماند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

موادی که از طبیعت به دست می‌آیند، *یه هورایی!* دوباره به طبیعت بازمی‌گردند و در نتیجه **جرم کل مواد** در کرهٔ زمین **ثابت** می‌ماند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): سفال جزء مواد ساختگی محسوب می‌شود و نه طبیعی!

گزینهٔ (۲): گرمادادن به مواد و افزودن آن‌ها به یکدیگر، سبب تغییر و **گاهی** بهبود خواص می‌شود.

گزینهٔ (۳): امروزه میزان تولید و مصرف نسبی مواد معدنی نسبت به سوخت‌های فسیلی و فلزها بیشتر است.

فلزها < سوخت‌های فسیلی < مواد معدنی :میزان تولید و مصرف نسبی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۷ **با افزایش عدد اتمی عنصرها در هر دوره و هر گروه از جدول تناوبی، به ترتیب کدام ویژگی آن‌ها افزایش می‌یابد؟ (گاز نجیب هر دوره را در نظر نگیرید.)**

۱) شعاع اتمی ـ خصلت فلزی

۲) تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده ـ تعداد الکترون‌های ظرفیتی

۳) خصلت نافلزی ـ شعاع اتمی

۴) تعداد الکترون‌های ظرفیتی ـ تعداد زیرلایه‌های الکترونی اشغال‌شده

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

روندهای تناوبی در جدول:

- در یک دوره از چپ به راست:
  - شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد.
  - خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.
  - خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.
- در یک گروه از بالا به پایین:
  - شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.
  - خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
  - خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی

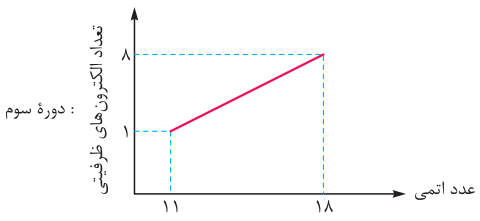
در هر دوره، از چپ به راست، خصلت نافلزی افزایش و در هر گروه، از بالا به پایین، شعاع اتمی افزایش می‌یابد.

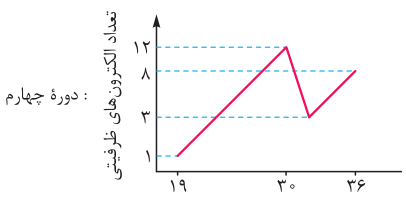
بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): در یک دوره، با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

گزینهٔ (۲): در یک دوره، با افزایش عدد اتمی، تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده ثابت است. هم‌چنین در یک گروه، از بالا به پایین، تعداد الکترون‌های ظرفیتی ثابت است (به‌جز در گروه ۱۸ به خاطر وجود هلیم).

گزینهٔ (۴): تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها در دورهٔ اول تا سوم، با افزایش عدد اتمی افزایش می‌یابد، ولی در دوره‌های بعدی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد:





SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۸ **کدام مورد دربارهٔ جدول تناوبی درست است؟**

۱) در گروه ۱۴، بین اولین عنصر فلزی و اولین عنصر نافلزی، یک عنصر شبه‌فلزی وجود دارد.

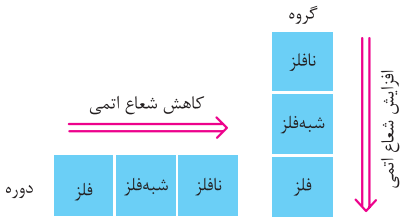
۲) در دورهٔ چهارم برخلاف دورهٔ سوم، تنها عنصرهای فلزی و نافلزی وجود دارد.

۳) در دورهٔ سوم، شمار عنصرهای فلزی با شمار عنصرهای نافلزی برابر است.

۴) شعاع اتمی یک عنصر شبه‌فلزی، به یقین از شعاع اتمی عنصر نافلزی هم‌دوره یا هم‌گروه آن بزرگ‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در هر دوره، عنصر سمت راست شبه‌فلز، عنصر نافلز و در هر گروه، عنصر بالایی شبه‌فلز، نافلز می‌باشد.



بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): در گروه ۱۴ بین اولین عنصر فلزی ($_{50}Sn$) و اولین عنصر نافلزی ($_{6}C$)، دو شبه‌فلز وجود دارد ($_{14}Si$, $_{32}Ge$).

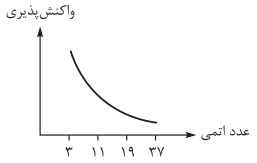
گزینهٔ (۲): در دورهٔ چهارم همانند دورهٔ سوم، سه نوع عنصر فلزی، نافلزی و شبه‌فلزی وجود دارد.

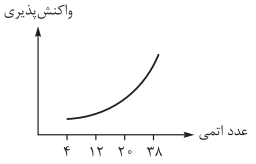
گزینهٔ (۳): در دورهٔ سوم، مجموع شمار عنصرهای فلزی و شبه‌فلزی، با شمار عنصرهای نافلزی برابر است.

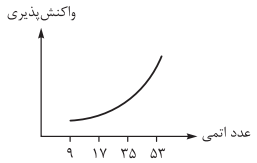


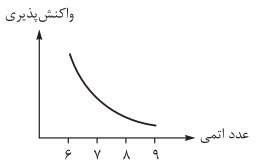
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۹ براساس مطالب کتاب درسی، کدام نمودار دربارهٔ مقایسهٔ واکنش‌پذیری عنصرها درست است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

در گزینهٔ (۲) اعداد اتمی داده‌شده، مربوط به فلزات قلیایی خاکی (گروه دوم) است. با افزایش عدد اتمی این عنصرها، واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد *(نمودار صعودیه)*.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): اعداد اتمی داده‌شده، مربوط به فلزات قلیایی (گروه اول) است. با افزایش عدد اتمی این عنصرها، واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد (نمودار باید صعودی باشد).

گزینهٔ (۳): اعداد اتمی داده‌شده مربوط به گروه هالوژن‌ها (گروه ۱۷) می‌باشد که در این گروه با افزایش عدد اتمی، واکنش‌پذیری کاهش می‌یابد. (نمودار باید نزولی باشد)

گزینهٔ (۴): اعداد اتمی داده‌شده مربوط به عناصر دورهٔ دوم است که در نافلزهای یک دوره با افزایش عدد اتمی، واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد (نمودار باید صعودی باشد).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۰ با توجه به داده‌های جدول زیر که مربوط به عنصرهای دورهٔ چهارم جدول تناوبی است، کدام مورد درست است؟

ویژگی / یون	M^{2+}	E^{x-}	D^{3+}
نسبت شمار الکترون‌ها با $l=0$ به $l=2$	۱/۵	b	۱
شمار الکترون‌های آخرین لایهٔ اشغال‌شدهٔ اتم عنصر	a	۷	۲

۱) نسبت مقدار b به x برابر ۱/۲ است.

۲) مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم M با عنصر $_{34}A$ برابر است.

۳) عنصر D با آلومینیم هم‌گروه بوده و دارای ۳ الکترون ظرفیتی است.

۴) مقدار a با شمار الکترون‌ها در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اشغال‌شدهٔ اتم نهمین عنصر واسطهٔ جدول، برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا باید عنصرهای مورد نظر را پیدا کنیم:

$D^{3+}: 1s^2\ /\ 2s^2\ 2p^6\ /\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^6 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2} = \frac{6}{6} = 1$

$D: 1s^2\ /\ 2s^2\ 2p^6\ /\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^7\ /\ 4s^2 \Rightarrow$ عنصر D همان $_{27}Co$ است.

$E: 1s^2\ /\ 2s^2\ 2p^6\ /\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ /\ 4s^2\ 4p^5 \Rightarrow$ عنصر E همان $_{35}Br$ است.

$E^-: 1s^2\ /\ 2s^2\ 2p^6\ /\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ /\ 4s^2\ 4p^6 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2} = \frac{8}{10} = 0/8$

$M^{2+}: 1s^2\ /\ 2s^2\ 2p^6\ /\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^4 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2} = \frac{6}{4} = 1/5$

$M: 1s^2\ /\ 2s^2\ 2p^6\ /\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5\ /\ 4s^1 \Rightarrow$ عنصر M همان $_{24}Cr$ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲):

مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم M: $(3+2)\times 5 + (4+0)\times 1 = 29$

آرایش الکترونی فشردهٔ $_{34}A$ به صورت زیر است:

$_{24}A: [Ar]\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^4$

مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم A: $(4+0)\times 2 + (4+1)\times 4 = 28$

گزینهٔ (۳): عنصر D در گروه ۹ و دارای ۹ الکترون ظرفیتی است در حالی که Al در گروه ۱۳ بوده و دارای ۳ الکترون ظرفیتی است.

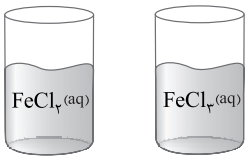
گزینهٔ (۴): اتم نهمین عنصر واسطه $_{29}Cu$ می‌باشد؛ آرایش الکترونی فشردهٔ $_{29}Cu$ به صورت زیر است:

$_{29}Cu: [Ar]\ 3d^{10}\ \underbrace{4s^1}_{\text{بیرونی‌ترین زیرلایه}}$

شمار الکترون‌های آخرین لایهٔ اشغال‌شدهٔ اتم عنصر M با شمار الکترون‌ها در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اشغال‌شدهٔ اتم $_{29}Cu$ برابر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۱ در دو لولهٔ آزمایش جداگانه مطابق شکل‌های زیر، ۲۵ میلی‌لیتر از محلول‌های آهن (II) کلرید و آهن (III) کلرید با غلظت‌های مولی یکسان وجود دارد. اگر به هر دو لوله، مقدار کافی سدیم هیدروکسید اضافه کنیم تا واکنش به طور کامل انجام شود، در کدام لوله، رسوب قرمز ـ قهوه‌ای رنگ تولید می‌شود و مقایسهٔ شمار مول رسوب تولیدشده در آن‌ها به کدام صورت است؟



(a) (b)

۱) a، $b > a$

۲) a، $a = b$

۳) b، $a > b$

۴) b، $a = b$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$a \rightarrow FeCl_2 + 2NaOH \rightarrow \underbrace{Fe(OH)_2}_{\text{رسوب سبز}} + 2NaCl$$

$$b \rightarrow FeCl_3 + 3NaOH \rightarrow \underbrace{Fe(OH)_3}_{\text{رسوب قرمز - قهوه‌ای}} + 3NaCl$$

چون ضرایب استوکیومتری $Fe(OH)_2$، $FeCl_2$، $Fe(OH)_3$ و $FeCl_3$ با هم برابر است و هم‌چنین حجم و غلظت مولی محلول $FeCl_2$ با $FeCl_3$ یکسان است، پس تعداد مول رسوب‌های تولیدشده برابر خواهد بود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۲ در بین واکنش‌های زیر، تنها یکی از آن‌ها به طور طبیعی انجام می‌شود. بر این اساس کدام مورد نادرست است؟

(MO، نماد اکسید فلز M است.)

I) $MO + Ag \rightarrow$

II) $MO + Zn \rightarrow$

۱) واکنش‌پذیری فلز نقره از فلز M کم‌تر است.

۲) واکنش $M + Na_2O \rightarrow$ به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۳) M می‌تواند فلز مس باشد.

۴) برای استخراج فلز روی از سنگ معدن آن، نمی‌توان از فلز M استفاده کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

واکنش‌پذیری عنصرها:

واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی (مانند سدیم و پتاسیم) از واکنش‌پذیری فلزهای واسطه (مانند آهن و روی) بیشتر است. هم‌چنین واکنش‌پذیری فلزهای واسطه‌ای مانند آهن و روی از فلزهای واسطه‌ای مانند مس، نقره و طلا بیشتر است.

رفتار	واکنش‌پذیری		
	زیاد	کم	ناچیز
نام فلز	سدیم، پتاسیم	آهن، روی	مس، نقره، طلا

اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یک عنصر آزاد وجود داشته باشد و بگویند که این واکنش به طور طبیعی انجام می‌شود، ما خیلی سریع می‌توانیم واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم:

$AB + C \rightarrow AC + B \Rightarrow$ واکنش‌پذیری : $B < C$

(عنصر ترکیب — عنصر ترکیب)

در معادلهٔ کلی بالا، واکنش‌پذیری C از B بیشتر بوده است، به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته؛ از این‌رو با انجام واکنش، *جاش رو با* B *عوض کرده*.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

چون واکنش‌پذیری Zn نسبت به Ag بیشتر است، فقط واکنش دوم انجام می‌شود:

$MO + Ag \rightarrow$ ×

$MO + Zn \rightarrow ZnO + M$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *درسته!* مقایسهٔ واکنش‌پذیری عناصر به صورت زیر است:

واکنش‌پذیری: $Zn > M > Ag$

گزینهٔ (۲): واکنش‌پذیری M از Zn کم‌تر است و Zn نیز از Na کم‌تر می‌باشد؛ پس مقایسهٔ واکنش‌پذیری عناصر به صورت زیر است:

واکنش‌پذیری: $Na > Zn > M$

گزینهٔ (۳): چون واکنش‌پذیری Zn از Cu بیشتر می‌باشد؛ Zn می‌تواند با ترکیبات مس به طور طبیعی واکنش دهد.

گزینهٔ (۴): فلز M نمی‌تواند با ترکیب فلز روی به طور طبیعی واکنش دهد، چون واکنش‌پذیری Zn از M بیشتر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۳ اگر در واکنش استخراج آهن به کمک کربن، به ازای مصرف ۰/۱ تن آهن (III) اکسید با خلوص ۸۰٪، ۸/۴ متر مکعب گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP تولید شود، بازده درصدی واکنش کدام است؟ $(O = 16 , Fe = 56 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش استخراج آهن به کمک کربن به صورت زیر است:

$$2Fe_2O_3 + 3C \rightarrow 4Fe + 3CO_2$$

$$0/1\ ton\ Fe_2O_3\ \text{ناخالص} \times \frac{10^3\ kg}{1\ ton} \times \frac{10^3\ g}{1\ kg} \times \frac{80\ g\ Fe_2O_3\ \text{خالص}}{100\ g\ Fe_2O_3\ \text{ناخالص}} \times \frac{1\ mol\ Fe_2O_3}{160\ g\ Fe_2O_3}$$

$$\times \frac{3\ mol\ CO_2}{2\ mol\ Fe_2O_3} \times \frac{22/4\ L\ CO_2}{1\ mol\ CO_2} \times \frac{1\ m^3\ CO_2}{1000\ L\ CO_2} = 16/8\ m^3 CO_2$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{8/4\ m^3\ CO_2}{16/8\ m^3\ CO_2} \times 100 = 50\%$$

یه جور دیگه

$$\frac{\text{جرم ناخالص} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Fe_2O_3}} \times \frac{\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{CO_2}} \Rightarrow \frac{10^5 \times \frac{8}{10} \times \frac{x}{100}}{2 \times 160} = \frac{8/4 \times 10^3}{3 \times 22/4} \Rightarrow x = 50$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۴ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) بستر دریا به طور معمول منبعی غنی از برخی فلزهای واسطه مانند منگنز، کبالت و نیکل است.

۲) بررسی چرخهٔ عمر به صنایع کمک می‌کند تا به سمت رفتارهای سازگارتر با محیط زیست و توسعهٔ پایدار پیش بروند.

۳) روش استفاده از گیاهان جاذب فلز، برای عنصرهای مس و نیکل مناسب است.

۴) فلزها منابعی تجدیدناپذیرند و در استخراج آن‌ها، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینهٔ (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): گنج عظیم در اعماق دریاها، در برخی مناطق محتوی سولفید چندین فلز واسطه و در برخی مناطق دیگر به صورت کلوخه‌ها و پوسته‌هایی غنی از فلزهایی مانند منگنز، کبالت، آهن، نیکل، مس و ... یافت می‌شود.

گزینهٔ (۲): ارزیابی چرخهٔ عمر، حاصل تلاش برای یافتن شاخص‌هایی است که کمک می‌کنند صنایع گوناگون در مسیر بهره‌گیری از دانش فنی و تخصصی سازگارتر با محیط زیست حرکت کنند و رفتار و عملکرد خود را در مسیر رسیدن به توسعهٔ پایدار اصلاح کنند.

گزینهٔ (۳): یکی از روش‌های بیرون‌کشیدن فلز از لابه‌لای خاک، استفاده از گیاهان است. در این روش در معدن یا خاک دارای فلز، گیاهانی را می‌کارند که می‌توانند آن فلز را جذب کنند. سپس گیاه را برداشت می‌کنند، می‌سوزانند و از خاکستر حاصل، فلز را جداسازی می‌کنند. این روش برای استخراج فلزهای روی و نیکل مقرون‌به‌صرفه نیست.

گزینهٔ (۴): *درسته!*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۵ نمونه‌ای به جرم ۱۰۰ گرم آهن (III) کربنات ناخالص مطابق معادلهٔ زیر به طور کامل تجزیه می‌شود. اگر پس از پایان واکنش، جرم کل مواد جامد درون ظرف برابر ۶۵ / ۷۶ گرم باشد، درصد خلوص آهن (III) کربنات اولیه به تقریب کدام است؟ (ناخالصی‌ها در واکنش شرکت نمی‌کنند.) $(Fe = 56 , C = 12 , O = 16 : g.mol^{-1})$

$$3Fe_2(CO_3)_3\,(s) \xrightarrow{\Delta} 4FeO(s) + Fe_2O_3(s) + 9CO_2(g) + O_2(g)$$

۱) ۶۴ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ کاهش جرم مخلوط واکنش به دلیل خروج گاز از ظرف واکنش است:

مجموع جرم گازهای تولیدشده = کاهش جرم مخلوط واکنش

$$\Rightarrow \text{مجموع جرم } O_2 \text{ و } CO_2 \text{ تولیدشده} : 100 - 65/76 = 34/24\ g$$

$$34/24\ g(O_2 \text{ و } CO_2) \times \frac{3\ mol\ Fe_2(CO_3)_3}{(9\times 44)\ g\ CO_2 + (1\times 32)\ g\ O_2} \times \frac{292\ g\ Fe_2(CO_3)_3 \text{ خالص}}{1\ mol\ Fe_2(CO_3)_3}$$

$$= 70/08\ Fe_2(CO_3)_3 \text{ خالص}$$

$$Fe_2(CO_3)_3 \text{ درصد خلوص} = \frac{Fe_2(CO_3)_3 \text{ جرم خالص}}{Fe_2(CO_3)_3 \text{ جرم ناخالص}} \times 100$$

$$= \frac{70/08}{100} \times 100 = 70/08 \simeq \%70$$

یه جور دیگه

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Fe_2(CO_3)_3}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{(O_2 , CO_2)}} \Rightarrow \frac{100 \times \frac{x}{100}}{3\times 292} = \frac{34/24}{(9\times 44) + (1\times 32)} \Rightarrow x = 70/08$$

کنکور از تجزیهٔ مقداری کلسیم سولفات دارای ناخالصی بر اثر حرارت، ۱۳ / ۴۴ لیتر گاز پس از تبدیل به شرایط استاندارد تشکیل می‌شود. اگر جرم ناخالصی باقی‌مانده، برابر ۱۳ / ۶ گرم باشد، درصد خلوص کلسیم سولفات در مخلوط آغازی کدام است؟ (ناخالصی در واکنش شرکت نمی‌کند، معادلهٔ واکنش موازنه شود، $Ca = 40 , S = 32 , O = 16 : g.mol^{-1}$)

$$CaSO_4\,(s) \xrightarrow{\Delta} CaO(s) + SO_2(g) + O_2(g)$$

(سؤال ۸۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۹۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۶ **مخلوطی از سه آلکان راست‌زنجیر گازی (A، B و X) در دما و فشار اتاق موجود است. اگر با سردکردن این مخلوط آلکان B آسان‌تر به مایع تبدیل شود، کدام مورد درست است؟ ($H=1, C=12: g.mol^{-1}$)**

۱) میزان فراریت آلکان B از X بیشتر است.

۲) اگر B، سوخت فندک باشد، در ساختار آلکان A می‌تواند ۹ پیوند اشتراکی وجود داشته باشد.

۳) اگر X، پروپان باشد، در نام آلکان A پیشوندی که شمار اتم‌های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.

۴) اگر درصد جرمی کربن در آلکان A برابر ۸۰٪ باشد، درصد جرمی کربن در آلکان B کم‌تر از ۸۰٪ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته هر چه نقطه جوش یک گاز بیشتر باشد، در شرایط یکسان، آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود:

ترتیب مایع شدن: $A \rightarrow B$ $\Rightarrow$ نقطهٔ جوش: $A > B$

پاسخ خیلی تشریحی آلکان B که آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود، نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به A و X دارد:

نقطهٔ جوش: $B > A, X$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هر چه نقطهٔ جوش یک ماده بیشتر باشد، میزان فراریت آن کم‌تر است.

گزینهٔ (۲): سوخت فندک، بوتان (C_4H_{10}) است. می‌دانیم در آلکان‌های راست‌زنجیر، با افزایش شمار اتم‌های کربن، نقطهٔ جوش افزایش می‌یابد؛ پس اگر B، بوتان با ۱۳ پیوند اشتراکی باشد، X آلکانی با کم‌تر از ۴ اتم کربن و کم‌تر از ۱۳ پیوند اشتراکی است، اما دقت کنید که شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آلکان‌ها برابر $3n+1$ است و نمی‌تواند مضرب ۳ (مانند عدد ۹) باشد.

نکته از آن‌جا که هر اتم کربن، چهار الکترون و هر اتم هیدروژن، یک الکترون به اشتراک می‌گذارد و از طرفی هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون است، تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times 1) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times 4)}{2}$$

در ضمن، شمار پیوندهای $C-H$ در هیدروکربن‌ها برابر با شمار اتم‌های هیدروژن آن‌ها است.

مثال تعداد پیوندهای اشتراکی در یک آلکان nکربنی (C_nH_{2n+2}) برابر با $(3n+1)$ است:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در آلکان‌ها} = \frac{\overbrace{4n}^{C} + \overbrace{2n+2}^{B}}{2} = 3n+1$$

در هر آلکان با n اتم کربن، $(n-1)$ پیوند کربن ـ کربن $(C-C)$ و $(2n+2)$ پیوند کربن ـ هیدروژن $(C-H)$ وجود دارد. هم‌چنین برای رسم ساختار پیوند ـ خط یک آلکان با n اتم کربن به $(n-1)$ خط نیاز است.

