

آزمون  
شروع از مهر  
شماره دو

رشته تجربی



تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور  
۱۴۰۴

## مرورنامه آزمون آزمایشی خلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی	ریاضی دهم: فصل ۳ و فصل ۴ صفحه ۴۷ تا ۹۳ ریاضی یازدهم: فصل ۱ صفحه ۱ تا ۲۴	۲	۱۷	علی شهرابی	محسن فراهانی - احمدرضا رسولی





### فصل ۳ دهم

#### توان گویا

۱) اگر  $a^n = b$  و  $n$  عددی طبیعی باشد، می‌گوییم  $a$  ریشه  $n$ ام  $b$  است. چند مثال:

$\sqrt[3]{8} = 2$	ریشه سوم ۸
$\pm\sqrt{25} = \pm 5$	ریشه‌های دوم ۲۵
$\pm\sqrt[4]{3}$	ریشه‌های چهارم ۳
$\sqrt[5]{-1} = -1$	ریشه پنجم -۱

۲) ریشه  $n$ ام عدد  $a$  در دو حالت  $a \geq 0$  و  $a < 0$ :

علامت $a$	ریشه $n$ ام (فرد)	ریشه $n$ ام (زوج)
$a \geq 0$	$\sqrt[n]{a}$	$\pm\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	$\sqrt[n]{a}$	ندارد

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$$

۳) حاصل  $\sqrt[n]{a^n}$



# مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضی

۴ قواعد رادیکال‌ها:

مثال	توضیح		
$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$	باید «عبارت زیر رادیکال‌ها» و «فرجه‌هایشان» برابر باشد.	جمع و تفریق رادیکال‌ها	۱
$\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6}$	باید «فرجه‌ها» برابر باشد.	ضرب و تقسیم رادیکال‌ها	۲
$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b} & \text{فرد } n \\  a  \sqrt[n]{b} & \text{زوج } n, b > 0 \end{cases}$	عدد بیرون کشیدن	۳
$\sqrt{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$	رادیکال تو رادیکال	۴
$\sqrt[18]{5^{12}} = \sqrt[3 \times 6]{5^{3 \times 4}} = \sqrt[3]{5^4}$	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{a^m}$ (اگر $k$ زوج بود، $a$ قدرمطلق می‌گیرد.)	ساده کردن توان و فرجه	۵

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

توان  $\frac{m}{n} \rightarrow$   
فرجه  $n \rightarrow$

۵ توان گویا: اگر  $a > 0$  باشد، آن‌گاه:

۶ قواعد توان:

ضرب با پایه‌های مساوی	ضرب با توان‌های مساوی	تقسیم با پایه‌های مساوی	تقسیم با توان‌های مساوی	توان منفی	توان به توان
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(a^n)^m = a^{(n \times m)}$

## عبارات جبری

۱ اتحاد: هر تساوی جبری که به ازای تمام مقادیر متغیرها برقرار باشد. مثلاً  $x(x+2) = x^2 + 2x$  یک اتحاد است.

۲ اتحادهای معروف:

اسم اتحاد	فرم کلی اتحاد	مثال
۱ مربع دو جمله‌ای	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$
۲ مربع سه جمله‌ای	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$	$(x - 2y + 3z)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz$
۳ مزدوج	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(5x - 3)(5x + 3) = 25x^2 - 9$
۴ جمله مشترک	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	$(3x + 2)(3x + 5) = 9x^2 + 21x + 10$
۵ مکعب	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	$(2x - 5)^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$
۶ چاق و لاغر	$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$	$(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) = 27x^3 + 8$

۳ دو فرم پر استفاده از اتحاد مربع و مکعب:

فرم اتحادی	شبیه‌سازی با S و P
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$	$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$	$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$



۴ برای سؤالاتی که « $a+b$  و  $ab$ » را می‌دهند و  $a^2 + b^2$  یا  $a^3 + b^3$  را می‌خواهند (یا سؤالاتی که  $x + \frac{1}{x}$  را می‌دهند و  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  یا  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  را می‌خواهند) از دو اتحاد بالا استفاده کنید.

