مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳

رشته ریاضی

پایـۀ دوازدهم | مرحله سوم

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	ریاضیات گسسته دوازدهم: فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۱ تا ۱۷ آمار و احتمال یازدهم: فصل ۲ (درس ۱، ۲و ۳) صفحهٔ ۳۵ تا ۶۲ ریاضی دهم: فصل ۷ (درس ۱) صفحهٔ ۱۴۱ تا ۱۵۱	۲	۸	سروش موینی	زهرا جالینوسی - احمدرضا رسولی

ویژۀ کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از مهر

آمار و احتمال یازدهم

فضاهای نمونه‌ای مهم در آزمایش‌های تصادفی

آزمایش	تعداد اعضای S	ظاهر فضای نمونه‌ای
پرتاب ۲ سکه	$۲^۲ = ۴$	{رر، پر، رپ، پپ}
پرتاب ۳ سکه	$۲^۳ = ۸$	{ررر، ررپ، رپپ، پپپ، رپر، پرپ، پرر، پپر}
پرتاب یک تاس	$۶^۱ = ۶$	$S_۱ = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$
پرتاب دو تاس	$۶^۲ = ۳۶$	$S_۱ \times S_۱ = \left\{\begin{matrix} (۱,۱), (۱,۲) \dots, (۱,۶) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ (۶,۱), \quad \dots \quad, (۶,۶) \end{matrix}\right\}$
روز تولد سه نفر در هفته	$۷^۳ = ۳۴۳$	{(ج و ج و ج) و ... و (ش و ش و ش)}
چیدن ۵ شیء متمایز	$۵! = ۱۲۰$	$\{abcde, acbde, \dots, edcba\}$
کلمهٔ ۴حرفی با حروف Format	$P(۶,۴)$ یا $\underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳}$	$\{form, atrf, \dots\}$
عدد ۳رقمی با ارقام فرد	$\underline{۵} \times \underline{۵} \times \underline{۵} = ۱۲۵$	$\{۱۳۵, ۷۷۱, ۹۵۳, \dots\}$
انتخاب ۳تا از ۷ شیء	$\binom{۷}{۳} = ۳۵$	$\{abc, abd, \dots, edg\}$

احتمال

احتمال در فضای هم‌شانس

فرمول $(A \subseteq S)$	ویژگی هم‌شانس‌بودن	احتمال قطعی	احتمال نشدنی	احتمال پیشامدهای مجزا
$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$	$P(x_i) = \frac{۱}{n}$	$P(S) = ۱$	$P(\varnothing) = ۰$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

شمارش حالت‌های جمع دو تاس

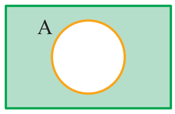
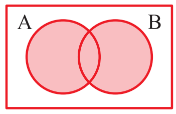
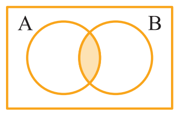
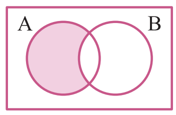
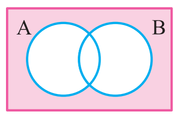
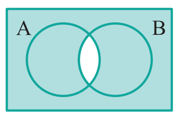
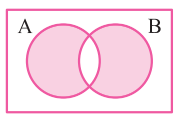
مقدار جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

پیشامد: هر زیرمجموعهٔ S　　برآمد: هر عضو S　　تعداد پیشامد: $۲^{n(S)}$

فضای غیر هم‌شانس

مجموع احتمال عضوهای S برابر یک است. معمولاً همهٔ مقادیر را برحسب یکی از احتمال‌ها پارامتری می‌کنیم.