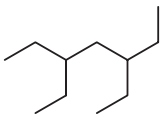
گزینهٔ (۳): آلکان‌های راست‌زنجیر ۱ تا ۴ کربنی در دما و فشار اتاق، گازی‌اند. اگر X پروپان (C_3H_8) باشد، B که نقطهٔ جوش بالاتری دارد، آلکانی سنگین‌تر از آن (یعنی بوتان) است؛ پس A می‌تواند آلکان ۱ یا ۲ کربنی (CH_4 , C_2H_6) باشد. در نام آلکان‌های ۱ تا ۴ کربنی (متان، اتان، پروپان و بوتان) پیشوندی که شمار اتم‌های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.

گزینهٔ (۴): تعداد اتم‌های کربن آلکان B با نقطهٔ جوش بالاتر، بیشتر از آلکان A است. در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، درصد جرمی کربن افزایش می‌یابد:

$$CH_4 \ (\frac{12}{16}\times 100 = \%75) \quad , \quad C_2H_6 \ (\frac{2\times 12}{30}\times 100 = \%80) \quad , \quad C_3H_8 \ (\frac{3\times 12}{44}\times 100 = \%81/8) \quad , \ldots$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۷ کدام موارد زیر دربارهٔ آلکان‌های داده‌شده، درست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$



(A)

$(CH_۳)_۲CHCH_۲CH(CH_۳)_۲$

(B)

الف) در نام‌گذاری A برخلاف B، برای بیان شاخه‌های فرعی از پیشوند استفاده نمی‌شود.

ب) شمار شاخه‌های فرعی متیل در B، دو برابر A است.

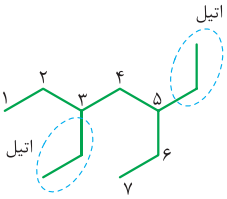
پ) جرم مولی B، ۶/۲۵ برابر نخستین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها است.

ت) آلکان راست‌زنجیر هم‌کربن با A، در دمای $۲۲\ ^\circ C$ و فشار $۱\ atm$ به حالت مایع است.

۱) پ و ت
۲) الف و ب
۳) ب و ت
۴) الف و پ

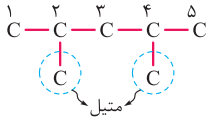
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا هر دو آلکان را نام‌گذاری می‌کنیم:



$\Rightarrow$ ۳، ۵ ـ دی‌اتیل هپتان

(A)

$(CH_۳)_۲CHCH_۲CH(CH_۳) \Rightarrow$  ۲، ۴ ـ دی‌متیل پنتان

بررسی عبارت‌ها:

الف) در نام هر دو آلکان، پیشوند «دی» وجود دارد.

ب) در آلکان A، اصلاً شاخهٔ فرعی متیل وجود ندارد.

پ) B یک آلکان ۷کربنه است:

$$C_nH_{۲n+۲} \Rightarrow C_۷H_{۱۶}$$

از طرفی نخستین عضو آلکان‌ها، متان با فرمول $CH_۴$ است:

$$\frac{\text{جرم مولی } C_۷H_{۱۶}}{\text{جرم مولی } CH_۴} = \frac{۱۰۰}{۱۶} = \frac{۲۵}{۴} = ۶/۲۵$$

ت) آلکان A دارای ۱۱ اتم کربن است. در شرایط گفته‌شده، آلکان‌های راست‌زنجیر تا ۴ اتم کربن به حالت گاز، از ۵ تا ۱۷ اتم کربن به حالت مایع و از ۱۸ کربن به بعد، به حالت جامدند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۸ کدام مورد دربارهٔ اتیلن (A) و استیلن (B)، نادرست است؟

C_2H_2 ← (B) ، C_2H_4 ← (A)

۱) A، در بیشتر گیاهان وجود دارد.

۲) B، سبک‌ترین هیدروکربن سیرنشده است.

۳) شمار مول گاز اکسیژن مورد نیاز برای سوختن کامل ۱ مول B، بیشتر از سوختن کامل ۱ مول A است.

۴) درصد جرمی هیدروژن در A با درصد جرمی هیدروژن در همهٔ عضوهای هم‌خانوادهٔ آن، برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اتن (C_2H_4) ← اتیلن

اتین (C_2H_2) ← استیلن

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اتن (نخستین عضو آلکن‌ها) در بیشتر گیاهان وجود دارد.

گزینهٔ (۲): اتین ($H-C\equiv C-H$)، سبک‌ترین هیدروکربن سیرنشده محسوب می‌شود.

گزینهٔ (۳): معادلهٔ سوختن کامل ۱ مول اتیلن و ۱ مول استیلن به صورت زیر است:

$$C_2H_4 + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 2H_2O$$

$$C_2H_2 + \frac{5}{2}O_2 \rightarrow 2CO_2 + H_2O$$

برای سوختن کامل ۱ مول اتیلن به ۳ مول گاز اکسیژن و برای سوختن کامل ۱ مول استیلن، به ۲/۵ مول گاز اکسیژن نیاز است.

گزینهٔ (۴): A، عضو خانوادهٔ آلکن‌ها است. درصد جرمی کربن و هیدروژن در همهٔ آلکن‌ها یکسان بوده و مستقل از شمار اتم‌های کربن آن‌ها است:

$$\text{درصد جرمی H در } C_nH_{2n} = \frac{2n}{14n} \times 100 = \frac{1}{7} \times 100 \simeq \%14/3$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۹ **کدام مطلب درست است؟**

۱) هر چه در نفت خام، درصد نفت کوره بیشتر باشد، قیمت آن بیشتر است.

۲) در جرم یکسان از نفت برنت دریای شمال و نفت سنگین ایران، حجم نفت سنگین ایران بیشتر است.

۳) نفت برنت دریای شمال در مقایسه با نفت سنگین کشورهای عربی، قیمت کم‌تری دارد.

۴) نقطهٔ جوش ماده‌ای که سوخت هواپیما به طور عمده از آن تهیه می‌شود، از خوراک پتروشیمی بیشتر و از گازوئیل کم‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته بنزین و خوراک پتروشیمی، نفت سفید (شامل آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ اتم کربن)، گازوئیل و نفت کوره، برخی از موادی هستند که در نفت خام وجود دارند:

نفت کوره > گازوئیل > نفت سفید > بنزین و خوراک پتروشیمی :مقایسهٔ اندازه و جرم مولکول

پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هر چه درصد بنزین و خوراک پتروشیمی در نفت خام بیشتر باشد، قیمت آن بیشتر است.

گزینهٔ (۲): چگالی نفت سنگین ایران بیشتر از نفت سبک برنت است. با توجه به رابطهٔ $\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$، در جرم یکسان، حجم نفتی که چگالی بیشتری دارد، کم‌تر است.

گزینهٔ (۳): درصد بنزین و خوراک پتروشیمی در نفت برنت دریای شمال بیشتر است؛ از این‌رو قیمت بالاتری دارد.

گزینهٔ (۴): سوخت هواپیما به طور عمده از نفت سفید تهیه می‌شود:

نفت کوره > گازوئیل > نفت سفید > بنزین و خوراک پتروشیمی :نقطهٔ جوش

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۰ **نسبت جرم کربن به هیدروژن در مولکول یک هیدروکربن برابر ۸ و شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آن برابر ۵۵ است. تفاوت جرم مولی این ترکیب با نفتالن، با جرم مولی کدام ترکیب برابر است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$**

۱) اوکتن
۲) سیکلوهگزان
۳) دکان
۴) هپتین

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته از آن‌جا که هر اتم کربن، چهار الکترون و هر اتم هیدروژن، یک الکترون به اشتراک می‌گذارد و از طرفی هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون است، تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times ۱) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times ۴)}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی اگر فرمول هیدروکربن را C_xH_y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{جرم کربن در } C_xH_y}{\text{جرم هیدروژن در } C_xH_y} = \frac{۱۲x}{y} = \frac{۸}{۲} \Rightarrow ۳x = ۲y \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x$$

$$\text{شمار پیوندها در } C_xH_y = \frac{۴x+y}{۲} = ۵۵ \Rightarrow ۴x + y = ۱۱۰$$

$$\xrightarrow{y=\frac{۳}{۲}x} ۴x + \frac{۳}{۲}x = ۱۱۰ \Rightarrow \frac{۸}{۲}x + \frac{۳}{۲}x = ۱۱۰ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}x = ۱۱۰$$

$$\Rightarrow x = ۲۰ \Rightarrow y = ۳۰ \Rightarrow \text{فرمول هیدروکربن} = C_{۲۰}H_{۳۰}$$

حالا از روی فرمول، می‌*شه فهمید که* تفاوت جرم مولی هیدروکربن مورد نظر با نفتالن $(C_{۱۰}H_۸)$، با جرم مولی کدام هیدروکربن داده‌شده برابر است:

$C_{۲۰}H_{۳۰} - C_{۱۰}H_۸ = C_{۱۰}H_{۲۲}$ دکان (آلکان ۱۰کربنی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه‌دوازدهم_مرحله‌دوم_۶شهریور۱۴۰۵

پایه دوازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی ناو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی ـ مصطفی کرمی محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی ـ حمید گلزاری
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیك	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر سهند محمدکریم‌نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابولفضل ناصری
فیزیك	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری‌آثار مریم گلی‌حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	آیدین طهماسقلی‌زاده مدیا عیدی امیر محمودی انزابی سعید محبی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	صدرا عبادی یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمدمهدی کریمیان	محمدتقی جهانیان علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان دوازدهم

۱۳۱ برای رسم نمودار کدام تابع، باید نمودار تابع f را در راستای افقی منقبض کنیم؟

۱) $y = ۲f(x)$

۲) $y = \frac{۱}{۲}f(x)$

۳) $y = f(۲x)$

۴) $y = f(\frac{x}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

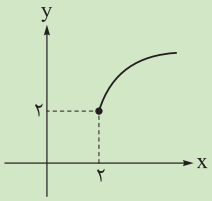
انبساط و انقباض افقی: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار تابع f، طول نقاط روی نمودار تابع f را بر k تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار تابع f منبسط و اگر $k > ۱$ باشد، نمودار منقبض می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای انقباض افقی، قدرمطلق ضریب x باید بزرگ‌تر از ۱ باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۲ نمودار تابع f صرفاً با انتقال نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{x}$ به دست می‌آید. اگر نمودار تابع f مطابق شکل زیر باشد، حاصل $(fog)(۹)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

تبدیل نمودار توابع:

	ضابطهٔ تبدیل	توضیح تبدیل	اثر روی نقطهٔ (x,y)
انتقال‌ها	$y=f(x)+k$ $y=f(x-k)$	انتقال عمودی: نمودار به اندازهٔ $\lvert k\rvert$ واحد به بالا (اگر $k>۰$) یا به پایین (اگر $k<۰$) منتقل می‌شود. انتقال افقی: نمودار به اندازهٔ $\lvert k\rvert$ واحد به راست (اگر $k>۰$) یا به چپ (اگر $k<۰$) منتقل می‌شود.	$(x,y+k)$ $(x+k,y)$
انعکاس‌ها	$y=-f(x)$ $y=f(-x)$	تقارن نسبت به محور x: نمودار نسبت به محور x قرینه می‌شود. تقارن نسبت به محور y: نمودار نسبت به محور y قرینه می‌شود.	$(x,-y)$ $(-x,y)$
انبساط و انقباض	$y=kf(x)$ $y=f(kx)$	انبساط / انقباض عمودی: نمودار در راستای عمودی با ضریب $\lvert k\rvert$ کشیده (اگر $\lvert k\rvert>۱$) یا فشرده (اگر $\lvert k\rvert<۱$) می‌شود. (اگر $k<۰$ باشد، تقارن نسبت به محور x نیز رخ می‌دهد.) انبساط / انقباض افقی: نمودار در راستای افقی با ضریب $\frac{۱}{\lvert k\rvert}$ فشرده (اگر $\lvert k\rvert>۱$) یا کشیده (اگر $\lvert k\rvert<۱$) می‌شود. (اگر $k<۰$ باشد، تقارن نسبت به محور y نیز رخ می‌دهد.)	(x,ky) $(\frac{x}{k},y)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از فرض سؤال به دست می‌آید که ضابطهٔ تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=\sqrt{x-a}+b$$

زیرا نمودار آن صرفاً با انتقال نمودار تابع g به دست آمده است.

گام دوم: طبق ضابطهٔ بالا، دامنه و برد تابع f به ترتیب $D_f=[a,+\infty)$ و $R_f=[b,+\infty)$ و مطابق نمودار، این دو به ترتیب $D_f=[۲,+\infty)$ و $R_f=[۲,+\infty)$ است.

بنابراین به سادگی نتیجه می‌گیریم که $a=b=۲$ است:

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-۲}+۲$$

گام سوم: حالا خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

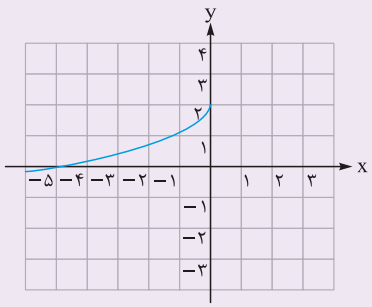
$$\begin{cases} g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g(۹)=۳ \\ (fog)(۹)=f(g(۹))=f(۳)=\sqrt{۳-۲}+۲=۳ \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کتاب درسی

نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است، ضابطهٔ این تابع را بنویسید.

(حسابان (۲) ـ تمرین ۴ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۳ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳-\sqrt{۲-x}$ مفروض است. نمودار کدام تابع محورهای دستگاه مختصات را قطع نمی‌کند؟

۱) $g(x)=f(x+۲)-۳$
۲) $g(x)=f(x-۲)+۳$
۳) $g(x)=f(x+۳)-۴$
۴) $g(x)=f(x-۴)+۳$

پاسخ: گزینهٔ ۳

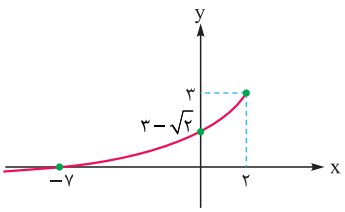
Hint بهتره که نمودار تابع f رو رسم کنین.

درس Box نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=a+b\sqrt{cx+d}$، یکی از چهار حالت زیر را دارد:

	راست‌گرا	چپ‌گرا
رو به بالا	$c>۰, b>۰$ نقطهٔ $(-\frac{d}{c}, a)$	$c<۰, b>۰$ نقطهٔ $(-\frac{d}{c}, a)$
رو به پایین	نقطهٔ $(-\frac{d}{c}, a)$ $c>۰, b<۰$	نقطهٔ $(-\frac{d}{c}, a)$ $c<۰, b<۰$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق درس‌باکس بالا، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام دوم: نمودار تابع g نیز بر طبق گزینه‌ها، فقط از روی انتقال نمودار تابع بالا به دست می‌آید؛ بنابراین برای این‌که نمودار انتقال‌یافته، هیچ‌کدام از محورهای دستگاه مختصات را قطع نکند، باید نمودار تابع f را بیشتر از ۲ واحد به چپ و بیشتر از ۳ واحد به پایین انتقال دهیم:

$$g(x)=f(x+a)-b:\begin{cases}a>۲\\b>۳\end{cases}$$

که در ضابطهٔ تابع گزینهٔ (۳) این ویژگی برقرار است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۴ **برای رسم نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=2f(1-x)$ از روی نمودار تابع f، کدام ترتیب تبدیلات درست است؟**

۱) یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور y، انقباض عمودی با ضریب ۲

۲) یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور y، انبساط عمودی با ضریب ۲

۳) یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور y، انبساط عمودی با ضریب ۲

۴) یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور y، انقباض عمودی با ضریب ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

خلاصهٔ تبدیلات نمودار توابع: با دانستن نمودار یک تابع پایه مانند $y=f(x)$، می‌توان نمودار توابع پیچیده‌تر را از طریق تبدیلات رسم کرد.

۱) انتقال عمودی و افقی:

انتقال عمودی $y=f(x)+k$:

- اگر $k>0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد به بالا منتقل می‌شود.
- اگر $k<0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ $|k|$ واحد به پایین منتقل می‌شود.

انتقال افقی $y=f(x-h)$:

- اگر $h>0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ h واحد به راست منتقل می‌شود.
- اگر $h<0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ $|h|$ واحد به چپ منتقل می‌شود.

۲) انبساط و انقباض:

انبساط و انقباض عمودی $y=kf(x)$ (با فرض $k>0$):

- اگر $k>1$ باشد، نمودار در راستای محور yها کشیده (منبسط) می‌شود (انبساط عمودی).
- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در راستای محور yها فشرده (منقبض) می‌شود (انقباض عمودی).

انبساط و انقباض افقی $y=f(kx)$ (با فرض $k>0$):

- اگر $k>1$ باشد، نمودار در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده (منقبض) می‌شود (انقباض افقی).
- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده (منبسط) می‌شود (انبساط افقی).

۳) قرینه‌سازی:

- قرینه نسبت به محور xها $(y=-f(x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود.
- قرینه نسبت به محور yها $(y=f(-x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها قرینه می‌شود.

۴) تبدیلات قدرمطلق:

قدرمطلق روی کل تابع $(y=|f(x)|)$:

- قسمتی از نمودار $f(x)$ که در بالای محور xهاست، بدون تغییر باقی می‌ماند.
- قسمتی از نمودار که پایین محور xهاست، حذف شده و قرینهٔ آن نسبت به محور xها به بالا منتقل می‌شود.

قدرمطلق روی متغیر $(y=f(|x|))$:

- قسمتی از نمودار $f(x)$ که در سمت راست محور yها قرار دارد $(x\geq 0)$، بدون تغییر باقی می‌ماند.
- قسمتی از نمودار که در سمت چپ محور yها قرار دارد $(x<0)$، حذف می‌شود.
- بخش باقی‌ماندهٔ سمت راست نسبت به محور yها قرینه شده و جایگزین بخش حذفی سمت چپ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ترتیب اعمال تبدیلات نمودار:

قانون کلی و ترتیب پیشنهادی برای تبدیلات:

برای رسم نمودار تابع $y = af(b(x-h))+k$ از روی نمودار $y = f(x)$، بهتر است تبدیلات را با ترتیب مشخصی انجام دهیم تا دچار اشتباه نشویم. تبدیلات افقی (مربوط به x) و عمودی (مربوط به y) مستقل از هم عمل می‌کنند.

ترتیب پیشنهادی (انبساط، انقباض و قرینه، سپس انتقال):

۱) **انبساط / انقباض و قرینهٔ افقی:** نمودار را براساس ضریب b در راستای افقی منبسط / منقبض یا قرینه می‌کنیم تا به $y = f(bx)$ برسیم.

۲) **انتقال افقی:** نمودار حاصل را به اندازهٔ h واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم تا به $y = f(b(x-h))$ برسیم.

۳) **انبساط / انقباض و قرینهٔ عمودی:** نمودار حاصل را براساس ضریب a در راستای عمودی منبسط / منقبض یا قرینه می‌کنیم تا به $y = af(b(x-h))$ برسیم.

۴) **انتقال عمودی:** نمودار نهایی را به اندازهٔ k واحد در راستای عمودی جابه‌جا می‌کنیم تا به $y = af(b(x-h))+k$ برسیم.

نکته

تفاوت $y = f(bx+c)$ و $y = f(b(x+c))$:

مهم‌ترین نکته در تبدیلات افقی، تشخیص درست مقدار انتقال است. برای این کار، باید ضریب متغیر x را به یک تبدیل کنیم.

راهبرد: همیشه از ضریب b در داخل پرانتز فاکتور بگیرید تا مقدار دقیق انتقال افقی مشخص شود.

$$y = f(bx+c) \Rightarrow y = f(b(x+\frac{c}{b}))$$

از این فرم مشخص می‌شود که:

- انقباض / انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{b}$ اعمال می‌شود.
- انتقال افقی به اندازهٔ $-\frac{c}{b}$ (نه $-c$) انجام می‌شود.

مثال برای رسم نمودار $y = f(2x+6)$:

- ابتدا از ۲ فاکتور می‌گیریم: $y = f(2(x+3))$.
- این یعنی نمودار $y = f(x)$ ابتدا با ضریب $\frac{1}{2}$ دچار انقباض افقی شده و سپس ۳ واحد به چپ منتقل می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

مطابق درس‌باکس و نکتهٔ بالا، می‌توان نمودار تابع f را به چند روش به نمودار تابع g تبدیل کنیم:

۱) $y = f(x) \xrightarrow[x \to x+1]{\text{انتقال به چپ}} y = f(x+1) \xrightarrow[x \to -x]{\text{انعکاس افقی}} y = f(1-x) \xrightarrow{\text{انبساط عمودی}} g(x) = 2f(1-x)$

۲) $y = f(x) \xrightarrow[x \to -x]{\text{انعکاس افقی}} y = f(-x) \xrightarrow[x \to x-1]{\text{انتقال به راست}} y = f(1-x) \xrightarrow{\text{انبساط عمودی}} g(x) = 2f(1-x)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۵ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x = -۱$، نمودار کدام تابع است؟

۱) $y = f(-\frac{۱}{۲} - x)$
۲) $y = f(-۱ - x)$
۳) $y = f(۱ - x)$
۴) $y = f(-۲ - x)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = f(۲a - x)$، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x = a$ است.

نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = ۲b - f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y = b$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس بالا، به نمودار تابع $y = f(۲(-۱) - x) = f(-۲ - x)$ می‌رسیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۶ نمودار تابع g، قرینهٔ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = -|x-2| + 3$ نسبت به نقطهٔ $(-2,1)$ است. ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x) = |x+2| - 1$
۲) $g(x) = |x+4| - 2$
۳) $g(x) = |x| - 2$
۴) $g(x) = |x+6| - 1$

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته براساس درس‌باکس پاسخ قبل، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به نقطهٔ (a,b)، نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = 2b - f(2a-x)$ است.

در حالت خاص، نمودار تابع $g(x) = -f(-x)$، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات است.

پاسخ خیلی تشریحی طبق نکته باید ضابطهٔ تابع $g(x) = 2 - f(-4-x)$ را به دست آوریم:

$$\Rightarrow g(x) = 2 - (3 - |-4-x-2|) = |x+6| - 1$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۷ نقطهٔ $A(-۱,۱)$ روی نمودار تابع f، به نقطهٔ $A'(\alpha,\beta)$ روی نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=۳-f(\frac{۱+x}{۲})$ تبدیل می‌شود. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

پیداکردن مختصات نقطه در نمودار تبدیل‌یافته:

گاهی اوقات مختصات یک نقطهٔ خاص مانند $(x_۰, y_۰)$ از نمودار $y=f(x)$ را داریم و می‌خواهیم مختصات جدید همان نقطه را پس از اعمال یک سری تبدیلات و رسیدن به نمودار $y=kf(ax+b)+h$ پیدا کنیم.