۵ ساده کردن رادیکال‌های به فرم  $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$

اگر رادیکال به شکل  $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$  دیدید، باید زیر رادیکال یعنی  $A \pm 2\sqrt{B}$  را به شکل  $(\sqrt{C} \pm \sqrt{D})^2$  بنویسید:

$$(\sqrt{C} \pm \sqrt{D})^2 = A \pm 2\sqrt{B} \Rightarrow C + D \pm 2\sqrt{CD} = A \pm 2\sqrt{B} \Rightarrow \begin{cases} A = C + D \\ B = C \times D \end{cases}$$

یعنی باید دنبال دو تا عدد باشیم که جمعشان  $A$  و ضربشان  $B$  باشد. مثلاً برای ساده کردن  $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ، باید دو تا عدد پیدا کنیم که جمعشان ۵ و ضربشان ۶ باشد. این دو تا عدد ۲ و ۳ هستند، پس جای  $5+2\sqrt{6}$  می‌نویسیم  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$  و داریم:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

۶ تجزیه: نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری دیگر

۷ روش‌های معروف تجزیه:

اسم روش	توضیح	مثال
فاکتورگیری	از بزرگ‌ترین عامل مشترک بین جملات فاکتور می‌گیریم.	$12x^5 - 18x^4 = 6x^4(2x - 3)$
استفاده از اتحادها	<ul style="list-style-type: none"> <li>در تجزیه <math>a^n - b^n</math>، اگر <math>n</math> زوج باشد، از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم.</li> <li>در تجزیه <math>a^n \pm b^n</math>، اگر <math>n</math> مضرب ۳ باشد، از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم.</li> <li>در سه جمله‌ای‌ها دنبال اتحاد جمله‌مشترک (یا مربع) باشید.</li> </ul>	$x^6 - 7x^3 - 8 \xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}} (x^3 - 8)(x^3 + 1)$ $\xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$
دسته‌بندی	چند جمله را با هم می‌گیریم و چند جمله دیگر را نیز با هم، بعد با تجزیه هر دسته به عبارتی می‌رسیم که به کمک اتحادها یا فاکتورگیری تجزیه نهایی می‌شود.	$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x+3) - 4(x+3)$ $\xrightarrow{\text{فاکتوراز}} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x+3} = (x+3)(x^2-4) = (x+3)(x-2)(x+2)$ <p style="text-align: center;">مزدوج</p>
شکستن جملات	برای تجزیه عبارت‌های به فرم $x^4 + bx^2 + c$ که در نگاه اول قابل تجزیه نیستند مناسب است. باید $bx^2$ را به شکل $dx^2 + ex^2$ بنویسید که $dx^2$ با دو جمله دیگر تشکیل اتحاد مربع بدهد و بعد از آن از اتحاد مزدوج استفاده کنید.	$x^4 + 5x^2 + 9 \xrightarrow{\text{جای } 5x^2 \text{ می‌نویسیم}} x^4 + 6x^2 + 9 - x^2$ $= (x^2 + 3)^2 - x^2 = (x^2 + 3 + x)(x^2 + 3 - x)$



۸ گویا کردن مخرج کسرها:

مثال	روش گویا کردن مخرج	فرم کسر
$\frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$	صورت و مخرج را در $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم.	$\frac{\bigcirc}{\sqrt{a}}$
$\frac{12}{\sqrt[3]{2^4}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{12\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{12\sqrt[3]{4}}{4} = 3\sqrt[3]{4}$	صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^k}$ ضرب می‌کنیم (k کوچک‌ترین عددی است که به ازای آن $n+k$ مضرب m است).	$\frac{\bigcirc}{\sqrt[m]{a^n}}$
$\frac{6}{\sqrt{7}-2} \times \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4} = 2(\sqrt{7}+2)$	صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{\bigcirc}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ یا $\frac{\bigcirc}{\sqrt{a} \pm b}$
$\frac{3}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \frac{3(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{5}$	صورت و مخرج را در چاق مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ یا $\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a} \pm b}$
$\frac{10}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} = \frac{10(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})}{5} = 2(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$	صورت و مخرج را در لاغر مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$



فصل ۴ دهم

معادله درجه دو و روش‌های مختلف حل آن

تعداد جواب معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$	جواب‌های معادله $at^2 + bt + c = 0$ باید چه جوری باشن؟	شروط
۲	دو ریشه مثبت	$\Delta > 0, S > 0, P > 0$
۱	حالت ۱: یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی	$P < 0$
	حالت ۲: یک ریشه مضاعف مثبت	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta > 0, S < 0, P > 0$
	حالت ۲: یک ریشه مضاعف منفی	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta < 0$

۱) برای حل معادله درجه سوم، اول یک ریشه را از بین اعداد  $\pm 1$  و  $\pm 2$  حدس می‌زنیم (مثلاً  $x = a$  شد). بعد عبارت درجه سوم را بر  $x - a$  تقسیم می‌کنیم و معادله درجه سوم اولیه را به شکل  $(x - a)(\text{درجه } 2) = 0$  درمی‌آوریم که حلش را بلدیم.