قوانین احتمال

پیشامد	توصیف	نمودار ون	فرمول احتمال
A'	A رخ ندهد.		$P(A')=۱-P(A)$
$A\cup B$	حداقل یکی رخ دهد.		$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$A\cap B$	هر دو رخ دهند.		-
$A-B=A\cap B'$	فقط A رخ دهد.		$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
$A'\cap B'=(A\cup B)'$	هیچ‌یک رخ ندهد.		$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$
$A'\cup B'=(A\cap B)'$	حداکثر یکی رخ دهد.		$P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)$
$(A-B)\cup(B-A)$	فقط یکی رخ دهد.		$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)$ $=P(A\cup B)-P(A\cap B)$

احتمال شرطی

رابطهٔ: $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$

حالت‌های خاص احتمال شرطی

حالت	مستقل	ناسازگار $(A\cap B=\varnothing)$	$A\subseteq B$	$B\subseteq A$
فرمول شرطی	$P(A\mid B)=P(A)$	$P(A\mid B)=۰$	$P(A\mid B)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$	$P(A\mid B)=۱$

ویژگی‌های دو پیشامد مستقل

۱) اثری بر هم ندارند.

۲) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

۳) $P(A|B)=P(A)$

۴) $P(A|B')=P(A)$

۵) $P(A-B)=P(A)P(B')$

۶) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۱-P(A')P(B')$

قاعدهٔ ضرب احتمال

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

فرمول احتمال کل

A_i ها $(A_۱,A_۲,\dots,A_n)$ افراز S هستند.

$$P(B)=\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

قانون بیز

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\text{سهم یک شاخه}}{\text{مجموع کل شاخه‌ها}}$$

تکرارهای یک آزمایش

۱) اگر احتمال پیروزی P باشد، احتمال اولین پیروزی در بار nام برابر است با: $(۱-P)^{n-۱}p$

۲) اگر احتمال پیروزی P باشد، احتمال kتا پیروزی در n بار تکرار برابر است با: $\binom{n}{k}P^k(۱-P)^{n-k}$

۳) اگر احتمال پیروزی اول $\frac{m}{n}$ و انتخاب‌ها بدون جای‌گذاری باشند، احتمال پیروزی بعدی $\frac{m-۱}{n-۱}$ است.

ریاضی دهم: فصل۷: درس ۱

احتمال

۱ چند تعریف

اصطلاح	تعریف	
پدیدهٔ تصادفی	پدیده یا آزمایشی که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد.	
فضای نمونه‌ای	مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی	با S نشان می‌دهیم.
پیشامد تصادفی	هر زیرمجموعه از S، یک پیشامد است.	تعداد کل پیشامدها $= ۲^{n(S)}$

۲ تعداد اعضای فضای نمونه در آزمایش مهم

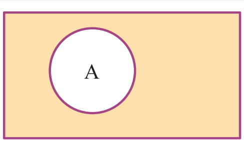
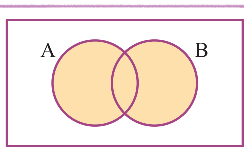
آزمایش	تعداد اعضای S
پرتاب nسکه	۲^n
پرتاب nتاس	۶^n
پرتاب nسکه و mتاس	$۲^n \times ۶^m$
خانوادهٔ nفرزندی	۲^n
جایگشت nشیء متمایز	$n!$
جایگشت rشیء از nشیء	$P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$
انتخاب rشیء از nشیء	$C(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

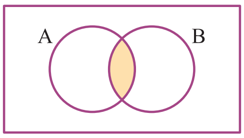
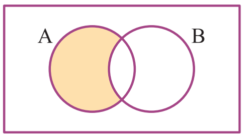
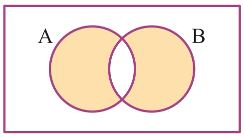
۳ مجموع اعداد ۲ تاس می‌تواند عددی از ۲ (هر ۲ تاس ۱ باشند) تا ۱۲ (هر ۲ تاس ۶ باشند) باشد.

