# مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳

رشته ریاضی

پایهٔ دوازدهم | مرحله سوم

| نام درس | مباحث | از صفحه | تا صفحه | مؤلف | ویراستار |
|---|---|---|---|---|---|
| هندسه | هندسهٔ دهم:<br>فصل ۲ ( درس ۲، ۳ و ۴)<br>صفحهٔ ۳۴ تا ۵۱<br>هندسهٔ یازدهم:<br>فصل ۱ (درس ۳) و فصل ۲ (درس ۱)<br>صفحهٔ ۲۴ تا ۴۳<br>هندسهٔ دوازدهم:<br>فصل ۱ (درس ۱)<br>صفحهٔ ۹ تا ۲۱ | ۲ | ۱۰ | علیرضا نصراللهی | بردیا نصیری |

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۴

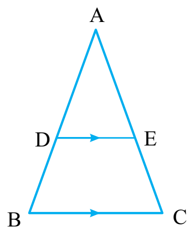
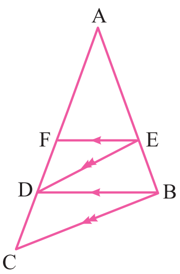
شروع دوازدهم از مهر

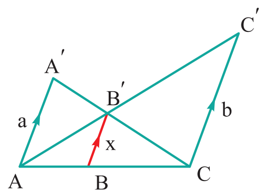
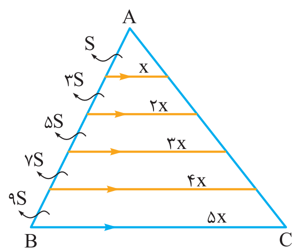
خیلی سبز آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

AzmonVIP

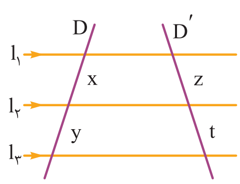
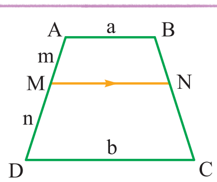
## هندسهٔ دهم

### قضیهٔ تالس و نتایج آن در مثلث

| | |
|---|---|
| اگر در مثلثی، خطی موازی ضلعی رسم شود، به طوری که دو ضلع دیگر را قطع کند، پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌شود. | $DE \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \\ \frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC} \end{cases}$  |
| اگر در مثلثی دو جفت خط موازی مطابق شکل داشته باشیم، بین پاره‌خط‌های ایجادشده روی یک ضلع، رابطهٔ ویژه‌ای شکل می‌گیرد. | $AD^۲ = AF \times AC$  |

| | |
|---|---|
| اگر دو مثلث که در آن‌ها خط موازی مشترکی وجود دارد با هم ادغام شوند، رابطهٔ جالبی شکل می‌گیرد. | $\frac{۱}{x}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$  |
| اگر یک ضلع مثلث به n قسمت مساوی تقسیم شود و از هر یک خطی موازی قاعده رسم شود، بین پاره‌خط‌های تولیدشده تصاعد عددی شکل می‌گیرد. مساحت‌های محصور بین خطوط، تشکیل تصاعد عددی با قدر نسبت ۲S می‌دهند. |  |

### تعمیم قضیهٔ تالس (تالس در ذوزنقه)

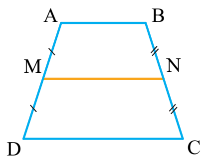
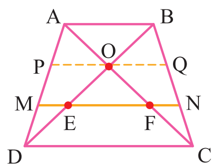
| | |
|---|---|
| اگر دو خط مورب، چند خط موازی را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌های ایجادشده روی خطوط مورب یکسان است. |  ۱) $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$ <br> ۲) $\frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+t}$ |
| اگر در یک ذوزنقه پاره‌خطی موازی دو قاعده رسم شود، نسبتی که روی ساق‌ها پدید می‌آورد، یکسان است. |  ۱) $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ <br> ۲) $MN=\frac{na+mb}{n+m}$ |