تابع درجه دو (سهمی)

۱) با توجه به علامت  $a$ ، سهمی دوتا شکل می‌تواند داشته باشد:

بُرد	مقدار $\max$ یا $\min$	مماس افقی	محور تقارن	عرض رأس	طول رأس	قیافه
$[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty)$	$\min = \frac{-\Delta}{4a}$	$y = \frac{-\Delta}{4a}$	$x = \frac{-b}{2a}$	$f(\frac{-b}{2a})$ یا $\frac{-\Delta}{4a}$	$\frac{-b}{2a}$	
$(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$	$\max = \frac{-\Delta}{4a}$					

۲) تنها نقطه‌ای از سهمی که با حذف آن، برد تغییر می‌کند، رأس سهمی است.

۳) اگر دو نقطه با  $y$ های یکسان روی سهمی داشته باشیم، میانگین  $x$ هایشان، رأس  $x$  را می‌دهد.

از جمله بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم میانگین ریشه‌های سهمی،  $x$  رأس است.

۴) اگر  $ax + by = c$  باشد ( $a, b > 0$ )، زمانی  $xy$  ماکزیمم است که  $ax$  و  $by$  هر دو برابر با  $\frac{c}{2}$  باشند.

مثلاً اگر  $3x + 2y = 12$  باشد و ماکزیمم  $xy$  را بخواهیم، باید  $3x = 6$  و  $2y = 6$  باشد (که  $x = 2$  و  $y = 3$  و در نتیجه  $xy = 6$  را نتیجه می‌دهد).

۵) منظور از صفرهای تابع  $f(x)$ ، «طول نقاط برخورد تابع  $f$  با محور  $x$ ها» یا «جواب‌های معادله  $f(x) = 0$ » است.

۶) نوشتن سریع معادله سهمی:

چیزهایی که داریم.	ضابطه سهمی	نکته تکمیلی
$x_1$ و $x_2$ صفرهای سهمی‌اند.	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	برای محاسبه $a$ ، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
نقطه $(x_S, y_S)$ رأس سهمی است.	$y = a(x - x_S)^2 + y_S$	برای محاسبه $a$ ، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله - سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0, c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

۷ اگر سهمی در نقطه  $(\alpha, 0)$  بر محور X مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید:  $y = a(x - \alpha)^2$

۸ علامت ضرایب a, b و c

علامت a	علامت b	علامت c
با دهانه سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطه برخورد سهمی با محور yها

۹ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند.

شکل	شرایط	
	$\Delta$	a
	-	+
	-	-

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند).

شکل	شرایط			
	$\Delta$	c	b	a
	+	-	-	-
	+	-	+	-
	+	+	-	+
	+	+	+	+

c می‌تواند صفر هم باشد.

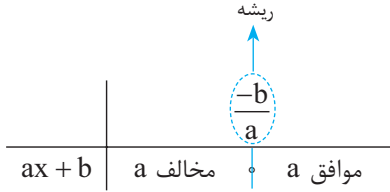
حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند. فقط کافیست که  $P < 0$

۱۰ شرط آن که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند، آن است که سهمی دو ریشه هم‌علامت داشته باشد.



## تعیین علامت

۱) تعیین علامت عبارت درجه یک



۲) تعیین علامت عبارت درجه دو

وضعیت نموداری		جدول تعیین علامت	علامت دلتا
$a < 0$	$a > 0$		
		$\frac{ax^2 + bx + c}{\begin{array}{c c} x_1 & x_2 \\ \hline a \text{ موافق} & a \text{ مخالف} \\ & a \text{ موافق} \end{array}}$	$\Delta > 0$
		$\frac{ax^2 + bx + c}{\begin{array}{c c} x_1 = -\frac{b}{2a} & \\ \hline a \text{ موافق} & a \text{ موافق} \end{array}}$	$\Delta = 0$
		$\frac{ax^2 + bx + c}{a \text{ موافق}}$	$\Delta < 0$

۳) چهار حالت خاص و پرتکرار

وضعیت نموداری	شروط	سؤال	
	۱) $a > 0$	می‌خواهیم عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد.	۱
	۲) $\Delta < 0$	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور Xها باشد.	
	۱) $a < 0$	می‌خواهیم عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی باشد.	۲
	۲) $\Delta < 0$	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور Xها باشد.	
	۱) $a > 0$	می‌خواهیم عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره نامنفی باشد.	۳
	۲) $\Delta \leq 0$	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y = ax^2 + bx + c$ زیر محور Xها نباشد.	
	۱) $a < 0$	می‌خواهیم عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره نامثبت باشد.	۴
	۲) $\Delta \leq 0$	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y = ax^2 + bx + c$ بالای محور Xها نباشد.	



# مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



$P(x) = \frac{\overset{+}{(x-1)} \overset{+}{(x+1)} \overset{+}{(x+2)^2}}{\underset{+}{x} \underset{+}{(x-3)} \underset{+}{(x+3)}} \Rightarrow P(4) > 0$	<p>از خانه سمت راست جدول شروع می‌کنیم. علامت P به ازای <math>x = 4</math> را پیدا می‌کنیم.</p>
	<p>پس خانه سمت راست، + است. از آنجا به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یکی درمیان علامت‌ها را عوض می‌کنیم. فقط وقتی از <math>x = -2</math> رد (توان زوج) می‌شویم، علامت عوض نمی‌شود.</p>

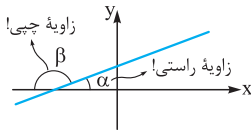
۷ نامعادلات ساده قدرمطلقى

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$ u  \geq a$	$u \geq a$ یا $u \leq -a$	$u \in \mathbb{R}$	$u \in \mathbb{R}$
$ u  \leq a$	$-a \leq u \leq a$	$u = 0$	$\emptyset$
$ u  > a$	$u > a$ یا $u < -a$	$\mathbb{R} - \{u = 0\}$	$u \in \mathbb{R}$
$ u  < a$	$-a < u < a$	$\emptyset$	$\emptyset$

### فصل ۱ یازدهم

### هشتمه تحلیلی

شیب خط گذرنده از دو نقطه  $A$  و  $B$ :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$   $\Rightarrow$  شیب =  $\frac{\text{اختلاف } y \text{ ها}}{\text{اختلاف } x \text{ ها}}$

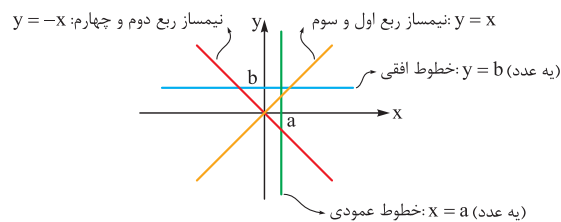


تائزانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد، همان شیب است:  $m = \tan \alpha$

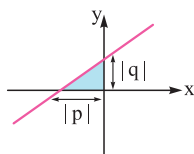
اگر سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک خط (یا راستا یا امتداد) باشند، آن‌گاه:  $m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$	معادله خط گذرنده از نقطه $(x_0, y_0)$ با شیب $m$
$y = mx + h$	معادله خط با شیب $m$ و عرض از مبدأ $h$
$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$	معادله خط با طول از مبدأ $p$ و عرض از مبدأ $q$

نوشتن معادله خط در چند حالت پرکاربرد:



معادله خطوط خاص:



مساحت مثلثی که هر خط با محورهای مختصات می‌سازد:  $S = \frac{|p \cdot q|}{2} = \frac{|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ}|}{2}$

برای به دست آوردن مختصات نقطه تقاطع دو خط، باید یک دستگاه دو معادله - دو مجهول حل کنیم.

وضعیت دو خط نسبت به هم:

مثال	شرط	حالات دو خط نسبت به هم
$y = 3x + 4$ $y = 3x - 2$	$m_1 = m_2, h_1 \neq h_2$	موازی (غیرمنطبق)
$y = \frac{3}{4}x + 1$ $y = \frac{-4}{3}x + 2$	$m_1 = \frac{-1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 = -1$	عمود
$y = x - 1$ $y = 3x + 4$	$m_1 \neq m_2$	مقاطع
$y = 2x + 5$ $2y = 4x + 10$	$m_1 = m_2, h_1 = h_2$	منطبق

فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$ :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\text{اختلاف } x \text{ ها})^2 + (\text{اختلاف } y \text{ ها})^2}$