جدول زیر تعداد اعضای پیشامد مجموع اعداد ۲ تاس را نشان می‌دهد:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد اعضای پیشامد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
قاعده برای حفظ‌کردن	قاعدهٔ $n-۱$: یعنی اعداد سطر بالا را باید منهای ۱ کنیم تا اعداد سطر پایین به دست آید.					از هر ۲ قاعدهٔ $n-۱$ و $۱۳-n$ جواب می‌دهد.	قاعدهٔ $۱۳-n$: یعنی ۱۳ را منهای اعداد بالا می‌کنیم تا اعداد پایینی به دست آید.				

۴ اعمال روی پیشامدها

نماد ریاضی	توضیح	نمودار وِن
A'	A رخ ندهد.	
$A \cup B$	A یا B رخ دهد. (حداقل یکی)	

نماد ریاضی	توضیح	نمودار وِن
$A\bigcap B$	A و B رخ دهند. (هر دو)	
$A-B$	A رخ دهد ولی B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد.)	
$(A-B)\bigcup(B-A)$ $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$	دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.	

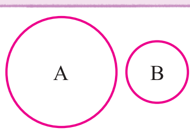
۵ چند قانون در مجموعه‌ها

قانون	رابطهٔ ریاضی
تبدیل تفاضل به اشتراک	$A-B=A\bigcap B'$
بی‌اسم!	$A-B=A-(A\bigcap B)$
دمورگان	$(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$
	$(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$
جذب	$A\bigcup(A\bigcap B)=A$
	$A\bigcap(A\bigcup B)=A$

۶ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد

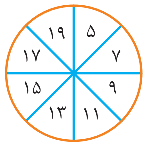
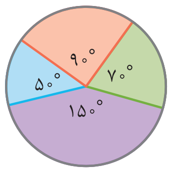
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}}$$

۷ دو پیشامد ناسازگار

تعریف	رابطهٔ ریاضی	نمودار وِن
دو پیشامد که عضو مشترکی ندارند.	$A\bigcap B=\varnothing$ یا $P(A\bigcap B)=\circ$	

۸ چند تیپ سؤال مهم در احتمال با مثال

	تیپ سؤال	مثال	جواب
۱	باید اعضای پیشامد را بنویسیم.	با ارقام ۱ تا ۵ یک عدد دورقمی بدون تکرار ارقام می‌نویسیم. با چه احتمالی مضرب ۳ است؟	$n(S)=\frac{۵}{\text{د}}\times\frac{۴}{\text{ی}}=۲۰$ $A=\{۱۲,۱۵,۲۱,۲۴,۴۲,۴۵,۵۱,۵۴\}\Rightarrow n(A)=۸$ $P(A)=\frac{۸}{۲۰}=۰/۴$
۲	مسائل مربوط به سکه و تاس	در پرتاب یک سکه و یک تاس، با چه احتمالی سکه رو و تاس مضرب ۳ می‌آید؟	$n(S)=\frac{۲}{\text{سکه}}\times\frac{۶}{\text{تاس}}=۱۲$ $n(A)=\overset{\overset{\text{رو}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{سکه}}}\times\overset{\overset{۶,۳}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{تاس}}}=۲$ $P(A)=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$
۳	فرزندان خانواده	در یک خانوادهٔ ۵فرزندی، با چه احتمالی دقیقاً ۳ فرزند دختر داریم؟	$n(S)=۲^{۵}=۳۲$ $n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰$ $P(A)=\frac{۱۰}{۳۲}=\frac{۵}{۱۶}$
۴	مسائل مرتبط با اصل ضرب و جایگشت	با حروف کلمهٔ alish یک کلمهٔ ۵حرفی می‌نویسیم. (بدون تکرار حروف) با چه احتمالی حرف اول آن a است و حرف آخرش h <u>نیست</u>؟	$n(S)=۵!=۱۲۰$ $n(A)=\overset{\overset{a}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{اول}}}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{}\times\overset{\overset{\ell,i,s}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{آخر}}}=۱۸$ $P(A)=\frac{۱۸}{۱۲۰}=\frac{۳}{۲۰}$
۵	مسائل مرتبط با انتخاب	در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز داریم. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. با چه احتمالی هم‌رنگ‌اند؟	$n(s)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times۸}{۲}=۳۶$ $n(A)=\binom{۴}{۲}\underset{\underset{\text{یا}}{\downarrow}}{+}\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$ $P(A)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$