۱) **تبدیل مختصات y (تغییرات عمودی):** تغییرات عمودی به همان ترتیب روی $y_۰$ اعمال می‌شوند. ابتدا ضرب در k و سپس جمع با h.

$$y_{new}=ky_۰+h$$

۲) **تبدیل مختصات x (تغییرات افقی):** به صورت معکوس روی $x_۰$ اعمال می‌شوند، یعنی برای یافتن x_{new} باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$a\cdot x_{new}+b=x_۰ \Rightarrow x_{new}=\frac{x_۰-b}{a}$$

مثال نقطهٔ $(۴,۵)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد، مختصات این نقطه روی نمودار $y=۲f(۳x-۲)+۱$ کدام است؟

- اطلاعات اولیه: $y_۰=۵\ ,\ x_۰=۴$
- ضرایب تبدیل: $k=۲\ ,\ a=۳\ ,\ b=-۲\ ,\ h=۱$
- محاسبهٔ y جدید:

$$y_{new}=k\cdot y_۰+h=۲\times(۵)+۱=۱۰+۱=۱۱$$

- محاسبهٔ x جدید:

$$x_{new}=\frac{x_۰-b}{a}=\frac{۴-(-۲)}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲$$

پاسخ نهایی: مختصات نقطهٔ جدید، $(۲,۱۱)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ضابطهٔ تابع g، ورودی تابع f به ازای $x=\alpha$ باید برابر -۱ شود:

$$\Rightarrow \frac{۱+\alpha}{۲}=-۱ \Rightarrow \alpha=-۳$$

گام دوم: حالا $x=-۳$ را در ضابطهٔ تابع g جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g(-۳)=۳-\underbrace{f(-۱)}_{۱}=۳-۱=۲$$

بنابراین $\beta=۲$ است، در نتیجه خواستهٔ سؤال $\alpha+\beta=-۱$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۸ **مجموع صفرهای تابع f برابر ۳− و مجموع صفرهای تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(2x-1)$ برابر ۱ است. تعداد صفرهای هر تابع کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض می‌کنیم تعداد صفرهای دو تابع برابر n باشد. در این صورت صفرهای تابع f را $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ می‌گیریم و طبق فرض سؤال داریم:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-3$$

گام دوم: حالا صفرهای تابع g را برحسب α_i به دست می‌آوریم. کافی است ورودی تابع f را برابر α_i قرار دهیم:

$$2x_i-1=\alpha_i \Rightarrow x_i=\frac{\alpha_i+1}{2}$$

در نتیجه $\frac{\alpha_1+1}{2}, \frac{\alpha_2+1}{2}, \cdots, \frac{\alpha_n+1}{2}$، صفرهای تابع g هستند.

گام سوم: مجموع صفرهای تابع g را برابر یک قرار می‌دهیم:

$$\frac{\alpha_1+1}{2}+\frac{\alpha_2+1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n+1}{2}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+n}{2}=1$$

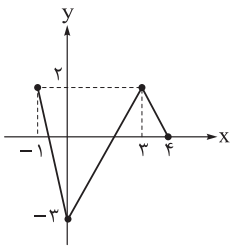
طبق رابطهٔ گام اول داریم:

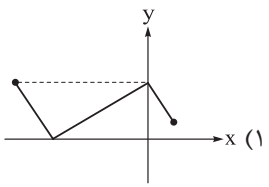
$$\frac{-3+n}{2}=1 \Rightarrow -3+n=2 \Rightarrow n=5$$

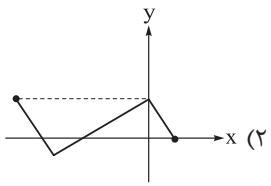
یعنی دو تابع هر کدام ۵ صفر دارند.

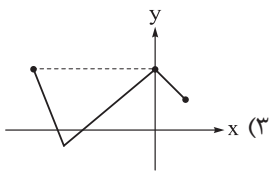
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

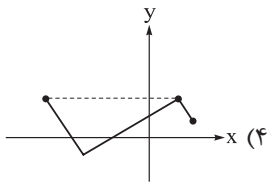
۱۳۹ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{f(x+3)}{2}+1$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

مشاوره برای رسم نمودار تبدیل‌یافتهٔ یک نمودار که از پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها تشکیل شده است، بهترین راه، به دست آوردن نقاط متناظرِ نقاط کلیدی (نقاط گوشه‌ای، صفرها و عرض از مبدأ) و سپس وصل‌کردن آن‌ها به هم است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاط مهم نمودار تابع f عبارت‌اند از $(2,-1)$، $(0,-3)$، $(3,2)$ و $(4,0)$. حالا متناظر این نقاط را روی نمودار تابع g پیدا می‌کنیم:

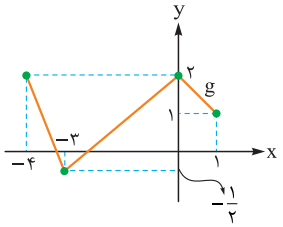
$$(-1,2):\begin{cases}x+3=-1 \Rightarrow x=-4\\ \frac{f(-1)}{2}+1=\frac{2}{2}+1=2\end{cases} \Rightarrow (-4,2)$$

$$(0,-3):\begin{cases}x+3=0 \Rightarrow x=-3\\ \frac{f(0)}{2}+1=\frac{-3}{2}+1=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow (-3,-\frac{1}{2})$$

$$(3,2):\begin{cases}x+3=3 \Rightarrow x=0\\ \frac{f(3)}{2}+1=\frac{2}{2}+1=2\end{cases} \Rightarrow (0,2)$$

$$(4,0):\begin{cases}x+3=4 \Rightarrow x=1\\ \frac{f(4)}{2}+1=0+1=1\end{cases} \Rightarrow (1,1)$$

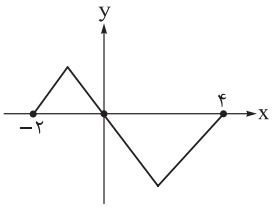
گام دوم: حالا می‌توانیم نمودار تابع g را رسم کنیم:



که در گزینهٔ (۳) به درستی رسم شده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۰ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{-xf(۴-x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint مثل سؤال قبل صفرها رو پیدا کنین، بعدش جدول تعیین علامت بکشین.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا صفرهای تابع $y=f(۴-x)$ را به دست می‌آوریم:

$$۴-x=-۲ \Rightarrow x=۶$$

$$۴-x=۰ \Rightarrow x=۴$$

$$۴-x=۴ \Rightarrow x=۰$$

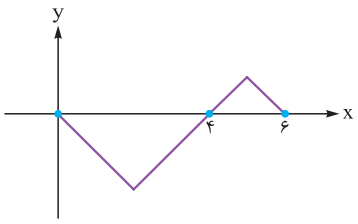
گام دوم: برای به دست آوردن دامنهٔ تابع g، باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$\Rightarrow -xf(۴-x)\geq ۰ \Rightarrow xf(۴-x)\leq ۰$$

حالا به کمک جدول تعیین علامت، مجموعه‌جواب‌های نامعادلهٔ بالا را به دست می‌آوریم:

x	۰		۴		۶
x	۰	+		+	
$f(۴-x)$	۰	−	۰	+	۰
$xf(۴-x)$	۰	−	۰	+	۰

دقت کنید که نمودار تابع $y=f(۴-x)$ مطابق شکل زیر است:



گام سوم: بنابراین دامنهٔ تابع g، مجموعهٔ $[۰,۴]\cup\{۶\}$ است که ۶ عدد صحیح را شامل می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۱ قرینهٔ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ نسبت به محور y را دو واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. عرض نقطهٔ تقاطع نمودارهای توابع f و g کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تبدیلات گفته‌شده را به ترتیب انجام می‌دهیم تا ضابطهٔ تابع g به دست آید:

$$f(x)=\frac{۱}{x-۱} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y=f(-x)=\frac{۱}{-x-۱}$$

$$\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y=f(-x+۲)=\frac{۱}{-(x-۲)-۱}=\frac{۱}{۱-x}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} g(x)=f(۲-x)+۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۱-x}+۱=\frac{۲-x}{۱-x}$$

گام دوم: حالا معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{g(x)=\frac{x-۲}{x-۱}} \frac{۱}{x-۱}=\frac{x-۲}{x-۱} \Rightarrow x-۲=۱ \Rightarrow x=۳$$

عرض نقطهٔ تقاطع برابر $f(۳)=g(۳)=\frac{۱}{۲}$ است.

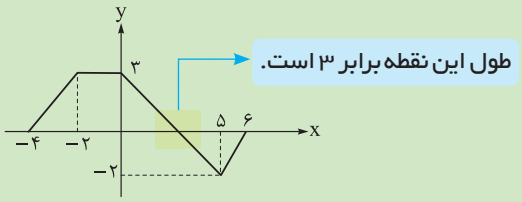
کنکور

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟ *(سؤال ۱۰۶ کنکور تجربی ۱۴۰۱ (خارج از کشور))*

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مساحت سطح محدود به نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(۳-x)$ و محور x در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات کدام است؟

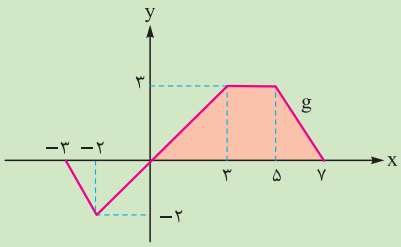


۱) ۱۳/۵
۲) ۱۲
۳) ۱۴/۵
۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint چاره‌ای به‌جز رسم نمودار تابع g نداریم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک تبدیل نقاط مهم نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:



گام دوم: ذوزنقهٔ مشخص‌شده در شکل بالا، سطح مورد نظر سؤال است که مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{(۷+۲)\times ۳}{۲}=۱۳/۵$$

کتاب درسی

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

(حسابان (۲) ـ تمرین ۲ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

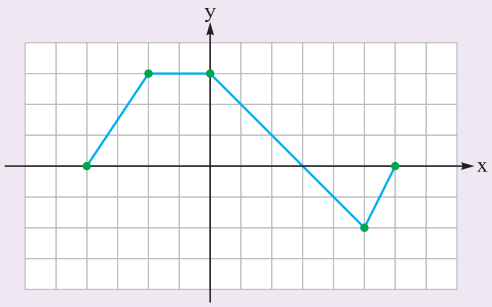
الف) $y=f(-x)$

ب) $y=۲f(x-۱)$

پ) $y=-f(x)+۲$

ت) $y=f(۲x-۱)$

ث) $y=f(۳-x)$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x+1|-|x-3|$ مفروض است، اگر تابع $g(x)=f(|x|-m)$ ثابت باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

تابع سرسره‌ای

نمودارش، یک خط افقی است.

۱) $(-\infty,-3]$
۲) $(-3,1]$
۳) $[1,+\infty)$
۴) $[-1,3]$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) رسم نمودار $y=|f(x)|$ (قدرمطلق روی خروجی):

این تبدیل، مقدار خروجی تابع (یعنی محور y) را تحت تأثیر قرار می‌دهد. از آن‌جایی که قدرمطلق هر عددی، نامنفی است، نمودار $y=|f(x)|$ هرگز پایین‌تر از محور xها قرار نمی‌گیرد.

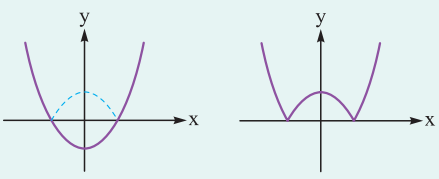
مراحل رسم:

۱) نمودار تابع اولیهٔ $y=f(x)$ را رسم کنید.

۲) بخش‌هایی از نمودار را که بالای محور x یا روی آن قرار دارند، بدون تغییر حفظ کنید.

۳) بخش‌هایی از نمودار که پایین محور x قرار دارند را نسبت به محور xها قرینه کرده و به بالا برگردانید.

$y=f(x)$ $\qquad$ $y=|f(x)|$



تبدیل $y=f(x)$ به $y=|f(x)|$

۲) رسم نمودار $y=f(|x|)$ (قدرمطلق روی ورودی):

این تبدیل، مقدار ورودی تابع (یعنی محور x) را تحت تأثیر قرار می‌دهد و نتیجهٔ آن همیشه یک تابع زوج است که نمودارش نسبت به محور yها متقارن است.

مراحل رسم:

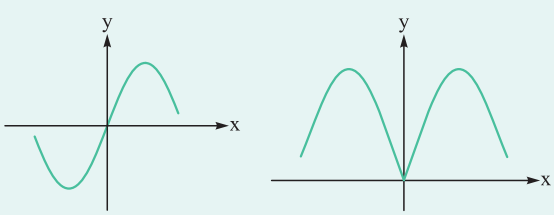
۱) نمودار تابع اولیهٔ $y=f(x)$ را رسم کنید.

۲) بخش سمت چپ محور yها (قسمتی که $x<0$ است) را به طور کامل حذف کنید.

۳) بخش سمت راست محور yها (قسمتی که $x\geq 0$ است) را حفظ کنید.

۴) همین بخش سمت راست را نسبت به محور yها قرینه کرده و در سمت چپ جایگزین بخش حذف‌شده کنید.

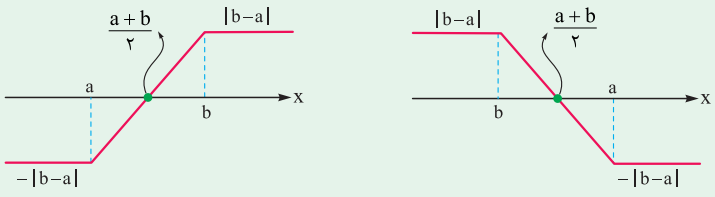
$y=f(x)$ $\qquad$ $y=f(|x|)$



تبدیل $y=f(x)$ به $y=f(|x|)$

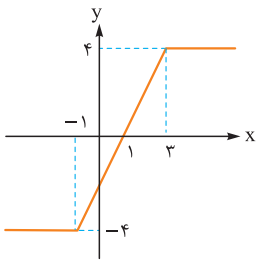
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ معروف به نمودار سرسره‌ای:



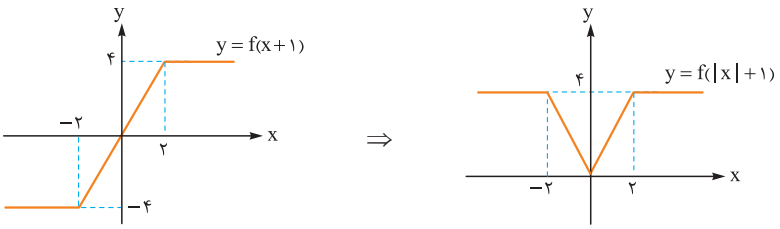
$a<b$ $a>b$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا به کمک نکتهٔ بالا، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام دوم: برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع f را m واحد به راست انتقال می‌دهیم و سپس مطابق درس‌باکس، قرینهٔ بخش $x>0$ را به جای $x<0$ آن قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $m=-1$ باشد، داریم:

$$g(x)=f(|x|+1)$$

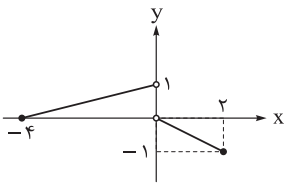


گام سوم: بنابراین برای این‌که نمودار تابع g، خطی افقی شود، لازم است که نمودار تابع f را حداقل سه واحد به چپ انتقال دهیم؛ یعنی $m\leq -3$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۴ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر معادلهٔ $f(x)=g(x)$ بی‌شمار جواب داشته باشد، ضابطهٔ تابع g کدام می‌تواند باشد؟

در یک بازه بر هم منطبق باشند.



۱) $g(x)=2f(\frac{x}{2})+1$

۲) $g(x)=f(\frac{x}{2})-1$

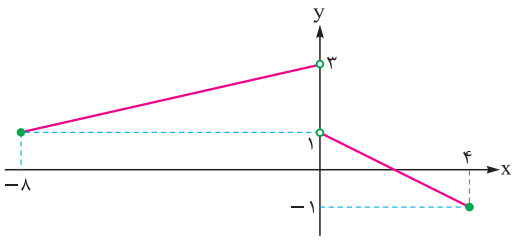
۳) $g(x)=f(-\frac{x}{2})-1$

۴) $g(x)=f(-2x)-1$

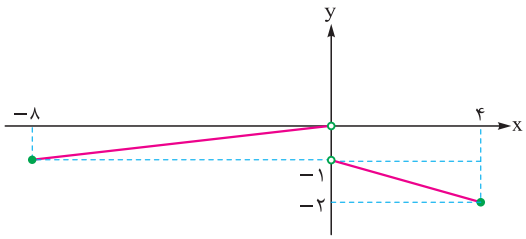
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی نمودار توابع گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

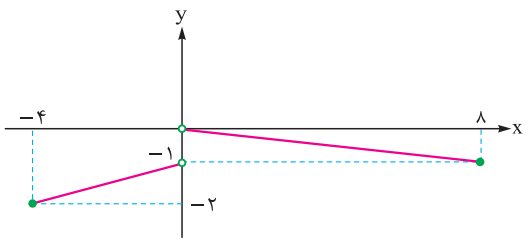
گزینهٔ (۱): $g(x)=2f(\frac{x}{2})+1$



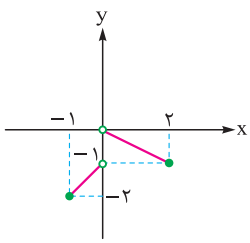
گزینهٔ (۲): $g(x)=f(\frac{x}{2})-1$



گزینهٔ (۳): $g(x)=f(-\frac{x}{2})-1$



گزینهٔ (۴): $g(x)=f(-2x)-1$



بنابراین فقط در گزینهٔ (۴) است که نمودارهای دو تابع f و g در یک بازه بر هم منطبق می‌شوند و در نتیجه معادلهٔ $f(x)=g(x)$ بی‌شمار جواب خواهد داشت.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۵ تابع وارون‌پذیر f و تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۱}{۳}f(\frac{x}{۲})-۱$ مفروض‌اند. ضابطهٔ تابع $g^{-۱}$ کدام است؟

۱) $g^{-۱}(x)=۲f^{-۱}(۳x+۳)$

۲) $g^{-۱}(x)=۲f^{-۱}(۳x+۱)$

۳) $g^{-۱}(x)=۳f^{-۱}(۲x)+۳$

۴) $g^{-۱}(x)=۳f^{-۱}(۲x)+۱$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint جای x و y رو عوض کنین.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در تابع g داریم:

$$y=g(x)=\frac{۱}{۳}f(\frac{x}{۲})-۱ \Rightarrow ۳y+۳=f(\frac{x}{۲})$$

حالا برای این‌که x را برحسب y بنویسیم، باید وارون تابع f را به طرفین تساوی بالا اعمال کنیم:

$$\frac{x}{۲}=f^{-۱}(۳y+۳) \Rightarrow x=۲f^{-۱}(۳y+۳)$$

گام دوم: اگر جای x و y را عوض کنیم، به ضابطهٔ وارون تابع g می‌رسیم:

$$g^{-۱}(x)=۲f^{-۱}(۳x+۳)$$

یه‌جور دیگه برای رسم نمودار تابع g از روی نمودار تابع f، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$y=f(x) \xrightarrow[x\to\frac{x}{۲}]{\text{ضرب طول نقاط در }۲} y=f(\frac{x}{۲})$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب عرض نقاط در }\frac{۱}{۳}} y=\frac{۱}{۳}f(\frac{x}{۲})$$

$$\xrightarrow{\text{عرض نقاط }-۱} g(x)=\frac{۱}{۳}f(\frac{x}{۲})-۱$$

حالا با تعویض جای x و y، تبدیلات بالا روی نمودار تابع $f^{-۱}$ انجام می‌دهیم:

$$y=f^{-۱}(x) \xrightarrow{\text{ضرب عرض نقاط در }۲} y=۲f^{-۱}(x)$$

$$\xrightarrow[x\to ۳x]{\text{ضرب طول نقاط در }\frac{۱}{۳}} y=۲f^{-۱}(۳x)$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{\text{طول نقاط }-۱} g(x)=۲f^{-۱}(۳(x+۱))=۲f^{-۱}(۳x+۳)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دوازدهم

۱۴۶ ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} x+y & z-2y & x-2 \\ 0 & y+z & 0 \\ x+y & 0 & z+x \end{bmatrix}$ مفروض است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+I$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -5 ۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ماتریس مربعی	۱) تعداد سطرها و ستون‌هایش برابرند. ۲) فرم کلی مرتبه‌اش به صورت « $n\times n$ » است. ۳) به ماتریس C در روبه‌رو نگاه کنید. به قطر آبی، «**قطر اصلی**» و به قطر قرمز، «**قطر فرعی**» می‌گوییم. همان‌طور که می‌بینید، درایه‌های روی قطر اصلی، شمارهٔ سطر و ستونشان یکسان است. $A=[2]_{1\times1}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$ (قطر اصلی: a_{11}, a_{22}, a_{33}؛ قطر فرعی: a_{13}, a_{22}, a_{31})
ماتریس قطری	ماتریس مربعی‌ای است که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی‌اش صفرند. درایه‌های روی قطر اصلی هم آزادند *(هر عدد حقیقی‌ای می‌تونن باشن)*. $A=[8]$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (بالای قطر اصلی: صفرها؛ پایین قطر اصلی: ۲)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ماتریس $A=\begin{bmatrix} x+y & z-2y & x-2 \\ 0 & y+z & 0 \\ x+y & 0 & z+x \end{bmatrix}$ به شرطی قطری است که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی‌اش برابر صفر باشند:

(قطر اصلی)

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+y=0 \xrightarrow{x=2} y=-2 \\ z-2y=0 \xrightarrow{y=-2} z=-4 \end{cases}$$

گام دوم: موارد بالا را در A جای‌گذاری می‌کنیم و $A+I$ را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A+I=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های روی قطر اصلی $A+I$ می‌شود: $-5=1-5-1$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۷ اگر $2A-B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ و $A-2B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A چند برابر کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس B است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) -2