نقطه وسط پاره خط  $AB$ :  $M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

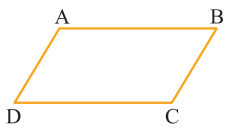


۱۱) کاربردهای نقطه وسط یک پاره خط در سوالات:

مراحل محاسبه یا توضیح	شکل	
(۱) پیدا کردن مختصات M (۲) نوشتن معادله خط گذرنده از A و M		معادله میانه در مثلث
(۱) پیدا کردن مختصات M (۲) محاسبه طول پاره خط AM		طول میانه مثلث
(۱) پیدا کردن مختصات H (۲) محاسبه شیب $m_d = \frac{-1}{m_{AB}}$ (۳) نوشتن معادله خط d		معادله عمودمنصف
B وسط A و A' است: $B = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2B - A$		قرینه نقطه A نسبت به نقطه B
(۱) معادله AH را می نویسیم (با داشتن نقطه A و شیب AH که قرینه و معکوس شیب d است). (۲) محاسبه H (با تقاطع AH و d) (۳) محاسبه A': $A' = 2H - A$		قرینه نقطه A نسبت به خط d

مرورنامه آزمون مرحله دوم

دوازدهم تجربی



۱۲) رابطه بین رئوس متوازی الاضلاع:  $A + C = B + D$  خلاصه تر!  $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$  رئوس رویهرو

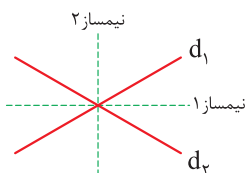
$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۳) فاصله نقطه  $(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$ :

۱۴) کاربردهای فاصله نقطه از خط در سوالات:

توضیح	شکل	مقدار قابل محاسبه
فاصله A تا خط $d = 0$ = ضلع		ضلع مربع
فاصله A تا قطر = نصف قطر		قطر مربع
فاصله رأس A تا ضلع BC = طول ارتفاع AH		ارتفاع مثلث
فاصله مرکز تا خط مماس = شعاع		شعاع دایره

۱۵) معادله نیمسازهای دو خط  $ax + by + c = 0$  و  $a'x + b'y + c' = 0$ :



$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۶ فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$ :

۱۷ کاربردهای فاصله دو خط موازی در سوالات:

توضیح	شکل	
فاصله $d_1$ تا $d_2$ = ضلع مربع		مربع
فاصله $d_1$ تا $d_2$ = طول فاصله $d_2$ تا $d_1$ = عرض		مستطیل
فاصله دو خط مماس موازی = قطر		دایره

$$ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0$$

۱۸ خطی که از دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  به یک فاصله است:

### معادله درجه دو

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

۱ ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$ :

۲ تعداد ریشه‌ها:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
۲ ریشه متمایز	یک ریشه مضاعف $\downarrow$ $x = \frac{-b}{2a}$ مضاعف	ریشه حقیقی ندارد.

۳ اگر عبارت درجه دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

۴ دو حالت خاص پر کاربرد:

مثال	ریشه‌ها	رابطه بین ضرایب
$3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$	$1, \frac{c}{a}$	$a + b + c = 0$
$5x^2 - 7x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{12}{5} \end{cases}$	$-1, \frac{-c}{a}$	$a + c = b$

۵ با شرط  $\Delta > 0$  داریم:

مجموع مکعب ریشه‌ها	مجموع مربع ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	جمع ریشه‌ها
$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$	$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$	$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$	$P = \frac{c}{a}$	$S = \frac{-b}{a}$

۶ اگر حاصل عباراتی مثل  $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}$  را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

۷ معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل ضرب آن‌ها P باشد، به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  است.



P	S	$\Delta$		
+	+	+	دو ریشه مثبت متمایز	۱
+	-	+	دو ریشه منفی متمایز	۲
$P \leq 0$		$\Delta \geq 0$	دو ریشه ناهم علامت	۳
-	0	+	دو ریشه قرینه	۴
۱		+	دو ریشه معکوس	۵

۸ بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله دو ریشه منفی متمایز داشته باشد، باید سه نامعادله  $\Delta > 0$ ،  $S < 0$  و  $P > 0$  را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

۹ اگر  $P < 0$  باشد (یا  $a$  و  $c$  هم علامت نباشند)، حتماً  $\Delta > 0$  است و نیازی به چک کردن شرط  $\Delta > 0$  نیست.