AzmonVIP

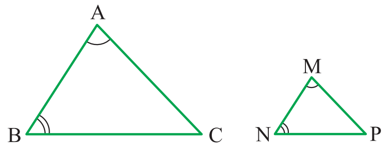
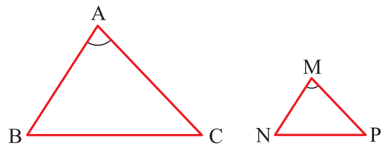
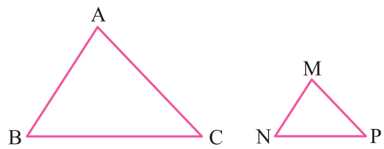
## دو رابطهٔ مهم در ذوزنقه

| | | |
|---|---|---|
| اندازهٔ پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، میانگین دو قاعده است. | $MN = \frac{AB+CD}{۲}$ |  |
| اندازهٔ پاره‌خط محصور بین دو قطر و خط میانگین، نصف تفاضل قاعده‌هاست.<br>اگر از محل برخورد قطرها خطی به موازات قاعده‌ها رسم کنیم، پاره‌خط‌های ایجادشده برابرند. | ۱) $EF = \frac{CD-AB}{۲}$<br>۲) $OP = OQ$<br>۳) $\frac{۲}{PQ} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{CD}$ |  |

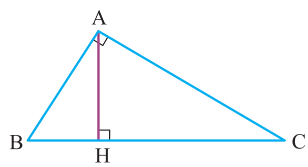


AzmonVIP

## تشابه مثلث‌ها

| | | |
|---|---|---|
| هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند. (حالت ز ز) | $\begin{cases} \hat{A}=\hat{M} \\ \hat{B}=\hat{N} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$ |  |
| هرگاه دو ضلع دو مثلث متناسب و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند. (حالت ض ز ض) | $\begin{cases} \frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MP} \\ \hat{A}=\hat{M} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$ |  |
| هرگاه اندازه‌های سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلثی دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند. (حالت ض ض ض) | $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MP}=\frac{BC}{NP} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$ |  |

## تشابه و مثلث قائم‌الزاویه

| روابط | شکل |
|---|---|
| ۱) $AH \times BC = AB \times AC$<br>۲) $BH \times BC = AB^{۲}$<br>۳) $CH \times BC = AC^{۲}$<br>۴) $BH \times CH = AH^{۲}$ |  |

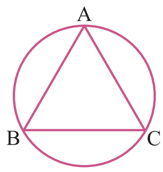
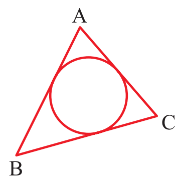
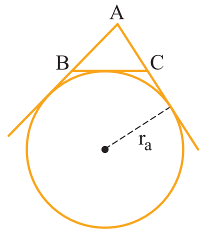
| هرگاه دو مثلث یا به طور کلی دو چندضلعی متشابه باشند، آن‌گاه: | |
|---|---|
| نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها، محیط و ... برابر با نسبت تشابه است.<br>$\frac{h}{h'}=\frac{m_a}{m_{a'}}=\frac{d_a}{d_{a'}}=\frac{۲p}{۲p'}=k$ | نسبت مساحت آن‌ها برابر با مربع نسبت تشابه است.<br>$\frac{S}{S'}=k^{۲}$ |





AzmonVIP

۱ دایرهٔ محیطی و محاطی مثلث: ($P$ نصف محیط است.)

| | دایرهٔ محیطی | دایرهٔ محاطی داخلی | دایرهٔ محاطی خارجی |
|---|---|---|---|
| شکل |  |  |  |
| شعاع | $R=\frac{abc}{۴S}$ | $r=\frac{S}{P}$ | $r_a=\frac{S}{P-a}$ |

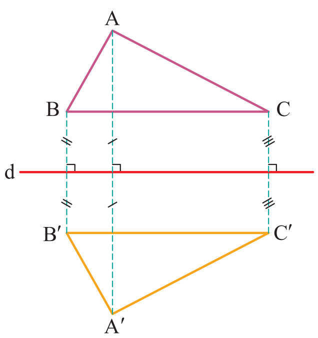
**نکته**

اگر $h$ ارتفاع مثلث و $r$ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و $r_a$، $r_b$ و $r_c$ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی باشند، داریم:

۱) $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$

۲) $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$

## بازتاب

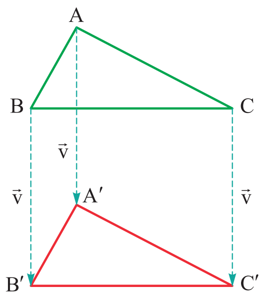
| ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط d | | |
|---|---|---|
| ۱ | ایزومتری است و طول پاره‌خط ثابت می‌ماند. |  $B'C'=BC\,,\,\hat{A}=\hat{A}'$ |
| ۲ | لزوماً شیب خط را حفظ نمی‌کند (مگر بر $d$ عمود یا موازی $d$ باشد). | |
| ۳ | اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند. | |
| ۴ | شکل و تصویر آن همنهشت هستند. | |
| ۵ | جهت شکل را حفظ نمی‌کند. | |
| ۶ | بی‌نهایت نقطهٔ ثابت تبدیل دارد. | |
| ۷ | محور بازتاب دو خط متقابل، نیمساز زوایای بین آن‌هاست. | |
| ۸ | محور بازتاب دو خط موازی، خطی است موازی با آن‌ها و مابین دو خط. | |



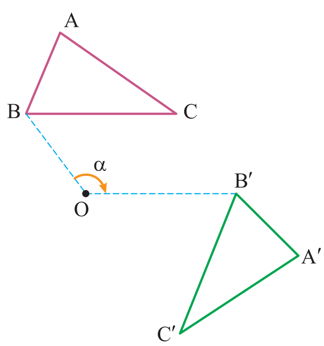


AzmonVIP

## انتقال

| ویژگی‌های انتقال توسط بردار $\vec{V}$ | | |
|---|---|---|
| ۱ | ایزومتری است و طول پاره‌خط ثابت می‌ماند. |  $B'C' = BC\ ,\ \hat{A}' = \hat{A}$ |
| ۲ | شیب خط را حفظ می‌کند. | |
| ۳ | اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند. | |
| ۴ | شکل و تصویر آن همنهشت هستند. | |
| ۵ | جهت شکل را حفظ می‌کند. | |
| ۶ | نقطهٔ ثابت ندارد. | |
| ۷ | بردار انتقالی وجود ندارد که دو خط متقاطع را به یکدیگر تبدیل کند. | |
| ۸ | بی‌شمار بردار انتقال وجود دارد که دو خط موازی را به یکدیگر تبدیل کند. | |

## دوران

| ویژگی‌های دوران نسبت به نقطهٔ ثابت $O$ و زاویهٔ $\alpha$ | | |
|---|---|---|
| ۱ | ایزومتری است و طول پاره‌خط ثابت می‌ماند. |  $B'C' = BC\ ,\ \hat{A} = \hat{A}'$ |
| ۲ | دوران الزاماً شیب خط را حفظ نمی‌کند، مگر $\alpha = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. | |
| ۳ | اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند. | |
| ۴ | شکل و تصویر آن همنهشت هستند. | |
| ۵ | جهت شکل را حفظ نمی‌کند. | |
| ۶ | نقطهٔ ثابت تبدیل دارد. (نقطهٔ $O$) | |

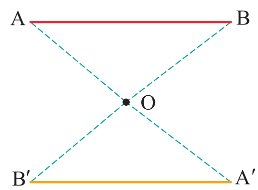
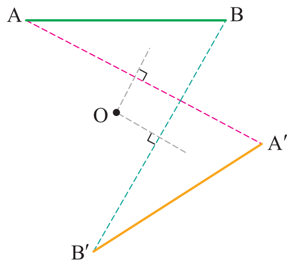




AzmonVIP

### نکته

هر دو پاره‌خط با اندازه‌های برابر می‌توانند با دوران به یکدیگر تبدیل شوند:

| موازی و برابر | متقاطع و برابر |
|---|---|
| <br> | <br> |
| مرکز دوران محل برخورد $AA'$ و $BB'$ و زاویهٔ دوران $(2k+1)\pi$ است. | مرکز دوران محل برخورد عمودمنصف‌های $AA'$ و $BB'$ است و زاویهٔ دوران $\alpha$ یا $180-\alpha$ است. |

## هندسهٔ دوازدهم

## ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

### تعریف ماتریس

به چیدمان $m \times n$ درایه، یک ماتریس از مرتبهٔ $m \times n$ می‌گوییم؛ مثلاً:

| ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون | ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون | ماتریس ۲×۳ برحسب ij |
|---|---|---|
| ستون اول<br>$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$<br>سطر دوم | ستون سوم<br>$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$<br>درایهٔ سطر دوم و ستون دوم $= b_{22}$ | $c_{ij} = \begin{cases} i+j & i \geq j \\ i-j & i < j \end{cases}$<br>$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ |

### ماتریس مربعی

اگر در ماتریسی تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها برابر باشد، آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.

ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ →

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

قطر اصلی: $i = j$ ، $i < j$ ، $i > j$ ، قطر فرعی

### ماتریس‌های مربعی خاص

| ماتریس صفر | ماتریس قطری | ماتریس اسکالر | ماتریس همانی (واحد) | ماتریس بالا مثلثی | ماتریس پایین مثلثی |
|---|---|---|---|---|---|
| $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ | $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ | $I_2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $D = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ | $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ |
| همهٔ درایه‌ها برابر صفر می‌باشد. البته ماتریس صفر می‌تواند مربعی نباشد. | همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر است. | درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر و تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابرند. | درایه‌های قطر اصلی همگی عدد ۱ و بقیهٔ درایه‌ها صفر می‌باشد. | درایه‌های زیر قطر اصلی همگی صفر است. | درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفر است. |

### تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبه را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشد

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \qquad A = B \Rightarrow \begin{cases} a = x \ , \ b = y \\ c = z \ , \ d = t \end{cases}$$





AzmonVIP

## جمع و تفریق و ضرب ماتریس‌ها

| جمع و تفریق دو ماتریس | ضرب دو ماتریس |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} ۷ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷+۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۲\times۳} = \begin{bmatrix} ۱\times۱+۴\times۰ & ۲ & ۱۱ \\ ۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$ |
| برای جمع و تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه، درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم جمع یا تفریق می‌شوند. | ماتریس اول را به صورت سطری و ماتریس دوم را به صورت ستونی دسته‌بندی می‌کنیم و هر یک از سطرهای ماتریس اول را در ستون‌های ماتریس دوم ضرب می‌کنیم. |

- شرط لازم برای این‌که دو ماتریس بتوانند در هم ضرب شوند، برابری تعداد ستون‌های ماتریس اول با سطرهای ماتریس دوم است:

$$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

## خواص اعمال جبری روی ماتریس

| ماتریس صفر عضو بی‌اثر در جمع ماتریس‌ها | جمع ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است. | عضو قرینه در جمع ماتریس‌ها | جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد. |
|---|---|---|---|
| $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ | $A+(B+C)=(A+B)+C$ | $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$ | $A+B=B+A$ |
| قابلیت حذف عدد غیرصفر | توزیع‌پذیری عدد روی جمع ماتریس | ماتریس $I$ عضو بی‌اثر در ضرب ماتریس‌ها | توزیع‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها |
| $rA=rB \xrightarrow{r\neq۰} A=B$ | $r(A\pm B)=rA\pm rB$ | $AI=IA=A$ | $A\times(B\pm C)=(A\times B)\pm(A\times C)$ |
| ضرب ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد. | عدم نتیجه‌گیری در مورد صفربودن ماتریس | ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. | فاکتورگیری |
| $AB\neq BA$ | $AB=۰ \Leftrightarrow A\neq۰, B\neq۰$ | $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ | $AB+AC=A(B+C)$<br>$BC+AC=(B+A)C$ |

## توان در ماتریس

اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد، داریم: $A^{n}=A\times A^{n-۱}=A^{n-۱}\times A$ و $A^{۳}=A^{۲}\times A=A\times A^{۲}$

## چهار ماتریس خاص

| ماتریس متناوب | ماتریس پوچ‌توان | ماتریس خودتوان | ماتریس خودضریب |
|---|---|---|---|
| $A^{۲}=I \Rightarrow \begin{cases} A^{۲n}=I \\ A^{۲n+۱}=A \end{cases}$ | $A^{۲}=\overline{O} \Rightarrow A^{n}=\overline{O}$ | $A^{۲}=A \Rightarrow A^{n}=A$ | $A^{۲}=kA \Rightarrow A^{n}=k^{n-۱}A$ |

**تعریف**: وقتی می‌گوییم دو ماتریس $A$ و $B$ تعویض‌پذیرند یعنی:

- ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است.
- ضرب دو ماتریس قطری تعویض‌پذیر است.





AzmonVIP

## اتحادهای جبری در ماتریس

اگر دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، تمام اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است:

| | |
|---|---|
| اتحاد مربع دوجمله‌ای | $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ |
| اتحاد مزدوج | $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ |
| اتحاد مکعب دوجمله‌ای | $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ |
| اتحاد چاق و لاغر | $(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$ |

## قضیهٔ کیلی ـ همیلتون

اگر ماتریس $A$ یک ماتریس $2 \times 2$ باشد، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$



AzmonVIP