۳) 2 ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}2A-B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{\times 2} 4A-2B=\begin{bmatrix}2 & 8\\ -4 & 6\end{bmatrix}\\ A-2B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{پایین}-\text{بالا}} (4A-2B)-(A-2B)=\begin{bmatrix}2 & 8\\ -4 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow 3A=\begin{bmatrix}1 & 8\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 3} A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{8}{3}\\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در پایین}} \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{8}{3}\\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}-2B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow 2B=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{8}{3}\\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{8}{3}\\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 2} B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

گام دوم: بزرگ‌ترین درایهٔ A برابر $\frac{8}{3}$ و کوچک‌ترین درایهٔ B برابر $-\frac{4}{3}$ است که نسبتشان می‌شود: $\frac{\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}}=-2$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۸ اگر $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ ، $B=[b_{ij}]_{۳\times۴}$ و $C=[c_{ij}]_{۴\times۴}$ باشد، کدام‌یک از ماتریس‌های زیر قابل تعریف نیست؟

۱) ABC　　۲) CAB

۳) BCA　　۴) BAC

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ را در نظر بگیرید. ضرب « $A_{m\times n}\times B_{p\times q}$ » به شرطی قابل انجام است که تعداد ستون‌های ماتریس اول ($A_{m\times n}$) با تعداد سطرهای ماتریس دوم ($B_{p\times q}$) برابر، یعنی $n=p$ باشد، به *زبون خودمونی ضرب* « $A_{m\times n}\times B_{p\times q}$ » *وقتی انجام‌پذیره* (نزدیک‌ها) *که نزدیک‌ها مساوی باشن. دوتا مثال ببینین:*

- $A_{۸\times۲}\times B_{۷\times۲}$ ← نزدیک‌ها برابر نیستن. ← تعریف‌نشده (نزدیک‌ها)
- $B_{۲\times۳}\times A_{۳\times۵}$ ← نزدیک‌ها برابرن. ← تعریف‌شده (نزدیک‌ها)

الان می‌دانیم ضرب « $A_{m\times n}\times B_{n\times p}$ » انجام‌پذیر و حاصلش یک ماتریس مثل C است، اما سؤال این‌جاست که «ماتریس C چه مرتبه‌ای دارد؟» برای رسیدن به جواب، این کار را انجام می‌دهیم: (نزدیک‌ها)

- $A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$ ← *نزدیک‌ها رو حذف می‌کنیم.*

باز هم دوتا مثال ببینید:

- $A_{۳\times۴}\times B_{۴\times۵}=C_{۳\times۵}$
- $B_{۲\times۳}\times A_{۳\times۲}=C_{۲\times۲}$

۲) ضرب ماتریس‌ها در **حالت کلی** خاصیت جابه‌جایی **ندارد**، این یعنی در حالت کلی $A\times B\neq B\times A$ است، پس در دنیای ماتریس‌ها ترتیب ضرب‌کردن مهم است؛ بنابراین برای انجام ضربی مثل ABC دو راه داریم:

- اول AB را حساب کنیم، بعد حاصلش را در C ضرب کنیم:

$$ABC=(AB)\times C$$

- اول BC را حساب کنیم، بعد A را در حاصلش ضرب کنیم:

$$ABC=A\times(BC)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$A_{۴\times۳}\times B_{۳\times۴}\times C_{۴\times۴}\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=\!=}\overbrace{(A_{۴\times۳}\times B_{۳\times۴})}^{X_{۴\times۴}}C_{۴\times۴}=X_{۴\times۴}\times C_{۴\times۴}\ \checkmark$$

(برابرند) (برابرند)

گزینهٔ (۲):

$$C_{۴\times۴}\times A_{۴\times۳}\times B_{۳\times۴}\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=\!=}\overbrace{(C_{۴\times۴}\times A_{۴\times۳})}^{Y_{۴\times۳}}\times B_{۳\times۴}=Y_{۴\times۳}\times B_{۳\times۴}\ \checkmark$$

(برابرند) (برابرند)

گزینهٔ (۳):

$$B_{۳\times۴}\times C_{۴\times۴}\times A_{۴\times۳}\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=\!=}\overbrace{(B_{۳\times۴}\times C_{۴\times۴})}^{Z_{۳\times۴}}\times A_{۴\times۳}=Z_{۳\times۴}\times A_{۴\times۳}\ \checkmark$$

(برابرند) (برابرند)

همین‌جا معلوم شد که جواب سؤال گزینهٔ (۴) است، ولی تحلیلش را هم ببینید:

$$B_{۳\times۴}\times A_{۴\times۳}\times C_{۴\times۴}\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=\!=}\overbrace{(B_{۳\times۴}\times A_{۴\times۳})}^{T_{۳\times۳}}\times C_{۴\times۴}=T_{۳\times۳}\times C_{۴\times۴}\ \times$$

(برابرند) (برابر نیستند)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۹ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}۰ & |i-j|>۱\\ ۱ & |i-j|=۱\\ -۲ & |i-j|<۱\end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: درایه‌های A را از روی $a_{ij}=\begin{cases}۰ & |i-j|>۱\\ ۱ & |i-j|=۱\\ -۲ & |i-j|<۱\end{cases}$ به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

گام دوم: حالا A را در خودش ضرب می‌کنیم تا به $A^۲$ برسیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۴ & ۱\\ -۴ & ۶ & -۴\\ ۱ & -۴ & ۵\end{bmatrix}$$

که جمع درایه‌هایش می‌شود ۲.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۰ فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ باشند و $C=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۱\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$. اگر

$$A\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۳\\ -۳ & -۴ & ۲\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & -۳\\ ۳ & ۴ & -۳\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}-۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۳ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس ABC کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) **توزیع‌پذیری**: این خاصیت می‌گوید برای ضرب‌هایی مثل $A(B\pm C)$ یا $(B\pm C)A$، می‌توانید تساوی‌های زیر را بنویسید:

$$(B\pm C)A=BA\pm CA \quad , \quad A(B\pm C)=AB\pm AC$$

در تساوی‌های بالا حواسمان به ترتیب ضرب‌کردن بود، مثلاً در تساوی $A(B\pm C)=AB\pm AC$، چون A از سمت چپ در $(B\pm C)$ ضرب شده بود، در عبارت $AB\pm AC$، Aها را سمت چپ B و C نوشتیم.

۲) **فاکتورگیری**: یاد گرفتیم که برای ماتریس‌های A، B و C تساوی $A(B+C)=AB+AC$ برقرار است. اگر به این تساوی از راست به چپ نگاه کنیم، می‌فهمیم که در دنیای ماتریس‌ها عمل فاکتورگیری برقرار است. فقط باید حواسمان باشد که از یک سمت فاکتور بگیریم، مثلاً در عبارت $AX+BX$ می‌توانیم از یک X سمت راست فاکتور بگیریم و بنویسیم $X(A+B)$.

ولی اگر عبارتمان به صورت $XA+BX$ باشد با این‌که یک X مشترک داریم، ولی نمی‌توانیم از آن فاکتور بگیریم، چون یکی سمت راست و دیگری سمت چپ است. خوب است که فاکتورگیری‌های جدول زیر را ببینید:

فاکتورگرفتن	از چی می‌شه فاکتور گرفت؟	عبارت
$A(B+I)$	A از سمت چپ	$AB+A$
$(B+I)A$	A از سمت راست	$BA+A$
$A(X+Y)B$	A از سمت چپ و B از سمت راست	$AXB+AYB$
—	هیچی	$BXA+AYB$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در تساوی داده‌شده از یک A سمت چپ و یک B سمت راست فاکتور می‌گیریم:

$$A\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۳\\ -۳ & -۴ & ۲\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & -۳\\ ۳ & ۴ & -۳\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}-۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۳ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$=A\left(\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۳\\ -۳ & -۴ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & -۳\\ ۳ & ۴ & -۳\end{bmatrix}\right)B=\begin{bmatrix}-۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۳ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow \underbrace{A\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}}_{-I}B=\begin{bmatrix}-۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۳ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-AI}_{A}B=\begin{bmatrix}-۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۳ & -۱\\ -۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$$

گام دوم: به گفتهٔ سؤال $C=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۱\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و AB را هم که پیدا کردیم، پس ABC می‌شود:

$$ABC=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۱\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۳ & ۳\\ \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}\Rightarrow ۰+۳+۳=۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۱ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & a\\ ۳ & b\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵ & -۱\\ ۱ & b+۳\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ می‌توان نوشت:

$$(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲ \Rightarrow A^۲+AB-BA-B^۲=A^۲-B^۲ \Rightarrow AB-BA=\bar{O} \Rightarrow AB=BA$$

گام دوم: با توجه به نتیجهٔ حاصل از گام اول، ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، پس:

$$AB=BA \Rightarrow \begin{bmatrix}۲ & a\\ ۳ & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & -۱\\ ۱ & b+۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۱\\ ۱ & b+۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & a\\ ۳ & b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}۱۰+a & -۲+a(b+۳)\\ ۱۵+b & -۳+b(b+۳)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۵a-b\\ ۳b+۱۱ & a+b(b+۳)\end{bmatrix}$$

گام سوم: از برابری درایه‌های رنگی به a و b می‌رسیم:

$$\begin{cases}۱۰+a=۷ \Rightarrow a=-۳\\ ۱۵+b=۳b+۱۱ \Rightarrow ۲b=۴ \Rightarrow b=۲\end{cases} \Rightarrow a+b=-۳+۲=-۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & ۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $A(A-mI)=nI$ باشد، مقدار $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱) $-۰/۴۵$
۲) $۰/۵$
۳) $۰/۴۵$
۴) $-۰/۵$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

قضیهٔ کیلی ـ همیلتون: این قضیه می‌گوید مربع هر ماتریس ۲×۲ مثل $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ را می‌توانیم به صورت زیر برحسب خودش و I بنویسیم:

$$A^۲=(a+d)A-(ad-bc)I$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: درایه‌های A را حساب می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & ۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ ۵ & ۱۳\end{bmatrix}$$

گام دوم: تساوی $A(A-mI)=nI$ را به صورت $A^۲=mA+nI$ که بنویسیم می‌فهمیم باید به کمک قضیهٔ «کیلی ـ همیلتون» $A^۲$ را برحسب A و I بنویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ ۵ & ۱۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=(۵+۱۳)A-((۵)(۱۳)-(۵)(۵))I=\underset{m}{۱۸}A\underset{n}{-۴۰}I$$

پس $\frac{m}{n}$ می‌شود:

$$-\frac{۱۸}{۴۰}=-\frac{۹\times ۵}{۲۰\times ۵}=-۰/۴۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۳ اگر $\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۹\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۱\\ ۰ & ۲ & -۷\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A=\begin{bmatrix}e & i & a\\ d & f & g\\ b & c & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۹ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) بعضی وقت‌ها تمام درایه‌های حاصل از ضرب دو ماتریسِ A و B را نمی‌خواهیم، بلکه هدفمان پیداکردن یک سطر یا ستون آن است:

از ضرب «AB» چه می‌خواهیم؟	فرمول محاسبه	مثال
درایهٔ واقع در سطر i اُم و ستون j اُم	[ستون j اُم از ماتریس دوم (B)] × [سطر i اُم از ماتریس اول (A)]	مثلاً درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۶ & -۴\end{bmatrix}$، می‌شود: $\begin{bmatrix}۵ & ۷\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲\\ -۶\end{bmatrix}=۱۰-۴۲=-۳۲$
سطر i اُم	کل ماتریس دوم (B) × [سطر i اُم از ماتریس اول (A)]	مثلاً سطر دومِ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۶ & -۴\end{bmatrix}$، می‌شود: $\begin{bmatrix}۵ & ۷\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۶ & -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰-۴۲ & ۲۰-۲۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳۲ & -۸\end{bmatrix}$
ستون j اُم	[ستون j اُم از ماتریس دوم (B)] × کل ماتریس اول (A)	مثلاً ستون اولِ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۶ & -۴\end{bmatrix}$، می‌شود: $\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲\\ -۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲-۱۸\\ ۱۰-۴۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۶\\ -۳۲\end{bmatrix}$

۲) اگر دو ماتریس داشتید که در هر دو یا درایه‌های بالای قطر اصلی یا پایین قطر اصلی صفر بود، می‌توانید بعضی از درایه‌های ضربشان را به کمک رابطه‌های زیر به دست بیاورید:

$$\begin{bmatrix}a & d & e\\ ۰ & b & f\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & d' & e'\\ ۰ & b' & f'\\ ۰ & ۰ & c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa' & \bullet & \bullet\\ ۰ & bb' & \bullet\\ ۰ & ۰ & cc'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ d & b & ۰\\ e & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & ۰ & ۰\\ d' & b' & ۰\\ e' & f' & c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa' & ۰ & ۰\\ \bullet & bb' & ۰\\ \bullet & \bullet & cc'\end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید؛ در این‌جور ضرب‌ها، صفرهای بالا یا پایین قطر اصلی صفر می‌مانند و درایه‌های قطر اصلی در هم ضرب می‌شوند، بقیهٔ درایه‌ها هم ارزش حفظ‌کردن ندارند، بهتر است برای محاسبه‌شان ضرب معمولی انجام بدهید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با خواستهٔ سؤال شروع می‌کنیم. درایه‌های سطر اولِ $A=\underbrace{\begin{bmatrix}e & i & a\\ d & f & g\\ b & c & h\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس اول}}\underbrace{\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس دوم}}$ را می‌خواهیم که طبق مورد (۱) درس‌باکس این‌جوری به دست می‌آید:

$$\text{سطر اولِ } A=\text{سطر اولِ ماتریس اول}\times\text{کل ماتریس دوم}=\begin{bmatrix}e & i & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}\quad (*)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: پس e، i و a را داریم که همگی در قطر اصلی ماتریس سمت راست تساوی

$$\begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۱\\ ۰ & ۲ & -۷\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۹\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$$

قرار دارند. درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس‌های سمت چپ صفرند، پس طبق مورد (۲) درس‌باکس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۱\\ ۰ & ۲ & -۷\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۹\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۱)(۳) & \bullet & \bullet\\ ۰ & (۲)(۲) & \bullet\\ ۰ & ۰ & (۳)(۸)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\Rightarrow a=۳\ ,\ e=۴\ ,\ i=۲۴$$

گام سوم: موارد بالا را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\text{سطر اولِ } A=\begin{bmatrix}۴ & ۲۴ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۸ & ۴۹ & ۲۰\end{bmatrix}$$

پس جمع درایه‌های سطر اول A می‌شود $۲۸+۴۹+۲۰=۹۷$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۴ ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ مفروض است. اگر $A^۲ = ۳A + \alpha I$ و $A^۴ = ۲۱A + \beta I$ باشد، مقدار $\alpha - \beta$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته با توجه به این‌که ماتریس‌های A و I خاصیت جابه‌جایی دارند، اتحادهای جبری برایشان برقرار است. چندتا مثال ببینید:

$$(A+I)^۲ = A^۲ + ۲AI + I^۲ = A^۲ + ۲A + I$$

$$(A+I)^۳ = A^۳ + ۳A^۲(I) + ۳A(I)^۲ + I^۳ = A^۳ + ۳A^۲ + ۳A + I$$

$$(A+I)(A^۲ - A + I) = A^۳ + I^۳ = A^۳ + I$$

$$(A-I)(A^۲ + A + I) = A^۳ - I^۳ = A^۳ - I$$

$$(A-۲I)(A+۵I) = A^۲ + A(-۲I+۵I) + (۵I)(-۲I) = A^۲ + A(۳I) - ۱۰I^۲ = A^۲ + ۳A - ۱۰I$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: طرفین تساوی $\underbrace{A^۲ = ۳A + \alpha I}_{(*)}$ را به توان ۲ می‌رسانیم. حواسمان هم هست که برای A و αI، اتحادها برقرارند:

$$(A^۲)^۲ = (۳A + \alpha I)^۲ \Rightarrow A^۴ = (۳A)^۲ + \underbrace{(\alpha I)^۲}_{\alpha^۲ I^۲ = \alpha^۲ I} + ۲(۳A)(\alpha I) \Rightarrow A^۴ = ۹A^۲ + \alpha^۲ I + ۶\alpha A \quad (*)$$

طبق رابطهٔ $(*)$ در تساوی بالا، جای $A^۲$ می‌نویسیم $۳A + \alpha I$ تا فقط A و I ببینیم:

$$A^۴ = \underbrace{۹(۳A + \alpha I)}_{۲۷A + ۹\alpha I} + \alpha^۲ I + ۶\alpha A$$

$$\Rightarrow A^۴ = (۲۷ + ۶\alpha)A + (\alpha^۲ + ۹\alpha)I$$

به گفتهٔ سؤال $A^۴ = ۲۱A + \beta I$ است. از مقایسهٔ این تساوی با تساوی آبی‌رنگ بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} ۲۷ + ۶\alpha = ۲۱ \Rightarrow ۶\alpha = -۶ \Rightarrow \alpha = -۱ \\ \alpha^۲ + ۹\alpha = \beta \xrightarrow{\alpha=-۱} (-۱)^۲ + ۹(-۱) = \beta \Rightarrow \beta = -۸ \end{cases}$$

بنابراین $\alpha - \beta$ می‌شود: $-۱ - (-۸) = -۱ + ۸ = ۷$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۵ اگر $A=[i-j]_{۲\times ۲}$، $B=\begin{bmatrix}\cot x & ۰\\ ۰ & \tan x\end{bmatrix}$ و $C=AB$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^{۲۶}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: درایه‌های $A=[i-j]_{۲\times ۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-۱ & ۱-۲\\ ۲-۱ & ۲-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

گام دوم: $C=AB$ است، پس:

$$C=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cot x & ۰\\ ۰ & \tan x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -\tan x\\ \cot x & ۰\end{bmatrix}$$

گام سوم: طبق درس‌باکس برای محاسبهٔ $C^{۲۶}$ اول $C^{۲}$ را پیدا می‌کنیم تا ببینیم ماتریس خاصی می‌شود یا نه:

$$C^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & -\tan x\\ \cot x & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -\tan x\\ \cot x & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

خوش‌بختانه به ماتریس خاص $-I$ رسیدیم، حالا می‌توانیم $C^{۲۶}$ را به دست بیاوریم:

$$C^{۲۶}=(C^{۲})^{۱۳}=(-I)^{۱۳}=-I=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

که حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی‌اش می‌شود: $(-۱)(-۱)=۱$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضیات گسسته

۱۵۶ برای چند عضو از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ عدد $2^{2^n}+1$ فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مثال نقض برای فرمول‌هایی که ادعای ساختن عدد اول دارند ...

گزارهٔ «به ازای هر مقدار n، حاصل $f(n)$ اول است.» برای هیچ تابع $f(n)$ی درست نیست و همیشه مثال نقض دارد. حالا شاید پیداکردن مثال نقض سخت باشد، ولی حتماً وجود دارد. چندتا ببینید:

گزاره	2^n-1 اول است $(n>1)$.	2^n+1 اول است.	4^n+3 اول است.	$2^{2^n}+1$ اول است.
یک مثال نقض	$n=4$ عدد $2^4-1=15$ اول نیست.	$n=3$ عدد $2^3+1=9$ اول نیست.	$n=4$ $4^4+3=259$ اول نیست (مضرب ۷ است).	$n=5$ $2^{2^5}+1$ یعنی $2^{32}+1$ اول نیست (مضرب ۶۴۱ است).

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عدد **اول** فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی دارد.

گام دوم: حاصل $2^{2^n}+1$ به ازای $n=1,2,3,4$ اول است و به ازای $n=5$ مرکب می‌شود، پس برای ۴ عضو از مجموعهٔ A، حاصل اول است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۷ کدام گزاره **نادرست** است؟

۱) جمع دو عدد متوالی، فرد است.

۲) جمع سه عدد متوالی، مضرب ۳ است.

۳) جمع دو عدد زوج متوالی، مضرب ۶ است.

۴) جمع دو عدد فرد متوالی، مضرب ۴ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اثبات مستقیم، یعنی استفاده از بیان و روش‌های ریاضی: برای نشان‌دادن درستی یک حکم، گاهی از اثبات مستقیم استفاده می‌شود. در اثبات مستقیم، از بیان پارامتری استفاده می‌شود:

بیان سؤال	دو عدد طبیعی	دو عدد طبیعی متوالی	دو عدد زوج	دو عدد فرد	دو عدد زوج متوالی	دو عدد فرد متوالی
نمایش در اثبات‌مستقیم	n , m	$n , n+1$	$2k , 2k'$	$2k+1 , 2k'+1$	$2k , 2k+2$	$2k-1 , 2k+1$

در اثبات مستقیم معمولاً اعداد گویا را با $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$ و ... نشان می‌دهیم. به عنوان مثال احکامی که با اثبات مستقیم ثابت می‌شوند:

الف) جمع دو عدد متوالی، فرد است.

ب) مربع و مکعب هر عدد فرد، فرد است.

پ) میانگین ۵ عدد متوالی همان عدد وسط است.

ت) جمع دو عدد فرد، زوج است.

ث) جمع سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

ج) جمع و ضرب و تفریق دو عدد گویا، گویا است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جمع دو عدد زوج متوالی همیشه مضرب ۶ نیست! مثلاً $6+4$ می‌شود ۱۰ که مضرب ۶ نیست.

گام دوم: اثبات گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) را هم ببینید:

گزینهٔ (۱): $n+n+1=2n+1 \rightarrow$ فرد

گزینهٔ (۲): $n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1) \rightarrow$ مضرب ۳

گزینهٔ (۴): $2n+1+2n-1=4n \rightarrow$ مضرب ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۸ اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ مضرب ۵ باشد، برای عدد طبیعی n چند جواب یک‌رقمی وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

پاسخ: گزینهٔ ۳

اثبات بخش‌پذیری و باقی‌مانده با بررسی تمام حالت‌ها:

برای اثبات این‌که عددی در تقسیم بر ۲، ۳، ۴، ۵ و ... (مقسوم‌علیه‌های کوچک) باقی‌ماندهٔ خاصی دارد، از بررسی تمام حالت‌ها می‌رویم، مثلاً:

هدف	بررسی زوج یا فرد بودن	باقی‌مانده بر ۳	باقی‌مانده بر ۵
تمام حالت‌ها	$n=۲k$ $n=۲k+۱$	$n=۳k$ $n=۳k+۱$ $n=۳k+۲$	$n=۵k$ $n=۵k+۱$ $n=۵k+۲$ $n=۵k+۳$ $n=۵k+۴$

مثلاً این حکم‌ها را با «بررسی تمام حالت‌ها» ثابت می‌کنند:

الف) اگر n عددی صحیح باشد، $n^۲-۳n+۵$ فرد است.