۱۰ تعداد جواب‌های معادله  $ax^2 + bx^2 + c = 0$  (با شرط  $a \neq 0$ ) با تغییر متغیر  $x^2 = t$ :

شروط	تعداد جواب معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$	جواب‌های معادله $at^2 + bt + c = 0$ باید چه جوری باشن؟
$\Delta > 0, S > 0, P > 0$	۴	دو ریشه مثبت
$c = 0, \frac{-b}{a} > 0$	۳	یک ریشه مثبت و یک ریشه صفر
$P < 0$	۲	حالت ۱: یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی
$\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$		حالت ۲: یک ریشه مضاعف مثبت
$b = c = 0$	۱	یک ریشه صفر
$\Delta > 0, S < 0, P > 0$	بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی
$\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$		حالت ۲: یک ریشه مضاعف منفی
$\Delta < 0$		حالت ۳: فاقد ریشه

۱۱ مجموع ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx^2 + c = 0$  یا هر معادله‌ای که همه توان‌های  $x$  در آن زوج باشد، صفر است. مثلاً در معادله‌های  $x^4 - 4x^2 + 2x^2 = 0$  و  $x^4 - 7x^2 + 1 = 0$  مجموع ریشه‌ها صفر است. (توان‌های زوج اعداد قرینه با هم برابر و مجموع آن‌ها صفر است.)

۱۲ تعداد جواب‌های معادله  $ax + b\sqrt{x} + c = 0$  (با شرط  $a \neq 0$ ) با تغییر متغیر  $\sqrt{x} = t$ :

شروط	تعداد جواب معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$	جواب‌های معادله $at^2 + bt + c = 0$ باید چه جوری باشن؟
$\Delta > 0, S > 0, P > 0$	۲	حالت (۱) دو ریشه مثبت
$c = 0, \frac{-b}{a} > 0$		حالت (۲) یک ریشه مثبت و یک ریشه صفر
$P < 0$	۱	حالت (۱) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی
$\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$		حالت (۲) یک ریشه مضاعف مثبت
$b = c = 0$		حالت (۳) یک ریشه صفر
$\Delta > 0, S < 0, P > 0$	بدون جواب	حالت (۱) هر دو ریشه منفی
$\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$		حالت (۲) یک ریشه مضاعف منفی
$\Delta < 0$		حالت (۳) فاقد ریشه

۱۲ برای حل معادله درجه سوم، اول یک ریشه را از بین اعداد  $\pm 1$  و  $\pm 2$  حدس می‌زنیم (مثلاً  $x = a$  شد). بعد عبارت درجه سوم را بر  $x - a$  تقسیم می‌کنیم و معادله درجه سوم اولیه را به شکل  $(x - a)(\text{درجه } 2) = 0$  درمی‌آوریم که حلش را بلدیم.

### - تابع درجه دو (سهمی) -

۱ با توجه به علامت  $a$ ، سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  دوتا شکل می‌تواند داشته باشد:

برد	مقدار min یا max	مماس افقی	محور تقارن	عرض رأس	طول رأس	قیافه
$[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$	$\min = -\frac{\Delta}{4a}$	$y = -\frac{\Delta}{4a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	$f(-\frac{b}{2a})$ یا $-\frac{\Delta}{4a}$	$-\frac{b}{2a}$	<p>محور تقارن مماس افقی</p> <p><math>a &gt; 0</math></p>
$(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$	$\max = -\frac{\Delta}{4a}$					<p>محور تقارن مماس افقی</p> <p><math>a &lt; 0</math></p>

۲ تنها نقطه‌ای از سهمی که با حذف آن برد تغییر می‌کند، رأس سهمی است.

۳ اگر دو نقطه با  $y$ های یکسان در سهمی داشته باشیم، میانگین  $x$ هایشان،  $x$  رأس را می‌دهد. از این جمله می‌توانیم نتیجه بگیریم میانگین ریشه‌های سهمی،  $x$  رأس است.

۴ اگر  $ax + by = c$  باشد ( $ab > 0$ )، زمانی  $xy$  ماکزیمم است که  $ax$  و  $by$  هر دو برابر با  $\frac{c}{2}$  باشند؛ مثلاً اگر  $2x + 2y = 12$  باشد و ماکزیمم  $xy$  را بخواهیم، باید  $2x = 6$  و  $2y = 6$  باشد (که  $x = 2$  و  $y = 3$  و در نتیجه  $xy = 6$  را نتیجه می‌دهد).

۵ منظور از صفرهای تابع  $f(x)$ ، «طول نقاط برخورد تابع  $f$  با محور  $x$ ها» یا «جواب‌های معادله  $f(x) = 0$ » است.

۶ نوشتن سریع معادله سهمی:

چیزهایی که داریم	ضابطه سهمی	نکته تکمیلی
$x_1$ و $x_2$ صفرهای سهمی‌اند.	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	برای محاسبه $a$ ، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
نقطه $(x_S, y_S)$ رأس سهمی است.	$y = a(x - x_S)^2 + y_S$	برای محاسبه $a$ ، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله - سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0, c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

۷ اگر سهمی در نقطه  $(\alpha, 0)$  بر محور  $x$ ها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید:  $y = a(x - \alpha)^2$

۸ علامت ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$ :

علامت $a$	علامت $b$	علامت $c$
دهانه سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور $y$ ها	عرض نقطه برخورد سهمی با محور $y$ ها



۹ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ناحیه ۲ عبور کند.

شرایط		شکل		
$\Delta$	a			
$\Delta \leq 0$	+		سهمی فقط از ناحیه ۱ و ۲ عبور کند.	۱
$\Delta \leq 0$	-		سهمی فقط از ناحیه ۳ و ۴ عبور کند.	۲

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند):

شرایط				شکل		
$\Delta$	c	b	a			
+	-	-	-		فقط از ناحیه ۱ نگذرد.	۱
+	-	+	-		فقط از ناحیه ۲ نگذرد.	۲
+	+	-	+		فقط از ناحیه ۳ نگذرد.	۳
+	+	+	+		فقط از ناحیه ۴ نگذرد.	۴

C می تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند — فقط کافیست که  $P < 0$

۱۵ شرط آن که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند آن است که سهمی دو ریشه هم علامت داشته باشد:  $\Delta > 0$  و  $P \geq 0$

۱۱ وضعیت خط و سهمی نسبت به هم: معادله  $ax^2 + bx + c = mx + h$  را تشکیل می‌دهیم. بعد آن را به صورت  $ax^2 + b'x + c' = 0$  درمی‌آوریم. دلتای این معادله، وضعیت خط و سهمی را مشخص می‌کند.

شکل	وضعیت خط و سهمی	علامت $\Delta$
	سهمی و خط در ۲ نقطه متقاطع‌اند.	$\Delta > 0$
	خط در یک نقطه بر سهمی مماس است.	$\Delta = 0$
	سهمی و خط، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.	$\Delta < 0$

### معادلات گویا و گنگ

۱ بعد از حل معادله گویا، حتماً چک کنید که جواب‌های به دست آمده، ریشه‌های مخرج نباشند.

۲ اگر شخص اول کاری را به تنهایی در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم در C ساعت انجام دهند، رابطه روبه‌رو بین A، B و C برقرار است:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

$\downarrow$              $\downarrow$              $\downarrow$   
 زمان نفر اول    زمان نفر دوم    زمان هر دو نفر با هم

یه عدد = برگشت  $t \pm$  رفت  $t$      $\Rightarrow$      $\frac{x_r}{v_r} \pm \frac{x_b}{v_b} =$  یه عدد

$\downarrow$   
سوال می‌ده

۳ اگر وسیله‌ای مسیری به طول X را با سرعت  $v_1$  برود و با سرعت  $v_2$  برگردد، با توجه به رابطه  $t = \frac{x}{v}$ ، داریم:

۴ بعد از حل معادله گنگ، جواب‌های به دست آمده را در معادله اولیه چک کنید.

۵ اگر جمع چند رادیکال صفر شد، عبارت داخل تک‌تک آن‌ها صفر است:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

۶ بعضی از معادلات گنگ نیاز به حل ندارند. مثلاً  $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} = x$ ، چون دامنه‌ها به ترتیب  $x \geq 3$  و  $x \leq 1$  است که اشتراکشان تهی می‌شود.

۷ در معادلاتی که جنس عبارت‌های دو طرف تساوی، مثل هم نیست، معمولاً سراغ روش هندسی می‌رویم. مثلاً در معادله‌های  $x^2 - 1 = x^2$  یا  $x^2 = x^2$  یا سهمی نمایشی

$$\sin x = \log x$$

لگاریتمی      مثلثاتی

۸ روش هندسی، تعداد و محدوده تقریبی جواب‌ها را به ما می‌دهد، ولی جواب دقیق را معمولاً به ما نمی‌دهد.