۶	مسائل مربوط به روزهای هفته	در یک گروه ۳ نفری با چه احتمالی هر سه نفر در روزهای متفاوتی از هفته به دنیا آمده‌اند؟	$n(S)=\frac{7}{\text{اول}}\times\frac{7}{\text{دوم}}\times\frac{7}{\text{سوم}}$ $n(S)==\frac{7}{\text{اول}}\times\frac{6}{\text{دوم}}\times\frac{5}{\text{سوم}}$ $P(A)=\frac{\cancel{7}\times6\times5}{\cancel{7}\times7\times7}=\frac{30}{49}$
۷	مسائل صفحهٔ عقربه‌دار با تقسیم‌بندی یکسان	عقربهٔ صفحهٔ مقابل را می‌چرخانیم. با چه احتمالی روی عددی اول می‌ایستد؟ 	$\text{احتمال}=\frac{\text{تعداد خانه‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل تقسیم‌بندی‌ها}}=\frac{\overset{\overset{5,7,11,13,17,19}{\uparrow}}{6}}{8}=\frac{3}{4}$
۸	مسائل صفحهٔ عقربه‌دار با تقسیم‌بندی غیریکسان	عقربهٔ صفحهٔ مقابل را می‌چرخانیم. با چه احتمالی روی قسمت آبی یا سبز می‌ایستد؟ 	$\text{احتمال}=\frac{\text{مجموع زوایای سبز و آبی}}{360^\circ}=\frac{70+50}{360}=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$

۹ احتمال پیشامد متمم

کی ازش استفاده می‌کنیم؟	وقتی شمردن اعضای پیشامد A سخت است ولی شمردن اعضای پیشامد متممش یعنی A' ساده است.
فرمول احتمال متمم	$P(A)=1-P(A')$
کلمات کلیدی سؤال‌ها	اگر در سؤالی از کلمات «حداقل»، «حداکثر» یا «فعل منفی» استفاده شده بود، حتماً یک بار در ذهنتان متمم پیشامد را بررسی کنید. اگر شمردن اعضای متمم راحت‌تر بود، از احتمال متمم سؤال را حل کنید.

۱۰ چند فرمول در احتمال

	توضیح پیشامد	نماد پیشامد	فرمول احتمال
۱	احتمال رخدادن A	A'	$P(A')=1-P(A)$
۲	احتمال رخدادن فقط A	$A-B$	$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
۳	احتمال رخدادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B	$A\cup B$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
۴	احتمال رخدادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B (وقتی A و B ناسازگارند.)	$A\cup B$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{0}$

ریاضیات گسسته: فصل ۱
استدلال ریاضی

مثال نقض

روش استفاده: با یک مثال نشان دهیم حکم کلی نادرست است.

حکم نادرست	مثال نقض
$2^{2^n}+1$ اول است.	$n=5$ (عدد $2^{32}+1$ به ۶۴۱ می‌خورد.)
هر عدد طبیعی $n>2$ جمع اعداد متوالی است.	اعداد 2^k (مثل $4,8,\dots$)
$A\cup B=A\cup C \Rightarrow B=C$	$\mathbb{Z}\cup W=\mathbb{Z}\cup\mathbb{N} \not\Rightarrow W=\mathbb{N}$
$\forall x\in\mathbb{R};x^2\geq x$	$x=\frac{1}{2}$
ارتفاع مثلث درون آن است.	مثلث با یک زاویهٔ باز
جمع دو عدد گنگ، گنگ است.	$\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}}+\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{\text{گنگ}}=1$
ضرب عدد گویا در گنگ، گنگ است.	$0\times\sqrt{3}=0$
عدد 4^n+1 اول است.	$n=3 \Rightarrow 4^3+1=65$
اگر مربع عددی به ۱۲ بخش‌پذیر باشد، خود عدد هم به ۱۲ بخش‌پذیر است.	$12\mid 6^2 \not\Rightarrow 12\mid 6$
اگر $a\mid bc$، آن‌گاه $a\mid b$ یا $a\mid c$.	$10\mid 4\times5 \not\Rightarrow 10\mid 4$ یا $10\mid 5$

اثبات مستقیم

روش کار: با مدل‌سازی ریاضی، از فرض شروع می‌کنیم و با طی مراحل ریاضی به حکم می‌رسیم.