ب) اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج باشد، باقی‌ماندهٔ n بر ۴ باید ۰ یا ۳ باشد.

پ) اگر $ab=۰$ باشد، $a=۰$ یا $b=۰$ است.

ت) رقم یکان عدد مربع کامل ۲، ۳، ۷ و ۸ نیست.

ث) عدد مربع کامل بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۲ ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ وقتی مضرب ۵ است که n یا $n+۱$ به ۵ بخش‌پذیر باشند.

گام دوم: در بین ۱ تا ۹ مقادیر مناسب n عبارت‌اند از:

$n=\underbrace{۴,۹}_{\text{مضرب ۵ است.}}\quad \underbrace{n=۵}_{\text{مضرب ۵ است.}}$

گام سوم: یعنی ۳ مقدار برای n داریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۹ در اثبات حکم زیر به روش برهان خلف، فرض خلف کدام است و به چه تناقضی می‌رسیم؟

«اگر x,y,z سه عدد صحیح و x',y',z' همان اعداد با ترتیب دیگری باشند، $n=(x-x')(y-y')(z-z')$ زوج است.»

۱) n فرد است، صفر زوج است.
۲) n زوج است، صفر فرد است.
۳) n فرد است، صفر فرد است.
۴) n زوج است، صفر زوج است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف: برای اثبات بعضی حکم‌ها روش مستقیم (رسیدن از فرض به حکم) قابل استفاده نیست.

در روش غیرمستقیم، فرض می‌کنیم حکم درست نیست (نقیض حکم را فرض می‌کنیم) و نشان می‌دهیم با این فرض، به تناقض می‌رسیم. پس خود حکم باید درست باشد. مثلاً احکامی که با برهان خلف ثابت می‌شوند:

الف) ضرب عدد گویای غیرصفر در عدد گنگ، گنگ است.

ب) اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ گنگ است.

پ) اگر α و β گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، $\alpha-\beta$ گنگ است.

ت) دو خط عمود بر یک خط، موازی‌اند (در صفحه).

ث) $\sqrt{2}$ گنگ است.

ج) بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باید نقیض حکم را فرض کرد، پس فرض خلف می‌شود: «n فرد است.»

گام دوم: داریم:

$$(x-x')(y-y')(z-z') = \text{فرد}$$

پس هر سه پرانتز فرد هستند:

$$\underbrace{x-x'}_{\text{فرد}},\underbrace{y-y'}_{\text{فرد}},\underbrace{z-z'}_{\text{فرد}}$$

گام سوم: پس جمع آن‌ها فرد است: $\underbrace{0}_{\text{فرد}}$ و به تناقض می‌رسیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۰ اگر $x > ۰$ باشد، حاصل $f(x) = (x+۱)(\frac{۱}{x}+۱)$ حداقل چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

ویژگی جمع عدد با معکوسش، نتیجه‌ای مهم از اثبات بازگشتی:

اگر x و y هم‌علامت باشند، ثابت می‌شود که:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq ۲$$

پس برای عدد مثبت a همواره داریم:

$$a+\frac{۱}{a} \geq ۲$$

یعنی مجموع یک عدد مثبت و معکوسش همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

نکته برای اعداد منفی، همواره $a+\frac{۱}{a} \leq -۲$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حاصل $(x+۱)(\frac{۱}{x}+۱)$ برابر است با:

$$f(x) = ۱+\frac{۱}{x}+x+۱ = x+\frac{۱}{x}+۲$$

گام دوم: چون $x+\frac{۱}{x}$ همواره بیشتر یا مساوی ۲ است، داریم:

$$f(x) \geq ۴$$

یعنی حداقل مقدار برابر ۴ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۱ در اثبات حکم $x^۲+y^۲\geq xy$ به روش اثبات بازگشتی به $(x-\frac{y}{۲})^۲+k\geq ۰$ رسیدیم. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۳y^۲}{۴}$ ۲) $\frac{y^۲}{۴}$ ۳) $\frac{y^۲}{۲}$ ۴) $y^۲$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اثبات با گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی):

برای اثبات نامساوی‌ها در اعداد حقیقی، معمولاً از روش بازگشتی می‌رویم. خود حکم را فرض می‌کنیم و با روش‌های اثبات مستقیم، به رابطهٔ درست یا بدیهی می‌رسیم (معمولاً به اتحادهای مربع می‌رسیم). با توجه به این‌که مراحل طی‌شده **بازگشت‌پذیرند**، مسیر برعکس این استدلال، اثبات مورد نظر ما است:

رابطهٔ درست $\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$ خود حکم

احکام زیر با روش بازگشتی اثبات می‌شوند:

الف) برای دو عدد حقیقی نامنفی $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$ (واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی کم‌تر نیست.)

ب) $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+xz+yz$

پ) برای دو عدد هم‌علامت، $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مسیر اثبات به صورت زیر است:

$x^۲+y^۲\geq xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲-xy\geq ۰ \Leftrightarrow (x-\frac{y}{۲})^۲+\frac{۳y^۲}{۴}\geq ۰ \Leftrightarrow$ درست است.

گام دوم: پس در مقایسه با صورت سؤال داریم:

$$k=\frac{۳y^۲}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۲ برای سه مجموعهٔ ناتهی A، B و C، با قراردادن کدام علامت به جای □ گزارهٔ $A \square B = A \square C \Rightarrow B = C$ درست می‌شود؟

۱) $\cap$ ۲) $\cup$ ۳) $-$ ۴) $\times$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box **باز هم مثال نقض ـ ویژگی حذف (ماتریس! بردار! تابع!):**

در تمرین‌های کتاب درسی دیدیم که $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ درست نیست. به راحتی با مثال نقض می‌توان آن را رد کرد. به اصطلاح می‌گوییم اشتراک مجموعه‌ها ویژگی حذف ندارد.

چند چیز دیگر و ویژگی حذفشان را ببینیم:

ضرب داخلی بردارها	ماتریس‌های مربعی	تابع
$a.b = a.c$ $\Downarrow$ $b = c$	$A \times B = A \times C$ $\Downarrow$ $B = C$	$f(a) = f(b)$ $\Downarrow$ $a = b$
حذف ندارد.	فقط وقتی A وارون‌پذیر باشد.	باید f یک‌به‌یک باشد.

نکته اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها ویژگی حذف ندارد.

نکته ضرب دکارتی برای مجموعه‌های ناتهی ویژگی حذف **دارد**.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در تمرین‌های کتاب درسی دیدیم که از $A \cap B = A \cap C$ نمی‌توانیم به $B = C$ برسیم. (مثال نقض مثلاً $\{1,5\} \cap \{1\} = \{1,2\} \cap \{1\}$ است که $B = C$ را نتیجه نمی‌دهد.)

گام دوم: با استدلال مشابهی، ویژگی حذف برای $\cup$ و $-$ هم برقرار نیست:

$$A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C \quad \text{و} \quad A - B = A - C \not\Rightarrow B = C$$

گام سوم: اما در مورد ضرب دکارتی مجموعه‌های ناتهی، از $A \times B = A \times C$، نتیجهٔ $B = C$ درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۳ **چند گزاره از گزاره‌های زیر درست هستند؟**

الف) جمع ۷ عدد طبیعی متوالی مضرب ۷ است.

ب) میانگین ۷ عدد طبیعی فرد متوالی، همان عدد وسطی است.

پ) اگر $a_1, a_2, ..., a_7$ را در ترتیب دیگری $b_1, b_2, ..., b_7$ بنویسیم، حاصل $(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_7-b_7)$ زوج است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

باز هم سه تمرین مهم کتاب درسی برای اعداد فرد:

اگر n فرد باشد.	اگر n فرد باشد.	اگر n فرد باشد.
جمع n عدد طبیعی متوالی مضرب n است. ✓ مثلاً جمع ۵ عدد متوالی مضرب ۵ است.	میانگین n جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی برابر جملهٔ وسطی است. ✓ مثلاً میانگین ۷ عدد متوالی برابر چهارمی است.	با جابه‌جاکردن n عدد، حاصل‌ضرب $(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_n-b_n)$ همیشه زوج است. ✓ مثلاً اگر bها با جابه‌جایی aها به دست بیایند، $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ حتماً زوج است.

نکته این ویژگی‌ها برای nهای زوج درست نیستند!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: جمع n عدد متوالی می‌شود $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$، پس جمع ۷ عدد طبیعی متوالی $\frac{7}{2}(a_1+a_7)$ است که بر ۷ بخش‌پذیر است. ✓

گام دوم: در هر دنبالهٔ حسابی، میانگین با میانه برابر است، پس میانگین ۷ عدد طبیعی فرد متوالی، همان وسطی است. ✓

گام سوم: در کاربرد برهان خلف دیدیم که اگر فرض کنیم این حاصل‌ضرب فرد است، به تناقض می‌رسیم (هر پرانتز باید فرد باشد، پس جمعشان فرد است، یعنی ۰ فرد است!)، پس این هم درست است. ✓

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۴ موارد «الف» و «ب» به ترتیب کدام روش استدلال را نشان می‌دهند؟

الف) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow r$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۱) بررسی تمام حالت‌ها، برهان خلف
۲) بررسی تمام حالت‌ها، استدلال بازگشتی
۳) اثبات مستقیم، برهان خلف
۴) اثبات مستقیم، استدلال بازگشتی

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

جمع‌بندی روش‌های استدلال:

روش	عملکرد
اثبات مستقیم	از فرض به حکم می‌رسیم.
برهان خلف (غیرمستقیم)	نقیض حکم را فرض می‌کنیم و به تناقض می‌رسیم (به جای $p \Rightarrow q$، حکم $\sim p \Rightarrow \sim q$ را ثابت می‌کنیم.)
بررسی تمام حالت‌ها	دامنه را به مجموعه‌هایی افراز می‌کنیم و در هر قسمت درستی حکم را با اثبات مستقیم نشان می‌دهیم. از $(p \Rightarrow r)$ و $(q \Rightarrow r)$ به $(p \vee q) \Rightarrow r$ می‌رسیم.
بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)	خود حکم را فرض می‌کنیم و با اثبات ریاضی به رابطهٔ درست یا بدیهی می‌رسیم، سپس $\Leftrightarrow$ می‌گذاریم. از $p \Leftrightarrow q$ و $q \Leftrightarrow r$ نتیجه می‌گیریم، p و r هم‌ارزند و اگر r درست باشد، p هم درست است.
مثال نقض	درستی حکم را با یک مثال رد کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به درس‌باکس گزینهٔ (۱) درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۵ x و y دو عدد حقیقی غیرصفر هستند. اگر $\sqrt[3]{x-y}=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$، کدام نتیجه درست است؟

۱) $|y|=1$ ۲) $x=y$ ۳) $y=-x$ ۴) نشدنی

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

استدلال بازگشتی، یک کاربرد دیگر:

معمولاً از استدلال بازگشتی و گزاره‌های هم‌ارز، برای نشان‌دادن درستی حکم‌ها استفاده می‌کنیم، اما با این استدلال می‌توانیم دو کار دیگر هم انجام دهیم:

نشان دهیم که حکم فقط در حالت‌های خاصی درست است.	نشان دهیم گزاره‌ای هرگز درست نیست.
مثلاً در $(x+y)^2=x^2+y^2$، با استدلال بازگشتی می‌فهمیم که فقط به ازای $xy=0$ درست است.	مثلاً در $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ با استدلال بازگشتی به $a^2+b^2+ab=0$ می‌رسیم که برای هرگز $a,b\neq 0$ درست نیست، پس حکم اول هم هرگز برقرار نیست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به روش بازگشتی، از خود حکم شروع می‌کنیم:

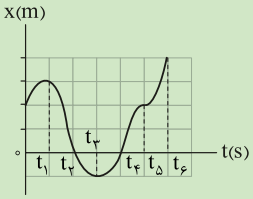
$$\sqrt[3]{x-y}=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x-y=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^3=x-y-3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم.}} 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})=0$$

گام دوم: x و y صفر نیستند، پس $xy\neq 0$ و داریم $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}$ و این یعنی: $x=y$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۶ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این حرکت درست است؟



الف) جهت حرکت، ۳ مرتبه تغییر می‌کند.

ب) جهت بردار مکان متحرک، ۲ مرتبه تغییر می‌کند.

پ) شتاب متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 در جهت محور x است.

ت) حرکت متحرک در بازهٔ زمانی t_5 تا t_6 تندشونده است.

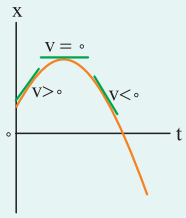
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint *نکات درس‌باکس رو به دقت بررسی کن! بعد با عبارت‌های داده‌شده در سؤال مقایسه کن.*

درس Box

۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان بیانگر سرعت متحرک است. شرط تغییر جهت متحرک، تغییر علامت سرعت است که در قله‌ها و دره‌های نمودار x ـ t رخ می‌دهد (مانند شکل مقابل):



۲) **بردار مکان ($\vec{r}$)**: برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان جسم در آن لحظه نام دارد. هرگاه متحرک از مبدأ مکان ($x = ۰$) عبور کند، x تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان آن عوض می‌شود.

۳) در نمودار مکان ـ زمان برای تشخیص علامت شتاب باید به تقعر نمودار دقت کنیم، اگر نمودار به شکل ∪ باشد، یعنی شتاب مثبت و اگر به شکل ∩ باشد، یعنی شتاب منفی است.

۴) هنگامی که به نقاط ($v = ۰$) نزدیک می‌شویم، حرکت کندشونده است و هنگامی که از نقاط ($v = ۰$) دور می‌شویم، حرکت تندشونده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نکات درس‌باکس به بررسی تک‌تک عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) نادرست است؛ در نقطهٔ t_1 و t_3 سرعت صفر شده است و جهت حرکت تغییر کرده است؛ حواستان باشد که در نقطهٔ t_5 فقط سرعت صفر شده است و تغییر جهت رخ نداده است.

ب) درست است؛ هرگاه متحرک از مبدأ محور ($x = ۰$) عبور کند، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد که تنها در لحظه‌های t_2 و t_4 این اتفاق افتاده.

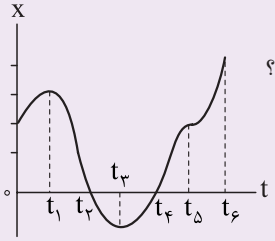
پ) درست است؛ شکل نمودار در بازهٔ t_2 تا t_4 به صورت (∪) است، پس شتاب مثبت و در جهت محور x است.

ت) درست است؛ در بازهٔ t_5 تا t_6 متحرک در حال دورشدن از نقطهٔ $v = ۰$ است، شیب خط مماس دائماً در حال افزایش، پس حرکت تندشونده است.

امتحان نهایی

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است:

(سؤال ۲ ـ امتحان نهایی دی ۱۴۰۳ ـ رشتهٔ ریاضی)



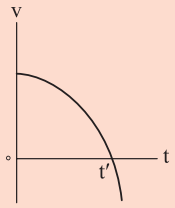
الف) جهت حرکت در کدام لحظه‌ها تغییر کرده است؟

ب) در کدام بازهٔ زمانی متحرک در خلاف جهت محور x، در حال نزدیک‌شدن به مبدأ است؟

پ) شتاب متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 در جهت محور x است یا در خلاف آن؟

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۷ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازهٔ زمانی صفر تا t' چه تعداد از کمیت‌های زیر الزاماً در جهت محور x است؟



الف) بردار مکان متحرک

ب) سرعت متحرک

پ) شتاب متحرک

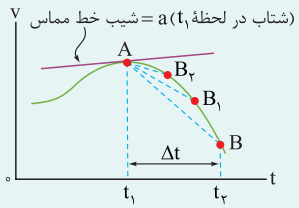
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است.

مطابق شکل، اگر Δt به سمت صفر میل کند $(\Delta t \to 0)$، خط واصل بین نقطه‌های A و B به تدریج به خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A، میل می‌کند.



پاسخ خیلی تشریحی

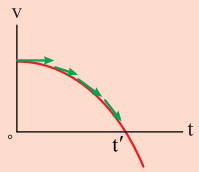
به بررسی تک‌تک موارد می‌پردازیم:

الف) از روی نمودار v ـ t، بردار مکان قابل تعیین نیست، زیرا مکان اولیهٔ متحرک معلوم نیست، ممکن است متحرک ابتدا در سمت منفی یا مثبت مبدأ بوده باشد؛ پس بردار مکان متحرک الزاماً در جهت محور x نیست.

ب) با توجه به نمودار، سرعت متحرک در بازهٔ زمانی مورد نظر، در بخش مثبت محور v است و این یعنی سرعت متحرک، در جهت محور x است.

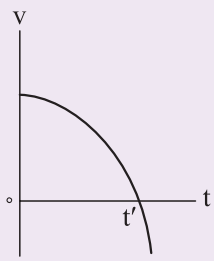
پ) در نمودار v ـ t، علامت شتاب به کمک شیب خط مماس بر نمودار به دست می‌آید. همان‌طور که مشخص است در این‌جا، شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ زمانی صفر تا t' منفی است، پس شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است.

پس گزینهٔ (۱) درست است و فقط عبارت «ب» صحیح است.



کنکور

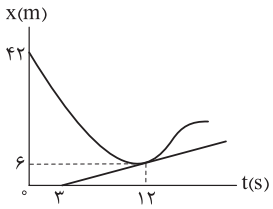
نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر سرعت متحرک v و شتاب آن a باشد، در بازهٔ ۰ تا t' کدام مورد درست است؟ *(سؤال ۴۹ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*



۱) $a > 0$ و $v > 0$
۲) $a > 0$ و $v < 0$
۳) $a < 0$ و $v > 0$
۴) $a < 0$ و $v < 0$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۸ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۱۲\ s$ رسم شده است. تندی متحرک در این لحظه چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن در ۱۲ ثانیهٔ اول است؟



۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) سرعت در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است.

تندی لحظه‌ای با اندازهٔ سرعت لحظه‌ای برابر است.

۲) رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت روی محور x:

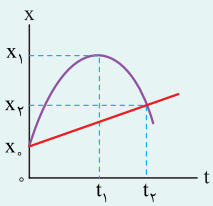
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

v_{av} : سرعت متوسط (m/s)

$\Delta x = x_۲ - x_۱$: جابه‌جایی (m)

$\Delta t = t_۲ - t_۱$: مدت‌زمان (s)

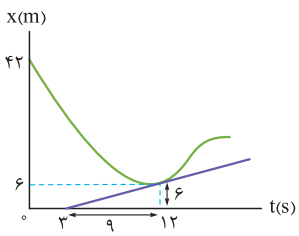
شیب خط واصل بین دو نقطه در نمودار x ـ t برابر با سرعت متوسط است:



نکته اگر بازهٔ زمانی بسیار کوچک شود، خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان به خط مماس بر یک نقطه از این نمودار، نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود تا این‌که در یک لحظهٔ خاص، شیب این خط مماس، سرعت متحرک در آن لحظه را نشان می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا تندی لحظه‌ای را با توجه به نمودار داده‌شده محاسبه می‌کنیم:



$$t = ۱۲\ s \text{ تندی در لحظهٔ } : v = \text{شیب خط مماس} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}\ m/s \Rightarrow s = |v| = \frac{۲}{۳}\ m/s$$

گام دوم: حالا اندازهٔ سرعت متوسط در ۱۲ ثانیهٔ اول را به دست می‌آوریم:

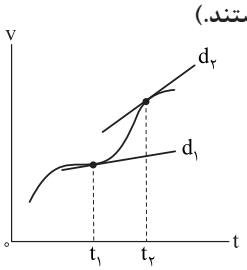
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \xrightarrow[t_۲=۱۲\ s\ ,\ t_۱=۰\ s]{x_۲=۶\ m\ ,\ x_۱=۴۲\ m} V_{av} = \frac{۶ - ۴۲}{۱۲ - ۰} = -\frac{۳۶}{۱۲} = -۳\ m/s \Rightarrow |v_{av}| = ۳\ m/s$$

گام سوم: در پایان، نسبت خواسته‌شده را می‌نویسیم:

$$\text{نسبت خواسته‌شده} = \frac{t = ۱۲\ s \text{ تندی متحرک در لحظهٔ}}{\text{اندازهٔ سرعت متوسط در ۱۲ ثانیهٔ اول}} = \frac{\frac{۲}{۳}}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۹ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب برابر a_1 و a_2 و اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر a_{av} باشد، کدام مقایسه درست است؟ (خط‌های d_1 و d_2 در لحظه‌های t_1 و t_2 بر نمودار مماس هستند.)



۱) $a_1 > a_{av} > a_2$

۲) $a_2 > a_{av} > a_1$

۳) $a_{av} > a_1 > a_2$

۴) $a_{av} > a_2 > a_1$

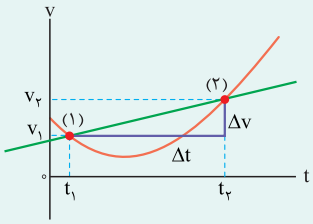
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

با توجه به مفهوم هندسی شیب خط واصل و مماس در نمودار سرعت ـ زمان، خواستهٔ مسئله را به دست آورید.

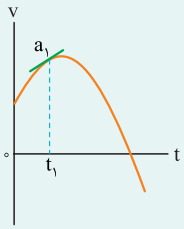
درس Box

در نمودار سرعت ـ زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، بیانگر شتاب متوسط است:



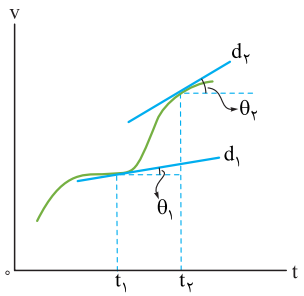
$$a_{av_{(t_1-t_2)}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

هم‌چنین شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در هر لحظه بیانگر شتاب لحظه‌ای است.



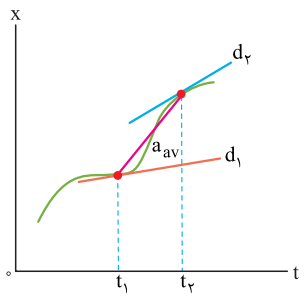
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا شیب دو خط d_1 و d_2 را با هم مقایسه می‌کنیم و ارتباط a_2 و a_1 را به دست می‌آوریم. می‌بینیم که خط d_2 شیب بیشتری دارد، پس $a_2 > a_1$ است.



$$\theta_2 > \theta_1 \Rightarrow \text{شیب خط } d_2 > \text{شیب خط } d_1 \Rightarrow a_2 > a_1$$

گام دوم: خط واصل بین دو نقطه از نمودار در لحظه‌های t_1 و t_2 را رسم می‌کنیم. شیب این خط، شتاب متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 را نشان می‌دهد. اگر شیب این خط را با شیب خط‌های d_1 و d_2 مقایسه کنیم، می‌بینیم که a_{av} از هر دو شتاب لحظه‌ای بیشتر است.



پس: $a_{av} > a_2 > a_1$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۰ متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t_۱ = ۲\ s$ از مکان $x_۱ = ۲۱\ m$ و در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\ s$ از مکان $x_۲ = -۷\ m$ عبور می‌کند. در کدام لحظه برحسب ثانیه، جهت بردار مکان تغییر می‌کند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

حرکت یکنواخت روی خط راست (سرعت ثابت): در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است؛ یعنی سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است.

$v = v_{av}$



معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت:

$x = vt + x_۰$

x : مکان متحرک در لحظهٔ $t\ (m)$

$x_۰$: مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۰\ (m)$

v : سرعت متحرک (m/s)

t : زمان (s)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا سرعت متحرک را به دست می‌آوریم. از آن‌جایی که سرعت متحرک ثابت است، پس با سرعت متوسط برابر است؛ بنابراین داریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \xrightarrow[t_۲=۱۰\,s\ ,\ t_۱=۲\,s]{x_۲=-۷\,m\ ,\ x_۱=۲۱\,m} v = \frac{-۷-۲۱}{۱۰-۲} = -\frac{۲۸}{۸} = -۳/۵\ m/s$$

گام دوم: از رابطهٔ $x = vt + x_۰$ استفاده می‌کنیم و یکی از زوج‌داده‌های زمان و مکان متحرک را داخل رابطه قرار می‌دهیم تا مکان اولیه را بیابیم:

$$x = vt + x_۰ \xrightarrow[x_۱=۲۱\,m]{t_۱=۲\,s\ ,\ v=-۳/۵\,m/s} ۲۱ = -۳/۵ \times ۲ + x_۰ \Rightarrow ۲۱ = -۷ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = ۲۸\ m$$

پس معادلهٔ مکان ـ زمان به صورت زیر است:

$x = -۳/۵t + ۲۸$

گام سوم: جهت بردار مکان وقتی تغییر می‌کند که متحرک از مبدأ مکان عبور کند، یعنی زمانی که مکان متحرک مساوی صفر شود.

$$x = -۳/۵t + ۲۸ \xrightarrow{x=۰} ۰ = -۳/۵t + ۲۸ \Rightarrow -۲۸ = -۳/۵t \Rightarrow t = \frac{-۲۸}{-۳/۵} \Rightarrow t = ۸\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۱ **در مسیری مستقیم، قطاری به طول $۱۸۰\ m$ که با تندی ثابت $۶۰\ km/h$ در حال حرکت است، وارد تونلی به طول $۲۴۰\ m$ می‌شود. از لحظه‌ای که نیمی از قطار درون تونل قرار گرفته است، چند ثانیه طول می‌کشد تا قطار به طور کامل از تونل خارج شود؟**

۱) $۳۰/۶$ ۲) $۱۹/۸$

۳) $۲۱/۶$ ۴) $۲۵/۲$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا یکای سرعت قطار را از کیلومتر بر ساعت به متر بر ثانیه تبدیل می‌کنیم.

$$v = ۶۰\ km/h = ۶۰ \div ۳/۶ = \frac{۵۰}{۳}\ m/s$$

گام دوم: برای محاسبهٔ جابه‌جایی Δx، بهتر است حرکت یک نقطهٔ مشخص از قطار (مثلاً انتهای قطار) را ردیابی کنیم:

وضعیت اولیه: گفته شده نیمی از قطار درون تونل است. طول کل قطار $۱۸۰\ m$ است، پس $۹۰\ m$ از آن داخل تونل و $۹۰\ m$ از آن (از جمله انتهای قطار) بیرون از تونل قرار دارد. اگر ابتدای تونل را مبدأ مکان $(x = ۰)$ در نظر بگیریم، مکان فعلی انتهای قطار برابر است با: $x_۱ = -۹۰\ m$

وضعیت نهایی: قطار زمانی «به طور کامل» از تونل خارج می‌شود که انتهای قطار از انتهای تونل عبور کند. انتهای تونل در فاصلهٔ $۲۴۰\ m$ از ابتدای آن قرار دارد، پس مکان نهایی انتهای قطار باید این نقطه باشد: $x_۲ = ۲۴۰\ m$

اکنون جابه‌جایی کل قطار را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۲۴۰ - (-۹۰) = ۲۴۰ + ۹۰ = ۳۳۰\ m$$

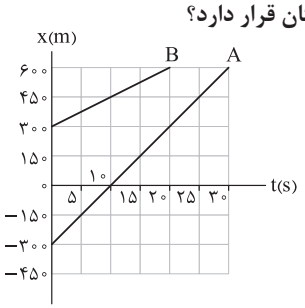
گام سوم: چون حرکت قطار یکنواخت است، از رابطهٔ $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم تا بازهٔ زمانی مورد نیاز را پیدا کنیم.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} \xrightarrow[v=\frac{۵۰}{۳}\ m/s]{\Delta x = ۳۳۰\ m} \Delta t = \frac{۳۳۰}{\frac{۵۰}{۳}} \Rightarrow \Delta t = \frac{۳۳\not{۰} \times ۳}{۵\not{۰}} = \frac{۹۹}{۵} = ۱۹/۸\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۲ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است.

۵ s پس از عبور دو متحرک از کنار هم، متحرک B در فاصلهٔ چند متری مبدأ مکان قرار دارد؟



۱) ۸۲۵

۲) ۹۷۵

۳) ۱۰۵۰

۴) ۱۰۷۵

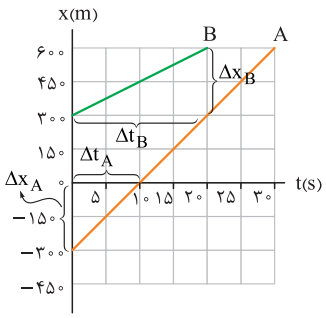
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می‌توان در آن لحظه معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را با هم برابر قرار داد و زمان به هم رسیدن را به دست آورد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B را با استفاده از اطلاعات داده‌شده در نمودار به دست می‌آوریم:



$$x_B = v_B t + x_{0B} = \frac{۳۰۰}{۲۰} t + ۳۰۰ = ۱۵t + ۳۰۰$$

$$x_A = v_A t + x_{0A} = \frac{۳۰۰}{۱۰} t + (-۳۰۰) = ۳۰t - ۳۰۰$$

گام دوم: با توجه به مطلب درس‌باکس، برای پیداکردن لحظهٔ به هم رسیدن دو متحرک، این دو معادله را برابر با هم قرار می‌دهیم:

$$x_A = x_B$$

$$۳۰t - ۳۰۰ = ۱۵t + ۳۰۰$$

$$۱۵t = ۶۰۰ \Rightarrow t = ۴۰\ s$$

گام سوم: مکان متحرک B را ۵ ثانیه پس از عبور دو متحرک از کنار هم، یعنی در ثانیهٔ ۴۵ را به دست می‌آوریم:

$$x_B = ۱۵t + ۳۰۰ \xrightarrow{t=۴۵\ s} x_B = (۱۵ \times ۴۵) + ۳۰۰ = ۹۷۵\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۳ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^۲ - ۴t - ۵$ است. در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۲/۶ ۳) ۵ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) معادلهٔ مکان ـ زمان، در حرکت با شتاب ثابت روی محور x :

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

x : مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

$x_۰$: مکان اولیهٔ متحرک (m)

a : شتاب حرکت $(m/s^۲)$

t : زمان (s)

$v_۰$: سرعت اولیه (m/s)

با توجه به این‌که معادلهٔ مکان در حرکت با شتاب ثابت از درجه‌دوم می‌باشد، نمودار مکان ـ زمان آن به صورت قسمتی از یک سهمی است و نقطهٔ شروع آن روی محور x، مکان اولیه $(x_۰)$ را نشان می‌دهد.

اگر گودی این سهمی رو به بالا باشد، شتاب مثبت است:



اگر گودی این سهمی رو به پایین باشد، شتاب منفی است:



۲) معادلهٔ سرعت ـ زمان، در حرکت با شتاب ثابت روی محور x : $v = at + v_۰$

v : سرعت متحرک در لحظهٔ t (m/s)

$v_۰$: سرعت اولیه (m/s)

a : شتاب $(m/s^۲)$

t : زمان (s)

پاسخ خیلی تشریحی

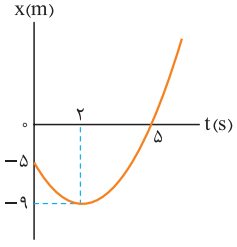
گام اول: چون معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده، درجه ۲ است، رأس سهمی طبق $t = \frac{-B}{۲A}$ محاسبه می‌شود، پس:

$$t_{\text{رأس}} = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۴)}{۲\times۱} = +۲\,s \quad , \quad x_{۲s} = (۲)^۲ - ۴(۲) - ۵ = -۹\,m$$

گام دوم: چون ضریب $t^۲$ مثبت است، پس سهمی به صورت ∪ است و نقاط تقاطع نمودار با محور t به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x = t^۲ - ۴t - ۵ = (t+۱)(t-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱\,s \\ t = ۵\,s \end{cases}$$

گام سوم: نمودار مکان ـ مکان را رسم می‌کنیم و به کمک نمودار، تندی متوسط را در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است را محاسبه می‌کنیم:

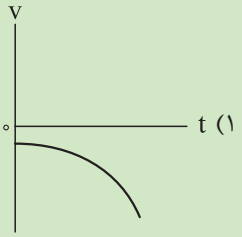


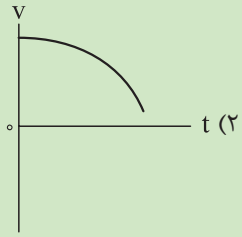
$$d = |x_{۲s} - x_۰| + |x_{۵s} - x_{۲s}| = |-۹-(-۵)| + |۰-(-۹)| = ۴ + ۹ = ۱۳\,m$$

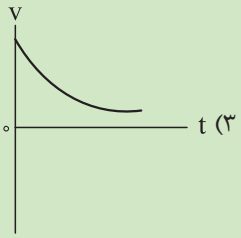
$$s_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۱۳}{۵} = ۲/۶\,m/s$$

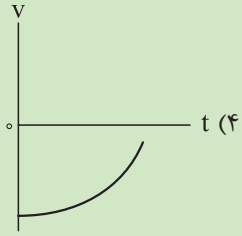
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۴ **جسمی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار سرعت ـ زمان این جسم به صورت کدام‌یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟**

۱) 

۲) 

۳) 

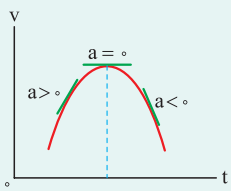
۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint *سه عبارت مهم سؤال رو داخل گزینه‌ها اسکن کن و با حذف گزینه به جواب برس!*

درس Box

۱) شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است.



هرچه شیب این خط بیشتر باشد، یعنی اندازهٔ شتاب بزرگ‌تر است.

۲) اگر نمودار v ـ t به سمت محور t نزدیک شود، یعنی تندی متحرک در حال کاهش است و اگر از محور t دور شود، یعنی تندی متحرک در حال افزایش است.

۳) اگر جسم در جهت محور x حرکت کند، سرعت آن مثبت است و اگر در خلاف جهت محور x حرکت کند، سرعت آن منفی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق صورت سؤال، جسم در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین سرعت آن منفی است و نمودار در پایین محور t قرار می‌گیرد (رد گزینه‌های (۲) و (۳)).

گام دوم: طبق صورت سؤال، تندی جسم در حال کاهش است؛ بنابراین نمودار باید به محور t نزدیک شود (رد گزینهٔ (۱))؛ بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

توجه داشته باشید که در گزینهٔ (۴)، شیب خط مماس بر نمودار که شتاب حرکت را نشان می‌دهد در حال افزایش است.

امتحان نهایی

جسمی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار سرعت ـ زمان این جسم را به صورت کیفی رسم کنید.

(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲، رشتهٔ ریاضی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۵ معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 4$ است. از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک برای دومین مرتبه تغییر می‌کند، شتاب متوسط متحرک برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $\vec{i}$ ۲) $-\vec{i}$

۳) $2\vec{i}$ ۴) $-2\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$: در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_{av}$: شتاب متوسط (m/s^2)

$\vec{v}_1$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 (m/s)

$\vec{v}_2$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 (m/s)

شتاب متوسط کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ است، زیرا Δt همواره مثبت است.

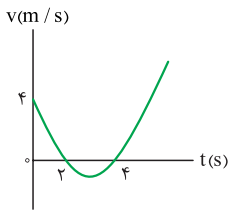
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را برابر با صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم تا معلوم شود که در چه لحظه‌هایی، علامت سرعت و در نتیجه جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند:

$$v = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 4 = 0 \xrightarrow{\times 2} t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-4)(t-2) = 0 \Rightarrow t_1 = 2\,s \text{ و } t_2 = 4\,s$$

در لحظهٔ t_2، جهت حرکت متحرک برای دومین بار تغییر می‌کند:



گام دوم: حالا شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی ۰ تا ۴ s به دست می‌آوریم:

$$t_1 = 0\,s \Rightarrow v_1 = 4\,m/s$$

$$t_2 = 4\,s \Rightarrow v_2 = 0\,m/s$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-4}{4-0} = -\frac{4}{4} = -1\,m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = (-1\,m/s^2)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۶ **دو متحرک با تندی‌های ثابت v_1 و $v_2 > v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر ثانیه، ۱۲ m تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر دقیقه، ۱۸۰ m تغییر می‌کند. $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟**

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت، در دو حالت داده‌شده، دو معادله به دست آورید و با حل دستگاه معادله‌ها، $\frac{v_2}{v_1}$ را حساب کنید.

درس Box در سؤالات حرکت با سرعت ثابت می‌توان از روش سرعت نسبی به صورت زیر استفاده کرد:

اگر دو متحرک A و B در یک جهت حرکت کنند: $v_{\text{نسبی}} = v_A - v_B$

و اگر در خلاف جهت هم حرکت کنند: $v_{\text{نسبی}} = v_A + v_B$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ حرکت یکنواخت را در حالتی که دو متحرک در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow[\Delta t=1\,s\ ,\ v=v_{\text{نسبی}}]{\Delta x=12\,m} 12 = (v_2 + v_1)\times 1 \qquad (I)$$

گام دوم: حالا معادلهٔ حرکت یکنواخت را برای حالتی که دو متحرک در جهت هم حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow[\Delta t=1\,min=60\,s]{\Delta x=180\,m} 180 = (v_2 - v_1)\times 60 \qquad (II)$$

گام سوم: برای رابطهٔ (I) و (II) دستگاه دو معادله ـ دو مجهول می‌نویسیم:

$$\begin{cases} v_2 + v_1 = 12 \\ v_2 - v_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 2v_2 = 15$$

$$v_2 = \frac{15}{2}\ ,\ v_1 = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{3}$$

کنکور **دو متحرک با تندی ثابت v_1 و $v_2 > v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم بروند، فاصلهٔ آن‌ها در هر ثانیه ۱۶ متر تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر دقیقه ۲۴۰ متر تغییر می‌کند. $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟** *(سؤال ۵۳ کنکور تجربی ۱۴۰۲ (خارج از کشور))*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{7}{5}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۷ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -t^2 + 6t + 7$ است. در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، متحرک چند مرتبه از فاصلهٔ ۱۷متری مبدأ محور عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

برای آن که متحرک از فاصلهٔ ۱۷متری مبدأ عبور کند، باید معادلهٔ مکان ـ زمان به ازای $x = \pm 17\ m$ ریشهٔ مثبت غیرمضاعف داشته باشد (ریشه باید مثبت باشد چون t منفی قابل قبول نیست و ریشه باید غیرمضاعف باشد چون اگر ریشه مضاعف باشد متحرک در مکان مورد نظر تغییر جهت می‌دهد و از آن عبور نمی‌کند). با این توضیح داریم:

$$x = -t^2 + 6t + 7 \xrightarrow{\text{به ازای } x=17\ m} 17 = -t^2 + 6t + 7 \Rightarrow t^2 - 6t + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 6^2 - (4 \times 1 \times 10) = -4 < 0 \Rightarrow \text{به ازای } x = 17\ m \text{ ریشه ندارد}$$

$$x = -t^2 + 6t + 7 \xrightarrow{\text{به ازای } x=-17\ m} -17 = -t^2 + 6t + 7 \Rightarrow t^2 - 6t - 10 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 6^2 - (4 \times 1 \times -10) = 76 > 0} t = \frac{6 \pm \sqrt{76}}{2} \xrightarrow{\sqrt{76} > 8} \begin{cases} t_1 = \dfrac{6 + \sqrt{76}}{2} > 0 & \text{ق ق} \\ t_2 = \dfrac{6 - \sqrt{76}}{2} < 0 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین متحرک فقط در لحظهٔ $t_1 = \dfrac{6 + \sqrt{76}}{2}\ s$ یک بار در مکان $x = -17\ m$ از فاصلهٔ ۱۷متری مبدأ عبور می‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۸ **شتاب متوسط متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در ۴ ثانیهٔ اول، برابر $\vec{a}$ و در ۲ ثانیهٔ سوم، برابر $-۳\vec{a}$ است. اگر شتاب متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول برابر $(۴\ m/s^۲)\vec{i}$ باشد، $\vec{a}$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟**

۱) $۱۲\vec{i}$ ۲) $-۱۲\vec{i}$

۳) $۱/۲\vec{i}$ ۴) $-۱/۲\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شتاب متوسط متحرک در ۴ ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ سوم حرکت را می‌نویسیم:

شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ اول $\Rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_۴-v_۰}{۴-۰}=a \Rightarrow v_۴-v_۰=۴a \quad (I)$

شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ سوم $\Rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_۶-v_۴}{۶-۴}=-۳a \Rightarrow v_۶-v_۴=-۶a \quad (II)$

گام دوم: رابطه‌های (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_۴-v_۰=۴a \\ v_۶-v_۴=-۶a \end{cases} \Rightarrow v_۶-v_۰=-۲a$$

گام سوم: رابطهٔ به‌دست‌آمده در گام دوم را در رابطهٔ شتاب متوسط در ۶ ثانیهٔ اول به کار می‌بریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۴=\frac{v_۶-v_۰}{۶-۰} \Rightarrow v_۶-v_۰=۲۴\ m/s$$

$$\left.\begin{matrix} v_۶-v_۰=۲۴\ m/s \\ v_۶-v_۰=-۲a \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲۴=-۲a \Rightarrow a=-۱۲\ m/s^۲ \Rightarrow \vec{a}=-(۱۲ m/s^۲)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

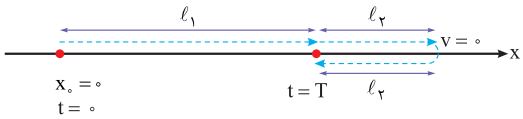
۱۷۹ **متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان شروع به حرکت می‌کند. در بازهٔ زمانی صفر تا T، بدون آن‌که جهت بردار مکان تغییر کند، جهت حرکت متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند. در این بازهٔ زمانی، اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک ۲ برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن باشد، بیشینهٔ اندازهٔ بردار مکان متحرک، چند برابر اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ T است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با فرض آن‌که حرکت در جهت مثبت محور x شروع می‌شود، مسیر حرکت متحرک، مطابق شکل زیر است:



گام دوم: در لحظه‌ای که $v = 0$ می‌شود، متحرک تغییر جهت می‌دهد. در این لحظه، متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ محور قرار دارد و اندازهٔ بردار مکان متحرک، بیشینه است.