بیان صورت حکم	عدد طبیعی	عدد زوج	عدد فرد	دو عدد متوالی	دو عدد فرد متوالی	دو عدد زوج متوالی
بیان ریاضی	n	$2k$	$2k+1$	$n\,,n+1$	$2k-1$ و $2k+1$	$2k$ و $2k+2$

حکم‌های مهم که با استنتاج (اثبات مستقیم) ثابت می‌شوند:

۱) مربع هر عدد فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۲) جمع سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

۳) جمع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است.

۴) اگر k ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد $4k+1$ مربع کامل است.

بررسی تمام حالات

روش کار: در مسائلی که حالت‌های محدودی داریم، مثلاً زوج یا فرد یا مثلاً باقی‌مانده بر ۳ که می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ باشد، تمامی حالت‌ها را بررسی می‌کنیم.

حکم‌های مهمی که با این روش اثبات می‌شوند:

۱) اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۴، یا صفر یا ۳ است.

۲) مربع هر عدد یا مضرب ۹ است یا به صورت $3q+1$ (هیچ مربع کاملی $3q+2$ نیست).

۳) هر عدد اول $p>5$ به صورت $6k\pm1$ است.

۴) اگر ab فرد باشد، $a+b$ زوج است.

برهان خلف

شیوهٔ اثبات، استفاده از هم‌ارزی $(p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p)$

مراحل استدلال: فرض می‌کنیم حکم درست نیست و نشان می‌دهیم که با این فرض به تناقض می‌رسیم، پس خود حکم باید درست باشد. این روش اثبات غیرمستقیم است.

احکامی که با برهان خلف ثابت می‌شوند:

۱) $\sqrt{2}$ گنگ است.

۲) اگر β و α گنگ و $\alpha+2\beta$ گویا باشد، $\alpha-\beta$ گنگ است.

۳) اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ هم گنگ است.

۴) اگر n^2 مضرب ۳ باشد n هم مضرب ۳ است.

۵) اگر اعداد x_1 ، x_2 و x_3 عددهای صحیحی باشند و y_1 و y_2 همان اعداد، ولی به ترتیب دیگری باشند، آن‌گاه $(x_1-y_1)(x_2-y_2)(x_3-y_3)$ حتماً زوج است.

۶) جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، گنگ است.

۷) اگر عدد مثبت x گنگ باشد، $\sqrt{x}$ هم گنگ است.

اثبات بازگشتی

روش اثبات: از خود حکم شروع می‌کنیم و با طی مراحل ریاضی برگشت‌پذیر، به رابطه‌ای می‌رسیم. اگر این رابطه همواره درست باشد، خود حکم هم درست است. اگر این رابطه درست نباشد، خود حکم هم درست نیست.

احکامی که بازگشتی اثبات می‌شوند:

۱) $a, b > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

۲) $ab > 0 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

۳) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$

۴) $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

۵) رابطهٔ $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ برای دو عدد مثبت y و x همواره درست نیست.

خواص عادکردن

۱) تعریف: $a|b$ یعنی b مضرب a است (b بر a بخش‌پذیر است) و داریم: $\exists q\in\mathbb{Z}\,;\,b=aq$

۲) اسامی: b مضرب a است؛ a شمارنده، عامل یا مقسوم‌علیه b است.