در بازهٔ زمانی 0 تا $t = T$، مسافت طی‌شده توسط متحرک، دو برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است و داریم:

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_2 = 2|\Delta x| \xrightarrow{|\Delta x| = \ell_1} \ell_1 + 2\ell_2 = 2\ell_1 \Rightarrow 2\ell_2 = \ell_1$$

گام سوم: نسبت بیشینهٔ اندازهٔ بردار مکان متحرک به اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = T$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x_{max}}{x_{t=T}} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1} \xrightarrow{\ell_1 = 2\ell_2} \frac{x_{max}}{x_{t=T}} = \frac{2\ell_2 + \ell_2}{2\ell_2} = \frac{3\ell_2}{2\ell_2} = 1/5$$

گول نخوری اگر حرکت در جهت منفی شروع شود، متحرک از مبدأ عبور کرده و جهت بردار مکانش تغییر می‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

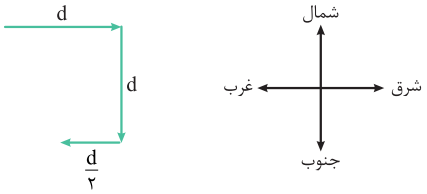
۱۸۰ متحرکی در یک صفحهٔ افقی، ابتدا به اندازهٔ d در جهت شرق، سپس به اندازهٔ d در جهت جنوب و در نهایت به اندازهٔ $\frac{d}{۲}$ در جهت غرب حرکت می‌کند. در این حرکت، مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

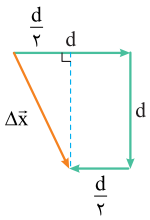
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مطابق متن سؤال، جابه‌جایی‌های متحرک را روی شکل نشان می‌دهیم:



گام دوم: حالا مسافت طی‌شده و جابه‌جایی در کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

مسافت طی‌شده : $\ell = d + d + \frac{d}{۲} = \frac{۵d}{۲}$



$$(\Delta x)^۲ = d^۲ + \frac{d^۲}{۴} = \frac{۵d^۲}{۴} \Rightarrow \Delta x = \frac{\sqrt{۵}d}{۲}$$

گام سوم: نسبت مسافت طی‌شده توسط متحرک به اندازهٔ جابه‌جایی آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell}{\Delta x} = \Rightarrow \frac{\frac{۵d}{۲}}{\frac{\sqrt{۵}d}{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{\text{گویاکردن مخرج}} \frac{۵}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۵} = \sqrt{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۱ **بردار مکان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب برابر $(6\ m)\vec{i}$ و $(-8\ m)\vec{i}$ است. اگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، سرعت متوسط متحرک برابر $(-2\ m/s)\vec{i}$ و تندی متوسط آن برابر $6\ m/s$ باشد، بردار مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر کرده، برحسب متر کدام می‌تواند باشد؟ (جهت حرکت متحرک تنها یک مرتبه تغییر کرده است.)**

۱) $-28\vec{i}$ ۲) $18\vec{i}$

۳) $14\vec{i}$ ۴) $-22\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به آن‌که سرعت متوسط را داریم، Δt یعنی $t_2 - t_1$ را پیدا می‌کنیم:

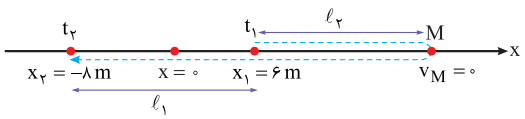
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x = -8-6 = -14\ m]{v_{av} = -2\ m/s} \Delta t = \frac{-14}{-2} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 7\ s$$

گام دوم: حالا با داشتن Δt و معلوم‌بودن تندی متوسط، مسافت طی‌شده را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[s_{av} = 6\ m/s]{\Delta t = 7\ s} \ell = 6 \times 7 = 42\ m$$

گام سوم: در حرکت روی محور x، در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، سرعت آن به صفر می‌رسد. مسیر حرکت متحرک را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

الف) اگر حرکت متحرک در جهت مثبت محور x شروع شود:

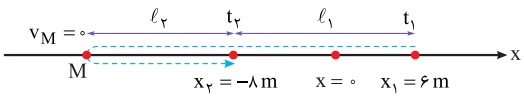


$$2\ell_2 + \ell_1 = 42\ m \xrightarrow{\ell_1 = 6-(-8) = 14\ m} 2\ell_2 + 14 = 42 \Rightarrow 2\ell_2 = 28 \Rightarrow \ell_2 = 14\ m$$

بنابراین بردار مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر کرده $(\vec{x}_M)$ برابر است با:

$$x_M = x_1 + \ell_2 = 6 + 14 = 20\ m \Rightarrow \vec{x}_M = (20\ m)\vec{i}$$

ب) اگر حرکت متحرک در جهت منفی محور x شروع شود:



مشابه حالت «الف» داریم:

$$\ell_2 = 14\ m$$

بنابراین مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر کرده $(\vec{x}_M)$ برابر است با:

$$x_M = -8 - \ell_2 = -8 - 14 = -22\ m \Rightarrow \vec{x}_M = -(22\ m)\vec{i}$$

بنابراین مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت یا $\vec{x}_M = (20\ m)\vec{i}$ است یا $\vec{x}_M = (-22\ m)\vec{i}$ که دومی در گزینه‌ها وجود دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۲ متحرکی روی محور x در حال حرکت است و در لحظه‌های $t_1 = 2\ s$ ، $t_2 = 4\ s$ و $t_3 = 7\ s$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 4\ m$ ، $x_2 = -6\ m$ و $x_3 = 8\ m$ عبور می‌کند. کدام موارد زیر، دربارهٔ این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 لزوماً درست است؟

الف) جهت بردار سرعت متحرک حداقل دو مرتبه تغییر کرده است.

ب) جهت بردار مکان متحرک حداقل دو مرتبه تغییر کرده است.

پ) سرعت متوسط متحرک برابر $(0/8\ m/s)\vec{i}$ است.

ت) تندی متوسط متحرک برابر $4/8\ m/s$ است.

۱) ب و پ ۲) پ و ت

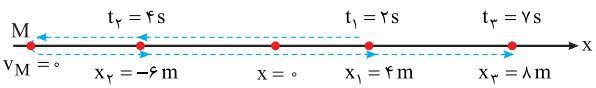
۳) الف و ت ۴) الف و ب

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به داده‌های سؤال، به بررسی تک‌تک عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) نادرست است؛ جهت بردار سرعت متحرک، می‌تواند یک بار تغییر کرده باشد. مسیر حرکت متحرک در شکل زیر، نشان می‌دهد که متحرک بین لحظه‌های t_2 و t_3 از مکان $x_2 = -6\ m$ تا نقطه‌ای مانند M به طرف چپ رفته و پس از توقف در نقطهٔ M ، جهت حرکت آن تغییر کرده و در لحظهٔ t_3 به مکان x_3 رسیده است.



بنابراین لازم نیست که حداقل دو بار، جهت حرکت متحرک تغییر کند.

ب) درست است؛ می‌دانیم که هرگاه متحرکی از مبدأ محور عبور کند، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند. در این‌جا متحرک حداقل یک بار در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 و یک بار دیگر در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 از مبدأ محور عبور می‌کند. توجه داشته باشید که متحرک می‌تواند در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 ، چندین بار رفت و برگشت انجام دهد به گونه‌ای چند بار از مبدأ محور عبور کند.

پ) درست است؛

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[t_3=7\ s\ ,\ t_1=2\ s]{x_3=8\ m\ ,\ x_1=4\ m} v_{av} = \frac{8-4}{7-2} = \frac{4}{5} = 0/8\ m/s \Rightarrow v_{av} = (0/8\ m/s)\vec{i}$$

ت) نادرست است؛

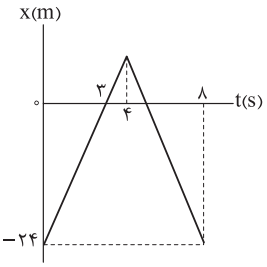
$$\ell_{min} = |-6-4| + |8-(-6)| = 10+14 = 24\ m$$

$$s_{av,min} = \frac{\ell_{min}}{\Delta t} = \frac{24}{5} = 4/8\ m/s$$

با توجه به شکل رسم‌شده در قسمت «الف»، متحرک می‌تواند مسافتی بیشتر از $24\ m$ را پیموده باشد و تندی متوسط آن بیشتر از $4/8\ m/s$ شود؛ بنابراین عبارت «ت» لزوماً درست نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۳ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازهٔ زمانی $t_1 = 1\ s$ تا $t_2 = 5\ s$ به ترتیب از راست به چپ، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه و اندازهٔ شتاب متوسط آن چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۴، ۴

۲) ۴، ۸

۳) ۸، ۴

۴) ۸، ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در بازهٔ زمانی صفر تا ۳ s، سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم. چون در این بازهٔ زمانی، حرکت با سرعت ثابت است، داریم:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-(-24)}{3-0} = 8\ m/s$$

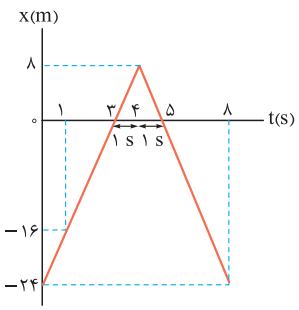
گام دوم: معادلهٔ مکان متحرک را در ۴ ثانیهٔ اول حرکت می‌نویسیم و مکان آن را در لحظهٔ $t_1 = 1\ s$ پیدا می‌کنیم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[t=t_1=1\ s]{v=8\ m/s\ ,\ x_0=-24\ m} x_{t=1\ s} = 8\times 1 + (-24) = -16\ m$$

به طور مشابه، مکان متحرک در لحظهٔ $t = 4\ s$ را نیز حساب می‌کنیم:

$$x_{t=4\ s} = 8\times 4 + (-24) = 32 - 24 = 8\ m$$

گام سوم: با توجه به تقارن موجود در نمودار، سرعت متحرک در بازهٔ زمانی ۴ s تا ۸ s برابر $-8\ m/s$ است و نمودار، محور t را در لحظهٔ $t = 5\ s$ قطع می‌کند.



گام چهارم: در بازهٔ زمانی $t_1 = 1\ s$ تا $t_2 = 5\ s$، متحرک از مکان $x_1 = -16\ m$ به مکان $x = 8\ m$ رفته و پس از تغییر جهت حرکت، به مکان $x_2 = 0$ می‌رسد؛ بنابراین مسافت پیموده‌شده در این بازهٔ زمانی، برابر است با:

$$\ell = |8-(-16)| + |0-8| = 24 + 8 = 32\ m$$

اکنون می‌توانیم تندی متوسط را به دست آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{32}{5-1} = 8\ m/s$$

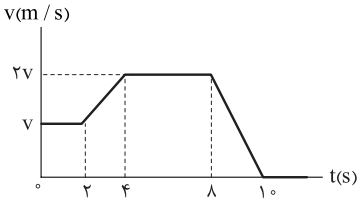
گام پنجم: اندازهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 1\ s$ تا $t_2 = 5\ s$ را حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-8-8}{5-1} = \frac{-16}{4} = -4\ m/s^2$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = 4\ m/s^2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۴ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۳\ s$ تا $t_2 = ۹\ s$، چند برابر اندازهٔ شتاب آن در لحظهٔ t_1 است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شتاب متحرک در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۴ s ثابت است و داریم:

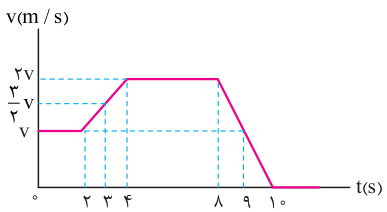
$$a = a_{av} = \frac{۲v - v}{۴ - ۲} = \frac{v}{۲}$$

شتاب متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۳\ s$ نیز همین $\frac{v}{۲}$ است.

گام دوم: در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۴ s، شیب نمودار سرعت ـ زمان ثابت است؛ بنابراین سرعت در لحظهٔ $t_1 = ۳\ s$ که دقیقاً در وسط این بازهٔ زمانی قرار دارد، برابر است با:

$$v_{t=۳\ s} = \frac{v + ۲v}{۲} = \frac{۳}{۲}v$$

به طور مشابه در بازهٔ زمانی ۸ s تا ۱۰ s نیز شیب نمودار ثابت است و لحظهٔ $t_2 = ۹\ s$ دقیقاً در وسط این بازه قرار دارد؛ بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t_2 = ۹\ s$ برابر است با:



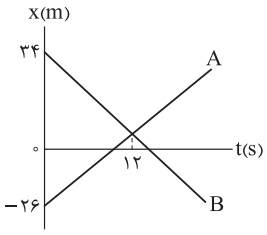
$$v_{t=۹\ s} = \frac{۲v + ۰}{۲} = v$$

گام سوم: نسبت اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۳\ s$ تا $t_2 = ۹\ s$ به اندازهٔ شتاب آن در لحظهٔ t_1 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{av}}{a_1} = \frac{\frac{v - ۱/۵v}{۹ - ۳}}{\frac{v}{۲}} = \frac{-v}{۶v} = -\frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{|a_{av}|}{|a_1|} = \frac{۱}{۶}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۵ **نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در ۵ ثانیهٔ سوم، فاصلهٔ دو متحرک چند متر و چگونه تغییر می‌کند؟**



۱) ۵، کاهش می‌یابد.

۲) ۱۰، کاهش می‌یابد.

۳) ۵، افزایش می‌یابد.

۴) ۱۰، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار، دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲\ s$ به یکدیگر می‌رسند. معادلهٔ مکان دو متحرک را مساوی با هم قرار می‌دهیم و سرعت نسبی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t - ۲۶ \\ x_B = v_B t + ۳۴ \end{cases} \xrightarrow[x_A = x_B]{t = ۱۲\ s} ۱۲v_A - ۲۶ = ۱۲v_B + ۳۴ \Rightarrow ۱۲(v_A - v_B) = ۶۰ \Rightarrow v_A - v_B = ۵\ m/s$$

گام دوم: معادلهٔ مکان در حرکت با سرعت ثابت روی محور x را به صورت نسبی برای دو متحرک A و B می‌نویسیم:

$$x = vt + x_۰ \xrightarrow[x_{۰\,نسبی} = x_{۰A} - x_{۰B} = -۲۶ - ۳۴ = -۶۰\ m]{x_{نسبی} = x_A - x_B\ ,\ v_{نسبی} = v_A - v_B = ۵\ m/s} x_A - x_B = ۵t - ۶۰$$

گام سوم: فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر را در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت، یعنی ۱۰ s تا ۱۵ s به دست می‌آوریم:

$$x_A - x_B = ۵t - ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱۰\ s \Rightarrow x_A - x_B = ۵\times۱۰ - ۶۰ = -۱۰\ m \Rightarrow |x_A - x_B| = ۱۰\ m \\ t = ۱۵\ s \Rightarrow x_A - x_B = ۵\times۱۵ - ۶۰ = ۱۵\ m \Rightarrow |x_A - x_B| = ۱۵\ m \end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ بین دو متحرک از ۱۰ m به ۱۵ m می‌رسد، یعنی ۵ m افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دوازدهم

۱۸۶ کدام مورد، درست است؟

۱) در ۵۰ سال گذشته، شیب افزایش امید به زندگی در مناطق کم‌برخوردار کم‌تر از مناطق برخودار بوده است.

۲) نیروی بین مولکولی غالب در اسیدهای چرب برخلاف استرهای بلندزنجیر، از نوع پیوند هیدروژنی است.

۳) مولکول‌های سازندهٔ عسل، قطبی‌اند و در ساختار آن‌ها گروه هیدروکسیل وجود دارد.

۴) به لطف صابون‌ها و مواد شوینده که براساس خواص اسیدی و بازی عمل می‌کنند، امروزه بیماری وبا تهدیدی برای جوامع انسانی به حساب نمی‌آید.

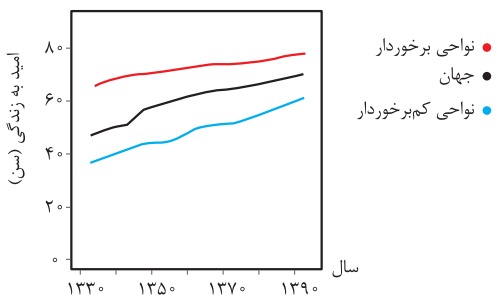
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

در ساختار مولکول‌های سازندهٔ عسل، شمار قابل توجهی گروه هیدورکسیل (OH) وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): امید به زندگی در مناطق برخوردار بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است اما شیب افزایش امید به زندگی در مناطق کم‌برخوردار بیشتر می‌باشد. به شیب منحنی‌ها در نمودار زیر توجه کنید:



گزینهٔ (۲): اسیدهای چرب همانند استرهای بلندزنجیر، در مجموع ناقطبی‌اند و نیروی بین مولکولی غالب آن‌ها، از نوع وان‌دروالسی است.

گزینهٔ (۴): وبا، هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۷ **در کدام گزینه، ماده‌ای وجود دارد که برخلاف دو مادهٔ دیگر، انحلال‌پذیری آن در هگزان بیشتر از آب است؟**

۱) نمک خوراکی ـ اتیلن گلیکول ـ شکر
۲) اوره ـ بنزین ـ روغن زیتون
۳) وازلین ـ متانول ـ اوره
۴) ید ـ بنزین ـ گریس

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

در گزینهٔ (۳)، وازلین ناقطبی است و در هگزان حل می‌شود، در حالی که متانول و اوره، مولکول‌هایی قطبی بوده و انحلال‌پذیری آن‌ها در آب بیشتر است.

نام ماده	فرمول شیمیایی	ذره‌های سازنده	محلول در آب یا هگزان
نمک خوراکی	$NaCl$	شبکه‌ای از کاتیون‌ها و آنیون‌ها	آب
بنزین	C_8H_{18}	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
گریس	$C_{18}H_{38}$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
وازلین	$C_{25}H_{52}$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
روغن زیتون	$C_{57}H_{104}O_6$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
چربی موجود در کوهان شتر	$C_{57}H_{110}O_6$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
اتیلن گلیکول	$C_2H_6O_2$	مولکول‌های قطبی	آب
متانول	CH_3OH	مولکول‌های قطبی	آب
اتانول	C_2H_6O	مولکول‌های قطبی	آب
اوره	$CO(NH_2)_2$	مولکول‌های قطبی	آب

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۸ درستی یا نادرستی کدام گزینه دربارهٔ اوره با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

$(H = ۱ , C = ۱۲ , N = ۱۴ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) مولکولی قطبی است و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.

۲) شمار گروه‌های $NH_۲$ در ساختار آن با شمار گروه‌های هیدروکسیل در ساختار اتیلن گلیکول برابر است.

۳) در ۱۲ گرم از آن، ۰/۸ مول اتم هیدروژن وجود دارد.

۴) همهٔ عنصرهای سازندهٔ آن در ساختار روغن زیتون نیز وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۴): برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است. در ساختار اوره $(CO(NH_۲)_۲)$، اتم نیتروژن وجود دارد که در ساختار روغن زیتون $(C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶)$ وجود ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اوره، قطبی است و به دلیل داشتن پیوند $N-H$، می‌تواند با مولکول‌های آب، پیوند هیدروژنی برقرار کند.

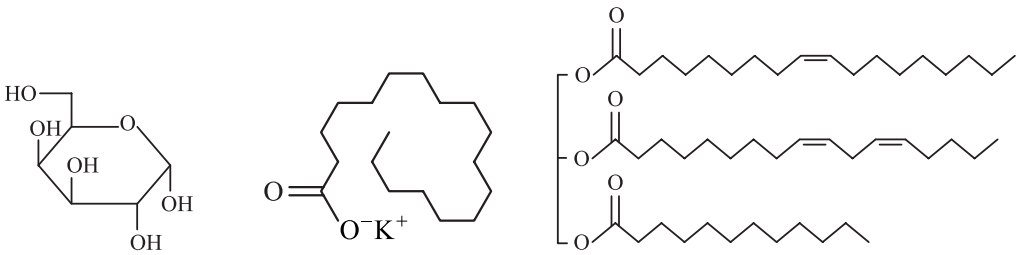
گزینهٔ (۲): در ساختار اوره، دو گروه $NH_۲$ و در ساختار اتیلن گلیکول $(HO-CH_۲CH_۲-OH)$، دو گروه OH وجود دارد.

گزینهٔ (۳): جرم مولی اوره، $۶۰\ g.mol^{-۱}$ است و در هر مول از آن، ۴ مول اتم هیدروژن وجود دارد:

$$۱۲\ g\ CO(NH_۲)_۲ \times \frac{۱\ mol\ CO(NH_۲)_۲}{۶۰\ g\ CO(NH_۲)_۲} \times \frac{۴\ mol\ H}{۱\ mol\ CO(NH_۲)_۲} = ۰/۸\ mol\ H$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۹ با توجه به ساختارهای داده‌شده، کدام مورد نادرست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$



(a) (b) (c)

۱) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول (a) با این نسبت در اوره برابر است.

۲) حالت فیزیکی ترکیب (b) در دما و فشار اتاق، مانند اتیلن گلیکول است.

۳) از واکنش ترکیب (c) با پتاسیم هیدروکسید، می‌توان ترکیب (b) را تولید کرد.

۴) تفاوت جرم مولی ترکیب (c) با روغن زیتون برابر با ۹۸ گرم است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا بیاید فرمول همهٔ ترکیب‌ها را بنویسیم:

a) $C_۶H_{۱۲}O_۶$

b) $C_{۱۷}H_{۳۵}COOK$ یا $C_{۱۸}H_{۳۵}O_۲K$

c) $CH_۲(OOC-C_{۱۷}H_{۳۳})-CH(OOC-C_{۱۶}H_{۲۹})-CH_۲(OOC-C_{۱۱}H_{۲۳}) \Rightarrow C_{۵۰}H_{۹۰}O_۶$

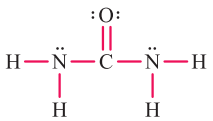
بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مولکول (a) دارای ۶ اتم اکسیژن و در نتیجه $۶ \times ۲ = ۱۲$ جفت‌الکترون ناپیوندی است:

$$\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی} = \frac{\overbrace{(۴\times۶)}^{C}+\overbrace{(۱\times۱۲)}^{H}+\overbrace{(۲\times۶)}^{O}}{۲} = ۲۴$$

$$\Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت‌لکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲$$

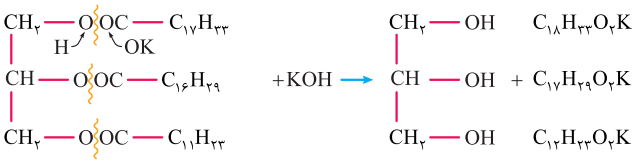
ساختار اوره به صورت زیر است:



$$\frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

گزینهٔ (۲): ترکیب (b) صابون پتاسیم است و مانند اتیلن گلیکول (ضدیخ) در دمای اتاق به حالت مایع می‌باشد.