۳) عادکردن‌های بدیهی: $\forall a\in\mathbb{Z}\;;a|0\,،\,a|a\,،\,\pm 1|a$

۴) $a|b \xrightarrow{b\neq 0} |a|\leq|b|$

۵) $a|b,b|a \Rightarrow a=\pm b$

۶) $a^n|b^n \Leftrightarrow a|b$ و $ka|kb \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} a|b$

۷) $a|1 \Rightarrow a=\pm 1$

۸) $a|b \Rightarrow \pm a|\pm b$

۹) $\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\mathbb{Z};a|b \Rightarrow a|b^n,a|kb$

۱۰) $m,n\in\mathbb{Z};a|b,a|c \Rightarrow a|mb+nc$

۱۱) $a|b,c|d \Rightarrow ac|bd$

۱۲) $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\,;\,a-b|a^n-b^n\\ \text{زوج } n\,;\,a+b|a^n-b^n\\ \text{فرد } n\,;\,a-b|a^n+b^n\end{cases}$

۱۳) اگر $x-a|f(x)$ آن‌گاه $x-a|f(a)$، یعنی اجازه داریم ریشهٔ چپ را در راست جای‌گذاری کنیم.

۱۴) اگر $a|bc$ و دو عدد a و b عامل مشترکی نداشته باشند، آن‌گاه $a|c$.

اعداد اول

عدد طبیعی $p>1$ وقتی اول است که به‌جز ۱ و خودش شمارندهٔ مثبت دیگری نداشته باشد.

اعداد اول عبارت‌اند از $2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots$

خواص:

۱) بی‌شمار عدد اول داریم.

۲) عدد $n!\pm r$ وقتی $2\leq r\leq n$ باشد، هرگز اول نیست (به r می‌خورد).

۳) عدد 2^n-1 فقط وقتی می‌تواند اول باشد که n اول باشد.

۴) عدد 2^n+1 فقط وقتی می‌تواند اول باشد که n به صورت 2^k باشد.

۵) اگر $p\geq 5$ عدد اول باشد، $p=6k\pm 1$ و $p^2=24t+1$.

۶) اگر $p|ab$، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$.

۷) اگر $p|a^n$، آن‌گاه $p|a$.

۸) اگر p اول باشد، تمام اعداد $\binom{p}{1}$ و $\binom{p}{2}$ و ... و $\binom{p}{p-1}$ به p بخش‌پذیرند.

ب.م.م

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b، عدد طبیعی d است و می‌نویسیم: $d=(a,b)$

شرایط:
الف) $d|a,d|b$
ب) $x|a,x|b \Rightarrow x\leq d$

روش‌های محاسبهٔ ب.م.م:

نام روش	تجزیه	نردبانی	تعریفی یا متغیر	خواص
عملکرد	ضرب پایه‌های مشترک با توان کم‌تر	به جای عدد بزرگ‌تر باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر عدد کوچک‌تر را قرار دهیم. $(a,b)=(b,r)$	$\begin{matrix} d\mid a \\ d\mid b \end{matrix}$ می‌نویسیم و در طرف راست متغیر را حذف می‌کنیم.	$n\in\mathbb{N};(a^n,b^n)=d^n$ $k\neq ۰;(ka,kb)=\mid k\mid d$ $k\in\mathbb{Z};(a,b)=(a,b\pm ka)$ $a\mid b\Leftrightarrow(a,b)=\mid a\mid$
مثال	ب.م.م دو عدد $۶۰=۲^۲\times۳\times۵$ و $۱۲۶=۲\times۳^۲\times۷$ برابر $۲^۱\times۳^۱$ است.	$(۱۳۶,۶۰)=$ باقی‌ماندهٔ ۱۳۶ بر ۶۰ برابر ۱۶ است. $=(۱۶,۶۰)$ باقی‌ماندهٔ ۶۰ بر ۱۶ برابر ۱۲ است. $=(۱۲,۱۶)=۴$	اگر $d=(۲n-۱,۳n+۱)$ باشد، داریم: $d\mid ۲n-۱$ $d\mid ۳n+۱$ $\Rightarrow d\mid ۳(۲n-۱)-۲(۳n+۱)$ $\Rightarrow d\mid -۵ \Rightarrow d=۱$ یا ۵	الف) $(۲a^۳,۲b^۳)=۲(a,b)^۳$ ب) $(۲a,۶ab)\underset{۲a\mid۶ab}{=}\mid۲a\mid$ پ) $(a,۷a-b)=(a,-b)$

ک.م.م

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b، عدد طبیعی c است و می‌نویسیم: $c=[a,b]$

خواص ک.م.م:

۱) از ضرب کلی پایه‌های مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر به دست می‌آید. $[2^2\times 3\times 5^2\,,2\times 3^3\times 7]=2^2\times 3^3\times 5^2\times 7$

۲) ضریب و توان خارج می‌شوند: $[ka,kb]=|k|[a,b]$ و $[a^n,b^n]=[a,b]^n$

۳) در حالت بخش‌پذیری a بر b: $a|b \Leftrightarrow [a,b]=|b|$

۴) دربارهٔ دو عدد a و b داریم: حاصل ضرب = ک‌م‌م × ب‌م‌م

$(a,b)\times[a,b]=|ab|$

۵) برای دو عدد که نسبت به هم اول‌اند $(a,b)=1 \Leftrightarrow [a,b]=|ab|$

۶) قانون جذب: $[a,(a,b)]=(a,[a,b])=|a|$

روش متباین‌سازی

عدد	a	b	$a\pm b$	ab	$[a,b]$	(a,b)
جایگزین	$a'd$	$b'd$	$d(a'\pm b')$	$a'b'd^2$	$a'b'd$	d

در این روش، کلید حل مسئله $(a',b')=1$ است.

قضیهٔ تقسیم

- a: مقسوم (صحیح)
- b: مقسوم‌علیه (طبیعی)
- $q=[\frac{a}{b}]$: خارج‌قسمت
- r: باقی‌مانده
- $a=bq+r$ و $0\le r<b$: قضیهٔ تقسیم

$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$

ویژگی‌ها:

۱) اگر $0\le a<b$ باشد، $q=0$ و $r=a$ است.

۲) اگر $a>b$ باشد، همواره $a>2r$ است.

۳) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b برابر r باشد، باقی‌ماندهٔ $-a$ بر b می‌شود: $b-r$

۴) هر عدد صحیح a، در تقسیم بر b یکی از باقی‌مانده‌های صفر تا $b-1$ را دارد و این رابطه $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کند.

تقسیم بر ۲	تقسیم بر ۳	تقسیم بر ۴
$b=2$ $\mathbb{Z}=[0]_2\cup[1]_2$	$b=3$ $\mathbb{Z}=[1]_3\cup[2]_3\cup[0]_3$	$b=4$ $\mathbb{Z}=[0]_4\cup[1]_4\cup[2]_4\cup[3]_4$
مربع هر عدد زوج، مضرب ۴ است. مربع هر عدد فرد، به صورت $8q+1$ است.	مربع هر عدد مضرب ۳، مضرب ۹ است. مربع اعدادی که مضرب ۳ نباشند، به صورت $3q+1$ است.	مربع اعداد زوج $4k$ و مربع اعداد فرد $4k'+1$ (و البته $8q+1$) است.
نتیجه: ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.	نتیجه: ضرب سه عدد متوالی همواره مضرب $3!=6$ است.	نتیجه: ضرب ۴ عدد متوالی همیشه مضرب $4!=24$ است.

نکته

از تقسیم بر ۵ نتیجه می‌شود:

باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵	۰	۱	۲	۳	۴
باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۵	۰	۱	۴	۴	۱

پس هیچ مربع کاملی در تقسیم بر ۵، باقی‌ماندهٔ ۲ یا ۳ ندارد و این یعنی رقم یکان عدد مربع کامل هرگز ۲، ۳، ۷ و ۸ نیست.