گزینهٔ (۳): از واکنش ترکیب (c) با پتاسیم هیدروکسید، می‌توان ۳ نوع صابون مایع تهیه کرد که فرمول هیچ‌کدام با ترکیب (b) یکسان نیست:



گزینهٔ (۴): فرمول روغن زیتون، $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ است:

$$C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶ - C_{۵۰}H_{۹۰}O_۶ = C_۷H_{۱۴} = (۷\times۱۲)+۱۴ = ۹۸\ g$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$C_nH_{2n}O_2$

۱۹۰ در نمونه‌ای به جرم ۱۰۲/۴ گرم از یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، $1/204\times10^{25}$ اتم وجود دارد. جرم مولی صابون جامد حاصل از این اسید چرب، چند گرم بر مول است؟ $(H=1, C=12, O=16, Na=23 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۴۲ ۲) ۲۷۰ ۳) ۲۷۸ ۴) ۳۰۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اسیدهای چرب و صابون:

- اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی $(RCOOH)$ هستند که تعداد اتم‌های کربن آن‌ها زیاد است. اگر گروه R در این ترکیب‌ها، گروه آلکیل (زنجیر سیرشده) باشد، فرمول عمومی آن‌ها به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است.
- صابون، نمک اسید چرب است. پاک‌کننده‌های صابونی به حالت جامد و مایع وجود دارند:

انواع پاک‌کننده‌های صابونی:
- صابون جامد ← نمک سدیم اسید چرب ← RCOONa
- صابون مایع ← نمک پتاسیم یا آمونیوم اسید چرب ← RCOOK یا $RCOONH_4$

- با توجه به فرمول اسیدهای چرب و صابون، برای تبدیل فرمول اسید چرب به صابون، کافی است اتم هیدروژن گروه کربوکسیل را جدا کرده و به جای آن، کاتیون Na^+، K^+ یا NH_4^+ قرار دهیم:

$$RCOOH \xrightarrow[+X^+]{-H} RCOOX$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا باید فرمول اسید چرب را به دست آوریم:

$$C_nH_{2n}O_2 \sim (3n+2) \text{ اتم}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{\text{اسید چرب}}} = \frac{\text{تعداد}}{\underbrace{\text{عدد آووگادرو}\times\text{ضریب}}_{\text{اتم}}} \Rightarrow \frac{102/4}{14n+32} = \frac{1/204\times10^{25}}{(3n+2)\times6/02\times10^{23}} \Rightarrow \frac{51/2}{7n+16} = \frac{20}{3n+2}$$

$$\Rightarrow 153/6n+102/4 = 140n+320 \Rightarrow 13/6n = 217/6 \Rightarrow n=16 \Rightarrow C_{16}H_{32}O_2$$

فرمول صابون جامد حاصل از این اسید چرب به صورت زیر است:

$$C_{16}H_{32}O_2 \xrightarrow[+Na^+]{-H} C_{16}H_{31}O_2Na$$

$$\text{جرم مولی صابون} = (16\times12)+31+(2\times16)+23 = 278\ g.mol^{-1}$$

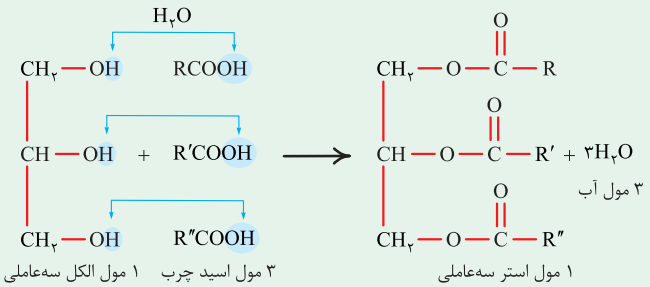
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۱ **اگر فرمول مولکولی اسید چرب و الکل سازندهٔ یک استر سه‌عاملی به صورت $C_{۱۶}H_{۳۰}O_۲$ و $C_۳H_۸O_۳$ باشد، فرمول مولکولی این استر سنگین کدام است؟**

۱) $C_{۱۹}H_{۳۶}O_۴$
۲) $C_{۵۱}H_{۹۲}O_۶$
۳) $C_{۱۹}H_{۳۲}O_۶$
۴) $C_{۵۱}H_{۹۶}O_۶$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته استرها از واکنش الکل‌ها و اسیدهای آلی در محیط اسیدی به دست می‌آیند. *بدانید و آگاه باشید که* هر استر بلندزنجیر سه‌عاملی، حاصل واکنش بین یک الکل سه‌عاملی و سه اسید چربی یک‌عاملی است:



پاسخ خیلی تشریحی معادلهٔ واکنش تولید استر سنگین به صورت زیر است:

(آب) ۳+ استر سنگین ← (اسید چرب) ۳+ (الکل ۳عاملی)

اگر شمار اتم‌های کربن و هیدروژن استر سنگین را برابر x و y در نظر بگیریم، به کمک موازنهٔ معادلهٔ واکنش، می‌توان x و y را به دست آورد:

$$C_۳H_۸O_۳ + ۳C_{۱۶}H_{۳۰}O_۲ \rightarrow C_xH_yO_۶ + ۳H_۲O$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{موازنهٔ C: } ۳+(۳\times ۱۶)=x \Rightarrow x=۵۱ \\ \text{موازنهٔ H: } ۸+(۳\times ۳۰)=y+(۳\times ۲) \Rightarrow y=۹۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{فرمول استر: } C_{۵۱}H_{۹۲}O_۶$$

به‌جور دیگه می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\text{فرمول استر سنگین} = ۳(\text{فرمول اسید چرب}) + C_۳H_۲ \Rightarrow \text{فرمول اسید چرب} = \frac{\text{فرمول استر سنگین} - C_۳H_۲}{۳}$$

$$= ۳(C_{۱۶}H_{۳۰}O_۲) + C_۳H_۲ = C_{۵۱}H_{۹۲}O_۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

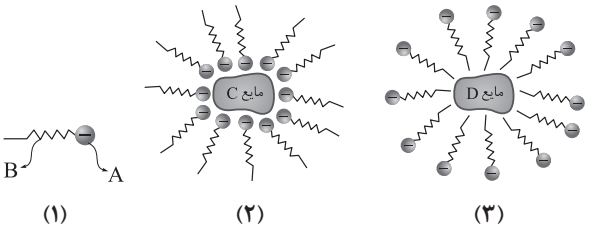
۱۹۲ **شکل (۱) ساختار بخش آنیونی صابون و شکل‌های (۲) و (۳) نحوهٔ قرارگرفتن صابون در اطراف آب و روغن است. در شکل (۱)، کدام بخش، چربی‌گریز و کدام‌یک از مایع‌های (C) یا (D)، روغن است؟**

۱) A ،C

۲) A ،D

۳) B ،C

۴) B ،D



(۱) (۲) (۳)

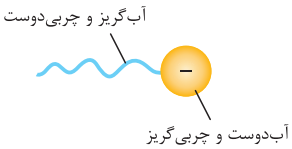
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

جزء آنیونی صابون، خودش دو بخش دارد:

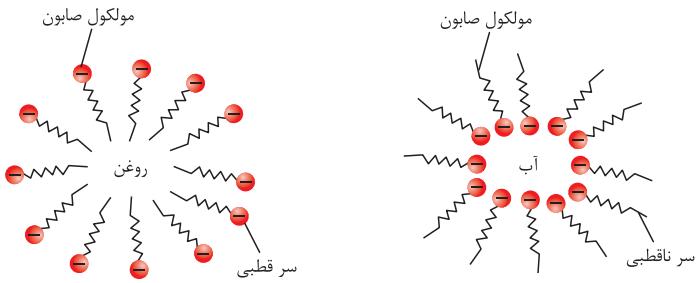
۱) بخش زنجیر هیدروکربنی که آب‌گریز و در نتیجه چربی‌دوست است و سر ناقطبی صابون را تشکیل می‌دهد.

۲) بخش ($-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O^-$) که سر قطبی و آب‌دوست آن است.



مایع C: بخش قطبی صابون با آن جاذبه برقرار کرده است. ⇐ C، همان آب است.

مایع D: بخش ناقطبی صابون با آن جاذبه برقرار کرده است. ⇐ D، همان روغن است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۳ **در بین مواد «ژله، شربت معده، شیر، چسب، سس مایونز»، ماده‌ای که جزء کلوئیدها نیست، ..... .**

۱) مخلوطی همگن و پایدار است

۲) از یون‌ها و مولکول‌ها ساخته شده است

۳) ناهمگن بوده و ذره‌های سازندهٔ آن با گذشت زمان، ته‌نشین می‌شوند

۴) با کلوئیدها، در پایداری، مشابه و در اندازهٔ ذرات، متفاوت است

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته مقایسهٔ محلول‌ها، کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها به طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

نوع مخلوط / ویژگی	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است/ ته‌نشین می‌شود.	پایدار است/ ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است/ ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریز ماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب‌قند، آب‌نمک

پاسخ خیلی تشریحی در بین مواد داده‌شده، فقط شربت معده جزء کلوئیدها نیست. شربت معده، سوسپانسیون و در نتیجه مخلوطی ناهمگن و ناپایدار است و ذره‌های سازندهٔ آن با گذشت زمان ته‌نشین می‌شوند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۴ **هرگاه مقداری صابون را به مخلوط آب و روغن اضافه کرده و مخلوط را به هم بزنیم، مخلوطی ..... به دست می‌آید که توانایی پخش نور را ..... .**

۱) همگن ـ ندارد
۲) ناهمگن ـ دارد
۳) همگن ـ دارد
۴) ناهمگن ـ ندارد

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مخلوط آب، روغن و صابون، کلوئید محسوب می‌شود. ذره‌های سازندهٔ کلوئید، نور را پخش می‌کنند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۵ با توجه به جدول زیر که نتایج حاصل از یک آزمایش برای مقایسهٔ قدرت پاک‌کنندگی دو نوع صابون را نشان می‌دهد، مقدار چه تعداد از موارد a تا d بزرگ‌تر از ۱۰ است؟

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^\circ C$)	درصد لکهٔ باقی‌مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	۳۰	a
صابون بدون آنزیم	نخی	۴۰	b
صابون آنزیم‌دار	نخی	۳۰	۱۰
صابون آنزیم‌دار	نخی	۴۰	c
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	۴۰	d

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد a، b و d بزرگ‌تر از ۱۰ هستند.

- صابون بدون آنزیم، قدرت پاک‌کنندگی کم‌تری نسبت به صابون آنزیم‌دار دارد، یعنی بدون آنزیم، درصد لکهٔ باقی‌مانده بیشتر خواهد بود:

$a > ۱۰$

- با افزایش دما، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش می‌یابد و درصد لکهٔ باقی‌مانده کم‌تر می‌شود:

$b > ۱۰ , c < ۱۰$

- صابون، لکه‌ها را از روی پارچهٔ نخی بهتر از پارچهٔ پلی‌استری پاک می‌کند. تأثیر پارچهٔ نخی حتی بیشتر از میزان افزایش دما به اندازهٔ $۱۰\ ^\circ C$ است:

$d > ۱۰$

کتاب درسی

دانش‌آموزی برای مقایسهٔ قدرت پاک‌کنندگی دو نوع صابون، کاوشی انجام داد. او از دو نوع صابون برای پاک‌کردن لکهٔ چربی یکسان از روی دو نوع پارچه استفاده و نتایج آزمایش خود را در جدول زیر یادداشت کرد. با توجه به جدول به پرسش‌ها پاسخ دهید. *(شیمی (۳) ـ خود را بیازمایید صفحهٔ ۹ و ۱۰ کتاب درسی)*

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^\circ C$)	درصد لکهٔ باقی‌مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	۳۰	۲۵
صابون بدون آنزیم	نخی	۴۰	۱۵
صابون آنزیم‌دار	نخی	۳۰	۱۰
صابون آنزیم‌دار	نخی	۴۰	۰
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	۴۰	۱۵

آ) دما چه اثری بر قدرت پاک‌کنندگی صابون دارد؟

ب) قدرت پاک‌کنندگی صابون با افزودن آنزیم چه تغییری می‌کند؟

پ) آیا میزان چسبندگی لکه‌های چربی روی پارچه‌های گوناگون یکسان است؟ از کدام دادهٔ جدول چنین نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۶ کدام موارد زیر دربارهٔ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، درست است؟

الف) قدرت پاک‌کنندگی آن در آب چشمه به طور قابل توجهی بیشتر از آب دریا است.

ب) اگر فرمول شیمیایی آن به صورت $C_{۲۰}H_{۲۹}SO_۳Na$ باشد، در ساختار آن (فاقد پیوند سه‌گانه)، ۵ پیوند دوگانه وجود دارد.

پ) خاصیت بازی دارد و با آلاینده‌ها، واکنش شیمیایی می‌دهد.

ت) عملکردی مشابه با صابون دارد و تهیهٔ آن با قیمت مناسب و در مقیاس انبوه امکان‌پذیر است.

۱) ب و ت ۲) الف و پ

۳) ب و پ ۴) الف و ت

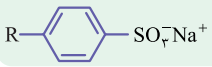
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

نکته

ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی سدیم‌دار به صورت زیر است:



یا $RC_۶H_۴SO_۳^-Na^+$ (R: گروه هیدروکربنی با تعداد کربن زیاد)

بررسی عبارت‌ها:

الف) پاک‌کننده‌های غیرصابونی با یون‌های موجود در آب سخت، رسوب تشکیل نمی‌دهند، یعنی قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب معمولی و آب سخت، تقریباً یکسان است.

ب) ۳ پیوند دوگانه در حلقهٔ بنزن وجود دارد. باید چک کنیم در گروه R چند پیوند دوگانه وجود دارد:

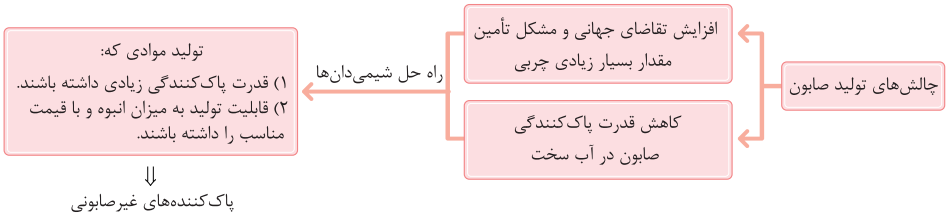
$$C_{۲۰}H_{۲۹}SO_۳Na \sim RC_۶H_۴SO_۳Na \Rightarrow R: C_{۱۴}H_{۲۵}$$

فرمول مولکولی زنجیر ۱۴کربنهٔ سیرشده $(C_nH_{۲n+۱})$ به صورت $C_{۱۴}H_{۲۹}$ است. گروه R پاک‌کننده، ۴ اتم هیدروژن نسبت به حالت سیرشده کم‌تر دارد. با توجه به این که هر پیوند دوگانه، ۲ اتم هیدروژن از هیدروژن‌های یک ترکیب کم می‌کند، گروه R شامل ۲ پیوند دوگانه است:

$$\text{تعداد کل پیوندهای دوگانه} = \underset{\text{حلقهٔ بنزن}}{۳} + \underset{\text{گروه R}}{۲} = ۵$$

پ) پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، خاصیت بازی دارند و براساس برهم‌کنش بین ذره‌ها عمل می‌کنند، با آلاینده‌ها واکنش شیمیایی نمی‌دهند.

ت) *کاملاً درسته!*



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

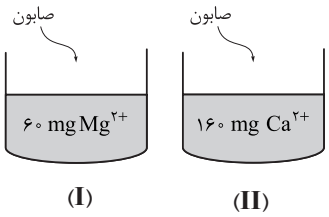
۱۹۷ مطابق شکل زیر، به دو نمونه آب که حاوی یون‌های منیزیم و کلسیم هستند، مقدار کافی و یکسانی صابون رنده‌شده $(C_{18}H_{35}O_2Na)$ اضافه می‌کنیم. پس از هم‌زدن و تشکیل رسوب، نسبت جرم رسوب در ظرف (II) به ظرف (I) به تقریب کدام است؟ $(Ca = 40 , Mg = 24 , O = 16 , C = 12 , H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۶۴

۲) ۱/۸۴

۳) ۲/۴۴

۴) ۲/۴۸



(I) (II)

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته صابون در حضور یون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آب سخت، رسوب می‌کند. اگر یون‌های منیزیم و کلسیم را با نماد X^{2+} نشان دهیم، فرم کلی معادلهٔ این واکنش‌ها را می‌توان به صورت‌های زیر نشان داد:

$$2RCOONa(aq) + XCl_2 \rightarrow (RCOO)_2X(s) + 2NaCl(aq)$$

$$2RCOONa(aq) + X^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2X(s) + 2Na^+(aq)$$

پاسخ خیلی تشریحی در ظرف‌ها، واکنش‌های زیر رخ می‌دهد:

$$I)\ 2C_{17}H_{35}COONa + Mg^{2+} \rightarrow (C_{17}H_{35}COO)_2Mg + 2Na^+$$

$$II)\ 2C_{17}H_{35}COONa + Ca^{2+} \rightarrow (C_{17}H_{35}COO)_2Ca + 2Na^+$$

برای محاسبهٔ جرم رسوب‌ها، به جرم مولی آن‌ها نیاز داریم. برای این کار، ابتدا جرم مولی گروه $C_{17}H_{35}COO$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی} = (18\times12) + 35 + (2\times16) = 283\ g.mol^{-1}$$

$$\text{جرم مولی رسوب در ظرف (I)} = (2\times283) + 24 = 590\ g.mol^{-1}$$

$$\text{جرم مولی رسوب در ظرف (II)} = (2\times283) + 40 = 606\ g.mol^{-1}$$

حالا با توجه به جرم یون‌ها، جرم رسوب تشکیل‌شده در ظرف‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{\text{یون}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{\text{رسوب}}}$$

$$I)\ Mg^{2+} \sim (C_{17}H_{35}COO)_2Mg$$

$$\frac{60\times10^{-3}}{1\times24} = \frac{x}{1\times590} \Rightarrow x = 5\times295\times10^{-3}\ g$$

$$II)\ Ca^{2+} \sim (C_{17}H_{35}COO)_2Ca$$

$$\frac{160\times10^{-3}}{1\times40} = \frac{y}{1\times606} \Rightarrow y = 4\times606\times10^{-3}\ g$$

$$\frac{y}{x} = \frac{4\times606}{5\times295} \simeq 1/64$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۸ درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب چگونه است؟

- **صابون مراغه، خاصیت بازی ندارد و برای موهای معمولی مناسب است.**
- **پاک‌کننده‌های صابونی توانایی پاک‌کردن آلودگی‌هایی که به صورت رسوب روی سطوح گوناگون ته‌نشین شده‌اند را دارند.**
- **با اضافه‌کردن یون فسفات به آب، می‌توان سختی آب را برطرف کرد.**
- **نسبت شمار آنیون به کاتیون و شمار اتم‌های اکسیژن در فرمول شیمیایی، جزء شباهت‌های صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی است.**

۱) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۳) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

فقط عبارت سوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- صابون مراغه، افزودنی شیمیایی ندارد و به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می‌شود.
- برای پاک‌کردن آلاینده‌هایی که به صورت رسوب ته‌نشین شده‌اند، باید از پاک‌کننده‌های خورنده استفاده کرد.
- *درسته*، زیرا یون فسفات با یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} تشکیل رسوب $Mg_3(PO_4)_2$ و $Ca_3(PO_4)_2$ می‌دهد. *این‌جوری دیگه صابون رسوب نمی‌کنه!*
- نسبت شمار آنیون به کاتیون در پاک‌کننده‌های صابونی ($RCOONa$) و غیرصابونی ($RC_6H_4SO_3Na$) یکسان و برابر یک است، اما شمار اتم‌های اکسیژن در این دو پاک‌کننده برابر نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

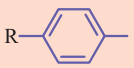
۱۹۹ **تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده برابر ۱۰ است. جرم ۰/۲ مول از صابون مایعی که شمار اتم‌های کربن یکسانی با این پاک‌کننده دارد، چند گرم است؟ (کاتیون و آنیون سازندهٔ صابون مایع، جزء یون‌های چندا‌تمی هستند و زنجیر هیدروکربنی در آن یک پیوند $C=C$ دارد.)**
$(H=1, C=12, N=14, O=16, Na=23, K=39 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۷/۰ ۲) ۵۷/۴
۳) ۶۱/۲ ۴) ۶۱/۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

ساختار تنها پاک‌کنندهٔ غیرصابونی که در کتاب درسی بررسی شده است، به صورت زیر است:



یا $RC_6H_4SO_3Na$

اگر گروه R زنجیر هیدروکربنی سیرشده، یعنی گروه آلکیل (C_nH_{2n+1}) باشد، خواهیم داشت:

$C_nH_{2n+1}C_6H_4SO_3Na$

تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن $= (2n+1+4)-(n+6)=n-1 \Rightarrow n-1=10 \Rightarrow n=11$

$\Rightarrow$ فرمول پاک‌کننده: $C_{11}H_{23}C_6H_4SO_3Na = C_{17}H_{27}SO_3Na$

حالا باید فرمول صابون مایع ۱۷کربنی را بنویسیم. با توجه به اطلاعات سؤال، کاتیون و آنیون سازندهٔ صابون، چندا‌تمی هستند، یعنی با صابون آمونیوم $(RCOONH_4)$ سروکار داریم. گروه R، ۱۶ کربن و ۱ پیوند دوگانه دارد؛ پس فرمول آن به صورت $C_{16}H_{33-2}=C_{16}H_{31}$ است:

$C_{16}H_{31}COONH_4 \rightarrow C_{17}H_{35}O_2N \Rightarrow$ جرم مولی $= (17\times12)+35+(2\times16)+14 = 285\ g.mol^{-1}$

جرم ۰/۲ مول $= 0/2\times285 = 57\ g$

کنکور

با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، برابر ۱۱ باشد، جرم مولی آن، برابر چند است؟ $(S=32, Na=23, O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

(سؤال ۹۹ کنکور تجربی ۱۴۰۳ (خارج از کشور))

۱) ۳۴۶ ۲) ۳۴۸ ۳) ۳۵۰ ۴) ۳۵۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰۰ **نوعی پاک‌کننده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. با توجه به الگوی زیر، کدام مورد درست است؟**



۱) برخلاف واکنش تشکیل نمک خوراکی از عنصرهای سازنده، واکنشی گرماگیر است.

۲) X، گاز اکسیژن است که با ایجاد فشار، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.

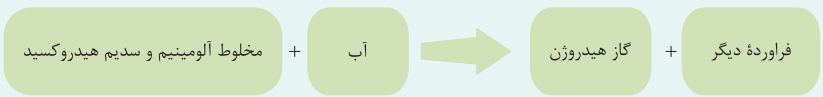
۳) رنگ کاغذ pH در مخلوط پودر اولیه و آب، با رنگ کاغذ pH در محلول سرکهٔ سفید یکسان است.

۴) اگر فراوردهٔ دیگر واکنش، $NaAl(OH)_4$ باشد، مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش برابر ۱۵ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نوعی پاک‌کنندهٔ خورنده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. معادلهٔ نوشتاری واکنش این مخلوط با آب به صورت زیر است:



از این پودر برای بازکردن لوله‌ها و مسیرهایی استفاده می‌شود که بر اثر ایجاد رسوب و تجمع چربی‌ها بسته شده‌اند؛ زیرا:

۱) سدیم هیدروکسید موجود در این مخلوط می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند که باعث از بین رفتن بیشتر چربی می‌شود.

۲) از آن‌جا که این واکنش گرماده است، گرمای آزادشده می‌تواند قدرت پاک‌کنندگی را افزایش دهد و باعث نرم یا ذوب شدن چربی‌ها و در نتیجه آسان‌تر بازشدن لوله‌ها شود.

۳) تولید گاز هیدروژن در این واکنش، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد، زیرا گاز با ایجاد فشار و ضربه به رسوب‌ها، باعث بازشدن آسان‌تر لوله‌های گرفته‌شده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، همانند واکنش تشکیل نمک خوراکی، $2Na(s)+Cl_2(g)\rightarrow 2NaCl(s)$، گرماده است.

گزینهٔ (۲): X، گاز هیدروژن است.

گزینهٔ (۳): مخلوط پودر اولیه و آب، خاصیت بازی دارد، در حالی که سرکهٔ سفید، خاصیت اسیدی دارد. کاغذ pH در محیط‌های بازی به رنگ آبی و در محیط‌های اسیدی به رنگ سرخ درمی‌آید.

گزینهٔ (۴): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2Al+2NaOH+6H_2O\rightarrow 2NaAl(OH)_4+3H_2$$

مجموع ضرایب $=2+2+6+2+3=15$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir