

آزمون آزمایشی خلی سبز

پایه دوازدهم

مرحله چهارم

رشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

تاریخ برگزاری: ۱۶ / شهریور / ۱۴۰۳

ویژه کنکوری های ۱۴۰۴

پودجه بندی دروس

هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حسابان و ریاضیات پایه
هندسه (۱) فصل ۳ صفحه ۵۳ تا ۷۶ هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای دترمینان و کاربردهای آن) صفحه ۹ تا ۲۶	ریاضی (۱) فصل ۶ صفحه ۱۱۸ تا ۱۴۰ ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحه ۱ تا ۱۷	حسابان (۱) فصل ۲ (درس ۳ و ۴) صفحه ۵۴ تا ۷۰ حسابان (۲) فصل ۱ صفحه ۱ تا ۲۲
شیمی		فیزیک
شیمی (۱) فصل ۳ (تا ابتدای رفتار آب و دیگر مولکول ها در میدان الکتریکی) صفحه ۸۵ تا ۱۰۳ شیمی (۳) فصل ۱ (تا ابتدای pH مقیاسی برای تعیین میزان اسیدی بودن) صفحه ۱ تا ۲۴		فیزیک (۱) فصل ۴ صفحه ۸۳ تا ۱۲۶ فیزیک (۳) فصل ۱ صفحه ۱ تا ۲۸

مدت پاسخگویی	تأ شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۳۰ دقیقه	۱۸	۱	۱۸	حسابان و ریاضیات پایه
۲۰ دقیقه	۲۸	۱۹	۱۰	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال
۲۵ دقیقه	۴۰	۲۹	۱۲	هندسه
۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
۳۵ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
۱۵۵ دقیقه		۱۰۵ سؤال		مجموع



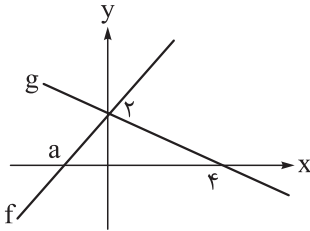
شروع دوازدهم از تابستان

حسابان و ریاضیات پایه

۱- تابع $f = \{(2, 3), (3, 4), (-1, 12), (1, 13)\}$ و تابع $g(x) = \frac{x+7}{x-1}$ مفروض اند. مجموع اعضای برد تابع $f + g$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ۱۸ (۳) ۲۱ (۲) ۳۰ (۱)

۲- نمودار توابع f و g به صورت زیر است. اگر تابع $\frac{f-g^{-1}}{f^{-1}+g}$ خطی و غیر ثابت باشد، مقدار a کدام است؟



- ۱ (۱)
-۲ (۲)
 $-\frac{1}{2}$ (۳)
-۸ (۴)

۳- اگر $f(x) = \frac{2x+a}{x+2}$ و $f^{-1}(2f(-\frac{4}{\sqrt{a}})) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۲ (۴) ۱ (۳) -۲ (۲) -۱ (۱)

۴- اگر $f^{-1}(x+1) = 2x-1$ و $(gof)(x) = x^2 + 3x$ باشد، مقدار $(fog)(0)$ کدام است؟

- $\frac{3}{2}$ (۴) -۳ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۱)

۵- تابع غیر ثابت $f(x) = ax + a$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع f^{-1} همواره بالای نمودار تابع fof^{-1} قرار بگیرد، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای $f(1)$ کدام است؟

- ۲۸ (۴) -۶ (۳) -۱۲ (۲) -۱۸ (۱)

۶- تابع $f(x) = \frac{mx+6}{x+n}$ وارون خود را فقط در دو نقطه به طول‌های -2 و α قطع می‌کند. اگر $f^{-1}(\alpha+1) = 1$ باشد،

حاصل $m+n$ کدام است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۷- نمودار وارون تابع $f(x) = ax + \sqrt{x+3}$ از نقطه $A(15, 6)$ عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۸- بازه $[-7, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = mx^2 + 7x - 10$ در آن اکیداً صعودی است، حاصل $fof(0)$ کدام است؟

- ۲۰ (۴) -۳۰ (۳) -۴۰ (۲) -۵۰ (۱)

۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$ را دو واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. به ازای کدام مقدار k ، نمودار حاصل، خط $y = 2x + k$ را در نقطه‌ای به طول -3 قطع می‌کند؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

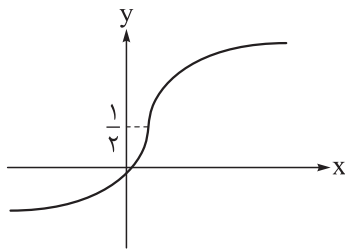
۱۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+2}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید، مقدار $(f \circ g^{-1})(-2)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۱- نقطه $A(-1, a)$ روی نمودار تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{2})$ با نقطه $A'(b, 2b)$ روی نمودار تابع $y = 2f(1-2x)$ متناظر است. مقدار a کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۱۲- تابع درجه سوم $f(x) = (4x^2 + a)(2x + b) + 9$ مفروض است. اگر نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟



(۱) -6
(۲) 6
(۳) -9
(۴) صفر

۱۳- تابع $f(x) = |x - 2\alpha + 1| - |x + \alpha - 5|$ روی \mathbb{R} نزولی است. حداکثر مقدار $f(\alpha)$ کدام است؟

(۱) $1/5$ (۲) 2 (۳) 1 (۴) صفر

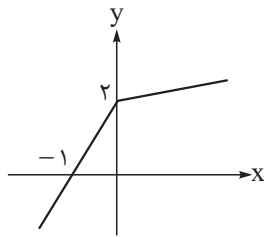
۱۴- توابع f و g با دامنه \mathbb{R} مفروض‌اند. اگر توابع $2f + g$ و $f - 2g$ هر دو اکیداً صعودی باشند، کدام تابع روی \mathbb{R} الزاماً اکیداً نزولی است؟

(۱) $y = x - f(x)$
(۲) $y = f(-x) - x$
(۳) $y = x - g(x)$
(۴) $y = g(-x) - x$

۱۵- تابع $f(x) = 4 - \sqrt{x+2}$ مفروض است. مجموعه جواب‌های نامعادله $(f \circ f)(x) > f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۳۴ (۲) ۳۳ (۳) ۳۲ (۴) بی‌شمار

۱۶- نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(2x-1)(f(x+a)-2)}$ برابر \mathbb{R} باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

۱۷- خارج قسمت و باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 4x^3 + ax^2 + b$ بر چندجمله‌ای $x - 2$ به ترتیب $q(x)$ و ۶ است. اگر مجموع ضرایب چندجمله‌ای $q(x)$ برابر ۱۲ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۹ (۳) -۹ (۴) ۳

۱۸- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $2x + 1$ است. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $(x-1)f(x) + xf(x-1)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۱۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با ارائه مثال نقض رد کرد؟

الف) حاصل ضرب یک عدد گویای غیرصفر و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

ب) اگر مجموع دو عدد گنگ گویای غیرصفر باشد، مجموع دو برابر عدد اول با سه برابر عدد دوم عددی گنگ است.

پ) حاصل ضرب جذر دو عدد حقیقی مثبت برابر است با جذر حاصل ضرب آن دو.

ت) هیچ عدد طبیعی فردی وجود ندارد که مربع و مکعب آن فرد نباشد.

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۰- اگر $x | 3m + 7$ و $x | 5m + 12$ ، چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۱- اگر عدد صحیحی را ۷ واحد زیاد کنیم بر عدد ۱۳ و اگر از آن ۳ واحد کم کنیم بر عدد ۷ بخش پذیر می‌شود. عدد a

بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی و فرد با شرایط گفته شده است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $9 | a^2 - 1$ (۲) $7 | a^2 - 2$ (۳) $11 | a^2 - 4$ (۴) $31 | a^2 - 8$

۲۲- هفت نقطه روی محیط یک دایره هستند. تعداد مثلث‌هایی که با سه نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد، چند

برابر تعداد پنج‌ضلعی‌هایی است که با پنج نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۲۳- با حروف کلمه «گلزاری» چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت به طوری که شامل عبارت «گل» باشند و در آن‌ها دو

حرف «ز» و «ا» کنار یکدیگر نباشند؟

(۱) ۷۲ (۲) ۹۶ (۳) ۱۰۸ (۴) ۱۱۴

۲۴- چند عدد ده‌رقمی با ارقام ۳ و ۴ می‌توان نوشت که مضرب ۶ نباشد؟

(۱) ۸۴۳ (۲) ۸۵۳ (۳) ۸۶۳ (۴) ۸۷۳

۲۵- به ازای چند مقدار دورقمی برای n ، دو عدد $3n + 5$ و $3n^2 - 2n + 6$ نسبت به هم اول هستند؟

(۱) ۸۸ (۲) ۷۲ (۳) ۵۶ (۴) ۴۰

۲۶- در تقسیم a بر ۴۳، باقی‌مانده دو واحد کوچک‌تر از خارج قسمت است. در چند حالت a مضرب ۳ است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

محل انجام محاسبات

۲۷- نقطه $A(\alpha, \beta)$ با مختصات صحیح، روی منحنی $y = \frac{2x-11}{x+3}$ قرار دارد و $\alpha\beta > 0$. اگر باقی مانده تقسیم عدد زوج n

بر $\alpha - \beta$ برابر ۹ باشد، باقی مانده تقسیم $\frac{n}{3}$ بر $\alpha - \beta$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۲۸- در یک تقسیم، مقسوم علیه کوچک ترین عدد دورقمی ممکن و باقی مانده برابر ۳ است. اگر مقسوم علیه را ۴ واحد

کم تر کنیم، باقی مانده برابر ۴ می شود. تعداد مقسوم های چهاررقمی کدام است؟

- ۱۱۴ (۱) ۱۱۵ (۲) ۱۱۶ (۳) ۱۱۷ (۴)

هندسه دوازدهم

۲۹- اگر ماتریس‌های ضرایب و مقادیر ثابت دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ را به ترتیب A و B بنامیم، کوچک‌ترین درایه ماتریس $A + B \cdot [x \ y]$ کدام است؟

- (۱) $-1/6$ (۲) $1/6$ (۳) $0/8$ (۴) $-0/8$

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، ستون اول ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ و $|AB| = 6$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس AB کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۳ (۳) ۲۵ (۴) ۲۲

۳۲- اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ -2 & |A| \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{12} کدام است؟

- (۱) 2^7 (۲) -2^7 (۳) 2^{13} (۴) -2^{13}

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $AB = A^{-1}$ باشد، آن‌گاه به ازای کدام مقدار n ، ماتریس $B + nA$ اسکالر است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) -۳ (۴) چنین مقداری وجود ندارد.

۳۴- اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و $B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایه روی قطر اصلی ماتریس $B^{-1}A^3B$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۳۵- اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $A(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

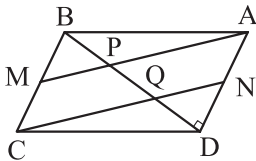
- (۱) صفر (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۲۰

هندسه دهم

۳۶- تعداد اضلاع یک چندضلعی محدب، با تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است. اگر تعداد قطرهای چندضلعی محدب برابر ۱۷۰ باشد، از هر رأس n ضلعی چند قطر می‌گذرد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳۷- مطابق شکل، M و N وسط ضلع‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. اگر $\hat{ADB} = 90^\circ$ ، $MC = 3/5$ و $CD = 25$ ، آن گاه طول ضلع AP کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{185}$ (۳) $10\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{305}$

۳۸- از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳، یک چهارضلعی حاصل شده است. بیشترین فاصله نقاط واقع بر محیط این چهارضلعی، از نقاط واقع بر محیط مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۲

۳۹- در مثلث ABC ، زاویه بین دو میانه AM و BN برابر 12° است. اگر $BN = 2AM$ ، آن گاه فاصله نقطه N از میانه AM ، چند برابر طول این میانه است؟

- (۱) $\sqrt{3}-1$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴۰- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای که حداقل تعداد نقاط مرزی را دارد، برابر $9/5$ است. تعداد نقاط درونی این چندضلعی، چند برابر تعداد نقاط مرزی آن است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

فیزیک دوازدهم

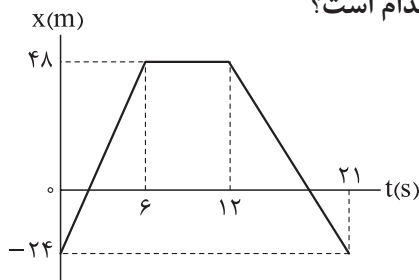
۴۱- بردار مکان متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می کند، در لحظه های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 10s$ به ترتیب $\vec{A} (18 m)$ و $\vec{B} (10 m)$ است. بردار مکان متحرک در لحظه $t_3 = 24s$ بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $-4\vec{i}$ (۲) $-6\vec{i}$ (۳) $-16\vec{i}$ (۴) $-26\vec{i}$

۴۲- دو خودرو با سرعت های ثابت $20 km/h$ و $30 km/h$ در مسیری مستقیم از نقطه A تا نقطه B جابه جا می شوند. فاصله این دو نقطه $900 m$ است. اگر دو خودرو در یک لحظه در نقطه A باشند، اختلاف زمانی رسیدن آن ها به نقطه B چند دقیقه است؟

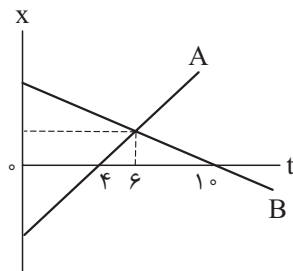
- (۱) $0/9$ (۲) $1/8$ (۳) $2/7$ (۴) $5/4$

۴۳- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه ای که جهت بردار مکان آن تغییر می کند، بر حسب متر بر مربع ثانیه، کدام است؟



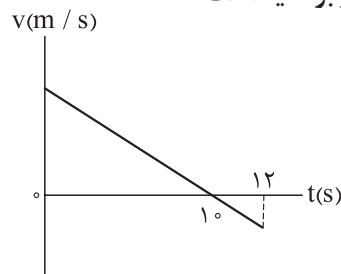
- (۱) $0/25\vec{i}$ (۲) $-0/25\vec{i}$ (۳) $1/25\vec{i}$ (۴) $-1/25\vec{i}$

۴۴- نمودار مکان - زمان متحرک های A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل مقابل است. در مبدأ زمان، اندازه بردار مکان متحرک A چند برابر اندازه بردار مکان متحرک B است؟



- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۴۵- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در 12 ثانیه اول، مسافت طی شده توسط متحرک $156 m$ باشد، اندازه سرعت متوسط آن در این بازه زمانی چند متر بر ثانیه است؟

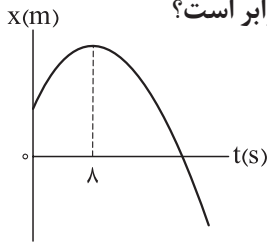


- (۱) $11/5$ (۲) 12 (۳) $12/5$ (۴) 13

۴۶- سرعت متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در مدت 8 s از $\vec{v}_1 = (5\text{ m/s})\vec{i}$ به $\vec{v}_2 = (-10\text{ m/s})\vec{i}$ می‌رسد. جابه‌جایی متحرک در این مدت برحسب متر کدام است؟

- (۱) $20\vec{i}$ (۲) $-20\vec{i}$ (۳) $60\vec{i}$ (۴) $-60\vec{i}$

۴۷- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1\text{ s}$ تا $t_2 = 9\text{ s}$ ، با تندی آن در کدام لحظه، برحسب ثانیه، برابر است؟



- (۱) ۷
(۲) ۹
(۳) ۱۱
(۴) ۱۳

۴۸- تندی متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، هنگام عبور از مکان‌های $x_1 = 20\text{ m}$ و $x_2 = 40\text{ m}$ به ترتیب 17 m/s و 23 m/s است. در لحظه‌ای که تندی متحرک برابر 1 m/s است، بردار مکان آن برحسب متر کدام است؟

- (۱) $2\vec{i}$ (۲) $-2\vec{i}$ (۳) $4\vec{i}$ (۴) $-4\vec{i}$

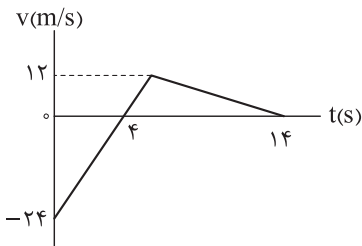
۴۹- جهت حرکت متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در لحظه $t = 5\text{ s}$ تغییر می‌کند. مسافت طی شده توسط متحرک در ۴ ثانیه اول، چند برابر مسافت طی شده توسط آن در ۴ ثانیه دوم است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{12}{5}$

۵۰- معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^2 - 12t + 10$ است. حداقل تندی متوسط متحرک در یک بازه زمانی دلخواه ۴ ثانیه‌ای، چند متر بر ثانیه است؟

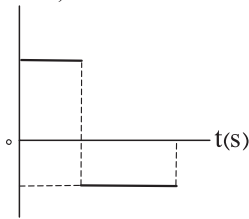
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۵۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی‌ای که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و در حال نزدیک شدن به مکان اولیه خود است، اندازه جابه‌جایی آن چند متر است؟

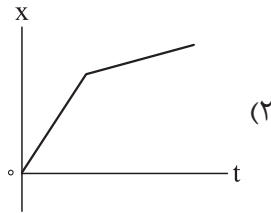


- (۱) ۶۰
(۲) ۴۸
(۳) ۲۴
(۴) ۱۲

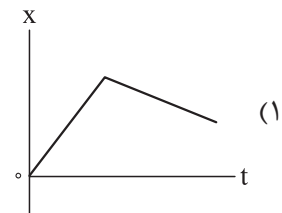
$a(m/s^2)$



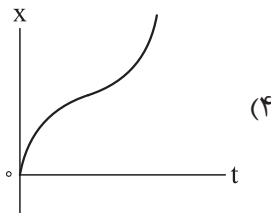
۵۲- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل مقابل است. نمودار مکان - زمان آن به صورت کدام شکل می تواند باشد؟



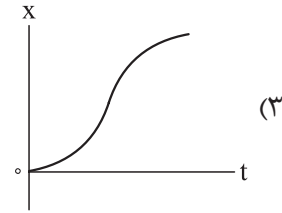
(۲)



(۱)



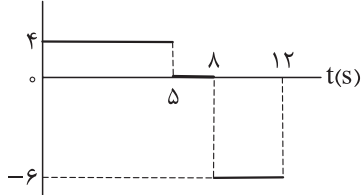
(۴)



(۳)

۵۳- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 10s$ فاصله متحرک از مکان اولیه خود بیشینه باشد، در بازه زمانی ای متحرک در جهت محور X حرکت می کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

$a(m/s^2)$



۵/۲ (۱)

۵/۸ (۲)

۷/۲۵ (۳)

۸/۲۵ (۴)

۵۴- خودرویی در کنار جاده ایستاده است. در لحظه ای یک موتورسوار با سرعت ثابت $90 km/h$ از کنار آن می گذرد. در همین لحظه، خودرو با شتاب ثابت $2 m/s^2$ ، در جهت حرکت موتورسوار، شروع به حرکت می کند. خودرو پس از طی مسافت چند متر به موتورسوار می رسد؟

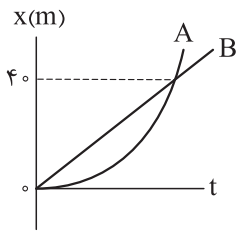
۶۲۵ (۲)

۳۱۲/۵ (۱)

۴۰۵۰ (۴)

۲۰۲۵ (۳)

۵۵- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. شتاب متحرک A ثابت و تندی آن در مبدأ زمان برابر صفر است. در لحظه ای که تندی دو متحرک برابر می شود، فاصله آن ها از یکدیگر چند متر است؟



(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

۵۶- در شرایط خلأ، گلوله ای از ارتفاع h در مبدأ زمان رها می شود. اندازه جابه جایی گلوله در n ثانیه سوم، چند برابر اندازه جابه جایی آن در n ثانیه دوم است؟ $(h > \frac{9}{4}gn^2)$

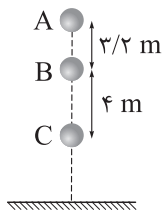
$\frac{9n}{4}$ (۴)

$\frac{5n}{3}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

۵۷- در شکل زیر، در شرایط خلأ، گلوله ای از نقطه A رها می شود. اندازه سرعت متوسط گلوله در بازه زمانی ای که از نقطه B به نقطه C می رسد، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10 \text{ m/s}^2)$



(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۵۸- در شرایط خلأ، گلوله ای از ارتفاع h رها می شود. اگر گلوله در مدت ۳s، از ارتفاع ۱۴۰ متری به ارتفاع ۵۰ متری سطح زمین برسد، ۲s قبل از رسیدن به سطح زمین، از ارتفاع چند متری عبور می کند؟ $(g = 10 \text{ m/s}^2)$

۱۲۰ (۴)

۹۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۵ (۱)

۵۹- ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین، ۳۲m بیشتر از ارتفاع نقطه B نسبت به سطح زمین است. در لحظه ای، یک گلوله از نقطه A و ۱/۶s بعد، گلوله دیگری از نقطه B رها می شود. اگر دو گلوله با هم به سطح زمین برسند، ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین چند متر است؟ $(g = 10 \text{ m/s}^2)$ و مقاومت هوا ناچیز است.

$54/2$ (۴)

$49/2$ (۳)

$44/2$ (۲)

$39/2$ (۱)

۶۰- در شرایط خلأ، از نقطه ای به ارتفاع ۱۲۵m نسبت به سطح زمین، دو گلوله به فاصله زمانی t رها می شوند. اگر بیشینه فاصله دو گلوله در حین حرکت آن ها $36/8 \text{ m}$ باشد، t برابر چند ثانیه است؟ $(g = 10 \text{ m/s}^2)$

$1/8$ (۴)

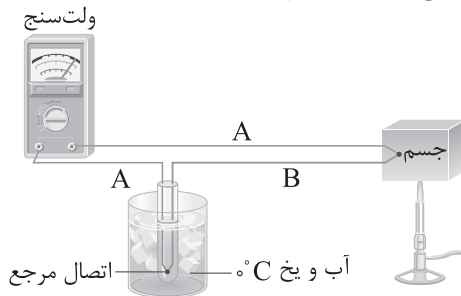
$1/2$ (۳)

$0/8$ (۲)

$0/2$ (۱)

فیزیک دهم

۶۱- شکل زیر، طرح ساده‌ای از کدام وسیله را نشان می‌دهد و کاربرد اصلی این وسیله کدام است؟



- (۱) ترموکوپل، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی و وسایل گرمایشی و سرمایشی
- (۲) ترموستات، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی و وسایل گرمایشی و سرمایشی
- (۳) ترموکوپل، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی
- (۴) ترموستات، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی

۶۲- اگر دمای جسمی بر حسب درجه سلسیوس ۵ برابر شود، دمای آن بر حسب درجه فارنهایت ۲۷ واحد کاهش می‌یابد. دمای اولیه این جسم چند کلوین بوده است؟ ($^{\circ}\text{C} = 1.8^{\circ}\text{F} - 32$)

- (۱) ۲۷۶/۹ (۲) ۲۶۹/۴ (۳) ۲۷۰/۱۵ (۴) ۲۷۶/۱۵

۶۳- در شکل زیر، میله فولادی به طول ۲ m بین دو دیواره ثابت قرار دارد و فاصله هر انتهای میله از دیوار مجاورش ۱ mm است. دمای میله، حداقل چند درجه فارنهایت افزایش یابد تا میله با دیواره‌ها تماس پیدا کند؟ (ضریب انبساط طولی فولاد $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ است.)



- (۱) ۴۰ (۲) ۸۰ (۳) ۷۲ (۴) ۱۴۴

۶۴- اگر دمای یک کره فلزی توپر ۱۴۴K افزایش یابد، مساحت سطح آن ۲۴٪ درصد افزایش می‌یابد. اگر دمای همین کره ۱۰۰K افزایش یابد، چگالی آن تقریباً چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) ۲۵٪، کاهش می‌یابد. (۲) ۴۵٪، کاهش می‌یابد.
(۳) ۲۵٪، افزایش می‌یابد. (۴) ۴۵٪، افزایش می‌یابد.

۶۵- در دمای ۲۰°C، در ظرفی به گنجایش ۱ L و ضریب انبساط طولی $\frac{1}{K} \times 10^{-4}$ ، ۹۰۰ cm^۳ از مایعی به ضریب انبساط حجمی $\frac{1}{K} \times 10^{-3}$ وجود دارد. با افزایش دمای مجموعه، در دمای چند درجه فارنهایت، مایع از ظرف سرریز می‌شود؟

- (۱) ۱۸۷/۵ (۲) ۲۰۷/۵ (۳) ۲۲۳/۵ (۴) ۲۵۵/۵

۶۶- در دمای معین، چگالی مایع A، ۲ برابر چگالی مایع B، گرمای ویژه مایع A، ۳ برابر گرمای ویژه مایع B و ضریب انبساط حجمی مایع A، نصف ضریب انبساط حجمی مایع B است. اگر دو مایع گرمای یکسانی دریافت کنند، حجم آن‌ها به ترتیب به اندازه ΔV_A و ΔV_B افزایش می‌یابد. ΔV_A ، چند برابر ΔV_B است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱۲ (۴) ۳

محل انجام محاسبات

۶۷- گرمکنی به توان 500 W و بازده 63% درصد را درون 300 g آب با دمای 10°C قرار می‌دهیم. دمای آب پس از 200 s به چند درجهٔ سلسیوس می‌رسد؟ $(c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}})$

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۵ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

۶۸- در فشار 1 atm ، مقداری آب 40°C ، با دریافت گرما به جوش آمده و به طور کامل تبخیر می‌شود. چند درصد از گرمای دریافتی آب صرف تبخیر آن شده است؟ $(c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C}}$ و $L_V = 2268\text{ J/g}$ تبخیر سطحی ناچیز است.)

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۹۰ (۴) ۹۹

۶۹- درون ظرفی 800 g آب با دمای 20°C وجود دارد. یک قطعهٔ مسی به جرم 750 g و دمای 80°C را در آب درون این ظرف می‌اندازیم. اگر در این فرایند، تا برقراری تعادل گرمایی $3/36\text{ kJ}$ گرما تلف شود، دمای تعادل مجموعه چند درجهٔ سلسیوس است؟ (گرمای ویژهٔ آب و مس به ترتیب $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و $400 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ است.)

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴) ۲۸

۷۰- مقداری یخ به جرم m و دمای 0°C را درون ظرف حاوی 900 g آب 20°C می‌اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی، 60% درصد از جرم یخ ذوب شده باشد، m برحسب گرم کدام است؟ $(c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ ، $L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و تبادل گرمایی فقط بین آب و یخ صورت می‌گیرد.)

- (۱) ۷۵۰ (۲) ۶۲۵ (۳) ۳۷۵ (۴) ۲۵۰

۷۱- در چالهٔ کوچکی 800 g آب 0°C قرار دارد. اگر در همین دما بر اثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شود و باقی‌ماندهٔ آن یخ ببندد، جرم آب یخ‌زده چند گرم است؟ (گرمای نهان تبخیر آب در دمای 0°C برابر 2352 kJ/kg و گرمای نهان ذوب یخ برابر 336 kJ/kg است.)

- (۱) ۸۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۷۰۰ (۴) ۷۲۰

۷۲- در کدام یک از موارد زیر، روش انتقال گرما به درستی بیان شده است؟

(الف) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن: رسانش گرمایی

(ب) سیستم خنک‌کنندهٔ موتور اتومبیل: همرفت واداشته

(پ) ذوب کردن برف اطراف توسط کلم اسکانک: تابش گرمایی

(ت) سیستم گرم‌کنندهٔ مرکزی در ساختمان‌ها: همرفت طبیعی

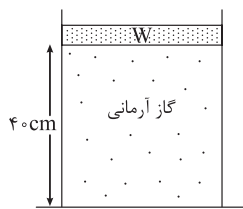
- (۱) الف و ب (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) الف و ت

۷۳- در محفظه‌ای به حجم ۴۲ لیتر، ۲۴۰ g گاز اکسیژن با دمای 7°C قرار دارد. اگر دمای این گاز 70°C افزایش یابد، فشار پیمانه‌ای آن چند برابر می‌شود؟ ($R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ ، فشار هوا 10^5 Pa و جرم مولی گاز اکسیژن 32 g/mol است.)

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۷۴- یک حباب هوا به حجم 2 cm^3 در ته یک دریاچه به عمق 45 m و دمای 2°C قرار دارد. حباب تا سطح آب که دما در آن 27°C است، بالامی‌آید در لحظه‌ای که حباب به سطح آب می‌رسد، حجم آن چندسانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، چگالی آب دریاچه 1 g/cm^3 ، فشار هوای محیط 10^5 Pa و دمای هوای حباب با دمای آب اطراف آن یکسان است.)

- (۱) $0/3$ (۲) $0/6$ (۳) $1/2$ (۴) $2/4$



۷۵- مطابق شکل در زیر پیستون آزاد به مساحت 20 cm^2 و وزن $W = 40 \text{ N}$ ، گاز آرمانی با دمای 17°C قرار دارد و فشار هوا 10^5 پاسکال است. اگر روی پیستون وزنه 80 نیوتونی قرار دهیم، وزنه 4 cm پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. در این حالت، دمای گاز چند درجه سلسیوس است؟

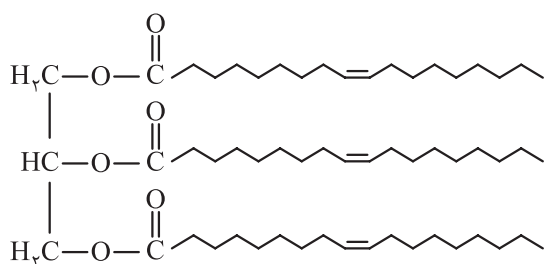
- (۱) ۵۸ (۲) ۷۵ (۳) ۳۳۱ (۴) ۳۴۸

شیمی دوازدهم

۷۶- کدام مطلب درست است؟

- (۱) در دهه‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی و نرخ رشد آن در نواحی برخوردار، نسبت به نواحی کم‌برخوردار بیشتر بوده است.
- (۲) در فرایند انحلال روغن زیتون در هگزان همانند فرایند انحلال نمک خوراکی در آب، ماده حل‌شونده ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ می‌کند.
- (۳) شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول وازلین را می‌توان $\frac{3}{4}$ برابر شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول بنزین در نظر گرفت.
- (۴) نسبت شمار اتم‌ها به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در ساختار اوره، کوچک‌تر از این مقدار در ساختار اتیلن گلیکول است.

۷۷- کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ استر بلندزنجیر داده‌شده، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



الف) تفاوت جرم مولی الکل سازندهٔ استر مورد نظر با اتانول، برابر ۴۸ است.

ب) از واکنش یک مول از آن با مقدار کافی سدیم هیدروکسید،

۳ مول صابون جامد با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{34}COONa$

تولید می‌شود.

پ) این استر سه‌عاملی را می‌توان روغن زیتون در نظر گرفت.

ت) واکنش‌پذیری این استر بلندزنجیر در شرایط یکسان از چربی موجود در کوهان شتر، بیشتر است.

(۱) الف - ب

(۲) ب - پ

(۳) پ - ت

(۴) الف - ت

۷۸- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- ممکن است در ساختار یک صابون، عنصر فلزی وجود نداشته باشد.
- پاک‌کننده‌های غیرصابونی برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند.
- صابون از طریق بخش قطبی جزء آنیونی خود با مولکول‌های آب پیوند اشتراکی برقرار می‌کند.
- شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، $\frac{1}{8}$ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده‌های صابونی است.

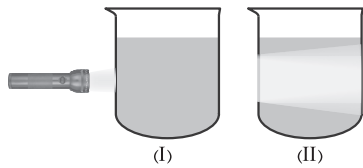
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۷۹- با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به دو مخلوط پایدار هستند، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) آب‌قند، نمونه‌ای از مخلوط (I) و شیر، نمونه‌ای از مخلوط (II) است.

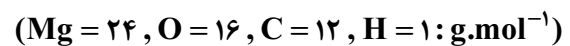
(۲) مخلوط آب و روغن از نوع (I) است که با افزودن صابون به نوع (II) تبدیل می‌شود.

(۳) مخلوط (II) برخلاف مخلوط (I)، ناهمگن است، اما ذره‌های سازنده هیچ‌کدام از این دو مخلوط با گذشت زمان، ته‌نشین نمی‌شوند.

(۴) ذرات سازنده مخلوط (II)، درشت‌تر از ذرات سازنده مخلوط (I) هستند.

۸۰- در ساختار صابونی جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، نسبت شمار اتم‌های (های) نافلزی به اتم‌های (های) فلزی برابر ۴۹

است. از واکنش $0/2$ مول از این صابون با مقدار کافی محلول منیزیم کلرید، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود؟



۵۵ / ۸ (۴)

۲۷ / ۹ (۳)

۱۰۶ / ۸ (۲)

۵۳ / ۴ (۱)

۸۱- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) فرمول شیمیایی نمک حاصل از واکنش یون کلسیم با صابون جامد که زنجیر آلکیل آن ۱۴ اتم کربن دارد؛ به صورت $C_{30}H_{58}O_4Ca$ است.

ب) در شرایط یکسان، ارتفاع کف حاصل از صابون در آب مقطر، نسبت به ارتفاع کف حاصل از صابون در محلول منیزیم کلرید، بیشتر است.

پ) در شرایط یکسان، قدرت صابون در از بین بردن لکه‌های چربی روی پارچه پلی‌استری، بیشتر از پارچه نخی است.

ت) از صابون فسفردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

(۱) الف - پ

(۲) ب - ت

(۳) پ - ت

(۴) الف - ب

۸۲- کدام مطلب درست است؟

(۱) از دید آرنیوس، جامدهای یونی اکسیژن‌دار، اسید به شمار می‌آیند.

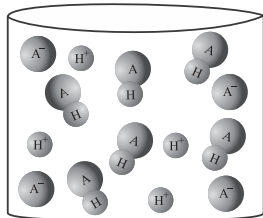
(۲) محلول مولکول‌های قطبی در آب، نوعی الکترولیت محسوب می‌شود.

(۳) با افزایش غلظت اتیلن گلیکول در محلول آن، رسانایی الکتریکی محلول تغییری نمی‌کند.

(۴) در دمای اتاق، ثابت یونش اسید موجود در باران معمولی از ثابت یونش هیدرویدیک اسید، بیشتر و از ثابت یونش اسیدهای مسبب ایجاد باران اسیدی، کم‌تر است.

۸۳- مطابق شکل‌های زیر، جرم برابری از دو نوع اکسید را به صورت جداگانه در مقدار معینی آب حل می‌کنیم. اگر اختلاف مجموع جرم کاتیون‌های تولیدشده در اثر انحلال این دو ماده با مجموع جرم آنیون‌های تولیدشده در اثر انحلال آن‌ها برابر ۱۹۴ گرم باشد، مجموع شمار مول‌های اولیه اکسیدها، کدام است؟ ($O = ۱۶, N = ۱۴, Li = ۷, H = ۱: g.mol^{-1}$)

۸۴- شکل زیر، محلولی از اسید ضعیف HA را در دما و حجم معین نشان می‌دهد. درجه یونش اسید HA در محلول مورد نظر، چند برابر درجه یونش محلول ۰/۲ مولار اسید ضعیف HB، با غلظت یون هیدرونیوم برابر ۴×10^{-3} مول بر لیتر است؟



- (۱) ۲
(۲) ۲۰
(۳) ۰/۲
(۴) ۰/۰۲

۸۵- ترتیب رسانایی الکتریکی محلول‌های زیر، در کدام گزینه به درستی آمده است؟ ($O=۱۶, N=۱۴, C=۱۲, H=۱: g.mol^{-1}$)

(a) محلول ۲۵ درصد جرمی نیتریک اسید با چگالی ۱/۲۶ گرم بر میلی لیتر

(b) محلول ۱/۵ مولار استیک اسید با درصد یونش ۸

(c) محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید

(d) محلول ۰/۸ مولار نیترواسید با درجه یونش ۰/۲

- (۱) $a > d > c > b$ (۲) $d > a > b > c$ (۳) $a > c > d > b$ (۴) $b > a > d > c$

۸۶- کدام مطلب درست است؟

(۱) ثابت تعادل، بیانی از میزان پیشرفت یک واکنش تا لحظه برقراری تعادل است و به غلظت اولیه واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وابسته است.

(۲) در واکنش‌های تعادلی، در لحظه تعادل، سرعت مصرف واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به صفر می‌رسد.

(۳) ثابت ماندن غلظت مواد شرکت‌کننده در تعادل، برخلاف برابری غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، جزء ویژگی‌های واکنش تعادلی است.

(۴) محلول کربوکسیلیک اسیدها در آب، برخلاف محلول هیدروسیانیک اسید، نمونه‌ای از یک سامانه تعادلی است.

۸۷- با توجه به شکل‌های زیر که رسانایی الکتریکی محلول اسیدهای HA و HB را با غلظت‌های یکسان در دمای 25°C

نشان می‌دهد، چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست است؟



محلول HA

محلول HB

• غلظت مولار یون هیدرونیوم در محلول‌ها: $\text{HA} > \text{HB}$

• شمار مولکول‌های دواتمی در محلول‌ها: $\text{HB} > \text{HA}$

• قدرت اسیدی: $\text{HA} > \text{HB}$

• سرعت واکنش محلول‌ها با نوار منیزیم: $\text{HB} > \text{HA}$

۴ (۱)

۳ (۲)

۱ (۴)

۸۸- $1/53$ گرم از یک اسید آلی (RCOOH) با زنجیر هیدروکربنی سیر شده را به مقدار معینی آب اضافه می‌کنیم و حجم محلول را به 100 میلی‌لیتر می‌رسانیم. اگر غلظت یون هیدرونیوم در این محلول، $1/5 \times 10^{-3}$ مولار باشد، به تقریب چند درصد جرم اسید را کربن تشکیل داده است؟ ($K_a(\text{RCOOH}) = 1/5 \times 10^{-5}$, $\text{O} = 16$, $\text{C} = 12$, $\text{H} = 1$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۵۴ / ۵ (۱)

۵۸ / ۸ (۲)

۶۳ / ۲ (۳)

۶۶ / ۷ (۴)

۸۹- در دو ظرف جداگانه، محلول‌های نیترویک اسید و نیترو اسید با دمای یکسان وجود دارند. اگر غلظت آنیون‌های حاصل از

یونش این دو اسید با هم برابر و حجم محلول نیترو اسید، دو برابر حجم محلول نیترویک اسید باشد، کدام مطلب درست است؟

(۱) اگر غلظت اسید در یکی از محلول‌ها افزایش یابد، درصد یونش دو محلول به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شود.

(۲) شمار مولکول‌های اسید موجود در محلول نیترویک اسید از شمار مولکول‌های اسید موجود در محلول نیترو اسید، بیشتر است.

(۳) شمار مول‌های آغازی نیترو اسید، بیش از دو برابر شمار مول‌های آغازی نیترویک اسید است.

(۴) حجم نهایی گاز هیدروژن آزاد شده از واکنش هر دو محلول اسیدی با مقدار کافی فلز منیزیم، یکسان است.

۹۰- با توجه به معادله یونش و ثابت یونش فورمیک اسید و استیک اسید، اگر در محلول‌هایی از این دو اسید در دمای اتاق،

غلظت تعادلی استیک اسید، $2/5$ برابر غلظت تعادلی فورمیک اسید باشد، نسبت جرم یون فورمات به یون استات در این

دو محلول، به تقریب کدام است؟ (حجم هر دو محلول را 0.5 لیتر در نظر بگیرید؛ $\text{O} = 16$, $\text{C} = 12$, $\text{H} = 1$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



۱ (۴)

۱ / ۵ (۳)

۲ (۲)

۲ / ۵ (۱)

شیمی دهم

۹۱- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) در میان منابع آب در کره زمین، کوه‌های یخ سهم بیشتری نسبت به آب‌های زیرزمینی دارند.
 (ب) آب‌های موجود در کره زمین در صورت مسطح بودن آن، همه سطح زمین را تا ارتفاع بیش از ۲ متر می‌پوشانند.
 (پ) مقدار یون‌های تک‌اتمی و محلول در آب دریا، به میزان قابل توجهی بیشتر از یون‌های چنداتمی است.
 (ت) مجموع جرم یون‌های فلزهای قلیایی در آب دریا، کم‌تر از این مقدار برای یون‌های فلزهای قلیایی خاکی است.
- (۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۹۲- کدام گزینه درباره ترکیب آمونیوم سولفات، درست است؟

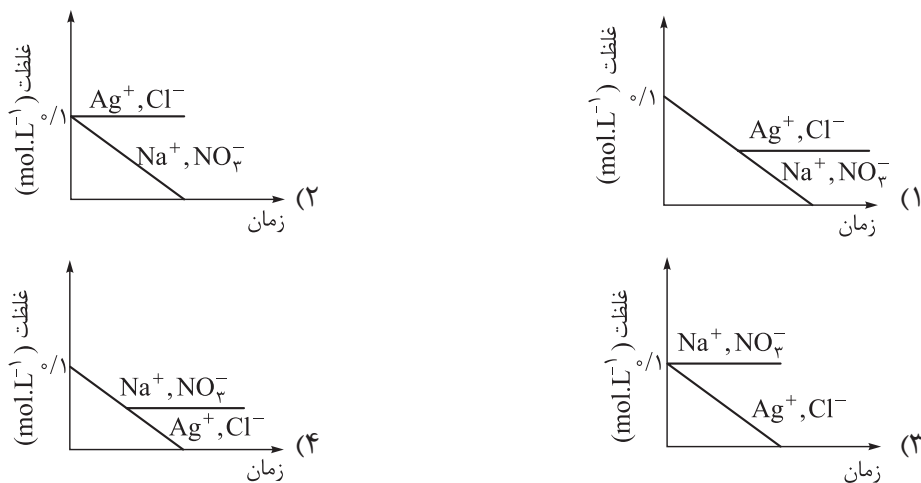
- (۱) نسبت شمار آنیون به کاتیون در آن، با این نسبت در منیزیم کربنات برابر است.
 (۲) مدل فضاپرکن کاتیون سازنده آن با یون نیترات، مشابه است.
 (۳) نسبت شمار اتم‌ها به شمار انواع عنصرها در یک واحد فرمولی آن، برابر ۳/۷۵ است.
 (۴) شمار پیوندهای اشتراکی هر اتم نیتروژن در آن، با شمار پیوندهای اشتراکی اتم نیتروژن در آمونیاک برابر است.

۹۳- با توجه به جدول زیر، شمار اتم‌ها در هر واحد فرمولی از کدام ترکیب، درست نوشته شده است؟

نام	کلسیم یدید	آهن (II) اگزالات	سدیم برمیت	آلومینیم آرسنات
فرمول شیمیایی	$\text{Ca}(\text{IO}_3)_2$	FeC_2O_4	NaBrO_3	AlAsO_4

- (۱) آمونیوم آرسنات - ۱۰ (۲) نقره اگزالات - ۸ (۳) گالیم برمیت - ۹ (۴) روبیدیم یدید - ۵

۹۴- در ظرفی، ۱/۰ مول نقره نیترات را در یک لیتر آب و در یک ظرف دیگر، ۱/۰ مول سدیم کلرید را در یک لیتر آب حل و سپس این دو محلول را به هم اضافه می‌کنیم. کدام گزینه نمودار تقریبی تغییرات غلظت یون‌های محلول در آب را در تمام این فرایند به درستی نشان می‌دهد؟



۹۵- غلظت یون نقره در محلول سیرشده نقره کلرید با دمای 25°C ، به تقریب چند ppm است؟ (انحلال پذیری نقره کلرید

در دمای 25°C برابر 2×10^{-4} گرم در 100 گرم آب است؛ ($\text{Ag} = 108, \text{Cl} = 35.5 : \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) ۰/۹ (۲) ۱/۰۸ (۳) ۱/۵ (۴) ۱/۹

۹۶- در ارتباط با نمک موجود در محلول شست و شوی دهان، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

(الف) عمده ترین ترکیب انحلال یافته در آب دریاها و اقیانوس ها است.

(ب) این نمک، به روش فیزیکی از آب دریا جدا می شود.

(پ) در هر 100 گرم از محلول شست و شوی دهان، 9 گرم از آن وجود دارد.

(ت) بیشترین کاربرد آن، استفاده در تهیه خمیر کاغذ، پارچه، رنگ، پلاستیک و صنعت نفت است.

- (۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) الف - ب - پ (۴) پ - ت

۹۷- به 200 گرم محلول 25 درصد جرمی پتاسیم نیترات، چند برابر جرم نمک موجود در محلول، باید پتاسیم نیترات

اضافه کنیم تا درصد جرمی نمک در محلول، دو برابر شود؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴) ۴

۹۸- برای تهیه محلول های سیرشده از مواد زیر در 100 گرم آب با دمای 25°C ، از کدام ماده جرم کمتری نیاز است؟

(۱) سدیم کلرید (۲) سدیم نیترات

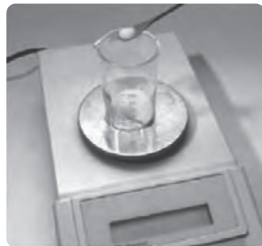
(۳) کلسیم فسفات (۴) باریم کلرید

۹۹- 72 گرم از سولفات فلز X را در یک بشر 250 میلی لیتری ریخته (شکل ۱) و در ادامه آن را با اضافه کردن آب مقطر پر

می کنیم (شکل ۲). اگر 100 میلی لیتر از محلول حاصل را تا 100 مرتبه با افزودن آب رقیق تر کنیم، در هر 100 میلی لیتر از

محلول رقیق شده، $57/6$ میلی گرم از یون فلز X وجود دارد. نسبت جرم مولی فلز X به بار آن در این آزمایش کدام است؟

($\text{S} = 32, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



شکل (۱)



شکل (۲)

(۱) ۱۲

(۲) ۲۴

(۳) ۲۸

(۴) ۳۲

۱۰۰- اگر دستگاه گلوکومتر، قند خون فردی را برابر 90 نشان دهد، در هر میلی لیتر از خون این فرد، چند میکروگرم گلوکز

وجود دارد؟ ($1 \mu\text{g} = 10^{-6} \text{g}$)

(۱) ۹۰۰

(۲) ۹۰

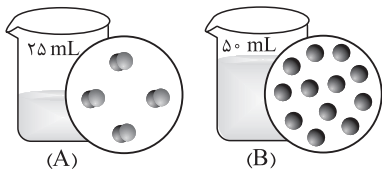
(۳) ۹

(۴) ۰/۹

۱۰۱- کدام گزینه درست است؟

- (۱) انحلال پذیری نمک‌های نیترات در هر دمایی بیشتر از انحلال پذیری سایر نمک‌ها است.
 (۲) نمکی با توانایی تشکیل محلولی با حداکثر غلظت ۲۵٪ در صد جرمی در آب و در دمای اتاق، کم‌محلول محسوب می‌شود.
 (۳) در یک دمای معین، تفاوت انحلال پذیری دو ماده کم‌محلول در صد گرم آب، می‌تواند بیش از یک گرم باشد.
 (۴) اگر عرض از مبدأ نمودار «انحلال پذیری - دما» در نمک A، بیشتر از این کمیت در نمک B باشد، انحلال پذیری نمک A در هر دمایی بیشتر از نمک B خواهد بود.

۱۰۲- با توجه به شکل زیر، اگر هر ذره حل‌شونده نشان داده شده در محلول‌های آبی، هم‌ارز با ۰/۰۵ مول باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (از تغییر حجم حلال بر اثر انحلال حل‌شونده‌ها در آن صرف نظر شود، دمای دو محلول با هم برابر است و چگالی دو محلول را با چگالی آب یکسان در نظر بگیرید.)

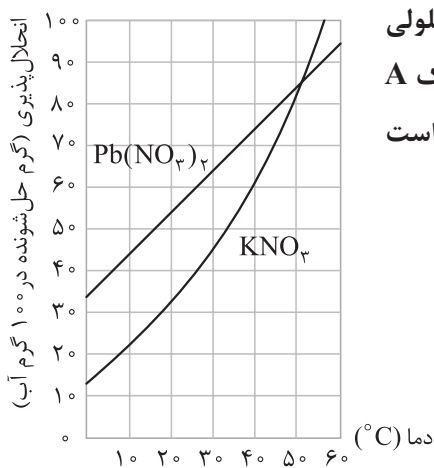


- (۱) اگر با افزودن ۲۵ میلی‌لیتر آب مقطر به محلول A، درصد جرمی حل‌شونده در دو محلول برابر شود، جرم مولی حل‌شونده A، سه برابر جرم مولی حل‌شونده B است.

(۲) نسبت غلظت ppm حل‌شونده در این دو محلول، برابر با نسبت درصد جرمی حل‌شونده در آن‌ها است.

(۳) اگر نسبت جرم مولی حل‌شونده محلول (B) به محلول (A) برابر $\frac{2}{3}$ باشد، غلظت دو محلول بر حسب ppm با هم برابر است.

(۴) اگر هر دو محلول A و B سیر شده باشند، انحلال پذیری حل‌شونده B در این دما بیشتر از حل‌شونده A است.



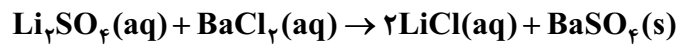
۱۰۳- مقداری نمک A را در ۲۰ گرم آب در دمای ۵۵°C حل می‌کنیم تا محلولی سیر شده از آن تهیه شود. اگر بر اثر کاهش دمای محلول تا ۳۰°C، ۱۱ گرم نمک A در ظرف ته‌نشین شود، نمک A کدام یک از نمک‌های موجود در نمودار مقابل است و جرم محلول اولیه چند گرم است؟

- (۱) KNO₃، ۵۰
 (۲) KNO₃، ۴۰
 (۳) Pb(NO₃)₂، ۵۰
 (۴) Pb(NO₃)₂، ۴۰

۱۰۴- انحلال پذیری نمک فرضی A در دمای 40°C ، برابر 42 گرم در صد گرم آب است. اگر در 30.8 گرم محلول سیرشده نمک A در دمای 56°C ، $1/2$ مول نمک وجود داشته باشد، جرم مولی نمک A چند g.mol^{-1} است؟ (معادله انحلال پذیری نمک، خطی و عرض از مبدأ آن برابر ۱۲ است.)

۶۸ (۱) ۸۴ (۲) ۹۰ (۳) ۱۰۸ (۴)

۱۰۵- برای رسوب دادن یون باریم در نمونه‌ای به حجم 250 میلی لیتر از باریم کلرید با غلظت $0/2$ مولار، این محلول را با لیتیم سولفات واکنش می‌دهیم. برای انجام کامل واکنش، به تقریب چند گرم محلول سیرشده لیتیم سولفات در دمای 18°C نیاز است؟



(معادله انحلال پذیری لیتیم سولفات بر حسب دما به صورت: « $S = -\frac{\theta}{6} + 36$ » است؛ $S = 32, O = 16, Li = 7: \text{g.mol}^{-1}$)

۵ / ۵ (۱) ۲۲ (۲) ۲۷ / ۵ (۳) ۳۳ (۴)

برنامه راهبردی آزمون شروع دوازدهم از تابستان خیلی سبز برای داوطلبانی که مطالعه سرفصل‌های دوازدهم را از تابستان آغاز می‌کنند، بر اساس اصول زیر طراحی شده است:

- ۱- تدریس مرسوم دبیران در پایه دوازدهم
- ۲- پیش‌نیاز یا هم‌نیازی پایه مرتب با سرفصل دوازدهم
- ۳- توجه به نحوه تدریس بر اساس پیشروی کتاب‌ها
- ۴- وزن سرفصل‌های هم‌زمان دروس پایه و دوازدهم

پایه	مرحله	اول تیر ۱۳	دوم مرداد	سوم ۲۶ مرداد	چهارم ۱۶ شهریور	پنجم عصر
پایه		✓	✓	✓	✓	✓
دوازدهم		-	-	✓	✓	-

آزمون تعیین سطح (جامع پایه یا دوازدهم) در تاریخ ۱۳ تیر ۱۴۰۳ برگزار شده است؛ چنانچه نتوانستید در این آزمون شرکت کنید، امکان برگزاری این آزمون به صورت آنلاین فراهم است.

آزمون مرحله چهارم (همین دفتر چهای که در دست دارید) به ادامه پیشروی پایه و پیشروی پایه دوازدهم اختصاص دارد.

آزمون مرحله پنجم (جامع پایه دوازدهم و یا دوازدهم) در تاریخ ۶ مهر ۱۴۰۳ برگزار می‌شود. این آزمون در ادامه برنامه آزمون‌های قبلی نیست و به عنوان ایستگاهی برای دوره دروس پایه یا تعیین سطح می‌باشد. در این آزمون انتخاب هر دو پایه دوازدهم و یا دوازدهم یا فقط یکی از آن‌ها امکان پذیر است، لذا لازم است نهایتاً تا ۱ مهر از طریق نمایندگی (مدرسه) جهت تعیین پایه (های) انتخابی خود اقدام نمایید.

در برنامه شروع دوازدهم از تابستان، سرفصل‌های دوازدهم و پایه‌های مرتب، پس از تابستان در پاییز (آزمون مرحله ششم) ادامه پیدایمی‌کند.

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

پاسخ نامہ آزمون آزمائشی حلی سبز

پایہ دوازدهم

مرحلہ چہارم

رشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۶/شہریور/۱۴۰۳

نام درس	طراحان بہ ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایہ	حسین شفیع زادہ - مہرداد کیوان
ریاضیات گسستہ و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موثینی
ہندسہ	امیرحسین ابومحبوب - محمد رضا حسینی فرد - محمد طاہر شعاعی - کیوان صارمی - حمید گلزاری علیرضا نصرالہی - محسن میراسلامی - حسین ہاشمی طاہری
فیزیک	امین امینی - علیرضا جباری - رضا سزیمیدانی - نوید شاهی
شیمی	مہدی براتی - یاسر راش - یاسر عبدالہی - وحید فارسیان - محدثہ ملک پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران بہ ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایہ	حسین شفیع زادہ مہرداد کیوان	حسین شفیع زادہ مہرداد کیوان	شمیم پهلوان شریف	محمد گودرزی محمد سجاد نقیہ سجاد داوطلب	شمیم پهلوان شریف - ماہان فنی فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسستہ و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	شمیم پهلوان شریف - مہدی خوش نویس ابوالفضل ناصری
ہندسہ	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	ملیحہ حاجی بابا - مہدی خوش نویس ماہان فنی فر - ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سزیمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان علیرضا جباری	امین امینی علیرضا جباری	مہدی بابائی - نرجس تیمناک مہدی خوش نویس - مدیا عیدی احسان محمدی - امیر محمودی انزلی
شیمی	یاسر عبدالہی	یاسر عبدالہی	یاسر عبدالہی محدثہ ملک پور	محمد مرادی سروش عبادی وحید فارسیان	سید علی حسین زادہ مہسا خاکی ہومن زندگی - احسان رحیمی

سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاچانپور





حسابان و ریاضیات پایه

تست و پاسخ ۱

مجموعه مؤلفه‌های دوم تابع

تابع $f = \{(2, 3), (3, 4), (-1, 12), (1, 13)\}$ و تابع $g(x) = \frac{x+7}{x-1}$ مفروض‌اند. مجموع اعضای برد تابع $f + g$ کدام است؟
۱۲ (۴) ۱۸ (۳) ۲۱ (۲) ۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره همیشه اولین کاری که تو جبر توابع باید کنی، پیدا کردن دامنه مشترک. دامنه رو پیدا کن و بعد محاسبات بین دو تابع (که می‌شه محاسبات روی مقدار تابع یا عرض نقاط) رو انجام بده.

درس نامه •• جبر توابع

منظور از جبر توابع، اعمال جبری بین توابع است، مثل جمع و منهای ضرب و تقسیم، توان و ریشه. مثلاً برای دو تابع f و g ، می‌توانیم عملیات جبری $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ و $f \times g, f - g, f + g$ و ... را داشته باشیم. حال داریم:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

این یعنی عملیات ریاضی بین توابع، در واقع بین مقادیر توابع (همان $f(x)$ و $g(x)$) یا عرض نقاط روی نمودار آن‌ها انجام می‌شود، منتهی در یک x یکسان؛ پس عملیات جبری بین توابع در بخش مشترک بین دامنه‌های این توابع قابل انجام است و می‌توانیم بنویسیم:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g, \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

کاملاً هم منطقی است، یعنی عملیات جبری بین $f(x)$ و $g(x)$ هنگامی برقرار می‌شود که $f(x)$ و $g(x)$ هر دو قابل تعریف باشند و x عضو دامنه هر دو تابع باشد.

در حالت خاص تقسیم $\left(\frac{f}{g}\right)$ ، باید ریشه‌های مخرج را از دامنه مشترک برداریم.

$$D_{f^n} = D_f, \quad D_{\sqrt[n]{f}} = \begin{cases} D_f & ; \text{ فرد } n \\ \{x \in D_f \mid f(x) \geq 0\} & ; \text{ زوج } n \end{cases}; n \in \mathbb{N}$$

مثال: دو تابع $f = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 3), (3, 0)\}$ و $g = \{(-1, 0), (1, 2), (2, 3)\}$ مفروض‌اند. توابع زیر را به دست آورید:

الف) $f \times (g^2 - 1)$

ب) $\frac{2g+1}{f-2}$

$$D_f = \{-1, 0, 1, 3\}, \quad D_g = \{-1, 1, 2\}$$

ابتدا دامنه دو تابع را می‌نویسیم:

$$D_f \cap D_g = \{-1, 1\}$$

پس:

$$\text{الف) } D_{g^2-1} = D_{g^2} = D_g \Rightarrow D_{f \times (g^2-1)} = D_f \cap D_g = \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow f \times (g^2 - 1) = \{(-1, f(-1)(g^2(-1) - 1)), (1, f(1)(g^2(1) - 1))\} = \{(-1, 2(0^2 - 1)), (1, 3(2^2 - 1))\}$$

$$\Rightarrow f \times (g^2 - 1) = \{(-1, -2), (1, 9)\}$$

$$\text{ب) } \frac{2g+1}{f-2} = \left\{(-1, \frac{2g(-1)+1}{f(-1)-2}), (1, \frac{2g(1)+1}{f(1)-2})\right\} = \left\{(-1, \frac{2(0)+1}{0-2}), (1, \frac{2(2)+1}{3-2})\right\} = \{(-1, -\frac{1}{2}), (1, 5)\}$$

عملیات جبری بین مؤلفه‌های دوم برقرار است.

مخرج صفر و غیرقابل تعریف

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز



پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا دامنه دو تابع را می‌نویسیم:

$$D_f = \{-1, 1, 2, 3\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-1, 2, 3\}$$

گام دوم: دامنه تابع $f + g$ را به دست می‌آوریم:

$$f + g = \{(-1, f(-1) + g(-1)), (2, f(2) + g(2)), (3, f(3) + g(3))\}$$

گام سوم: تابع $f + g$ را می‌سازیم:

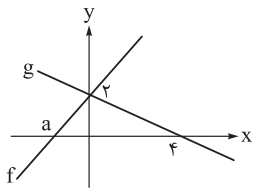
$$g(-1) = \frac{-1+7}{-1-1} = \frac{6}{-2} = -3, \quad g(2) = \frac{2+7}{2-1} = 9, \quad g(3) = \frac{3+7}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\Rightarrow f + g = \{(-1, 9), (2, 12), (3, 9)\}$$

گام چهارم: برد تابع $f + g$ مجموعه $\{9, 12\}$ است که مجموع اعضای آن برابر ۲۱ است.

تست و پاسخ ۲

نمودار توابع f و g به صورت زیر است. اگر تابع $\frac{f-g^{-1}}{f^{-1}+g}$ خطی و غیر ثابت باشد، مقدار a کدام است؟



۱) -۱

۲) -۲

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) -۸

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره ۲ سال است که در کنکورهای ریاضی و تجربی مستقیماً از توابع خطی و وارون آن‌ها سؤال طرح می‌شود و مشابه همین سؤال،

یک تابع کسری داده می‌شود. موضوع مهمی شده است، آن را نادیده نگیرید.

خودت حل کنی بهتره ظاهرش ترسناکه، اما چیزی نداره. کافیه معادله خط‌ها و وارون اون‌ها رو بنویسی و مخرج اون تابع کسری رو به

یه تابع ثابت تبدیل کنی.

درس نامه •• تابع خطی و وارون آن

• تابع خطی

• تابع چندجمله‌ای: هر تابع را که نمایش جبری آن، یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \quad a_n \neq 0$$

هر تابع که بتوان ضابطه آن را به شکل $f(x) = ax + b$ یا $y = ax + b$ نوشت، یک تابع خطی می‌نامند. a شیب خط و b عرض از مبدأ خط است.

طول از مبدأ نیز برابر $-\frac{b}{a}$ است. معمولاً دامنه و برد تابع خطی \mathbb{R} است، اما اگر دامنه بازه $[x_1, x_2]$ باشد، برد، محدوده بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ است.

$[x_1, x_2]$		$[x_0, +\infty)$		$(-\infty, x_0]$		\mathbb{R}	دامنه
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$		
$[f(x_1), f(x_2)]$	$[f(x_2), f(x_1)]$	$[f(x_0), +\infty)$	$(-\infty, f(x_0))$	$(-\infty, f(x_0)]$	$[f(x_0), +\infty)$	\mathbb{R}	برد

نیازی به حفظ کردن هم نیست، کافی است سر و ته بازه دامنه رادر ضابطه تابع جای گذاری کنید، سپس برد را به صورت بازه [بزرگ تر, کوچک تر] بنویسید.

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



• معادله خط

روش‌های نوشتن معادله خط: در هر یک از حالت‌های زیر، می‌توان معادله خط را نوشت:

معلوم بودن شیب و یک نقطه از خط	معلوم بودن دو نقطه از خط	معلوم بودن طول از مبدأ و عرض از مبدأ
<p>$y - y_1 = m(x - x_1)$ یا $y = mx + h$</p>	<p>$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$</p>	<p>$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$</p>

نکته وارون تابع $f(x) = ax + b$ که $a \neq 0$ ، تابع $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است.

تابع ثابت

در تابع خطی $y = ax + b$ ، اگر $a = 0$ (یعنی شیب صفر باشد)، تابع ثابت $y = b$ را داریم. در تابع ثابت، برد تک‌عضوی است، تمام مؤلفه‌های دوم فرم زوج مرتبی آن مقداری برابر دارند و نمودار آن در دستگاه مختصات، خطی افقی موازی محور x هاست.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا ضابطه هر دو تابع را می‌نویسیم:

$$(0, 2), (4, 0) \in g \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2(-\frac{x}{4} + 1) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$(a, 0), (0, 2) \in f \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2(-\frac{1}{a}x + 1) \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{-\frac{2}{a}} = -\frac{a}{2}x + a$$

گام دوم: ضابطه وارون دو تابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$g^{-1}(x) = \frac{x-2}{-\frac{1}{2}} = -2x + 4$$

گام سوم: تابع $\frac{f-g^{-1}}{f^{-1}+g}$ زمانی خطی است که مخرج آن یک عدد حقیقی باشد، یعنی تابع $f^{-1} + g$ ثابت باشد.

$$\Rightarrow f^{-1}(x) + g(x) = -\frac{a}{2}x + a - \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{a+1}{2}x + a + 2$$

این یعنی زمانی ثابت است که $\frac{a+1}{2}$ صفر باشد، یعنی $a = -1$ باشد.

تست و پاسخ ۳

اگر $f(x) = \frac{2x+a}{x+2}$ و $f^{-1}(2f(-\frac{4}{3})) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره از ویژگی‌های وارون استفاده کن و معادله $f^{-1}(2f(-\frac{4}{3})) = f(-1)$ رو حل کن.

درس نامه ••• وارون و ویژگی‌های آن

اگر در تابع وارون‌پذیر $y = f(x)$ ، جای x و y را عوض کنیم، به تابع $y = f^{-1}(x)$ می‌رسیم. همین تعریف ساده، ویژگی‌هایی را نتیجه می‌دهد که بسیار مفیدند:

(۱) اگر نقطه (α, β) روی نمودار تابع f باشد، نقطه (β, α) روی نمودار تابع f^{-1} است.

(۲) دامنه تابع f ، برد تابع f^{-1} و برد تابع f ، دامنه تابع f^{-1} است.

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



۳) وارون جهت یکنوایی را عوض نمی‌کند، یعنی اگر f صعودی (نزولی) باشد، f^{-1} هم صعودی (نزولی) است.

۴) وارون وارون، خود تابع می‌شود: $(f^{-1})^{-1} = f$

پاسخ تشریحی گام اول: از ویژگی (۱) وارون که در درس‌نامه عنوان شده است، استفاده می‌کنیم و داریم:

$$f^{-1}(2f(-\frac{4}{7})) = -1 \Rightarrow 2f(-\frac{4}{7}) = f(-1)$$

گام دوم: $x = -1$ و $x = -\frac{4}{7}$ را در ضابطه تابع f جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(-\frac{4}{7}) = \frac{2(-\frac{4}{7}) + a}{-\frac{4}{7} + 2} = \frac{-\frac{8}{7} + a}{\frac{-4 + 14}{7}} = \frac{-8 + 7a}{10}$$

$$f(-1) = \frac{-2 + a}{-1 + 2} = -2 + a$$

گام سوم: معادله گام اول را تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم:

$$2(\frac{-8 + 7a}{10}) = -2 + a \Rightarrow \frac{-8 + 7a}{5} = -2 + a \Rightarrow -8 + 7a = -10 + 5a \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

تست و پاسخ ۴

اگر $f^{-1}(x+1) = 2x-1$ و $f^{-1}(x) = x^2 + 3x$ باشد، مقدار $(f \circ g)(0)$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

-۳ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس‌نامه ••• پیدا کردن ضابطه در توابع مرکب

در سؤالات رایج ترکیب توابع، دو ضابطه از سه ضابطه $f(x)$ ، $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$ معلوم است و ضابطه سوم را از ما می‌خواهند. جدول زیر روش‌های به دست آوردن ضابطه سوم را به صورت خلاصه شرح می‌دهد:

ضابطه‌ها	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
روش	معلوم	معلوم	به جای هر x ای که در ضابطه $f(x)$ می‌بینیم، ضابطه $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
	معلوم	معلوم	معلوم
	معلوم	معلوم	به جای هر x ضابطه $f(x)$ ، عبارت $g(x)$ را قرار می‌دهیم. عبارت حاصل باید با ضابطه $(f \circ g)(x)$ برابر باشد. در این شرایط، معادله‌ای باید حل کنیم که متغیر مجهول آن $g(x)$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: به ضابطه تابع $y = f(x)$ نیاز داریم و برای آن اول باید ضابطه تابع $y = f^{-1}(x)$ را به دست آوریم؛ پس در معادله

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$f^{-1}(x+1) = 2x - 1 \text{ به جای } x, x-1 \text{ قرار می‌دهیم:}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{2}$$

گام دوم: طبق نکات درس‌نامه مربوط به تست قبلی، ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم:

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



گام سوم: حالا در معادله $(g \circ f)(x) = x^2 + 3x$ ضابطه $f(x)$ را داریم و باید ضابطه $g(x)$ را پیدا کنیم.

$$g\left(\frac{x+3}{2}\right) = x^2 + 3x$$

باید طبق ردیف دوم جدول درس نامه عمل کنیم:

$$\frac{x+3}{2} = t \Rightarrow x = 2t - 3$$

$$\Rightarrow g(t) = (2t-3)^2 + 3(2t-3) = 4t^2 - 12t + 9 + 6t - 9 = 4t^2 - 6t \Rightarrow g(x) = 4x^2 - 6x$$

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = \frac{3}{2}$$

گام چهارم: هر دو ضابطه را حالا داریم و می‌توانیم $(f \circ g)(0)$ را حساب کنیم:

شیب مخالف صفر است. ($a \neq 0$)

تست و پاسخ ۵

تابع غیر ثابت $f(x) = ax + a$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع $f.f^{-1}$ همواره بالای نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ قرار بگیرد، مجموع مقادیر صحیح

ممکن برای $f(1)$ کدام است؟

$(f.f^{-1})(x) > (f \circ f^{-1})(x)$

$y = x$

۱) ۱۸ (۱) ۲) ۱۲ (۲) ۳) ۶ (۳) ۴) ۲۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره چاره‌ای جز ساختن ضابطه $f.f^{-1}$ نداری، $f \circ f^{-1}$ هم که همون $y = x$ هستش.

درس نامه •• ترکیب یک تابع با وارون آن و وارون ترکیب توابع

قضیه مقابل در این موضوع برقرار است:

ترکیب هر تابع با تابع وارون آن، همواره تابع همانی را می‌دهد. فقط باید توجه کرد که کدام تابع اول وارد می‌شود، دامنه تابع همانی، با دامنه آن تابع برابر است. داریم:

$$1) (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad (x \in D_f)$$

$$2) (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad (x \in D_{f^{-1}})$$

اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر و $f(g(x)) = x$ و g وارون یکدیگرند.

پاسخ تشریحی گام اول: a مخالف صفر است؛ پس f وارون‌پذیر است و در این جا ضابطه وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ax + a \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-a}{a} = \frac{1}{a}x - 1$$

$$(f.f^{-1})(x) = f(x).f^{-1}(x) = a(x+1)\left(\frac{x-a}{a}\right) = x^2 + (1-a)x - a$$

گام دوم: ضابطه تابع $f.f^{-1}$ را می‌سازیم:

ضابطه تابع $f \circ f^{-1}$ هم طبق درس نامه، همان تابع همانی $y = x$ است با دامنه \mathbb{R} .

گام سوم: نمودار تابع $f.f^{-1}$ همواره بالاتر از نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ است؛ پس باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x^2 + (1-a)x - a > x \Rightarrow x^2 - ax - a > 0$$

گام چهارم: برای این که این نامعادله همواره برقرار باشد، لازم است Δ عبارت درجه دوم $x^2 - ax - a$ منفی باشد.

$$\Delta = (-a)^2 - 4(-a) = a^2 + 4a = a(a+4) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -4 < a < 0$$

$$-4 < a < 0 \Rightarrow -8 < f(1) = 2a < 0 \xrightarrow{f(1) \in \mathbb{Z}} f(1) = -7, -6, \dots, -1$$

گام پنجم: مقدار $f(1)$ برابر $2a$ است و داریم:

$$\text{مجموع این مقادیر برابر } -\frac{7 \times 8}{2} = -28 = -(1+2+\dots+7) \text{ است.}$$

هموگرافیک است و برای وارونش فرمول داریم.

تست و پاسخ ۶

تابع $f(x) = \frac{mx+6}{x+n}$ وارون خود را فقط در دو نقطه به طول های -2 و α قطع می‌کند. اگر $f^{-1}(\alpha+1) = 1$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



خودت حل کنی بهتره برای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ لازم نیست ضابطه $f^{-1}(x)$ رو به دست بیاری؛ بلکه فقط باید معادله $f(x) = x$ رو حل کنی. البته با این شرط که f اکیداً صعودی باشه.

درس نامه ••• برخورد نمودارهای f و f^{-1}

سؤالات مربوط به برخورد توابع f و f^{-1} همواره جزء سؤالات جذاب و چالشی کنکورهای سراسری است. می توان نکات زیر را در این باره ذکر کرد:

۱) اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، قطعاً نقاط برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد؛ پس به جای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، بهتر است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم. تعداد جوابهای معادله (نقاط برخورد) می تواند هر عدد حسابی باشد.

۲) اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، تعداد نقاط برخورد (در صورت وجود) عدد فرد $2n + 1$ است که ۱ نقطه روی خط $y = x$ قرار دارد و $2n$ نقطه دیگر دوهدهو نسبت به خط $y = x$ متقارن اند. در این حالت چاره ای جز حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ نداریم.

نکته در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ که $a + d \neq 0$ است. طول نقاط برخورد نمودار تابع با نمودار وارونش در صورت وجود، جوابهای

معادله $cx^2 + (a - d)x - b = 0$ هستند و می توان ثابت کرد که شاخه های نمودار چه صعودی و چه نزولی باشند $(ad - bc)$ مثبت یا منفی باشند، در هر دو صورت نقاط برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد.

پاسخ تشریحی گام اول: طبق نکته درس نامه، بهتر است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow \frac{mx + 6}{x + n} = x \Rightarrow mx + 6 = x^2 + nx \Rightarrow x^2 - (m - n)x - 6 = 0$$

گام دوم: جوابهای معادله بالا -2 و α هستند که حاصل ضرب آنها برابر -6 شده است. $P = \frac{c}{a} = -6 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = 3$

گام سوم: مجموع α و -2 برابر $3 - 2 = 1$ است و این مجموع در معادله گام اول برابر است با: $S = -\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow m - n = 1$ (۱)

گام چهارم: در صورت سؤال، شرط $f^{-1}(\alpha + 1) = 1$ را نیز داریم؛ پس می توانیم بنویسیم:

$$\xrightarrow{\alpha=3} f^{-1}(4) = 1 \xrightarrow{\text{ویژگی های وارون}} f(1) = 4$$

در ضابطه تابع اعمال می کنیم: $f(1) = \frac{m + 6}{1 + n} = 4 \Rightarrow m + 6 = 4 + 4n \Rightarrow m - 4n = -2$ (۲)

گام پنجم: دستگاه معادلات را حل می کنیم:

$$\begin{cases} m - n = 1 \\ m - 4n = -2 \end{cases} \Rightarrow (m - 4n) - (m - n) = -2 - 1 \Rightarrow -3n = -3 \Rightarrow n = 1 \xrightarrow{m-n=1} m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2$$

در نهایت داریم: $m + n = 3$

تست و پاسخ ۷

نمودار وارون تابع $f(x) = ax + \sqrt{x + 3}$ از نقطه $A(15, 6)$ عبور می کند. مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نکته اگر نقطه (α, β) روی نمودار تابع f باشد نقطه (α, β) روی نمودار تابع f^{-1} (تابع وارون) است.

خودت حل کنی بهتره نیازی به ساختن تابع وارون نیست. از نکته بالا استفاده کن سؤال حل میشه.

پاسخ تشریحی طبق صورت سؤال، وارون تابع f (یعنی f^{-1}) از نقطه $A(15, 6)$ می گذرد پس با توجه به نکته ذکر شده خود تابع f از نقطه

$f(6) = 15$ می گذرد؛ پس داریم:

$$f(x) = ax + \sqrt{x + 3} \xrightarrow{x=6} f(6) = a(6) + \sqrt{6 + 3} = 6a + \sqrt{9} = 6a + 3$$

$$6a + 3 = 15 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$



تست و پاسخ ۸

بازه $(-7, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = mx^2 + 7x - 1$ در آن اکیداً صعودی است، حاصل $f \circ f(0)$ کدام است؟

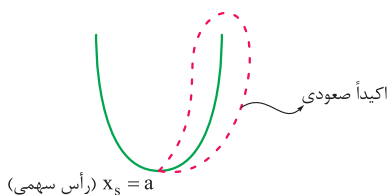
- (۱) ۵۰-
- (۲) ۴۰-
- (۳) ۳۰-
- (۴) ۲۰-

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا با توجه به بازه‌ای که در آن تابع اکیداً صعودی است، مقدار طول رأس مهمی مشخص می‌شود؛ پس می‌توان مقدار مجهول m را به دست آورد. پس از مشخص شدن ضابطه، خواسته سؤال یعنی $f \circ f(0)$ را به دست آوریم:

پاسخ تشریحی گام اول (به دست آوردن مجهول m):

به شکل زیر دقت کنید:



اگر بخواهیم یک سهمی در بازه‌ای مانند $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد باید شکل آن به صورت بالا باشد. مشخص است که a در آن طول رأس سهمی است که با توجه به بازه ذکر شده در صورت سؤال (یعنی $[-7, +\infty)$) همان $a = -7$ است. از طرفی طول رأس سهمی در یک عبارت

درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ برابر است با $x_s = \frac{-b}{2a}$ ؛ پس داریم:

$$-\frac{7}{2m} = -7 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

بنابراین $m = \frac{1}{2}$ است.

گام دوم (مشخص شدن ضابطه سهمی):

با توجه به این که $m = \frac{1}{2}$ است پس ضابطه سهمی باید $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x - 1$ باشد.

$$\circ \xrightarrow{f(x)} f(\circ) \xrightarrow{f(x)} f \circ f(\circ)$$

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال $f \circ f(0)$):

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x - 1 \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{1}{2}(0) + 0 - 1 = -1$$

ابتدا به ازای $x = 0$ مقدار $f(0)$ را محاسبه می‌کنیم:

خروجی این تابع، ورودی برای تابع f بیرونی می‌باشد، پس حالا مقدار تابع f را به ازای $x = -1$ به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x - 1 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = \frac{1}{2}(-1)^2 + 7(-1) - 1 = (\frac{1}{2} \times 1) - 7 - 1 = 0.5 - 7 - 1 = -7.5 = -\frac{15}{2}$$

تست و پاسخ ۹

$$f(x+2) = f(-x+2)$$

$$f(x) \rightarrow f(x+2)$$

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$ را دو واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور y قرینه می‌کنیم به ازای کدام مقدار k ، نمودار حاصل، خط $y = 2x + k$ را در نقطه‌ای به طول -3 قطع می‌کند؟

- (۱) ۸
- (۲) ۹
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره طبق درس‌نامه سؤال قبل، تبدیل‌های گفته‌شده رو به ترتیب اعمال کن تا ضابطه نهایی $f(-x+2)$ به دست بیاد. بعد $f(-x+2)$ رو مساوی $2x+k$ قرار بده و بین به ازای کدام مقدار k این تساوی در $x = -3$ برقراره.

پاسخ تشریحی گام اول: تبدیل‌های گفته‌شده در صورت سؤال را به ترتیب روی نمودار f اعمال می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} + 3 \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{x \rightarrow x+2} f(x+2) = \sqrt{2(x+2)-1} + 3 = \sqrt{2x+3} + 3$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور y}]{f(x+2) \rightarrow f(-x+2)} f(-x+2) = \sqrt{2(-x)+3} + 3 = \sqrt{-2x+3} + 3$$

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



گام دوم: $y = f(-x + 2)$ را مساوی $y = 2x + k$ قرار بده، ببین به ازای کدام مقدار k این تساوی در $x = -3$ برقرار است. از آنجا که می‌دانیم نقطه برخورد (قطع) دو تابع از برابر قراردادن ضابطه آن‌ها به دست می‌آید دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{aligned} y = f(-x + 2) = \sqrt{-2x + 3} + 3 \\ y = 2x + k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{-2x + 3} + 3 = 2x + k \quad (*)$$

و از آنجا که طبق صورت سؤال نقطه تقاطع، نقطه‌ای به طول -3 است پس به ازای $x = -3$ تساوی (*) برقرار است:

$$(*) \text{ در تساوی } \Rightarrow \text{ جای‌گذاری } -3 \Rightarrow \sqrt{-2(-3) + 3} + 3 = 2(-3) + k \Rightarrow \sqrt{9 + 3} = -6 + k$$

$$3 + 3 = -6 + k \Rightarrow 6 = -6 + k \Rightarrow k = 12$$

بنابراین مقدار مجهول k ، برابر ۱۲ است.

تست و پاسخ ۱۰

$$-f(-x)$$

نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+2}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار

$$\begin{cases} x \rightarrow (x-2) \\ y \rightarrow (y+3) \end{cases}$$

تابع g به دست آید، مقدار $(f \circ g^{-1})(-2)$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره طبق ترتیب تبدیل‌های گفته‌شده، ضابطه $g(x)$ رو بسازی کار تمومه.

درس نامه •• تبدیل نمودار

• تابع $f(x)$ را داریم ($k > 0$):

عملیات	به جای x قرار دهیم $x - k$.	به جای x قرار دهیم $x + k$.	کل تابع را منهای k کنیم.	کل تابع را با k جمع کنیم.
ضابطه	$y = f(x - k)$	$y = f(x + k)$	$y = f(x) - k$	$y = f(x) + k$
نمودار	نمودار f را k واحد به راست می‌بریم.	نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم.	نمودار f را k واحد پایین می‌بریم.	نمودار f را k واحد بالا می‌بریم.

• انعکاس (قرینه) نسبت به محور x ها و y ها:

عملیات	(۱) قراردادن $-x$ به جای x در تابع	(۲) کل تابع قرینه شود.	انجام هر دو عملیات (۱) و (۲)
ضابطه	$f(-x)$	$-f(x)$	$-f(-x)$
نمودار	نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به مبدأ قرینه می‌شود.

• رسم تابع $f(-x + k)$ یا $y = f(k - x)$ با شرط ($k > 0$):

(۱) نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم (به زبان دیگر $f(x + k)$ را رسم می‌کنیم).

(۲) نمودار به دست آمده را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (اگر به جای x قرار دهیم $-x$ ، تابع $f(-x + k)$ یا $f(k - x)$ به دست می‌آید).

• رسم تابع $y = f(-x - k)$ ($k > 0$):

(۱) نمودار f را k واحد به راست می‌بریم (در واقع، تابع $y = f(x - k)$ را رسم می‌کنیم).

(۲) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (در واقع، x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم تا تابع $f(-x - k)$ به دست آید).

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



پاسخ تشریحی

گام اول: تبدیل‌های گفته‌شده را روی نمودار تابع f اعمال می‌کنیم تا ضابطه تابع $g(x)$ به دست آید:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} y = -f(-x) = -\frac{-x}{-x+2} = -\frac{x}{x-2}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست}} \frac{x \rightarrow x-2}{x \rightarrow x-2} \rightarrow y = -\frac{x-2}{(x-2)-2} = -\frac{x-2}{x-4}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به پایین}} \frac{y \rightarrow y+3}{y \rightarrow y+3} \rightarrow y+3 = -\frac{x-2}{x-4} \Rightarrow g(x) = -\frac{x-2}{x-4} - 3 = \frac{-4x+14}{x-4}$$

گام دوم: وارون تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، تابع $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است و طبق این نکته ضابطه وارون تابع g به صورت زیر است:

$$g^{-1}(x) = \frac{4x+14}{x+4}$$

$$f(g^{-1}(-2)) = f(3) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{4(-2)+14}{-2+4} = 3$$

گام سوم: $(f \circ g^{-1})(-2)$ را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۱۱

نقطه $A(-1, a)$ روی نمودار تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{4})$ با نقطه $A'(b, 2b)$ روی نمودار تابع $y = 2f(1-2x)$ متناظر است. مقدار a کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره مختصات ۲ نقطه رو تو ضابطه توابعشون جای گذاری کن، آخر سر باید به یک تساوی واحد برسی.

درس نامه •• نقاط متناظر

نقطه $A(x_1, y_1)$ روی نمودار تابع $a + bf(cx + d)$ متناظر است با نقطه $A'(x_2, y_2)$ روی نمودار تابع $a' + b'f(c'x + d')$. این دو نقطه در عمل باید یک تساوی واحد به صورت $y_1 = f(x_1)$ را گزارش کنند؛ پس مختصات دو نقطه را در ضابطه توابع مربوطه‌شان جای گذاری می‌کنیم:

$$A: y_1 = a + bf(cx_1 + d) \Rightarrow f(cx_1 + d) = \frac{y_1 - a}{b}$$

$$A': y_2 = a' + b'f(c'x_2 + d') \Rightarrow f(c'x_2 + d') = \frac{y_2 - a'}{b'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cx_1 + d = c'x_2 + d' \\ \frac{y_1 - a}{b} = \frac{y_2 - a'}{b'} \end{cases}$$

ورودی‌های f باید یکسان باشد.
خروجی‌های f باید یکسان باشد.

پاسخ تشریحی

$$A: a = 2 - 3f(-\frac{1}{4}) \Rightarrow f(-\frac{1}{4}) = \frac{2-a}{3}$$

$$A': 2b = 2f(1-2b) \Rightarrow f(1-2b) = b$$

گام اول: مختصات هر دو نقطه را در ضابطه‌شان جای گذاری می‌کنیم:

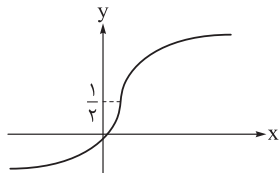
$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2b = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2b = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{8} \\ \frac{2-a}{3} = b \xrightarrow{b=\frac{3}{8}} \frac{2-a}{3} = \frac{3}{8} \Rightarrow 2-a = \frac{9}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

گام دوم: دو تساوی به دست آمده، طبق درس‌نامه باید یکسان باشند:



تست و پاسخ ۱۲

تابع درجه سوم $f(x) = (4x^2 + a)(2x + b) + 9$ مفروض است. اگر نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟



(۱) -۶

(۲) ۶

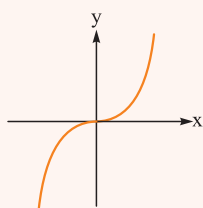
(۳) -۹

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه •• تابع درجه سوم

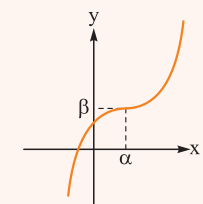
تابع $y = x^3$ را یک تابع درجه سوم می‌نامیم که نمودار آن به صورت روبه‌رو است: این تابع در $x = 0$ بر محور x مماس است.



با انتقال α واحد به راست و β واحد به بالا، نمودار تابع به صورت مقابل تغییر می‌کند:

در این صورت ضابطه تابع $y = (x - \alpha)^3 + \beta$ است.

در این تابع نقطه (α, β) مرکز تقارن نمودار است و خط مماس بر آن در $x = \alpha$ افقی است.



پاسخ تشریحی

گام اول: نمودار تابع f^{-1} از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ پس نمودار تابع f نیز از مبدأ می‌گذرد و داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = ab + 9 = 0$$

گام دوم: ضابطه تابع f را باز می‌کنیم تا بتوانیم آن را به فرم $y = k(x - \alpha)^3 + \beta$ بنویسیم:

$$f(x) = (4x^2 + a)(2x + b) + 9 = 8x^3 + 4bx^2 + 2ax + ab + 9$$

$$\xrightarrow{ab+9=0} f(x) = 8x^3 + 4bx^2 + 2ax = 8\left(x^3 + \frac{bx^2}{2} + \frac{ax}{4}\right) \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دوجمله‌ای}} f(x) = 8\left(x + \frac{b}{6}\right)^3 - \frac{8b^3}{6^3}$$

گام سوم: در نمودار تابع f^{-1} مرکز تقارن $(m, \frac{1}{p})$ است. این یعنی مرکز تقارن تابع f نقطه $(\frac{1}{p}, m)$ است. با در نظر گرفتن ضابطه $f(x)$ و

$$\Rightarrow \frac{b}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow b = -3$$

درس‌نامه این سؤال، نتیجه می‌گیریم که $\frac{b}{6}$ باید برابر $-\frac{1}{6}$ باشد:

$$ab + 9 = 0 \xrightarrow{b=-3} -3a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$$

گام چهارم: از معادله گام اول استفاده می‌کنیم و داریم:

$$a - b = 6$$

در نهایت داریم:

تست و پاسخ ۱۳

تابع سرسره‌ای یا Z شکل

تابع $f(x) = |x - 2\alpha + 1| - |x + \alpha - 5|$ روی \mathbb{R} نزولی است. حداکثر مقدار $f(\alpha)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۱/۵

پاسخ: گزینه ۱

خود حل کنی بهتره! تابع سرسره‌ای به دو شکله، و کدوم نزولیه؟ و تحت چه شرایطی؟

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



درس نامه

مجموعه A ($A \subseteq D_f$) را در نظر بگیرید. به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به مجموعه A ، تابع f :

نزولی است.	اکیداً نزولی است.	صعودی است.	اکیداً صعودی است.
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
در بازه‌ای که تابع f نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا خواهیم رفت.

دقت کنید اگر مجموعه A برابر دامنه تابع باشد، گوییم تابع f روی دامنه خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است. همچنین اگر تابعی بر دامنه خود صعودی (نزولی) باشد، آن را یکنوا می‌نامیم.

الف) هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی، خود یک تابع نزولی است.

ب) تابع ثابت (در یک بازه) را تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

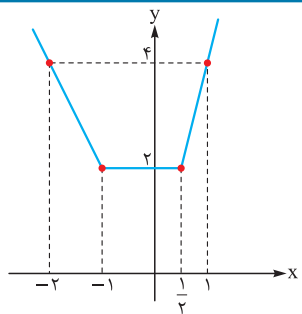
پ) اگر تابع f در دامنه خود صعودی یا نزولی نباشد، f را تابعی غیر یکنوا می‌نامیم.

نمودار توابع قدرمطلقى خاص

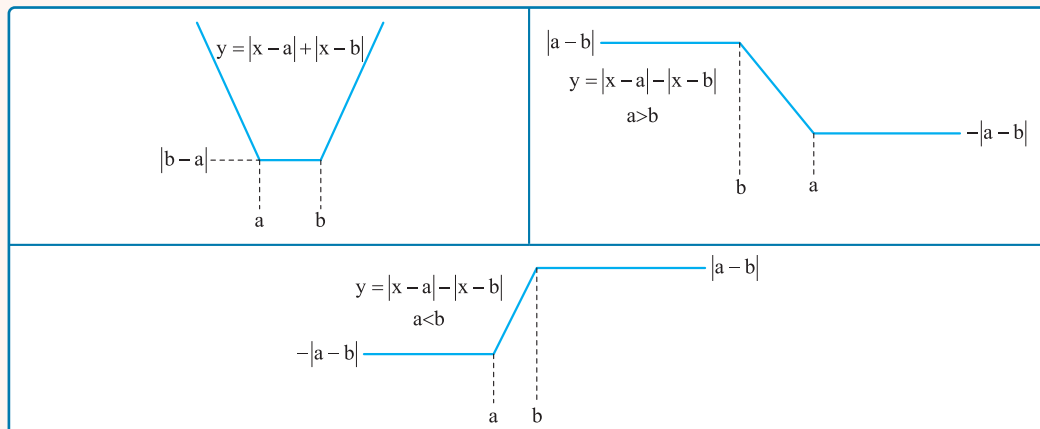
برای رسم توابع قدرمطلقى به فرم $y = ax + b + |cx + d| + \dots$ که پس از تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها، ضابطه خطی پیدا می‌کنند، کافی است مقدار تابع را در ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها و سپس یک نقطه قبل‌تر و یک نقطه بعدتر را پیدا کرد. با وصل کردن متوالی این نقاط به هم نمودار تابع حاصل می‌شود.

مثلاً می‌خواهیم نمودار تابع $y = x + |2x - 1| + |x + 1|$ را رسم کنیم. ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها -1 و $\frac{1}{2}$ هستند. یک نقطه قبل‌تر از این دو، به دلخواه می‌تواند -2 و یک نقطه بعدتر، می‌تواند 1 باشد. مقادیر تابع را در این نقاط پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x = -2: y &= 4 \\ x = -1: y &= 2 \\ x = \frac{1}{2}: y &= 2 \\ x = 1: y &= 4 \end{aligned}$$



دو تابع خاص داریم که باید شکل آن‌ها را حفظ باشید، تابع گلدانی و تابع سرسره‌ای:





$$f(x) = |x - \underbrace{(2\alpha - 1)}_a| - |x - \underbrace{(-\alpha + 5)}_b|$$

پاسخ تشریحی گام اول: تابع f یک تابع سرسره‌ای است:

که طبق شکل‌های درس‌نامه در حالت $a > b$ نزولی است.

$$2\alpha - 1 \geq -\alpha + 5 \Rightarrow 3\alpha \geq 6 \Rightarrow \alpha \geq 2$$

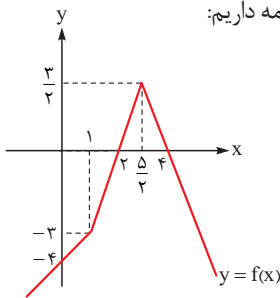
گام دوم: نامعادله $a > b$ را حل می‌کنیم:

حالت مساوی را در نظر می‌گیریم؛ زیرا به ازای $\alpha = 2$ تابع ثابت $f(x) = 0$ را داریم که هم صعودی و هم نزولی است.

$$\xrightarrow{x=\alpha} f(\alpha) = |\alpha - 1| - |2\alpha - 5|$$

گام سوم: $f(\alpha)$ را به دست می‌آوریم:

گام چهارم: برای به دست آوردن بیشترین مقدار $f(\alpha)$ ، نمودار آن را رسم می‌کنیم. طبق روش گفته‌شده در درس‌نامه داریم:



که در محدوده $\alpha \geq 2$ بیشترین مقدار به ازای $\alpha = \frac{5}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ به دست می‌آید.

تست و پاسخ ۱۴

توابع f و g با دامنه \mathbb{R} مفروض‌اند. اگر توابع $f + g$ و $f - 2g$ هر دو اکیداً صعودی باشند، کدام تابع روی \mathbb{R} الزاماً اکیداً نزولی است؟

(۴) $y = g(-x) - x$

(۳) $y = x - g(x)$

(۲) $y = f(-x) - x$

(۱) $y = x - f(x)$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره مثل دستگاه دو معادله - دو مجهول بهش نگاه کن و ببین کدامشون راحت به دست میاد، کدام نامعلومه.

درس‌نامه •• جبر توابع و یکنوایی

	توابع f و g هر دو صعودی‌اند.	تابع f صعودی اما تابع g نزولی است.	توابع f و g هر دو نزولی‌اند.
$f + g$	صعودی	نامعلوم	نزولی
$f - g$	نامعلوم	صعودی	نامعلوم
$f \times g$	بستگی به علامت توابع و ریشه‌های آن‌ها دارد.		
$\frac{f}{g}$			
$\frac{1}{g} \circ \frac{1}{f}$			
$f \circ g$	صعودی	نزولی	صعودی

نکته انعکاس جهت یکنوایی را عوض می‌کند، یعنی جهت یکنوایی توابع $y = f(-x)$ و $y = -f(x)$ عکس جهت یکنوایی تابع f است،

پس مثلاً اگر f نزولی باشد، $y = f(-x)$ و $y = -f(x)$ هر دو صعودی‌اند.

$$\begin{cases} 2f + g = a \\ f - 2g = b \end{cases} \Rightarrow f = \frac{2a + b}{5}, g = \frac{a - 2b}{5}$$

پاسخ تشریحی گام اول: از دستگاه مقابل توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f = \frac{2 \overbrace{(2f + g)}^{\text{اکیداً صعودی}} + \overbrace{(f - 2g)}^{\text{اکیداً صعودی}}}{5}, g = \frac{\overbrace{(2f + g)}^{\text{اکیداً نزولی}} - 2 \overbrace{(f - 2g)}^{\text{اکیداً صعودی}}}{5}$$

گام دوم: پس داریم:

این یعنی f که مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس اکیداً صعودی است.

اما در مورد تابع g که مجموع یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع اکیداً نزولی است، نمی‌توان به طور قطع اظهار نظر کرد، یعنی یکنوایی تابع g نامعلوم است.



گام سوم: در مورد توابع (۳) و (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد، اما برای توابع دیگر داریم: وضعیت نامعلوم است: $y = \frac{-f(x)}{x}$ نزولی صعودی

(۲) $y = \frac{f(-x)}{x}$ قطعاً نزولی است: نزولی نزولی

تست و پاسخ ۱۵

تابع $f(x) = 4 - \sqrt{x+2}$ مفروض است. مجموعه جواب‌های نامعادله $(f \circ f)(x) > f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۳۴ (۲) ۳۳ (۳) ۳۲ (۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره یکی از مهم‌ترین کاربردهای یکنوایی در اهداف کتاب درسی، کاربرد آن در حل نامعادلات است که به شدت نامعادلات را ساده می‌کند. راهش این است که همواره در حل نامعادلات حواستان به وضعیت صعودی - نزولی بودن تابع باشد، چه تابع معلوم باشد و چه تابعی که خودتان با خلاقیت باید بسازید.

خودت حل کنی بهتره تابع f ، رادیکالی راست‌گرای رو به پایین و نزولیه، همین.

درس نامه •• کاربرد یکنوایی در نامعادلات

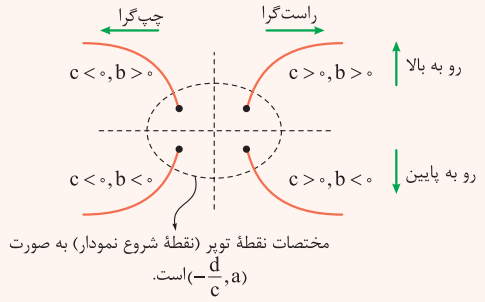
تعریف توابع (اکیداً) صعودی و (اکیداً) نزولی را که بلدیم. حالا در این مبحث می‌خواهیم عکس این تعریف‌ها عمل کنیم و نامعادله حل کنیم، به صورت مقابل:

$$f(g(x)) < f(h(x)) \Rightarrow \begin{cases} \text{تابع } f \text{ صعودی است:} & g(x) < h(x) \\ \text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود.} & \\ \text{تابع } f \text{ نزولی است:} & g(x) > h(x) \\ \text{جهت نامساوی عوض می‌شود.} & \end{cases}$$

اگر مساوی هم حضور داشته باشد (منظور \geq و \leq است)، باز هم این روابط برقرارند. هم‌چنین نکته مهم این روابط این است که باید دامنه توابع مرکب $f \circ g$ و $f \circ h$ لحاظ شوند.

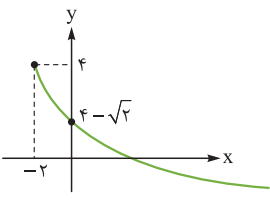
تابع رادیکالی $y = a + b\sqrt{cx+d}$

نمودار این تابع برحسب پارامترهای a, b, c, d یکی از ۴ حالت زیر است:



در این توابع اگر $b > 0$ برد تابع $[a, +\infty)$ است و اگر $b < 0$ برد $(-\infty, a]$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی گام اول: طبق درس‌نامه دوم، نمودار تابع f به صورت زیر است:



که یک تابع اکیداً نزولی است.

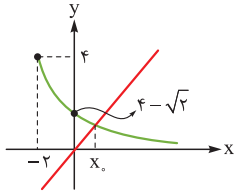
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



$$f(f(x)) > f(x) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x) < x$$

گام دوم: پس نامعادله $(f \circ f)(x) > f(x)$ به نامعادلهٔ روبه‌رو تبدیل می‌شود:

گام سوم: خط $y = x$ را به نمودار داده‌شده اضافه می‌کنیم:



و می‌بینیم که در بازهٔ $(x_0, +\infty)$ نمودار تابع f از خط $y = x$ پایین‌تر است.

گام چهارم: x_0 جواب معادلهٔ $x = \sqrt{x+2} - 4$ است، آن را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow 4 - x_0 = \sqrt{x_0 + 2} \xrightarrow{\substack{\text{توان } 2 \\ -2 < x_0 < 4}} x_0^2 - 8x_0 + 16 = x_0 + 2 \Rightarrow x_0^2 - 9x_0 + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (x_0 - 7)(x_0 - 2) = 0 \xrightarrow{-2 < x_0 < 4} x_0 = 2$$

گام پنجم: باید حواسمان به دامنهٔ تابع $f \circ f$ باشد:

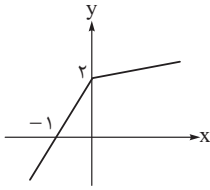
$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \geq -2 \mid 4 - \sqrt{x+2} \geq -2\} = \{x \geq -2 \mid \sqrt{x+2} \leq 6\} = \{x \geq -2 \mid x \leq 34\} = [-2, 34]$$

$x+2 \leq 36$

گام ششم: اشتراک بازه‌های $(2, +\infty)$ و $[-2, 34]$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تشکیل می‌دهد که برابر بازهٔ $(2, 34]$ است. این بازه $34 - 2 = 32$ عدد صحیح دارد.

تست و پاسخ ۱۶

نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{(2x-1)(f(x+a)-2)}$ برابر \mathbb{R} باشد، مقدار a کدام است؟



عبارت زیر رادیکال ریشهٔ مرتبهٔ فرد ندارد.

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- $\frac{1}{2}$ (۳)
- $-\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره ظاهر بسیار عجیب و ترسناکی دارد، اما بسیار ساده حل می‌شود، فقط کافی است به مفاهیم اولیهٔ یکنوایی و تعیین علامت دقت کنید.

خودت حل کنی بهتره $x = \frac{1}{2}$ باید ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال باشه.

پاسخ تشریحی گام اول: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع g باید زیر رادیکال نامنفی شود:

گام دوم: تابع $y = 2x - 1$ اکیداً صعودی است و از قضا تابع f هم روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است؛ پس برای این که دامنهٔ تابع g نیز \mathbb{R} باشد، لازم

است $y = 2x - 1$ و تابع $y = f(x+a) - 2$ از نظر علامت و ریشه عین هم باشند، یعنی $x = \frac{1}{2}$ ریشهٔ $y = f(x+a) - 2$ باشد:

$$\Rightarrow 0 = f\left(a + \frac{1}{2}\right) - 2 \Rightarrow f\left(a + \frac{1}{2}\right) = 2 \xrightarrow{\text{نمودار}} a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۱۷

خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 4x^3 + ax^2 + b$ بر چندجمله‌ای $x - 2$ به ترتیب $q(x)$ و 6 است. اگر مجموع

ضرایب چندجمله‌ای $q(x)$ برابر ۱۲ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟ $q(1)$

- ۳ (۴)
- ۹ (۳)
- ۹ (۲)
- ۳ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



خودت حل کنی بهتره رابطه تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ رو بنویس و $x=2$ و $x=1$ رو جای گذاری کن.

درس نامه •• تقسیم چندجمله‌ای‌ها

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مقسوم، $b(x)$ چندجمله‌ای مقسوم‌علیه، $q(x)$ چندجمله‌ای خارج قسمت و $r(x)$ چندجمله‌ای باقی‌مانده باشد، رابطه مقابل برقرار است:

$$p(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

$$p(x) = (x-a)q(x) + r \Rightarrow r = p(a)$$

(۱) اگر $b(x) = x-a$ باشد، داریم:

(۲) اگر $b(x) = (x-a)(x-b)$ باشد، داریم:

$$p(x) = (x-a)(x-b)q(x) + \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} x=a: \alpha a + \beta = p(a) \\ x=b: \alpha b + \beta = p(b) \end{cases}$$

توجه کنید که درجه $r(x)$ همواره کم‌تر از درجه $b(x)$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: رابطه تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ را می‌نویسیم:

$$p(x) = (x-2)q(x) + \text{باقی‌مانده}$$

$x=2$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$p(2) = 0 + 6$$

$$\xrightarrow{\text{چندجمله‌ای } p(x)} p(2) = 32 - 4(8) + a(4) + b = 6 \Rightarrow 4a + b = 6 \quad (1)$$

گام دوم: در رابطه تقسیم گام اول، $x=1$ را نیز جای گذاری می‌کنیم:

$$p(1) = (-1)q(1) + 6 = -12 + 6 = -6$$

مجموع ضرایب چندجمله‌ای $q(x)$

$$\xrightarrow{\text{چندجمله‌ای } p(x)} p(1) = 1 - 4 + a + b = -6 \Rightarrow a + b = -3 \quad (2)$$

گام سوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4a + b = 6 \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow (4a + b) - (a + b) = 6 - (-3) \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{a+b=-3} 3 + b = -3 \Rightarrow b = -6$$

$$a - b = 9$$

در نهایت داریم:

تست و پاسخ ۱۸

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $2x + 1$ است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای

$(x-1)f(x) + xf(x-1)$ بر $x-2$ کدام است؟ مقدار چندجمله‌ای به ازای $x=2$

۱۳ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: رابطه تقسیم چندجمله‌ای $(x-1)f(x) + xf(x-1)$ را بر $x-2$ می‌نویسیم، تا ببینیم به چه چیزهایی نیاز داریم:

$$(x-1)f(x) + xf(x-1) = (x-2)q_1(x) + r \xrightarrow{x=2} f(2) + 2f(1) = 0 + r \quad (*)$$

گام دوم: پس $f(1)$ و $f(2)$ را نیاز داریم و برای محاسبه آن‌ها از تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید

$$f(x) = (x-1)(x-2)q_2(x) + 2x + 1$$

که نیازی هم به ضابطه $f(x)$ نداریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1: f(1) = 0 + 3 \\ x=2: f(2) = 0 + 5 \end{cases}$$

گام سوم: طبق رابطه (*) باقی‌مانده مورد نظر برابر $11 = 5 + 2(3)$ است.



ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

تست و پاسخ ۱۹

چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با ارائه مثال نقض رد کرد؟
 الف) حاصل ضرب یک عدد گویای غیرصفر و یک عدد گنگ عددی گنگ است.
 ب) اگر مجموع دو عدد گنگ گویای غیرصفر باشد، مجموع دو برابر عدد اول با سه برابر عدد دوم عددی گنگ است.
 پ) حاصل ضرب جذر دو عدد حقیقی مثبت برابر است با جذر حاصل ضرب آن دو.
 ت) هیچ عدد طبیعی فردی وجود ندارد که مربع و مکعب آن فرد نباشد.

۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره تسلط بر مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی در حل سوالات این بخش بسیار به شما کمک می‌کند.

خودت حل کنی بهتره گزاره‌ها را بررسی کن و سعی کن آن‌ها را اثبات کنی. برای «الف» و «ب» می‌توانی از برهان خلف کمک بگیری.

پاسخ تشریحی گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) با برهان خلف این گزاره را اثبات می‌کنیم: اگر α یک عدد گویای غیرصفر و β یک عدد گنگ باشد، فرض می‌کنیم $\alpha\beta$ عددی گویاست. می‌دانیم حاصل تقسیم یک عدد گویا به یک عدد گویای دیگر حتماً عددی گویا می‌شود، پس $\frac{\alpha\beta}{\alpha}$ باید گویا باشد، پس β گویاست که این گزاره با فرض ما در تناقض است؛ پس $\alpha\beta$ نمی‌تواند گویا باشد.

ب) باز هم از برهان خلف کمک می‌گیریم: اگر α و β گنگ و $\alpha + \beta$ یک عدد گویای غیرصفر باشد، حاصل $2\alpha + 3\beta$ عددی گویاست. طبق فرض مسئله $\alpha + \beta$ گویاست؛ پس $2\alpha + 2\beta$ نیز گویاست. می‌دانیم اگر دو عدد گویا را از هم کم کنیم باز هم حاصل آن گویا می‌شود، پس $(2\alpha + 3\beta) - (2\alpha + 2\beta) = \beta$ که برابر است با β ، باید عددی گویا باشد که با فرض مسئله در تناقض است؛ پس $2\alpha + 3\beta$ نمی‌تواند گویا باشد.
 پ) بسیار واضح است که $\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$. این ویژگی جذر را از قدیم می‌دانیم.

ت) این مورد هم بسیار واضح است که هر عدد طبیعی فرد به توان هر عدد طبیعی‌ای که برسد باز هم حاصل عددی فرد است.

تست و پاسخ ۲۰

اگر $x \mid 3m + 7$ و $x \mid 5m + 12$ ، چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره یک سؤال پرتکرار از مبحث عادکردن که باید بتوانید چشم‌بسته حلش کنید.

خودت حل کنی بهتره مجهول m را با استفاده از ویژگی‌های عادکردن از سمت راست رابطه حذف کن.

درس نامه •• ویژگی‌های عادکردن

ردیف	نماد ریاضی	توضیح
۱	$a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$	می‌توانیم دو طرف را در عدد صحیح m ضرب کنیم.
۲	$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$	فقط سمت راست را در عدد صحیح دلخواه m ضرب کنیم.
۳	$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$	دو طرف را به توان طبیعی n برسانیم.
۴	$a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$	فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی دلخواه برسانیم.
۵	$\pm a \mid \pm a$	هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند.
۶	$\pm 1 \mid \pm a$	± 1 هر عددی را عاد می‌کنند.



ردیف	نماد ریاضی	توضیح
۷	$a 0$	هر عدد صحیح، صفر را عاد می‌کند.
۸	$0 a \Rightarrow a = 0$	صفر فقط خودش را عاد می‌کند.
۹	$\begin{cases} a b \\ a c \end{cases} \Rightarrow a b \pm c$	اگر a دو عدد b و c را عاد کند، مجموع و تفاضل آن‌ها را هم عاد می‌کند.
	$\{ab c \Rightarrow a c, b c\}$	سمت چپ را می‌توانیم لاغر کنیم و جای ab مقسوم‌علیه‌های آن یعنی a یا b را قرار دهیم.
۱۰	$a b, b c \Rightarrow a c$	ویژگی تعدی عاد کردن

پاسخ تشریحی

$$\text{فرض مسئله} \begin{cases} x | (3m+7) \times 5 \\ x | (5m+12) \times 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x | 15m+35 \\ x | 15m+36 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین را از یکدیگر کم می‌کنیم.}} x | 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تست و پاسخ ۲۱

اگر عدد صحیحی را ۷ واحد زیاد کنیم بر عدد ۱۳ و اگر از آن ۳ واحد کم کنیم بر عدد ۷ بخش پذیر می‌شود. عدد a بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی و فرد با شرایط گفته شده است. کدام گزینه نادرست است؟

$31 | a^2 - 8$ (۴)
 $11 | a^2 - 4$ (۳)
 $7 | a^2 - 2$ (۲)
 $9 | a^2 - 1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این سؤال مشابه سؤال کنکور است و حل آن کمی زمان‌بر است.

خودت حل کنی بهتره دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ و ۱۳ را یکی کن تا از ویژگی ک.م.م پیمانه‌ها استفاده کنی و یک رابطه برای a به دست بیاوری.

درس نامه ••• ویژگی‌های هم‌نهشتی

خواص هم‌نهشتی

خاصیت‌های هم‌نهشتی را با جدول زیر بررسی می‌کنیم.

نام	توضیح عملکرد	مثال
تبدیل به تقسیم	$x \equiv y^m$ را به صورت $x = mq + y$ می‌نویسیم.	$x \equiv 2^5$ را به صورت $x = 5q + 2$ می‌نویسیم.
تبدیل به عاد کردن	$x \equiv y^m$ را به صورت $m x - y$ می‌نویسیم.	از $2x \equiv 3x - 1$ نتیجه می‌گیریم: $7 3x - 1 - 2x$ ، یعنی $7 x - 1$.
تعویض پیمانه	به جای پیمانه می‌توان مقسوم‌علیه‌های آن را قرار داد. $x \equiv y \xrightarrow{d m} x \equiv y^d$	از $x \equiv 1$ نتیجه می‌شود: $x \equiv 1^5$ و $x \equiv 1^2$.
جای‌گذاری باقی‌مانده	به جای هر عدد می‌توان باقی‌ماندهٔ آن بر m را قرار داد. $a = mq + r \Rightarrow a \equiv r^m$	$15x + 27y + 30 \equiv 15x - 1y + 2$ به جای ۳۰ به جای ۲۷، یعنی $15 \equiv 1$
کم و زیاد کردن مضارب m	اجازه داریم به هر یک از دو طرف هر مضرب دلخواه m را اضافه یا کم کنیم: $a \equiv b \Rightarrow a \pm mq \equiv b \pm mq'$	$x \equiv 10$ (الف) $\xrightarrow{2 \times 7 \text{ اضافه کنیم.}}$ $x \equiv 4$ $x \equiv 30$ (ب) $\xrightarrow{3 \times 6 \text{ کم کنیم.}}$ $x \equiv 3$



نام	توضیح عملکرد	مثال
جمع و تفریق با عدد C	به دو طرف عدد یکسانی را اضافه یا کم می‌کنیم. $a \equiv b \Rightarrow a + c \equiv b + c, a - c \equiv b - c$	الف) $x \equiv 1 \xrightarrow{+4} x + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 5$ ب) $y \equiv 3 \xrightarrow{-2} y - 2 \equiv 3 - 2 \equiv 1$
ضرب در عدد C	دو طرف را در عدد C ضرب کنیم (می‌توانیم پیمانه را هم ضرب کنیم): $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc, ac \equiv bc$	$x \equiv y \xrightarrow{\times 7} 7x \equiv 7y, 7x \equiv 7y$

نکته (ک.م.م پیمانه‌ها): اگر دو عدد X و Y در پیمانه‌های مختلف هم‌نهشت باشند، به پیمانه ک.م.م آن‌ها نیز هم‌نهشت‌اند.

$$x \equiv y, x \equiv y \Rightarrow x \equiv y \quad [m_1, m_2]$$

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه باقی‌مانده a بر 13 و 7):

$$a + 7 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -7 \equiv 45$$

$$a - 3 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 3 \equiv 45$$

$$a \equiv 45 \Rightarrow a \equiv 45 \Rightarrow a = 91q + 45$$

$$a \Rightarrow 955 \Rightarrow 91 \times 10 + 45 = 955$$

گام دوم (محاسبه بزرگ‌ترین مقدار سه‌رقمی a):

گام سوم:

بررسی گزینه‌ها:

$$a \equiv 955 \equiv 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \Rightarrow 9 | a^2 - 1$$

$$a \equiv 955 \equiv 3 \Rightarrow a^2 \equiv 9 \equiv 2 \Rightarrow 7 | a^2 - 2$$

$$a \equiv 955 \equiv 9 \Rightarrow a^2 \equiv 81 \equiv 4 \Rightarrow 11 | a^2 - 4$$

$$a \equiv 955 \equiv 25 \equiv -6 \Rightarrow a^2 \equiv 36 \equiv 5 \Rightarrow 31 | a^2 - 5$$

۱

۲

۳

۴

تست و پاسخ ۲۲

هفت نقطه روی محیط یک دایره هستند. تعداد مثلث‌هایی که با سه نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد، چند برابر تعداد پنج‌ضلعی‌هایی است که با پنج نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد؟

$$\frac{7}{4} \quad (4)$$

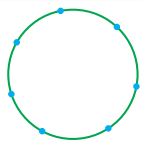
$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

۱(1)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال ساده‌ای است که با درک مفهوم «انتخاب» حل می‌شود.



پاسخ تشریحی هر سه نقطه‌ای که از این هفت نقطه انتخاب کنیم یک مثلث می‌سازند. همین‌طور هر پنج نقطه‌ای که انتخاب کنیم یک پنج‌ضلعی می‌سازند.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5}{3}$$

بنابراین داریم:



تست و پاسخ ۲۳

با حروف کلمه «گلزاری» چند کلمه شش حرفی می توان ساخت به طوری که شامل عبارت «گل» باشند و در آن هادو حرف «ز» و «ا» کنار یکدیگر نباشند؟

- ۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه ●● محاسبه تعداد حالتها به کمک اصل متمم

در بعضی از مسائل احتمال، محاسبه آن چیزی که مسئله نمی خواهد به مراتب راحت تر از محاسبه آن چیزی است که می خواهد. در این موارد بهتر است ابتدا تعداد حالت های آن چیزی که مطلوب نیست را پیدا کنیم و سپس جواب را از تعداد کل حالت ها کم کنیم، یعنی از اصل متمم به صورت روبه رو استفاده کنیم:

پاسخ تشریحی گام اول: تعداد حالت هایی را می خواهیم که شامل عبارت «گل» باشند ولی حروف «ز» و «ا» کنار هم نیستند. پس باید از اصل

متمم استفاده کنیم. در نتیجه ابتدا تمام حالت هایی را به دست می آوریم که کلمه شامل عبارت «گل» هست اما در مورد «ز» و «ا» هیچ شرطی نداریم.

گ ل ز ا ر ی

هر کدام از بسته ها قابلیت جایگشت را برای ایجاد کلمه جدید دارند، پس تعداد کل حالت ها ۵! است.

گام دوم: حالا به سراغ محاسبه متمم خواسته صورت سؤال می رویم، یعنی زمانی که عبارت «گل» در کلمه وجود دارد و «ز» و «ا» کنار یکدیگرند.

گ ل ز ا ر ی

هر کدام از بسته ها می توانند جابه جا شوند پس به طور کلی ۴! حالت داریم که به خاطر جابه جایی «ز» و «ا» با یکدیگر تعداد کل حالت ها می شود: ۴!۲!

حالا طبق اصل متمم تعداد حالت هایی که عبارت «گل» در کلمه وجود دارد و «ز» و «ا» کنار هم نیستند برابر است با:

$$۷۲ = ۱۲۰ - ۴۸ = ۱۲۰ - ۴!۲! = ۵! - ۴!۲!$$

تست و پاسخ ۲۴

چند عدد ده رقمی با ارقام ۳ و ۴ می توان نوشت که مضرب ۶ نباشد؟

- ۱) ۸۴۳ ۲) ۸۵۳ ۳) ۸۶۳ ۴) ۸۷۳

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره استفاده از اصل متمم در حل این تیپ از سوالات نکته اصلی است.

پاسخ تشریحی برای هر کدام از رقم های این عدد ده رقمی قرارداد دو عدد ۳ یا ۴ امکان پذیر است. پس به طور کلی $۲^۱۰$ حالت برای این

عدد وجود دارد.

از اصل متمم استفاده می کنیم و تعداد حالت هایی که عدد مضرب ۶ می شود را محاسبه می کنیم. برای این که عدد مضرب ۶ باشد باید هم مضرب ۲ و هم ۳ باشد. پس رقم یکان این عدد حتماً ۴ است. برای این که عددی مضرب ۳ باشد باید مجموع ارقامش مضرب ۳ باشد. فرض می کنیم از ۹ رقم

باقی مانده (به جز یکان آن که ۴ است) n رقم عدد ۴ باشد، بنابراین $n - ۹$ رقم نیز ۳ است.

یکان

$$\text{عددی مضرب ۳} = ۳ + n = ۳۱ + n = ۴ + ۴n + ۳(۹ - n) = \text{مجموع ارقام}$$

$$\Rightarrow n = ۲, ۵, ۸$$

پس در حالتی که ۲ یا ۵ یا ۸ رقم از ۹ رقم قبل از یکان، ۴ باشد، این عدد مضرب ۶ می شود.

حالا تعداد اعدادی که مضرب ۶ می شوند را محاسبه می کنیم.

$$\binom{۹}{۲} + \binom{۹}{۵} + \binom{۹}{۸} = ۳۶ + ۱۲۶ + ۹ = ۱۷۱$$

۱۷۱ عدد مضرب ۶ اند، پس طبق اصل متمم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{کل حالت ها } ۱۰۲۴ = ۲^{10} \\ \text{مضرب ۶} = ۱۷۱ \end{array} \right\} \Rightarrow ۱۰۲۴ - ۱۷۱ = ۸۵۳$$

پس ۸۵۳ عدد مضرب ۶ نیستند.



تست و پاسخ ۲۵

به ازای چند مقدار دورقمی برای n ، دو عدد $3n + 5$ و $3n^2 - 2n + 6$ نسبت به هم اول هستند؟

۴۰ (۴)

۵۶ (۳)

۷۲ (۲)

۸۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره از کاربردهای بسیار مهم معادلهٔ همنهشتی محاسبهٔ ب.م.م دو عدد است.

خودت حل کنی بهتره ب.م.م‌های ممکن برای دو عدد را به دست بیاور و سپس مقادیری از n که به ازای آن‌ها ب.م.م ۱ می‌شود را بشمار.

درس نامه ••• دوتا کاربرد مهم معادلهٔ همنهشتی

در ب.م.م سؤال‌هایی داریم که با معادلهٔ همنهشتی راحت‌تر حل می‌شوند.

در مسائل ب.م.م پارامتری:

یادتان هست که ب.م.م را d می‌گیریم و دوتا رابطهٔ عادکردن می‌نوشتیم و d به دست می‌آمد. حالا اگر سؤال بگوید مقدار n کدام است، d را جای گذاری می‌کنیم و عادکردن را به صورت همنهشتی درمی‌آوریم.

مثلاً ب.م.م دو عدد $3n + 1$ و $5n - 2$ با استفاده از روش ترکیب خطی برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} d | 3n + 1 \\ d | 5n - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow d | 5(3n + 1) - 3(5n - 2) \Rightarrow d | 11 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 11$$

حالا سؤال می‌پرسد به ازای کدام مقادیر n ، ب.م.م ۱۱ است.

$$11 | 3n + 1$$

$$11 | 5n - 2$$

می‌نویسیم:

و یک رابطه را به صورت همنهشتی درمی‌آوریم:

$$11 | 3n + 1 \xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}} 3n \equiv -1 \pmod{11} \xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{\text{مضرب مناسب ۱۱ را به ۱-}} 3n \equiv -1 \pmod{11} \xrightarrow{\div 3} n \equiv 7 \pmod{11}$$

پس باید $n = 11q + 7$ باشد مثلاً $n = 7, 18, \dots$ مناسب است تا ب.م.م بشود ۱۱.

پاسخ تشریحی گام اول (پیداکردن ب.م.م‌های ممکن برای هر دو عدد):

$$\left. \begin{array}{l} d | 3n^2 - 2n + 6 \\ d | 3n + 5 \xrightarrow{\times n} d | 3n^2 + 5n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \left. \begin{array}{l} d | (7n - 6) \times 3 \Rightarrow d | 21n - 18 \\ d | (3n + 5) \times 7 \Rightarrow d | 21n + 35 \end{array} \right\} \Rightarrow d | 53 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 53$$

گام دوم (پیداکردن n):

ب.م.م باید ۱ باشد، پس حالت‌هایی از n که به ازای آن‌ها $d = 53$ باشد را به دست می‌آوریم و از اعداد دورقمی کم می‌کنیم.

$$53 | 3n + 5 \Rightarrow 3n \equiv -5 \equiv 48 \pmod{53} \xrightarrow{\div 3} n \equiv 16 \pmod{53}$$

پس به ازای $n = 53q + 16$ ، ب.م.م دو عدد ۵۳ می‌شود.

$$9 < 53q + 16 < 100 \Rightarrow q = 0, 1$$

n های دورقمی ممکن را به دست می‌آوریم.

از بین ۹۰ عدد دورقمی ممکن فقط به ازای دو مقدار از n (که $q = 0$ و $q = 1$ ساخته می‌شود) ب.م.م دو عدد ۵۳ می‌شود و به ازای ۸۸ عدد دورقمی دیگر ب.م.م دو عدد ۱ است.

تست و پاسخ ۲۶

در تقسیم a بر ۴۳، باقی‌ماندهٔ دو واحد کوچک‌تر از خارج قسمت است. در چند حالت a مضرب ۳ است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در حل سؤالات قضیهٔ تقسیم حتماً به شرایط باقی‌مانده توجه کن.



درس نامه •• قضیه تقسیم

عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت q و باقی‌مانده r است و داریم:

$$a = bq + r \quad , \quad 0 \leq r < b$$

مقسوم‌علیه

مقسوم

خارج قسمت

از قدیم یادتان هست که باید باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد، یعنی $r < b$ و تأکید کنیم که r منفی نیست.

$$a = 43q + (q - 2) = 44q - 2$$

پاسخ تشریحی قضیه تقسیم مربوط به صورت سؤال را می‌نویسیم.

$$q - 2 < 43 \Rightarrow q < 45$$

$$q - 2 \geq 0 \Rightarrow q \geq 2$$

$$a \equiv 0 \Rightarrow 44q - 2 \equiv 2 \Rightarrow 2q \equiv 2 \Rightarrow q \equiv 1$$

حالا حالت‌هایی که a مضرب ۳ است را به دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow q = 3k + 1 \Rightarrow 2 \leq 3k + 1 < 45$$

$$k = 1, \dots, 14 \Rightarrow 14 \text{ حالت}$$

تست و پاسخ ۲۷

نقطه $A(\alpha, \beta)$ با مختصات صحیح، روی منحنی $y = \frac{2x-11}{x+3}$ قرار دارد و $\alpha\beta > 0$. اگر باقی‌مانده تقسیم عدد زوج n بر $\alpha - \beta$ برابر ۹ باشد، باقی‌مانده تقسیم $\frac{n}{4}$ بر $\alpha - \beta$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره معادله منحنی را به رابطه عادکردن تبدیل کن و α و β های مناسب را به دست بیاور.

پاسخ تشریحی گام اول: نقطه‌ای با مختصات صحیح روی $y = \frac{2x-11}{x+3}$ است، پس هم x صحیح است و هم y ؛ بنابراین $\frac{2x-11}{x+3}$ صحیح است و می‌توانیم آن را به معادله عادکردنی تبدیل کنیم:

$$\Rightarrow x + 3 \mid 2x - 11 \xrightarrow{\text{روش تستی}} x + 3 \mid 2(-3) - 11 \Rightarrow x + 3 \mid -17$$

$$\begin{cases} x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -15 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -15 \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = 13 \end{cases}$$

غ.ق.ق، چون $\alpha\beta < 0$ نمی‌شود $\alpha\beta > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow y = 19 \\ x + 3 = 17 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 14 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = 13 \end{cases}$$

غ.ق.ق، چون $\alpha\beta < 0$ نمی‌شود $\alpha\beta > 0$

$$n = 13q + 9$$

گام دوم: باقی‌مانده n بر $\alpha - \beta = 13$ برابر ۹ است؛ یعنی:

گام سوم: از آن جایی که n زوج و باقی‌مانده فرد است، پس خارج قسمت این تقسیم نیز فرد است و داریم:

$$n = 13q + 9 \xrightarrow{q=2x+1} n = 13(2x+1) + 9 = 26x + 22$$

$$\Rightarrow \frac{n}{4} = \frac{26x+22}{4} \Rightarrow \frac{n}{4} = 6x + 5 + \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{n}{4} = 6x + 5 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{4} = 3x + 1 \Rightarrow \frac{n}{4} \text{ بر } 13 \text{ برابر } 11 \text{ است}$$

تست و پاسخ ۲۸

در یک تقسیم، مقسوم‌علیه کوچک‌ترین عدد دورقمی ممکن و باقی‌مانده برابر ۳ است. اگر مقسوم‌علیه را ۴ واحد کم‌تر کنیم، باقی‌مانده برابر ۴ می‌شود. تعداد مقسوم‌های چهاررقمی کدام است؟

۱۱۷ (۴)

۱۱۶ (۳)

۱۱۵ (۲)

۱۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



مشاوره سؤال دشواری است که برای حل آن ابتدا باید بتوانید مقدار مقسوم‌علیه را به دست آورید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا قضیه تقسیم را بنویس و سپس مقدار صحیح مقسوم‌علیه را به دست بیاور.

پاسخ تشریحی ابتدا برای روابط گفته شده قضیه تقسیم را می‌نویسیم و b را به دست می‌آوریم.

$$a = bq + 3$$

$$a = (b - 4)q' + 4$$

b کوچک‌ترین عدد دورقمی است، اما 10 نمی‌تواند باشد، چون به ازای $b = 10$ ، a یک بار زوج و یک بار فرد می‌شود؛ پس $b = 11$.

$$\left. \begin{array}{l} a = 11q + 3 \Rightarrow a \equiv 3 \equiv 25 \\ a = 11q' + 4 \Rightarrow a \equiv 4 \equiv 25 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 25 \Rightarrow a = 11k + 25$$

حالا تعداد اعداد چهاررقمی a را محاسبه می‌کنیم.

$$1000 \leq a \leq 9999 \Rightarrow 1000 \leq 11k + 25 \leq 9999 \Rightarrow 13 \leq k \leq 129 \Rightarrow k = 13, 14, \dots, 129 \Rightarrow \text{تعداد } k = 129 - 13 + 1 = 117$$



هندسه دوازدهم

تست و پاسخ ۲۹

اگر ماتریس‌های ضرایب و مقادیر ثابت دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ را به ترتیب A و B بنامیم، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس $A + B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ کدام است؟

- ۱) $-1/6$ ۲) $1/6$ ۳) $0/8$ ۴) $-0/8$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس و ارون یکی از سوال‌های ثابت امتحان نهایی درس هندسه (۳) است و تسلط بر حل این مسئله‌ها بسیار ضروری است.

خودت حل کنی بهتره مقادیر X و Y را با حل دستگاه به روش دلخواه به دست آورید.

درس نامه

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید. در این دستگاه $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر ثابت و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات نامیده می‌شوند و دستگاه را می‌توان با معادلهٔ $AX = B$ نمایش داد.

پاسخ تشریحی

گام اول: ماتریس‌های ضرایب و مقادیر ثابت را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: دستگاه را به روش حذفی حل می‌کنیم تا مقادیر X و Y را به دست آوریم:

$$2 \times \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} + 2y = -1 \Rightarrow 2y = -\frac{6}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$$

گام سوم: ماتریس خواسته‌شده در صورت سؤال را پیدا می‌کنیم:

$$A + B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

بنابراین کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس برابر $-1/6 = -\frac{1}{6}$ است.

تست و پاسخ ۳۰

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، ستون اول ماتریس A^3 کدام است؟

- ۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره محاسبهٔ توان‌های ۲ یا ۳ برای ماتریس‌های مربعی مرتبه (۳) به طور مکرر در امتحان نهایی مطرح شده و در سؤال‌های کنکور مانند سال ۹۹ نیز دیده می‌شود.



خودت حل کنی بهتره ابتدا ستون اول ماتریس A^2 را به دست آورید.

درس نامه ●●

- ماتریس $A \times$ سطر i ام ماتریس $A^{n-1} =$ سطر i ام ماتریس A^n ۱)
 ستون j ام ماتریس $A^{n-1} \times$ ماتریس $A =$ ستون j ام ماتریس A^n ۲)

پاسخ تشریحی گام اول: ستون اول ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 \text{ ستون اول} = A \text{ ماتریس} \times A \text{ ستون اول} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ستون اول ماتریس A^3 را پیدا می کنیم:

$$A^3 \text{ ستون اول} = A \text{ ماتریس} \times A^2 \text{ ستون اول} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

تست و پاسخ ۳۱

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ و $|AB| = 6$ باشد، آن گاه مجموع درایه های ماتریس AB کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۵ (۳)

۳۳ (۲)

۳۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره با توجه به این که A ماتریسی از مرتبه 2×3 و B ماتریسی از مرتبه 3×2 است، AB ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ خواهد بود.

درس نامه ●●

- ۱) ماتریس های غیرمربعی دترمینان ندارند.
 ۲) اگر A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ و B ماتریسی از مرتبه $n \times m$ باشد، آن گاه AB ماتریس مربعی از مرتبه m و BA ماتریس مربعی از مرتبه n است و در نتیجه $|AB|$ و $|BA|$ وجود دارد.

پاسخ تشریحی گام اول: ماتریس AB را محاسبه می کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-1 & 6 \\ 6x-1 & 18 \end{bmatrix}$$

گام دوم: دترمینان ماتریس AB را برابر ۶ قرار می دهیم:

$$|AB| = 6 \Rightarrow 18(3x-1) - 6(6x-1) = 6$$

گام سوم: مجموع درایه های ماتریس AB را با جای گذاری مقدار x به دست می آوریم:

$$AB \text{ مجموع درایه های} = (3x-1) + 6 + (6x-1) + 18 = 9x + 22 \xrightarrow{x=1} 31$$

تست و پاسخ ۳۲

اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ -2 & |A| \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه های ماتریس A^{12} کدام است؟

-2^{13} (۴)

2^{13} (۳)

-2^7 (۲)

2^7 (۱)

پاسخ: گزینه ۲



مشاوره این مدل سؤال‌ها برگرفته از تمرین‌های کتاب درسی و از سؤال‌های پرتکرار در امتحان نهایی و آزمون‌های آزمایشی هستند.

خودت حل کنی بهتره از طرفین تساوی، دترمینان بگیرد.

درس نامه

برای محاسبه توان‌های بزرگ ماتریس مربعی A ، تا حد امکان تلاش می‌کنیم توانی از این ماتریس پیدا کنیم که برابر ماتریس همانی (I) یا مضربی از آن باشد. به عنوان مثال داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^n = \begin{cases} A: \text{ فرد } n \\ I: \text{ زوج } n \end{cases}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از فرض سؤال داریم:

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & 2 & & \\ -2 & |A| & & \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|A| & 1 \\ -1 & \frac{1}{2}|A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left(\frac{1}{2}|A|\right)^2 - (-1)$$

$$\Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| - 2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|A| & 1 \\ -1 & \frac{1}{2}|A| \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: با جای‌گذاری $|A|$ ، ماتریس A را می‌نویسیم:

گام سوم: با محاسبه توان‌های ۲ و ۴ ماتریس A ، ماتریس A^{12} را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

$$A^4 = -4I \xrightarrow{\text{به توان 3}} A^{12} = -4^3 I^3 = -2^6 I$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} -2^6 & 0 \\ 0 & -2^6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 2(-2^6) = -2^7$$

گام چهارم: ماتریس A^{12} را با درایه‌های آن می‌نویسیم:

تست و پاسخ ۳۳

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $AB = A^{-1}$ باشد، آن‌گاه به ازای کدام مقدار n ، ماتریس $B + nA$ اسکالر است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) -۳ (۴) چنین مقداری وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره در ماتریس اسکالر، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند.

درس نامه

(۱) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc \neq 0$ باشد، آن‌گاه وارون ماتریس A از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(۲) ماتریس مربعی A اسکالر است؛ هرگاه تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر بوده و درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن مساوی یکدیگر باشند.



پاسخ تشریحی گام اول: وارون ماتریس A را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3 \times 3 - 2 \times 4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ماتریس B را از رابطه $AB = A^{-1}$ پیدا می کنیم:

$$AB = A^{-1} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A^{-1} \text{ (از سمت چپ)}} A^{-1}(AB) = A^{-1} \times A^{-1} \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I B = (A^{-1})^2$$

$$\Rightarrow B = (A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس $B + nA$ را تشکیل می دهیم:

$$B + nA = \begin{bmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3n & 2n \\ 4n & 3n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3n+17 & 2n-12 \\ 4n-24 & 3n+17 \end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند و درایه های واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند؛ پس داریم:

$$\begin{cases} 2n - 12 = 0 \Rightarrow n = 6 \\ 4n - 24 = 0 \Rightarrow n = 6 \end{cases}$$

با توجه به یکسان بودن درایه های روی قطر اصلی ماتریس $B + nA$ ، این ماتریس به ازای $n = 6$ ، ماتریسی اسکالر است.

تست و پاسخ ۳۴

اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و $B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ ترین درایه روی قطر اصلی ماتریس $B^{-1}A^3B$ کدام است؟

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خود حل کنی بهتره طرفین تساوی را به توان ۳ برسانید.

درس نامه

$$(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$$

(۱) اگر B ماتریسی مربعی و وارون پذیر و A ماتریسی هم مرتبه با B باشد، آن گاه داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

(۲) برای هر ماتریس قطری مانند A داریم:

پاسخ تشریحی گام اول: طرفین تساوی را به توان ۳ می رسانیم:

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (B^{-1}AB)^3 = \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$(B^{-1}AB)^3 = B^{-1}A^3B$$

گام دوم: بنا به درس نامه داریم:

$$B^{-1}A^3B = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

بزرگ ترین درایه روی قطر اصلی این ماتریس برابر ۶۴ است.

تست و پاسخ ۳۵

اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $A(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۴ (۳)

۷ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۴



خودت حل کنی بهتره حاصل ضرب هر ماتریس مربعی وارون پذیر در وارونش، برابر ماتریس همانی (I) است.

درس نامه

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

اگر A ماتریسی مربعی و وارون پذیر باشد، آن گاه داریم:

$$(A + B)(A + B)^{-1} = I$$

رابطه فوق به هر ماتریس مربعی دیگر قابل تعمیم است؛ به عنوان مثال داریم:

پاسخ تشریحی **گام اول:** می دانیم حاصل ضرب هر ماتریس مربعی وارون پذیر در وارون آن برابر ماتریس همانی (I) است؛ پس برای ماتریس

$$(A + 3I)(A + 3I)^{-1} = I$$

مربعی (A + 3I) داریم:

گام دوم: با توجه به ویژگی توزیع پذیری ضرب ماتریس ها نسبت به جمع دو ماتریس، رابطه فوق را ساده می کنیم:

$$A(A + 3I)^{-1} + 3I(A + 3I)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow 3(A + 3I)^{-1} = I - A(A + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس (A + 3I)⁻¹ را وارون می کنیم. می دانیم وارون وارون هر ماتریس برابر خود آن ماتریس است؛ پس داریم:

$$(A + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون}} A + 3I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$-4 - \left(-\frac{7}{2}\right) = 14$$

بنابراین حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی ماتریس A برابر است با:

هندسه دهم

تست و پاسخ ۳۶

تعداد اضلاع یک چندضلعی محدب، با تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است. اگر تعداد قطرهای چندضلعی محدب برابر ۱۷۰ باشد، از هر رأس n ضلعی چند قطر می گذرد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال ساده ای است که با دانستن فرمول محاسبه تعداد قطرهای چندضلعی محدب قابل حل است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا تعداد اضلاع چندضلعی محدبی که ۱۷۰ قطر دارد را محاسبه کن. حالا به دست بیاور که کدام چندضلعی

این تعداد قطر دارد.

درس نامه

از هر رأس n ضلعی محدب n - 3 قطر عبور می کند، در نتیجه هر n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ قطر دارد.

پاسخ تشریحی **گام اول** (به دست آوردن تعداد اضلاع چندضلعی اول): طبق فرمول تعداد قطرها برای چندضلعی اول، داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 170 \Rightarrow n(n-3) = 2 \times 170 = 20 \times 17 \Rightarrow n = 20$$

پس تعداد قطرهای n ضلعی ۲۰ تا است.

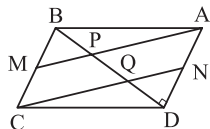
گام دوم (به دست آوردن تعداد اضلاع چندضلعی دوم): تعداد قطرهای این چندضلعی ۲۰ تا است، پس داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 20 \Rightarrow n(n-3) = 40 = 8 \times 5 \Rightarrow n = 8$$

این چندضلعی، ۸ ضلعی است، بنابراین تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس آن n - 3 = 5 است.

تست و پاسخ ۳۷

مطابق شکل، M و N وسط ضلع‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. اگر $\angle ADB = 90^\circ$ ، $MC = \frac{3}{5}$ و $CD = 25$ ، آن‌گاه طول ضلع AP کدام است؟



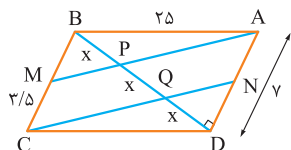
- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{185}$
 (۳) $10\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{305}$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این سؤال، با ایده گرفتن از یکی از تمرین‌های کتاب درسی هندسه ۱ طرح شده است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با کمک تالس BP، PQ و QD را به دست بیاور و برای محاسبه AP از فیثاغورس کمک بگیر.

درس نامه ●● اگر دو ضلع یک چهارضلعی موازی و مساوی باشد، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه BP، PQ و QD): طبق نکته درس‌نامه چون $MC = AN$ و $MC \parallel AN$ است، چهارضلعی AMCN متوازی‌الاضلاع است و $AM \parallel NC$ است. حالا طبق قضیه تالس در مثلث BQC داریم:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BP}{PQ} = 1 \Rightarrow BP = PQ = x$$

و طبق قضیه تالس در مثلث ADP داریم:

$$\frac{DQ}{QP} = \frac{DN}{AN} = 1 \Rightarrow DQ = QP = x$$

گام دوم (محاسبه AP): مثلث قائم‌الزاویه ABD، پس طبق فیثاغورس در آن داریم:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow BD^2 = 25^2 - 7^2 \Rightarrow BD = 24$$

$$BD = 3x \Rightarrow 24 = 3x \Rightarrow BP = PQ = QD = 8$$

$$AP^2 = AD^2 + PD^2 \Rightarrow AP^2 = 7^2 + 16^2 = 305 \Rightarrow AP = \sqrt{305}$$

طبق فیثاغورس در مثلث APD داریم:

تست و پاسخ ۳۸

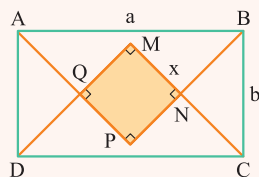
از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳، یک چهارضلعی حاصل شده است. بیشترین فاصله نقاط واقع بر محیط این چهارضلعی، از نقاط واقع بر محیط مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه ●● شکل حاصل از برخورد نیمسازهای مستطیل

اگر نیمسازهای داخلی یک مستطیل به طول a و عرض b را رسم کنید، یک مربع به وجود می‌آید که طول قطر آن برابر است با $a - b$ ، پس:

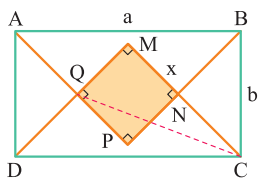


$$\text{طول ضلع مربع } MNPQ : x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\text{طول} - \text{عرض}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b)$$

$$\frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} (a - b)\right)^2}{ab} = \frac{(a - b)^2}{2ab}$$

پس نسبت مساحت‌هایشان هم می‌شود:

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



پاسخ تشریحی گام اول (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال): طبق درس نامه متوجه شدیم که MNPQ مربع است و از طرفی با توجه به شکل، بیشترین فاصله نقاط واقع بر مربع از نقاط واقع بر مستطیل برابر با طول پاره خط QC است.

گام دوم (محاسبه طول ضلع مربع): از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد $a = 3$ و $b = 2$ ، مربعی به طول ضلع

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{پس } MQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$MC = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

گام سوم (محاسبه MC): مثلث قائم الزاویه با زاویه 45° است (چون CM نیمساز \hat{C} است). پس:

گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال): حالا با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه MCQ داریم:

$$MQ^2 + MC^2 = QC^2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{18}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 = QC^2 \Rightarrow QC = \sqrt{5}$$

تست و پاسخ ۳۹

در مثلث ABC، زاویه بین دو میانه AM و BN برابر 120° است. اگر $BN = 2AM$ ، آن گاه فاصله نقطه N از میانه AM، چند برابر طول این میانه است؟

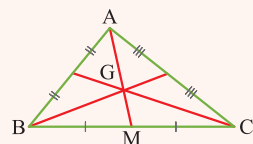
- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره نقطه همرسی میانه‌ها در مثلث نقطه مهمی است، ویژگی‌های آن را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره اندازه AG و GN را بر حسب AM به دست بیاورید؛ سپس از ارتفاع مثلث AGN را رسم کنید و اندازه آن را به دست آورید.

درس نامه



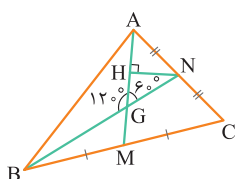
(۱) نقطه تلاقی سه میانه مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} AG = \frac{2}{3} AM \\ GM = \frac{1}{3} AM \end{cases}$$

(۲) اندازه ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول ضلع است.

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به شکل، زاویه حاده بین دو میانه AM و BN می‌شود 60° . از طرفی G نقطه همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس داریم:



$$\begin{cases} AG = \frac{2}{3} AM \xrightarrow{AM=x} AG = \frac{2}{3} x \\ GN = \frac{1}{3} BN \xrightarrow{BN=2AM=2x} GN = \frac{2}{3} x \end{cases} \Rightarrow AG = GN = \frac{2}{3} x$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

در مثلث AGN دیدیم $AG = GN$ و $\hat{AGN} = 60^\circ$ ؛ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است و ارتفاع آن برابر است با:

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ طول ضلع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{3} x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

تست و پاسخ ۴۰

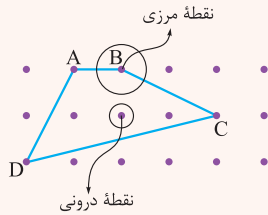
مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای که حداقل تعداد نقاط مرزی را دارد، برابر $9/5$ است. تعداد نقاط درونی این چندضلعی، چند برابر تعداد نقاط مرزی آن است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره هر چندضلعی شبکه‌ای، حداقل ۳ نقطه مرزی دارد.

درس نامه •• نقاط شبکه‌ای و مساحت



در یک صفحه شبکه‌ای که فاصله دو نقطه متوالی روی یک خط افقی یا عمودی برابر واحد است، اگر یک چندضلعی طوری در این صفحه واقع شود که رأس‌های چندضلعی، نقاط این صفحه باشند، چندضلعی را شبکه‌ای می‌گویند، مساحت چندضلعی شبکه‌ای از فرمول زیر که به فرمول پیک معروف است، به دست می‌آید: مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر است با:

$$S = \left(\frac{\text{تعداد نقاط مرزی}}{2} - 1 \right) + \text{تعداد نقاط درونی}$$

دقت کنید که نقاط مرزی نقاطی هستند که روی ضلع‌ها یا رأس‌های چندضلعی و نقاط درونی داخل چندضلعی قرار دارند. مثلاً در شکل بالا مساحت می‌شود:

$$S = \frac{4}{2} - 1 + 3 = 4$$

توجه حواستان باشد! که حداقل تعداد نقاط مرزی در چندضلعی شبکه‌ای ۳ تا است.

پاسخ تشریحی حداقل تعداد نقاط مرزی چندضلعی شبکه‌ای برابر با ۳ تا است. یعنی در این چندضلعی شبکه‌ای $b = 3$ می‌باشد. اگر تعداد

نقاط درونی را (i) بگیریم؛ آن‌گاه:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 9/5 = \frac{3}{2} + i - 1 \Rightarrow i = 9$$

$$\frac{i}{b} = \frac{9}{3} = 3$$

بنابراین:



فیزیک دوازدهم

تست و پاسخ ۴۱

بردار مکان متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 3\text{ s}$ و $t_2 = 10\text{ s}$ به ترتیب $\vec{r}_1(18\text{ m})$ و $\vec{r}_2(10\text{ m})$ است. بردار مکان متحرک در لحظه $t_3 = 24\text{ s}$ بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $-4\vec{i}$ (۲) $-6\vec{i}$ (۳) $-16\vec{i}$ (۴) $-26\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شاید به این شکل سؤال که حرکت با سرعت ثابت روی محور x به صورت برداری بررسی شود، کم‌تر برخورد کرده‌اید. در هر صورت بهتر است با این تیپ سؤال هم آشنا باشید.

درس نامه

(۱) بردار مکان (\vec{r}): برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند بردار مکان جسم در آن لحظه نام دارد. وقتی حرکت روی محور x باشد، بردار مکان آن را به صورت \vec{x} نمایش می‌دهیم.

(۲) بردار جابه‌جایی (\vec{d}): پاره‌خط جهتی است که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی وصل می‌کند. ($\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$) در حرکت روی محور x ، بردار جابه‌جایی را به صورت $\Delta\vec{x}$ نشان می‌دهیم.

(۳) رابطه سرعت متوسط در حرکت روی محور x :

$$\vec{v}_{av} = \frac{(\Delta\vec{x})}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} \quad \text{سرعت متوسط } (\text{m/s})\vec{i}$$

\vec{x}_1 : بردار مکان متحرک در لحظه t_1

\vec{x}_2 : بردار مکان متحرک در لحظه t_2

وقتی سرعت ثابت است، سرعت متوسط در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

پاسخ تشریحی رابطه سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را با سرعت متوسط در بازه زمانی t_2 تا t_3 برابر قرار می‌دهیم و از آن‌جا، بردار مکان متحرک در لحظه t_3 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_2}{t_3 - t_2} \Rightarrow \frac{(10\text{ m})\vec{i} - (18\text{ m})\vec{i}}{10\text{ s} - 3\text{ s}} = \frac{\vec{x}_3 - (10\text{ m})\vec{i}}{24\text{ s} - 10\text{ s}}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{8}{7}\text{ m/s}\right)\vec{i} = \frac{\vec{x}_3 - (10\text{ m})\vec{i}}{14\text{ s}} \Rightarrow -(16\text{ m})\vec{i} = \vec{x}_3 - (10\text{ m})\vec{i} \Rightarrow \vec{x}_3 = -(6\text{ m})\vec{i}$$

تست و پاسخ ۴۲

دو خودرو با سرعت‌های ثابت 20 km/h و 30 km/h در مسیری مستقیم از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شوند. فاصله این دو نقطه 900 m است. اگر دو خودرو در یک لحظه در نقطه A باشند، اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به نقطه B چند دقیقه است؟

- (۱) $0/9$ (۲) $1/8$ (۳) $2/7$ (۴) $5/4$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره مدت‌زمان حرکت هر یک از خودروها، در جابه‌جایی از A تا B را به دست آورده و از هم کم کنید.

درس نامه وقتی سرعت متحرک ثابت است، سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط آن با هم برابرند و می‌توان نوشت:

$$v = v_{av} \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Δt : بازه زمانی (s)

Δx : جابه‌جایی (m)

v : سرعت (m/s)

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



پاسخ تشریحی

گام اول: رابطه سرعت و جابه‌جایی را برای هر یک از دو خودرو نوشته و مدت زمان حرکت آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad \frac{\Delta x_1 = 900 \text{ m} = 0.9 \text{ km}}{v_1 = 20 \text{ km/h}} \rightarrow 20 = \frac{0.9}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{9}{200} \text{ h}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad \frac{\Delta x_2 = 900 \text{ m} = 0.9 \text{ km}}{v_2 = 30 \text{ km/h}} \rightarrow 30 = \frac{0.9}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{9}{300} \text{ h}$$

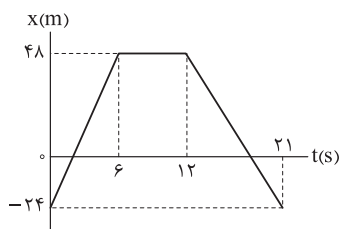
گام دوم: اختلاف زمان رسیدن دو خودرو به نقطه B را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{9}{200} - \frac{9}{300} = \frac{27 - 18}{600} = \frac{9}{600} \text{ h} = \frac{3}{200} \text{ h}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل ساعت (h) به دقیقه (min)}} \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{3}{200} \times 60 = 0.9 \text{ min}$$

تست و پاسخ ۴۳

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه‌ای که جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند، برحسب متر بر مربع ثانیه، کدام است؟



۱) $0.25 \hat{i}$

۲) $-0.25 \hat{i}$

۳) $1/25 \hat{i}$

۴) $-1/25 \hat{i}$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در حل تست‌هایی از حرکت‌شناسی که به نمودارها مربوط می‌شوند، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث‌ها (رابطه تالس)

می‌تواند مفید باشد و سرعت عمل ما را بالا ببرد.

درس نامه

- در حرکت روی محور X هرگاه متحرک از مبدأ مکان یا مبدأ محور ($X = 0$) عبور کند، X تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان عوض می‌شود.
- اگر متحرکی روی محور X حرکت کند و در یک بازه زمانی، نمودار مکان - زمان آن به صورت یک خط شیب‌دار باشد، سرعت متحرک در این بازه زمانی، ثابت است و شیب این خط، سرعت متحرک را نشان می‌دهد. در این بازه زمانی سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط با هم برابرند.

جابه‌جایی (m)

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت

(m/s)

بازه زمانی (s)

x_1 : مکان متحرک در لحظه t_1 (m)

x_2 : مکان متحرک در لحظه t_2 (m)

۳) در هر بازه زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم.

تغییر سرعت (m/s)

$$a_{av} = v_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

شتاب متوسط

(m/s²)

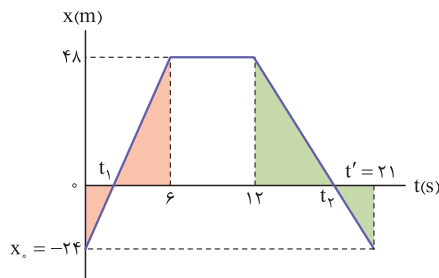
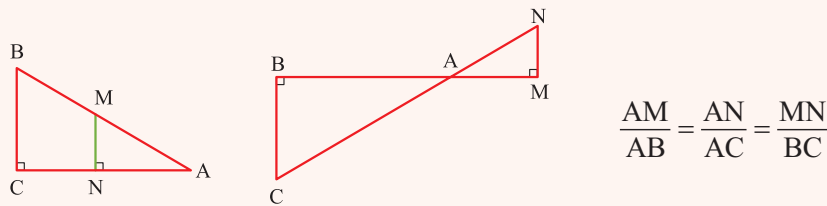
بازه زمانی (s)

v_1 : سرعت متحرک در لحظه t_1 (m/s)

v_2 : سرعت متحرک در لحظه t_2 (m/s)



۴) نسبت تشابه بین اضلاع دو مثلث متشابه به صورت‌های مختلفی نوشته می‌شود که متداول‌ترین آن‌ها در شکل‌های زیر به کار رفته است:



پاسخ تشریحی گام اول: در لحظاتی که نمودار مکان - زمان محور t را قطع کرده

یعنی در لحظه‌های t_1 و t_2 ، x تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان عوض می‌شود. با استفاده از رابطه تالس، این دو لحظه را پیدا می‌کنیم. مثلث‌هایی که هاشور مشابه دارند، با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه بین آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{48}{24} = \frac{6 - t_1}{t_1 - 0} \Rightarrow 2t_1 = 6 - t_1 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

در بازه زمانی ۰ s تا ۶ s:

$$\frac{48}{24} = \frac{t_2 - 12}{21 - t_2} \Rightarrow 42 - 2t_2 = t_2 - 12 \Rightarrow 54 = 3t_2 \Rightarrow t_2 = 18 \text{ s}$$

در بازه زمانی ۱۲ s تا ۲۱ s:

گام دوم: در هر یک از بازه‌های زمانی ۰ s تا ۶ s و ۶ s تا ۱۲ s و ۱۲ s تا ۲۱ s سرعت متحرک ثابت است. این دو سرعت ثابت (v_1 و v_2) را به دست می‌آوریم:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{0 - (-24)}{2 - 0} = \frac{24}{2} = 12 \text{ m/s}$$

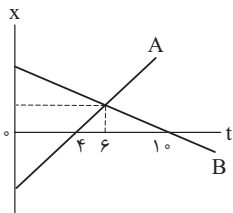
$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{x_0 - x_2}{t' - t_2} = \frac{-24 - 0}{21 - 18} = \frac{-24}{3} = -8 \text{ m/s}$$

گام سوم: شتاب متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{-8\vec{i} - 12\vec{i}}{18 - 2} = \frac{-20\vec{i}}{16} = -(1/25 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۴۴

نمودار مکان - زمان متحرک‌های A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. در



مبدأ زمان، اندازه بردار مکان متحرک A چند برابر اندازه بردار مکان متحرک B است؟

- ۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

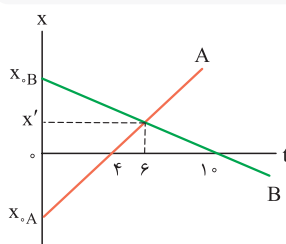
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره برخی تست‌های حرکت‌شناسی، آن‌چنان با مطالب ریاضی و به ویژه درس هندسه، تلفیق می‌شوند که هنگام حل آن‌ها بیشتر

حس می‌کنیم با یک تست ریاضی سروکار داریم تا یک تست فیزیک.

پاسخ تشریحی گام اول: در مبدأ زمان ($t = 0$) اندازه بردار مکان هر متحرک با اندازه مکان اولیه آن

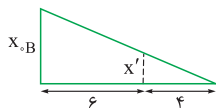
برابر است. یعنی $\frac{|x_{0,A}|}{x_{0,B}}$ را می‌خواهیم:



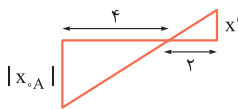
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز



گام دوم: نسبت تشابه بین مثلث‌های مشخص شده را می‌نویسیم و مقادیر $X_{\cdot B}$ و $|X_{\cdot A}|$ را برحسب X' به دست می‌آوریم:



$$\frac{X'}{X_{\cdot B}} = \frac{4}{6+4} \Rightarrow X_{\cdot B} = \frac{10 X'}{4} = 2.5 X'$$



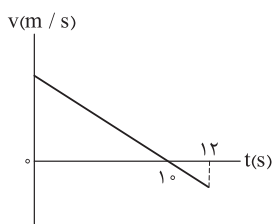
$$\frac{|X_{\cdot A}|}{X'} = \frac{4}{2} \Rightarrow |X_{\cdot A}| = 2X'$$

در پایان، نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{|X_{\cdot A}|}{X_{\cdot B}} = \frac{2X'}{2.5X'} = \frac{4}{5}$$

تست و پاسخ ۴۵

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در 12 ثانیه اول، مسافت طی شده توسط متحرک 156 m باشد، اندازه سرعت متوسط آن در این بازه زمانی چند متر بر ثانیه است؟



۱) $11/5$

۲) 12

۳) $12/5$

۴) 13

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره بسیاری از مفاهیم و اصطلاحاتی که در صحبت‌های عامیانه، آن‌ها را یکسان محسوب می‌کنیم، در فیزیک، معانی و مفاهیم متفاوتی دارند. مثلاً مسافت با جابه‌جایی فرق دارد یا تندی و سرعت، یکسان نیستند.

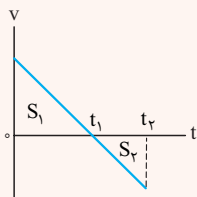
درس نامه

۱) مقایسه مسافت و جابه‌جایی: مسافت یعنی طول مسیر پیموده شده توسط متحرک و یک کمیت نرده‌ای است. اما جابه‌جایی، برداری است که مکان شروع حرکت را به مکان پایانی آن وصل می‌کند. به طور کلی داریم:

اندازه جابه‌جایی \geq مسافت

تنها در صورتی که حرکت بر مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت باشد، مسافت با اندازه جابه‌جایی برابر می‌شود.

۲) مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور t در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی (تغییر مکان) در آن بازه است. $(S = \Delta x)$ مساحت سطحی را که زیر محور t است، با علامت منفی در نظر می‌گیریم که قدرمطلق این مساحت، برابر با مسافت طی شده در آن بازه زمانی است. $(|S| = l)$



Δx : جابه‌جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2

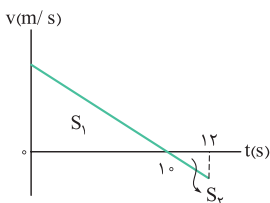
l : مسافت طی شده در بازه زمانی t_1 تا t_2

$$\Delta x = S_1 + S_2$$

$$l = S_1 + |S_2|$$



گام اول: می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با توان دوم نسبت تشابه آن‌هاست. بنابراین داریم:



$$\frac{|S_2|}{|S_1|} = \left(\frac{12-10}{10-0}\right)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

گام دوم: مسافت طی شده در ۱۲ ثانیه اول حرکت ۱۵۶ متر است:

$$S_1 + |S_2| = 156 \xrightarrow{S_1 = 25|S_2|} 25|S_2| + |S_2| = 156 \Rightarrow 26|S_2| = 156 \Rightarrow |S_2| = \frac{156}{26} = 6 \Rightarrow S_2 = -6 \text{ m}$$

$$S_1 = 25|S_2| = 25 \times 6 = 150 \text{ m}$$

$$\Delta x = S_1 + S_2 = 150 + (-6) = 144 \text{ m}$$

گام سوم: جابه‌جایی متحرک در ۱۲ ثانیه اول حرکت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{144}{12} = 12 \text{ m/s}$$

گام چهارم: در پایان اندازه سرعت متوسط در ۱۲ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم:

تست و پاسخ ۴۶

سرعت متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در مدت ۸ s از $\vec{v}_1 = (5 \text{ m/s})\vec{i}$ به $\vec{v}_2 = (-10 \text{ m/s})\vec{i}$ می‌رسد.

جابه‌جایی متحرک در این مدت برحسب متر کدام است؟

(۴) $-60 \vec{i}$

(۳) $60 \vec{i}$

(۲) $-20 \vec{i}$

(۱) $20 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

یکی از معادلات حرکت با شتاب ثابت روی محور x، معادله مستقل از شتاب است. شکل برداری این معادله، به صورت زیر به کار می‌رود:

$$\Delta \vec{x} = \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}\right) \Delta t$$

$\Delta \vec{x}$: جابه‌جایی (m)

\vec{v}_1 : سرعت متحرک در لحظه t_1 (m/s)

\vec{v}_2 : سرعت متحرک در لحظه t_2 (m/s)

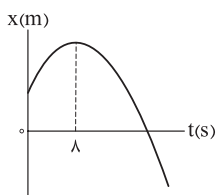
$\Delta t = t_2 - t_1$: بازه زمانی (s)

پاسخ تشریحی با استفاده از معادله مستقل از شتاب، جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta \vec{x} = \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}\right) \Delta t \Rightarrow \Delta \vec{x} = \left(\frac{(5 \text{ m/s})\vec{i} + (-10 \text{ m/s})\vec{i}}{2}\right) \times 8 \Rightarrow \Delta \vec{x} = (-5 \text{ m/s})\vec{i} \times 8 = (-40 \text{ m})\vec{i}$$

تست و پاسخ ۴۷

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 9 \text{ s}$ ، با تندی آن در کدام لحظه، برحسب ثانیه، برابر است؟



(۱) ۷

(۲) ۹

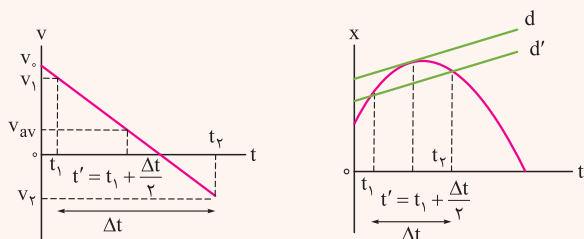
(۳) ۱۱

(۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۳

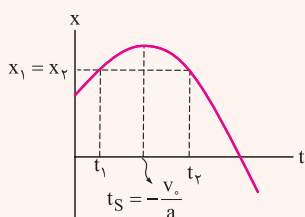
درس نامه

۱) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در بازه زمانی Δt با سرعت در لحظه $t' = t_1 + \frac{\Delta t}{2}$ برابر است.



$$d \parallel d' \Rightarrow v_{av} = v_{t'}$$

۲) در حرکت با شتاب ثابت، زمانهایی که نسبت به $t_S = -\frac{v_0}{a}$ (زمان رأس سهمی) تقارن دارند، دارای مکانهای یکسان و تندیهای برابر هستند، البته سرعتها قرینه هم هستند.

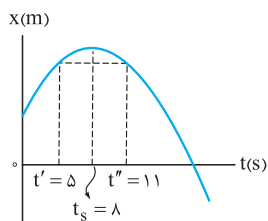


$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t_S \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ v_1 = -v_2 \end{cases}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به مورد اول درس نامه، سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 9s$ با سرعت در لحظه t' برابر است.

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5s$$

گام دوم: با توجه به نکته دوم درس نامه، در لحظه های $t' = 5s$ و $t'' = 11s$ که نسبت به رأس سهمی یعنی لحظه $t_S = 8s$ فاصله زمانی یکسانی دارند، تندی متحرک یکسان است (البته سرعتها در این دو لحظه، قرینه هم هستند).



$$|v'| = |v''|, \quad v' = -v''$$

بنابراین اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 9s$ با تندی آن در لحظه های $t' = 5s$ و $t'' = 11s$ برابر است. در گزینهها فقط $t'' = 11s$ وجود دارد و همان گزینه صحیح است.

تست و پاسخ ۴۸

تندی متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می کند، هنگام عبور از مکانهای $x_1 = 20m$ و $x_2 = 40m$ به ترتیب $17m/s$ و $23m/s$ است. در لحظه ای که تندی متحرک برابر $1m/s$ است، بردار مکان آن بر حسب متر کدام است؟

- ۱) $2\vec{i}$ ۲) $-2\vec{i}$ ۳) $4\vec{i}$ ۴) $-4\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه یکی از معادلات حرکت با شتاب ثابت روی محور x که کاربرد فراوانی دارد، معادله سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) است.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

v_1 : تندی در مکان x_1 (m/s) v_2 : تندی در مکان x_2 (m/s) a : شتاب حرکت (m/s^2)



پاسخ تشریحی گام اول: معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) را بین مکان‌های X_1 و X_2 می‌نویسیم و شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 23^2 - 17^2 = 2a(40 - 20) \Rightarrow 529 - 289 = 40a \Rightarrow 240 = 40a \Rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) را بین مکان‌های X_1 و X_3 می‌نویسیم تا مکان X_3 به دست آید:

$$v_3^2 - v_1^2 = 2a(x_3 - x_1) \xrightarrow[v_3=1 \text{ m/s}, v_1=17 \text{ m/s}]{a=6 \text{ m/s}^2, x_1=20 \text{ m}} 1^2 - 17^2 = 2 \times 6(x_3 - 20) \Rightarrow -288 = 12(x_3 - 20)$$

$$\Rightarrow -24 = x_3 - 20 \Rightarrow x_3 = -4 \text{ m}$$

بنابراین در لحظه‌ای که تندی متحرک برابر 1 m/s است، بردار مکان متحرک به صورت $\vec{x}_3 = (-4 \text{ m})\vec{i}$ خواهد بود.

یه جور دیگه: می‌توانستیم در گام دوم، معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) را بین مکان‌های X_2 و X_3 نیز بنویسیم و به همین جواب برسیم.

تست و پاسخ ۴۹

جهت حرکت متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در لحظه $t = 5 \text{ s}$ تغییر می‌کند. مسافت طی شده توسط متحرک

در 4 ثانیه اول، چند برابر مسافت طی شده توسط آن در 4 ثانیه دوم است؟

$$\frac{12}{5} (4) \qquad 4 (3) \qquad 3 (2) \qquad \frac{3}{2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره رسم نمودار سرعت-زمان در حل بسیاری از تست‌های حرکت‌شناسی به ما کمک می‌کند. در این جا، یک بار دیگر کارایی روابط

هندسه در نمودارهای حرکت‌شناسی را می‌بینید.

درس نامه

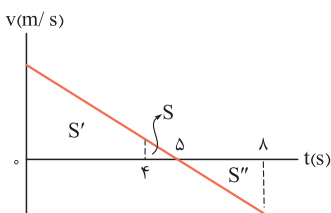
چند ویژگی از نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

(۱) با توجه به این که معادله سرعت در این نوع حرکت، از درجه اول می‌باشد، نمودار آن به صورت یک خط شیبدار است و شیب آن، شتاب متحرک را نشان می‌دهد.

(۲) نقطه شروع این نمودار روی محور v ، سرعت اولیه (v_0) را نشان می‌دهد.

(۳) قدرمطلق مساحت سطح بین این نمودار و محور زمان، مسافت پیموده‌شده در بازه زمانی مورد نظر را نشان می‌دهد.

(۴) در لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند (سرعت صفر می‌شود)، این نمودار، محور t را قطع می‌کند.



پاسخ تشریحی گام اول: نمودار سرعت - زمان این متحرک را در 8 ثانیه اول حرکت رسم

می‌کنیم. این نمودار به صورت یک خط شیبدار است که محور t را در لحظه $t = 5 \text{ s}$ قطع می‌کند.

می‌توانیم نمودار را با شیب مثبت یا شیب منفی رسم کنیم. این موضوع تأثیری در جواب سؤال ما ندارد. در این جا نمودار را با شیب منفی رسم می‌کنیم:

سطح زیر نمودار، در بازه زمانی 4 s تا 5 s را S نشان می‌دهیم؛ مساحت سطح زیر نمودار در بازه‌های زمانی 0 s تا 4 s و 5 s تا 8 s را نیز به ترتیب با S' و S'' نمایش می‌دهیم.

گام دوم: می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با توان دوم نسبت تشابه آن‌ها است؛ بر این اساس، مساحت‌های S' و S'' را

$$\frac{S}{S+S'} = \left(\frac{5-4}{5-0}\right)^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow S+S' = 25S \Rightarrow S' = 24S$$

بر حسب S به دست می‌آوریم:

$$\frac{S''}{S} = \left(\frac{8-5}{5-4}\right)^2 = 9 \Rightarrow S'' = 9S$$

گام سوم: نسبت مسافت طی شده توسط متحرک در 4 ثانیه اول (l_1) به مسافت طی شده توسط آن در 4 ثانیه دوم (l_2) را حساب می‌کنیم:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{S'}{S+S''} = \frac{24S}{S+9S} = \frac{24S}{10S} = \frac{12}{5}$$



تست و پاسخ ۵۰

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = t^2 - 12t + 10$ است. حداقل تندی متوسط متحرک در یک بازه زمانی دلخواه ۴ ثانیه ای، چند متر بر ثانیه است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۴) ۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

۱) معادله مکان - زمان و معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

مکان اولیه (m) زمان (s) شتاب (m/s^2)
سرعت اولیه (m/s) مکان متحرک (m)

$$v = a t + v_0$$

شتاب (m/s^2) سرعت اولیه (m/s)
سرعت (m/s) زمان (s)

۲) حداقل تندی متوسط متحرک در یک بازه زمانی معین Δt به ازای حداقل مسافت طی شده در این بازه به دست می آید. اگر تندی متحرک در لحظه t' به صفر برسد، متحرک باید از $\frac{\Delta t}{2}$ بازه زمانی را قبل از لحظه t' و $\frac{\Delta t}{2}$ بقیه را بعد از لحظه t' بپیماید.

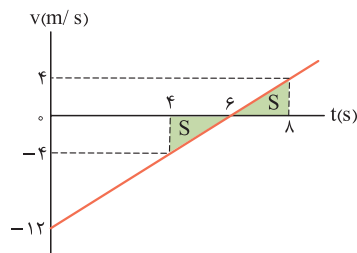
گام اول: معادله سرعت متحرک را به دست می آوریم و لحظه ای که سرعت آن به صفر می رسد را حساب می کنیم:

$$\begin{cases} x = t^2 - 12t + 10 \\ x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} a = 1 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2, v_0 = -12 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 12$$

$$v = 0 \Rightarrow 0 = 2t - 12 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

گام دوم: حداقل تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $\Delta t = 4 \text{ s}$ زمانی حاصل می شود که ۲ s از آن قبل از لحظه $t = 6 \text{ s}$ و ۲ s بعدی آن، بعد از لحظه $t = 6 \text{ s}$ باشد.



$$v = 2t - 12 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 2 \times 4 - 12 = -4 \text{ m/s} \\ t = 8 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 2 \times 8 - 12 = 4 \text{ m/s} \end{cases}$$

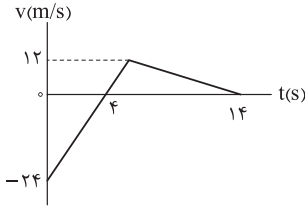
گام سوم: مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی ۴ s تا ۶ s را به دست آورده و تندی متوسط متحرک را در این بازه زمانی حساب می کنیم:

$$l = S + S = 2S \xrightarrow{S = \frac{2 \times 4}{2} = 4 \text{ m}} l = 2 \times 4 = 8 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{l = 8 \text{ m}, \Delta t = 4 \text{ s}} s_{av} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۵۱

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی ای که متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند و در حال نزدیک شدن به مکان اولیه خود است، اندازه جابه‌جایی آن چند متر است؟



- (۱) ۶۰
- (۲) ۴۸
- (۳) ۲۴
- (۴) ۱۲

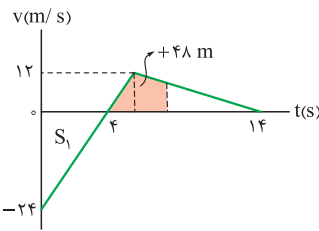
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در حل تست‌های مربوط به نمودار سرعت-زمان، به مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان توجه خاصی داشته باشید.

درس نامه متحرک زمانی به مکان اولیه خود بر می‌گردد که جابه‌جایی آن برابر صفر باشد؛ یعنی $\Delta x = 0$.

پاسخ تشریحی

جابه‌جایی این متحرک در ۴ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم:

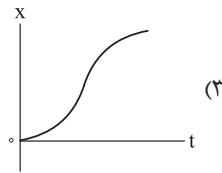
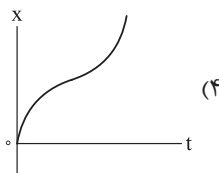
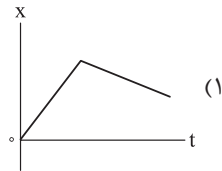
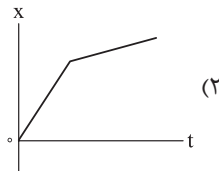
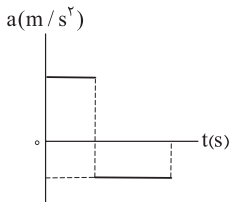


$$S_1 = |\Delta x_1| \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{4(-24)}{2} = -48 \text{ m}$$

بنابراین زمانی که متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند، یعنی سرعت آن مثبت است، باید ۴۸ m جابه‌جا شود تا جابه‌جایی کل آن به صفر برسد.

تست و پاسخ ۵۲

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. نمودار مکان - زمان آن به صورت کدام شکل می‌تواند باشد؟

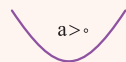


پاسخ: گزینه ۳

مشاوره این هم یک نمونه از تست‌های حرکت‌شناسی است که در آن، یکی از نمودارهای مربوط به حرکت، داده شده و نمودار دیگری بر اساس آن، خواسته می‌شود.

درس نامه

وقتی نمودار شتاب - زمان یک متحرک به صورت خطی افقی، موازی با محور زمان است، شتاب حرکت ثابت است. در هر بازه زمانی که شتاب حرکت ثابت باشد، معادله مکان متحرک از درجه دوم بوده و نمودار مکان - زمان آن به صورت قسمتی از یک سهمی است.



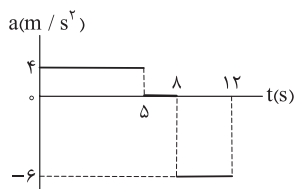
اگر گودی این سهمی روبه بالا باشد، شتاب مثبت است.

اگر گودی این سهمی روبه پایین باشد، شتاب منفی است.

پاسخ تشریحی با توجه به متن درس نامه، در مرحله اول حرکت که شتاب ثابت و مثبت است، نمودار مکان - زمان باید بخشی از یک سهمی و دارای گودی روبه بالا باشد. اما در مرحله دوم حرکت که شتاب ثابت و منفی است، نمودار مکان - زمان باید بخشی از یک سهمی و دارای گودی روبه پایین باشد. بنابراین **۳** درست است.

تست و پاسخ ۵۳

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 10$ s فاصله متحرک از مکان اولیه خود بیشینه باشد، در بازه زمانی ای متحرک در جهت محور X حرکت می کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟



۵ / ۲ (۱)

۵ / ۸ (۲)

۷ / ۲۵ (۳)

۸ / ۲۵ (۴)

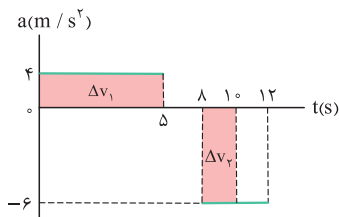
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این تست با یک ایده نو طراحی شده است. جزئیات حل آن را به دقت دنبال کنید.

درس نامه

مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، در هر بازه زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه زمانی است. ($S = \Delta v$) مساحت سطحی را که زیر محور زمان است، با علامت منفی و مساحت سطحی را که بالای محور زمان است، با علامت مثبت در نظر می گیریم.

پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور t، تغییرات سرعت در بازه زمانی ۰ s تا ۱۰ s را به دست می آوریم:

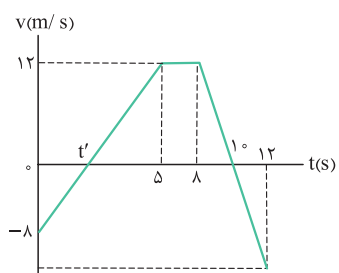


$$\Delta v_1 = (5 - 0) \cdot 4 = 20 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = (10 - 8) \cdot (-6) = -12 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 20 + (-12) = 8 \text{ m/s}$$

گام دوم: نمودار سرعت - زمان متحرک را در بازه زمانی ۰ s تا ۱۲ s رسم می کنیم. از آن جا که در لحظه $t = 10$ s فاصله متحرک از مکان اولیه خود بیشینه است، متحرک باید در لحظه $t = 10$ s تغییر جهت بدهد؛ یعنی سرعت آن صفر شود. در بازه زمانی ۰ s تا ۸ s سرعت متحرک 12 m/s کاهش یافته و به صفر رسیده است. یعنی بیشینه سرعت متحرک 12 m/s است.



$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=5s]{v=12m/s, a=4m/s^2} 12 = 4 \times 5 + v_0 \Rightarrow v_0 = -8 \text{ m/s}$$

گام سوم: در بازه زمانی $(5 - t')$ سرعت متحرک 12 m/s افزایش یافته است. پس می توان نوشت:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[a=4m/s^2, \Delta v=12-0=12m/s]{\Delta t=5-t'} 4 = \frac{12}{5-t'} \Rightarrow 5-t'=3 \Rightarrow t'=2 \text{ s}$$



گام چهارم: این متحرک در بازه زمانی ۲s تا ۱۰s در جهت محور X حرکت می‌کند. با استفاده از مساحت زیر نمودار $v-t$ مسافت طی شده در این بازه را به دست می‌آوریم:

$$l = S_{\text{دو زنگه}} = \frac{[(10-2) + (8-5)] \times 12}{2} = 11 \times 6 = 66 \text{ m}$$

و در پایان، تندی متوسط متحرک در این بازه زمانی را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{av}} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{66}{10-2} = \frac{66}{8} = 8.25 \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۵۴

خودرویی در کنار جاده ایستاده است. در لحظه‌ای یک موتورسوار با سرعت ثابت 90 km/h از کنار آن می‌گذرد. در همین لحظه، خودرو با شتاب ثابت 2 m/s^2 ، در جهت حرکت موتورسوار، شروع به حرکت می‌کند. خودرو پس از طی مسافت چند متر به موتورسوار می‌رسد؟

- ۴۰۵۰ (۴) ۲۰۲۵ (۳) ۶۲۵ (۲) ۳۱۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست براساس یکی از پرسش‌های دوره‌های آخر فصل ۱ کتاب فیزیک ۳ طراحی شده است. در سال‌های اخیر همیشه تعدادی از تست‌های کنکور، دقیقاً از پرسش‌ها و تمرین‌های کتاب درسی برداشت شده‌اند.

درس نامه

$$x = vt + x_0$$

(۱) معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت:

X: مکان متحرک در لحظه t (m)

X₀: مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظه t = 0 (m)

v: سرعت متحرک (m/s)

t: زمان (s)

(۲) هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می‌توان در آن لحظه، معادله مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به دست آورد.

پاسخ تشریحی

گام اول: معادله مکان - زمان خودرو (۱) و موتورسوار (۲) را می‌نویسیم و آن‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای که به هم برسند دو متحرک را به دست آوریم. باید توجه داشت که برای موتورسوار، معادله حرکت با سرعت ثابت و برای خودرو، معادله حرکت با شتاب ثابت به کار می‌رود.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = vt + x_0 \xrightarrow{v_0=0, x_0=0} \frac{1}{2} \times 2t^2 = 25t \Rightarrow t=0, t=25 \text{ s}$$

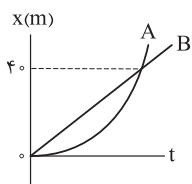
لحظه $t=0$ مربوط به شروع حرکت و لحظه $t=25 \text{ s}$ مربوط به زمانی است که خودرو و موتورسوار، دوباره به هم می‌رسند.

گام دوم: اگر زمان به دست آمده را در هر یک از معادله‌های x_1 یا x_2 قرار دهیم، مسافت طی شده توسط خودرو تا رسیدن به موتورسوار به دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{a=2 \text{ m/s}^2, t=25 \text{ s}} x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times (25)^2 = 625 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۵۵

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور X حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. شتاب متحرک A ثابت و تندی آن در مبدأ زمان برابر صفر است. در لحظه‌ای که تندی دو متحرک برابر می‌شود، فاصله آن‌ها از یکدیگر چند متر است؟



۵ (۱)

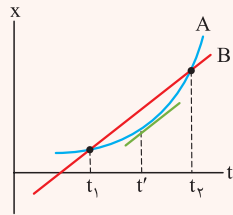
۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

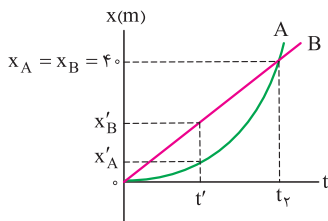
۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



درس نامه ●● اگر نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B (خط راست و A قسمتی از یک سهمی) در دو لحظه t_1 و t_2 یکدیگر را قطع کنند، سرعت متحرک A در لحظه $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر بزرگی سرعت متوسط بین این دو لحظه و برابر بزرگی سرعت متحرک B است.



پاسخ تشریحی **گام اول:** لحظه‌ای را که دو متحرک دوباره به هم می‌رسند ($x_A = x_B$) با t_p نشان می‌دهیم. در این صورت با توجه به نکته درس‌نامه، در لحظه $t' = \frac{t_p}{2}$ تندی دو متحرک، برابر می‌شود. مکان دو متحرک در این لحظه را با x'_A و x'_B نشان می‌دهیم. (توجه کنید که در این جا چون سرعت همواره مثبت است، تندی و سرعت هر یک از دو متحرک یکسان هستند).

گام دوم: متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند. پس سرعت متوسط آن در تمام بازه‌های زمانی، یکسان است. از این جا می‌توانیم x'_B را حساب کنیم:

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \Rightarrow \frac{x_B - 0}{t_p - 0} = \frac{x'_B - 0}{t' - 0} \Rightarrow \frac{40 \text{ m}}{t_p} = \frac{x'_B}{\frac{1}{2} t_p} \Rightarrow x'_B = 20 \text{ m}$$

گام سوم: در لحظه $t' = \frac{t_p}{2}$ تندی دو متحرک با هم برابر است:

$$v'_A = v_B \Rightarrow at' + v_{0,A} = \frac{x_B}{t_p} \xrightarrow{t' = \frac{t_p}{2}, v_{0,A} = 0} a \times \frac{t_p}{2} = \frac{40}{t_p} \Rightarrow at_p^2 = 80 \text{ m}$$

اکنون مکان متحرک A را در لحظه t' پیدا می‌کنیم:

$$x'_A = \frac{1}{2} a t'^2 + v_{0,A} t' + x_{0,A} = \frac{1}{2} a \left(\frac{t_p}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} a t_p^2 \xrightarrow{at_p^2 = 80 \text{ m}} x'_A = \frac{1}{8} \times 80 = 10 \text{ m}$$

$$x'_B - x'_A = 20 - 10 = 10 \text{ m}$$

در پایان فاصله دو متحرک در لحظه t' را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۵۶

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع h در مبدأ زمان رها می‌شود. اندازه جابه‌جایی گلوله در n ثانیه سوم، چند برابر اندازه جابه‌جایی آن در n ثانیه دوم است؟ ($h > \frac{9}{2} gn^2$)

$$\frac{9n}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{5n}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره حرکت سقوط آزاد نوعی حرکت با شتاب ثابت محسوب می‌شود. پس وقتی حرکت با شتاب ثابت روی محور X را به خوبی یاد گرفته باشید، در حرکت سقوط آزاد هم مشکلی نخواهید داشت. مثلاً همین تست، یکی از سؤال‌های کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ ریاضی است که با تغییراتی جزئی، تبدیل به یک تست از سقوط آزاد شده است.

درس نامه ●●

در سقوط آزاد یک جسم (بدون سرعت اولیه)، جابه‌جایی آن در n ثانیه m م حرکت، از رابطه زیر، به دست می‌آید:

$$\Delta y = (m - 0 / 5) g n^2$$

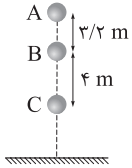
↓ جابه‌جایی (m)
↓ شتاب گرانش (m/s^2)

پاسخ تشریحی نسبت اندازه جابه‌جایی گلوله در n ثانیه سوم به اندازه جابه‌جایی آن در n ثانیه دوم برابر است با:

$$\frac{\Delta y_3}{\Delta y_2} = \frac{(3 - 0 / 5) g n^2}{(2 - 0 / 5) g n^2} = \frac{2 / 5}{1 / 5} = \frac{5}{3}$$

تست و پاسخ ۵۷

در شکل زیر، در شرایط خلأ، گلوله‌ای از نقطه A رها می‌شود. اندازه سرعت متوسط گلوله در بازه زمانی‌ای که از نقطه B به نقطه C می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



۴ (۱)

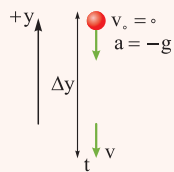
۵ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه



۱) در سقوط آزاد، تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم، وزن آن است. اگر جهت مثبت محور y را روبه بالا در نظر بگیریم، برای جسمی که از مبدأ محور رها می‌شود می‌توان نوشت:

$y = -\frac{1}{2} g t^2$ معادله مکان - زمان:

$v = -g t$ معادله سرعت - زمان:

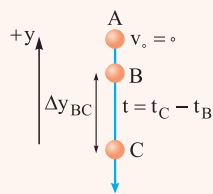
$v^2 = -2 g \Delta y$ معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان):

$v_{av} = \frac{v}{2}$ معادله سرعت متوسط:

y : مکان جسم (m) g : شتاب گرانش (m/s^2) t : زمان (s)

v : سرعت (m/s) v_{av} : سرعت متوسط (m/s)

۲) هنگام نوشتن معادلات سقوط آزاد بین دو نقطه دلخواه B و C در طول مسیر داریم:



$$\Delta y_{BC} = -\frac{1}{2} g t^2 + v_B t$$

$$v_C = -g t + v_B$$

$$v_C^2 - v_B^2 = -2 g \Delta y_{BC}$$

$$v_{av} = \frac{v_B + v_C}{2}$$

گام اول: با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی، سرعت گلوله را در نقاط B و C به دست می‌آوریم:

$$v_B^2 = -2g(\Delta y_{AB}) \xrightarrow{\frac{g=10 \text{ m/s}^2}{\Delta y_{AB}=-3/2 \text{ m}}} v_B^2 = -2 \times 10 \times (-3/2) = 64 \Rightarrow v_B = -8 \text{ m/s}$$

$$v_C^2 = -2g(\Delta y_{AC}) \xrightarrow{\frac{g=10 \text{ m/s}^2}{\Delta y_{AC}=-7/2 \text{ m}}} v_C^2 = -2 \times 10 \times (-7/2) = 144 \Rightarrow v_C = -12 \text{ m/s}$$

گام دوم: اندازه سرعت متوسط گلوله در فاصله B تا C را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_B + v_C}{2} \xrightarrow{\frac{v_B=-8 \text{ m/s}}{v_C=-12 \text{ m/s}}} v_{av} = \frac{-8 + (-12)}{2} = -10 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av}| = 10 \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۵۸

در شرایط خلأ گلوله‌ای از ارتفاع h رها می‌شود. اگر گلوله در مدت $۳s$ ، از ارتفاع ۱۴۰ متری به ارتفاع ۵۰ متری سطح زمین برسد، $۲s$ قبل از رسیدن به سطح زمین، از ارتفاع چند متری عبور می‌کند؟ ($g = ۱۰ \text{ m/s}^2$)

۱۲۰ (۴)

۹۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۵ (۱)

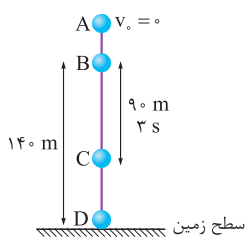
پاسخ: گزینه ۳

درس نامه

اگر در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع h رها شود و کل زمان سقوط آن تا لحظه رسیدن به زمین t ثانیه باشد، مسافتی را که در n ثانیه آخر حرکت طی می‌کند (ℓ) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\ell = \frac{1}{2}gn(2t - n)$$

g : شتاب گرانش (m/s^2)



گام اول: معادله جابه‌جایی - زمان را بین دو نقطه B و C می‌نویسیم تا v_B را به دست آوریم:

$$\Delta y_{BC} = -\frac{1}{2}gt_{BC}^2 + v_B t_{BC} \xrightarrow[t_{BC}=3s]{g=10 \text{ m/s}^2} -90 = -\frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 + v_B \times 3$$

$$\Rightarrow -90 = -45 + 3v_B \Rightarrow v_B = -\frac{45}{3} = -15 \text{ m/s}$$

گام دوم: معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) را بین دو نقطه A و B می‌نویسیم و فاصله A تا B را حساب می‌کنیم:

$$v_B^2 - v_A^2 = -2g\Delta y_{AB} \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{v_A=0, v_B=-15 \text{ m/s}} (-15)^2 = -2(10)\Delta y_{AB} \Rightarrow \Delta y_{AB} = \frac{225}{-20} = -11.25 \text{ m}$$

گام سوم: کل ارتفاع سقوط از A تا D را حساب می‌کنیم و از آنجا کل زمان سقوط را به دست می‌آوریم:

$$AD = AB + BD \Rightarrow AD = 11.25 + 140 = 151.25 \text{ m}$$

$$\Delta y_{AD} = -\frac{1}{2}gt_{AD}^2 \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{\Delta y_{AD} = -151.25 \text{ m}} -151.25 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t_{AD}^2 \Rightarrow 30.25 = t_{AD}^2 \Rightarrow t_{AD} = 5.5 \text{ s}$$

گام چهارم: مسافتی را که گلوله در ۲ ثانیه آخر حرکت خود پیموده است (ℓ) پیدا می‌کنیم:

$$\ell = \frac{1}{2}gn(2t - n) \xrightarrow[t=t_{AD}=5.5s]{g=10 \text{ m/s}^2, n=2} \ell = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 \times (2 \times 5.5 / 5 - 2) \Rightarrow \ell = 10 \times (9) = 90 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۵۹

ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین، ۳۲ m بیشتر از ارتفاع نقطه B نسبت به سطح زمین است. در لحظه‌ای، یک گلوله از نقطه A و $۱/۶s$ بعد، گلوله دیگری از نقطه B رها می‌شود. اگر دو گلوله با هم به سطح زمین برسند، ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین چند متر است؟

($g = ۱۰ \text{ m/s}^2$) و مقاومت هوا ناچیز است.)

۵۴/۲ (۴)

۴۹/۲ (۳)

۴۴/۲ (۲)

۳۹/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه در معادلات حرکت سقوط آزاد، اگر ارتفاع سقوط را با h و جابه‌جایی را با Δy نشان دهیم می‌توان نوشت:

$$\Delta y = -h \xrightarrow{\Delta y = -h} h = \frac{1}{2}gt^2$$

بر این اساس معادله جابه‌جایی - زمان (بدون سرعت اولیه) به صورت زیر نیز به کار می‌رود:

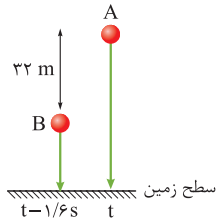
t : زمان سقوط (س)

g : شتاب گرانش (m/s^2)

h : ارتفاع سقوط (م)

پاسخ تشریحی گام اول: معادله جابه‌جایی - زمان را برای هر یک از دو گلوله می‌نویسیم. اگر زمان سقوط گلوله A را با t نشان دهیم، زمان

سقوط گلوله B برابر با $t - 1/6$ s خواهد بود.



$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \begin{cases} h_A = \frac{1}{2} g t^2 \\ h_B = \frac{1}{2} g (t - 1/6)^2 \end{cases}$$

گام دوم: اکنون زمان سقوط گلوله A را به دست می‌آوریم:

$$h_A - h_B = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 - \left(\frac{1}{2} \times 10 \times (t - 1/6)^2 \right) = 5t^2 - 5(t - 1/6)^2 \Rightarrow 32 = 5t^2 - 5(t - 1/6)^2$$

$$\Rightarrow 32 = 5t^2 - 5(t^2 - 2/2t + 2/56) \Rightarrow 32 = 5t^2 - 5t^2 + 16t - 12/8 \Rightarrow 32 + 12/8 = 16t \Rightarrow t = \frac{44/8}{16} = 2/8 \text{ s}$$

گام سوم: ارتفاع سقوط گلوله A را حساب می‌کنیم:

$$h_A = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow[t=2/8 \text{ s}]{g=10 \text{ m/s}^2} h_A = \frac{1}{2} \times 10 \times (2/8)^2 = 5 \times 7/84 = 39/2 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۶۰

در شرایط خلأ، از نقطه‌ای به ارتفاع ۱۲۵ m نسبت به سطح زمین، دو گلوله به فاصله زمانی t رها می‌شوند. اگر بیشینه فاصله دو گلوله در حین

حرکت آن‌ها $36/8$ m باشد، t برابر چند ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$1/8 (4)$$

$$1/2 (3)$$

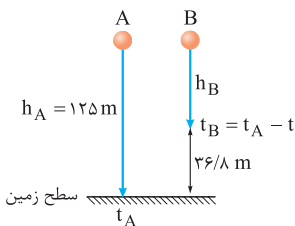
$$0/8 (2)$$

$$0/2 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس‌نامه وقتی دو گلوله به فاصله زمانی معین، از ارتفاع یکسانی نسبت به سطح زمین رها می‌شوند تا سقوط آزاد کنند، فاصله بین

آن‌ها به تدریج بیشتر می‌شود، بنابراین بیشینه این فاصله، در لحظه‌ای خواهد بود که گلوله اول به سطح زمین برسد.



پاسخ تشریحی گام اول: فرض می‌کنیم گلوله A را رها کرده و t ثانیه بعد، گلوله B را رها

کنیم. بر این اساس، اگر زمان سقوط گلوله A را t_A و زمان سقوط گلوله B را t_B در نظر بگیریم

می‌توان نوشت:

$$t_B = t_A - t$$

زمانی که گلوله A به زمین می‌رسد، ارتفاع سقوط گلوله B برابر است با:

$$h_B = h_A - 36/8 \xrightarrow{h_A=125 \text{ m}} h_B = 125 - 36/8 = 88/2 \text{ m}$$

گام دوم: زمان سقوط گلوله A را به کمک معادله جابه‌جایی - زمان، حساب می‌کنیم:

$$h_A = \frac{1}{2} g t_A^2 \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{h_A=125 \text{ m}} 125 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_A^2 \Rightarrow t_A^2 = \frac{125}{5} = 25 \Rightarrow t_A = 5 \text{ s}$$

$$t_B = t_A - t \xrightarrow{t_A=5 \text{ s}} t_B = 5 - t$$

بنابراین زمان سقوط گلوله B برابر است با:

گام سوم: معادله جابه‌جایی - زمان را برای گلوله B نیز می‌نویسیم و زمان سقوط t_B را پیدا می‌کنیم:

$$h_B = \frac{1}{2} g t_B^2 \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{h_B=88/2 \text{ m}} 88/2 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_B^2 \Rightarrow t_B^2 = \frac{88/2}{5} = 17/64 \Rightarrow t_B = \sqrt{17/64} = 4/2 \text{ s}$$

در پایان زمان t را به دست می‌آوریم:

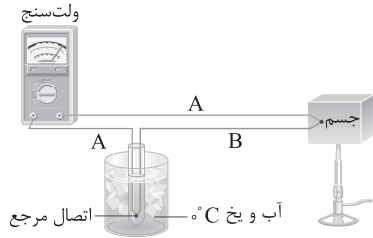
$$t_B = 5 - t \xrightarrow{t_B=4/2 \text{ s}} 4/2 = 5 - t \Rightarrow t = 0/8 \text{ s}$$



فیزیک دهم

تست و پاسخ ۶۱

شکل زیر، طرح ساده‌ای از کدام وسیله را نشان می‌دهد و کاربرد اصلی این وسیله کدام است؟

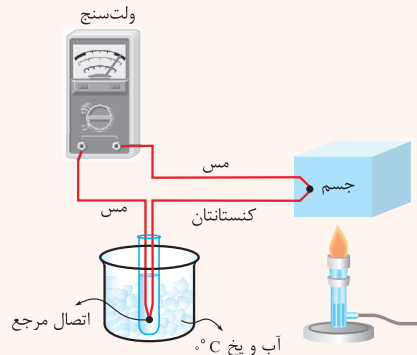


- (۱) ترموکوپل، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی وسایل گرمایشی و سرمایشی
- (۲) ترموستات، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی وسایل گرمایشی و سرمایشی
- (۳) ترموکوپل، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی
- (۴) ترموستات، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره کنکور ۱۴۰۳ به ما نشان داده است که طراحها علاقه زیادی به سؤال‌هایی از متن و شکل‌های کتاب درسی دارند، پس متن کتاب را به دقت بخوانید.

درس نامه



دماسنج ترموکوپل تا پیش از سال ۱۹۹۰ میلادی جزء دماسنج‌های معیار بوده است. این دماسنج کاربرد فراوانی در صنعت و آزمایشگاه دارد (در مدارهای الکترونیکی و بسیاری از وسایل صنعتی، گرمایشی و سرمایشی به کار می‌رود). کمیت دماسنجی این دماسنج، ولتاژ است.

شکل مقابل طرحی از یک دماسنج ترموکوپل را نشان می‌دهد:

گستره دماسنجی ترموکوپل به جنس سیم‌های آن بستگی دارد. به دلیل جرم کوچک محل اتصال، دمای جسم را خیلی سریع اندازه می‌گیرد.

پاسخ تشریحی

با توجه به درس‌نامه‌ای که بررسی کردیم، شکل، مربوط به ترموکوپل است و در مدارهای الکترونیکی وسایل گرمایشی و سرمایشی استفاده می‌شود.

تست و پاسخ ۶۲

اگر دمای جسمی برحسب درجه سلسیوس ۵ برابر شود، دمای آن برحسب درجه فارنهایت ۲۷ واحد کاهش می‌یابد. دمای اولیه این جسم چند کلوین بوده است؟ ($0^{\circ}\text{K} = -273/15^{\circ}\text{C}$)

- | | |
|------------|------------|
| ۲۶۹/۴ (۲) | ۲۷۶/۹ (۱) |
| ۲۷۶/۱۵ (۴) | ۲۷۰/۱۵ (۳) |

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ ، دمای اولیه جسم را برحسب درجه سلسیوس به دست آورید؛ سپس از رابطه $T = \theta + 273/15$ ، دمای اولیه جسم را برحسب کلوین محاسبه کنید.

درس نامه

سه مقیاس دمای متداول که در کتاب درسی بررسی می‌کنیم به صورت زیر هستند:

سلسیوس (θ) ← یکا $^{\circ}\text{C}$

کلوین (T) ← یکا K (یکای دما در SI کلوین است.)

فارنهایت (F) ← یکا $^{\circ}\text{F}$

$$T = \theta + 273 \quad , \quad F = \frac{9}{5}\theta + 32$$

روابط بین مقیاس‌های دما به صورت مقابل است:

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



روابط بین تغییرات دما در مقیاس‌های مختلف دما به صورت زیر است:

$$\Delta T = \Delta \theta, \quad \Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta = \frac{9}{5} \Delta T$$

پاسخ تشریحی گام اول: اگر دمای اولیه جسم را θ_1 در نظر بگیریم، دمای ثانویه θ_2 است. طبق رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ داریم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \xrightarrow{\Delta F = -27^\circ F, \Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 = 4\theta_1} -27 = \frac{9}{5} (4\theta_1) \Rightarrow \theta_1 = -\frac{27 \times 5}{9 \times 4} = -3/75^\circ C$$

گام دوم: دمای اولیه جسم را برحسب کلونین به دست می‌آوریم:

$$T_1 = \theta_1 + 273/15 = -3/75 + 273/15 = 269/4 K$$

تست و پاسخ ۶۳

در شکل زیر، میله فولادی به طول ۲ m بین دو دیواره ثابت قرار دارد و فاصله هر انتهای میله از دیوار مجاورش ۱ mm است. دمای میله، حداقل چند درجه فارنهایت افزایش باید تا میله با دیواره‌ها تماس پیدا کند؟ (ضریب انبساط طولی فولاد $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ است.)



- | | |
|---------|--------|
| ۸۰ (۲) | ۴۰ (۱) |
| ۱۴۴ (۴) | ۷۲ (۳) |

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره: از رابطه $\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$ برای محاسبه تغییرات دما برحسب درجه سلسیوس استفاده کنید (تغییر طول میله را ۲ mm در نظر بگیرید، چون میله از دو طرف تغییر طول می‌دهد)، سپس از رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ برای محاسبه تغییر دما برحسب درجه فارنهایت استفاده کنید.

درس نامه

اگر دمای میله‌ای با طول اولیه L_1 ، به اندازه $\Delta \theta$ تغییر کند، طول میله به اندازه ΔL تغییر می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

تغییرات دما برحسب کلونین یا سلسیوس

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$$

ضریب انبساط طولی ($\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ C}$)

اگر دمای جسمی برحسب سلسیوس به اندازه $\Delta \theta$ تغییر کند، تغییر دمای آن برحسب فارنهایت (ΔF) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$$

پاسخ تشریحی گام اول: برای این که میله فولادی با دیواره‌ها برخورد کند، تغییرات طول میله باید ۲ mm باشد (۱ mm از هر طرف). به کمک رابطه $\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$ داریم:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta \Rightarrow 2 = 1/25 \times 10^{-5} \times 2000 \times \Delta \theta \Rightarrow$$

طول اولیه برحسب میلی‌متر

$$2 = 2/5 \times 10^{-2} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{2}{2/5 \times 10^{-2}} = \frac{200}{2/5} = 80^\circ C$$

حواستون باشه در رابطه $\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$ ، باید یکای ΔL و L_1 یکسان باشد؛ مثلاً می‌تواند هر دو میلی‌متر یا هر دو سانتی‌متر باشد و لزومی ندارد یکای آن‌ها در واحد SI باشد.

گام دوم: حال به کمک رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ تغییرات دما را برحسب درجه فارنهایت به دست می‌آوریم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta = \frac{9}{5} (80) = 144^\circ F$$



تست و پاسخ ۶۴

اگر دمای یک کره فلزی توپر 144K افزایش یابد، مساحت سطح آن 24% درصد افزایش می‌یابد. اگر دمای همین کره 100K افزایش یابد، چگالی آن تقریباً چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) 25% ، کاهش می‌یابد.
 (۲) 45% ، کاهش می‌یابد.
 (۳) 25% ، افزایش می‌یابد.
 (۴) 45% ، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۱

خود حل کنی بهتره ابتدا به کمک رابطه $\frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = (2\alpha) \Delta\theta \times 100$ که بیانگر درصد تغییرات مساحت است، α (ضریب انبساط طولی) را به دست آورید، سپس در حالت دوم درصد تغییرات چگالی را به کمک رابطه $\frac{\Delta \rho}{\rho_1} \times 100 = -(3\alpha) \Delta\theta \times 100$ محاسبه کنید.

درس نامه

معمولاً با افزایش دمای جسم، طول، سطح و حجم جسم افزایش می‌یابد. اگر دمای یک جسم به اندازه $\Delta\theta$ تغییر کند در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \text{درصد تغییرات طول} &= \alpha \Delta\theta \times 100 \\ \text{درصد تغییرات سطح} &= (2\alpha) \Delta\theta \times 100 \\ \text{درصد تغییرات حجم} &= (3\alpha) \Delta\theta \times 100 = \beta \Delta\theta \times 100 \\ \text{درصد تغییرات چگالی} &= -(3\alpha) \Delta\theta \times 100 = -\beta \Delta\theta \times 100 \end{aligned}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به این که با افزایش دما به اندازه 144K ، مساحت کره 24% درصد افزایش یافته، به کمک رابطه زیر، ضریب انبساط طولی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A}{A_1} \times 100 &= (2\alpha) \Delta\theta \times 100 = 24\% \Rightarrow 2\alpha \times 144 \times 100 = 24 \times 10^{-2} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{24 \times 10^{-2}}{2 \times 144 \times 100} = \frac{10^{-4}}{12} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

گام دوم: درصد تغییرات چگالی را به کمک رابطه $-(3\alpha) \Delta\theta \times 100$ در حالت دوم که دما 100K افزایش یافته است را به دست می‌آوریم: علامت منفی پاسخ بیانگر کاهش چگالی است.

$$\text{درصد تغییرات چگالی} = -3\alpha \Delta\theta \times 100 = -3 \times \frac{10^{-4}}{12} \times 100 \times 100 = -25\%$$

تست و پاسخ ۶۵

در دمای 20°C ، در ظرفی به گنجایش 1L و ضریب انبساط طولی 10^{-4}K^{-1} ، 900cm^3 از مایعی به ضریب انبساط حجمی $\frac{1}{4} \times 10^{-3}\text{K}^{-1}$ وجود دارد. با افزایش دمای مجموعه، در دمای چند درجه فارنهایت، مایع از ظرف سرریز می‌شود؟

- (۱) $187/5$
 (۲) $207/5$
 (۳) $223/5$
 (۴) $255/5$

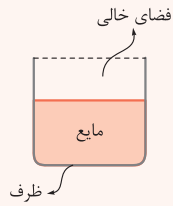
پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره تغییر حجم مایع را به کمک رابطه $\Delta V = V_1(\text{مایع}) \beta \Delta\theta$ به دست آورید و این تغییر حجم را با مجموع حجم فضای خالی اولیه و تغییر حجم ظرف بر اثر انبساط $(3\alpha) \Delta\theta$ ظرف $(\Delta V = V_{(1)})$ برابر قرار دهید تا $\Delta\theta$ و در نهایت دمای ثانویه را برحسب فارنهایت محاسبه کنید.



درس نامه

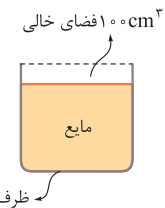
شکل زیر، یک ظرف را نشان می‌دهد که درون آن مایعی با حجم $V_{\text{مایع}}$ و ضریب انبساط حجمی β ریخته شده است. اگر حجم ظرف را با $V_{\text{ظرف}}$ نمایش دهیم، در این صورت حداکثر تغییر دما برای این که مایع از ظرف لبریز نشود از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\Delta V_{\text{مایع}} = V_{\text{فضای خالی}} + \Delta V_{\text{ظرف}} \Rightarrow V_1(\text{مایع}) \beta \Delta \theta = V_1(\text{ظرف}) (\alpha \Delta \theta) + V_1(\text{فضای خالی})$$

پاسخ تشریحی گام اول: زمانی مایع از ظرف سرریز می‌شود که تغییرات حجم مایع برابر با حجم فضای خالی داخل ظرف باشد و علاوه بر آن بتواند تغییر حجم ظرف را هم پوشش دهد (چون علاوه بر افزایش حجم مایع، ظرف هم منبسط می‌شود).

شکل مقابل تصویری از ظرف به گنجایش $V = 1000 \text{ cm}^3$ و مایع به حجم 900 cm^3 را نشان می‌دهد:



شرط سرریز شدن مایع: $\Delta V_{\text{مایع}} = 100 \text{ cm}^3 + \Delta V_{\text{ظرف}}$

گام دوم: شرط سرریز شدن مایع در گام اول را به صورت عددی می‌نویسیم تا دمای ثانویه را به دست آوریم:

$$\Delta V_{\text{مایع}} = 100 \text{ cm}^3 + \Delta V_{\text{ظرف}} \Rightarrow V_1(\text{مایع}) \beta \Delta \theta = 100 + V_1(\text{ظرف}) \beta \Delta \theta$$

$$\Rightarrow 900 \times 1/4 \times 10^{-3} \Delta \theta = 100 + 1000 \times (3 \times 10^{-4}) \Delta \theta$$

$$\Rightarrow 1/26 \Delta \theta = 100 + 0/3 \Delta \theta \Rightarrow 0/96 \Delta \theta = 100 \Rightarrow \Delta \theta = \frac{100}{0/96} = \frac{10000}{96} = \frac{625}{6}$$

$$\theta_f = \Delta \theta + \theta_1 = \frac{625}{6} + 20 = \frac{745}{6} \text{ } ^\circ\text{C}$$

گام سوم: دمای ثانویه را به کمک رابطه $F = \frac{9}{5}\theta + 32$ برحسب فارنهایت به دست می‌آوریم:

$$F_f = \frac{9}{5}\theta_f + 32 = \frac{9}{5}\left(\frac{745}{6}\right) + 32 = 255/5 \text{ } ^\circ\text{F}$$

تست و پاسخ ۶۶

در دمای معین، چگالی مایع A، ۲ برابر چگالی مایع B، گرمای ویژه مایع A، ۳ برابر گرمای ویژه مایع B و ضریب انبساط حجمی مایع A، نصف ضریب انبساط حجمی مایع B است. اگر دو مایع گرمای یکسانی دریافت کنند، حجم آن‌ها به ترتیب به اندازه ΔV_A و ΔV_B افزایش می‌یابد. چند برابر ΔV_B است؟

۳ (۴)

۱۲ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا با برابر قراردادن گرمای دریافت‌شده توسط دو جسم A و B طبق رابطه $Q = mc \Delta \theta$ ، رابطه‌ای بین حجم

اولیه و تغییر دمای دو جسم A و B به دست می‌آید؛ سپس از رابطه $\Delta V = V_1 \beta \Delta \theta$ ، تغییرات حجم دو جسم A و B را مقایسه کنید.

درس نامه

اگر مایعی با ضریب انبساط حجمی β در اثر تغییر دمای $\Delta \theta$ تغییر حجم دهد، رابطه زیر برقرار است:

$$\Delta V = V_1 \beta \Delta \theta \rightarrow \text{تغییر دما (C یا K)}$$

↑ حجم اولیه

↓ تغییر حجم

ضریب انبساط حجمی ($\frac{1}{C}$ یا $\frac{1}{K}$)



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به این که دو مایع گرمای یکسانی دریافت می کنند، $Q_A = Q_B$ است؛ بنابراین داریم:

$$Q_A = Q_B \Rightarrow m_A c_A \Delta\theta_A = m_B c_B \Delta\theta_B \Rightarrow \rho_A V_A c_A \Delta\theta_A = \rho_B V_B c_B \Delta\theta_B$$

$$\frac{\rho_A = 2\rho_B}{c_A = 3c_B} \rightarrow (2\rho_B) V_A (3c_B) \Delta\theta_A = \rho_B V_B c_B \Delta\theta_B$$

$$\Rightarrow 6V_A \Delta\theta_A = V_B \Delta\theta_B$$

گام دوم: از رابطه $\Delta V = V_1 (\beta) \Delta\theta$ برای مقایسه تغییر حجم مایع های A و B استفاده می کنیم:

$$\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_{1A} \beta_A \Delta\theta_A}{V_{1B} \beta_B \Delta\theta_B} \xrightarrow{V_{1A}=V_A, V_{1B}=V_B} \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_A \Delta\theta_A}{V_B \Delta\theta_B} \times \frac{\beta_A}{\beta_B} = \frac{V_A \Delta\theta_A}{6V_A \Delta\theta_A} \times \frac{1}{2} \frac{\beta_B}{\beta_A} = \frac{1}{12}$$

تست و پاسخ ۶۷

گرمکنی به توان ۵۰۰ W و بازده ۶۳ درصد را درون ۳۰۰ g آب با دمای ۱۰°C قرار می دهیم. دمای آب پس از ۲۰۰ s به چند درجه سلسیوس

می رسد؟ $(c = 4200 \frac{J}{kg.K})$

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۳۵ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ برای محاسبه تغییر دما استفاده کنید، البته به جای Q معادل آن یعنی $(Pt) \times Ra$ را

در معادله قرار داده و در نهایت دمای ثانویه را به دست آورید.

درس نامه

به آهنگ انرژی گرمایی، توان گرمایی گفته می شود که به کمک رابطه $P = \frac{Q}{t}$ به دست می آید. این رابطه می تواند به صورت ترکیبی زیر استفاده شود:

$$Q = mc \Delta\theta \Rightarrow Pt = mc \Delta\theta$$

$$Q = mL_F \Rightarrow Pt = mL_F$$

$$Q = mL_V \Rightarrow Pt = mL_V$$

در صورتی که بازده گرمکن، صددرصد نباشد باید اثر آن را لحاظ کنیم و توان گرمایی مفید را در رابطه بالا قرار دهیم.

پاسخ تشریحی گام اول: به کمک رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، تغییرات دمای آب را به دست می آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow (Pt) \times Ra = mc\Delta\theta \Rightarrow 500 \times 200 \times 0.63 = 0.3 \times 4200 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{63 \times 1000}{3 \times 420} = 50^\circ C$$

بازدهی گرمکن

$$\Delta\theta = \theta_p - \theta_1 \Rightarrow 50 = \theta_p - 10 \Rightarrow \theta_p = 60^\circ C$$

گام دوم: دمای ثانویه آب را به دست می آوریم:

تست و پاسخ ۶۸

در فشار ۱ atm، مقداری آب ۴۰°C، با دریافت گرما به جوش آمده و به طور کامل تبخیر می شود. چند درصد از گرمای دریافتی آب صرف تبخیر آن

شده است؟ $(c_{\text{آب}} = 4200 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$ و $L_V = 2268 J/g$ تبخیر سطحی ناچیز است.)

۹۹ (۴)

۹۰ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره مقدار گرمایی که آب ۴۰°C نیاز دارد تا به بخار ۱۰۰°C برسد را به دست آورید (البته مرحله به مرحله)، سپس

نسبت مقدار گرمایی که باعث تبخیر شدن آب شده است $(Q = mL_V)$ را به کل گرمای دریافتی را محاسبه کنید.



درس نامه ●●

اگر مایعی به جرم m در نقطه جوش خود قرار داشته باشد، با دریافت گرمای Q ، مایع تبخیر می‌شود و مقدار این گرما از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = m L_V$$

جرم (kg) ↑
← گرما (J)
↓ گرمای نهان تبخیر (J/kg)

پاسخ تشریحی گام اول: طرح‌واره زیر فرایندی را که باعث می‌شود آب با دمای 40°C به طور کامل تبخیر شود، نمایش می‌دهد:

$$m \text{ گرم آب } 100^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_1} m \text{ گرم آب } 40^\circ\text{C} \quad m \text{ گرم بخار } 100^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_2}$$

گام دوم: خواسته سؤال، نسبت گرمای Q_2 (مقدار گرمایی که باعث تبخیر شدن می‌شود) به گرمای کل $(Q_1 + Q_2)$ است:

$$\frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{m L_V}{m c \Delta\theta + m L_V} = \frac{L_V}{c \Delta\theta + L_V} = \frac{2268}{4/2 \times 60 + 2268} = \frac{2268}{2520} = 0.9$$

۹۰ درصد گرمای داده‌شده به آب باعث تبخیر آن می‌شود.

حواستون باشه در رابطه بالا، m را برحسب گرم فرض کردیم، بنابراین مقدار c را برحسب $\frac{\text{J}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$ قرار داده‌ایم که برابر $4/2 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$ است.

تست و پاسخ ۶۹

درون ظرفی 800 g آب با دمای 20°C وجود دارد. یک قطعه مسی به جرم 750 g و دمای 80°C را در آب درون این ظرف می‌اندازیم. اگر در این فرایند، تا برقراری تعادل گرمایی $3/36 \text{ kJ}$ گرما تلف شود، دمای تعادل مجموعه چند درجه سلسیوس است؟ (گرمای ویژه آب و مس به ترتیب

$$\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \text{ و } \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \text{ است.})$$

۲۸ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره مجموع مقدار گرمایی که مس باید از دست بدهد با مقدار گرمایی که آب لازم دارد تا به دمای تعادل برسد را برابر $3/36 \text{ kJ}$ قرار دهید. علت منفی بودن هم اتلاف انرژی است.

درس نامه ●●

اگر چند جسم با دماهای مختلف در کنار هم باشند، به دلیل اختلاف دما T گرما از جسم با دمای بیشتر به جسم با دمای کم‌تر منتقل می‌شود و این روند تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که دمای دو جسم برابر شود (دمای تعادل).

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = Q_{\text{تلف شده}}$$

↓
این مقدار گرما را با علامت منفی در نظر می‌گیریم.

پاسخ تشریحی گام اول: 800 g آب با دمای 20°C ، با دریافت گرمای Q_1 و قطعه مسی با دمای 80°C با از دست دادن گرمای Q_2 به دمای تعادل (θ_e) می‌رسد که طرح‌واره آن به صورت مشخص شده است:

$$750 \text{ گرم مس } 80^\circ\text{C} \xleftarrow{Q_2} 750 \text{ g مس با دمای } \theta_e + 800 \text{ g آب با دمای } \theta_e \xrightarrow{Q_1} 800 \text{ گرم آب } 20^\circ\text{C}$$

گام دوم: با توجه به این که $3/36 \text{ kJ}$ گرما تلف می‌شود، مجموع گرمای Q_1 و Q_2 برابر $3/36 \text{ kJ}$ است.

$$Q_1 + Q_2 = -3/36 \text{ kJ} \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_e - 20) + m_{\text{مس}} c_{\text{مس}} (\theta_e - 80) = -3/36 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow 800 \times 4/2 \times (\theta_e - 20) + 750 \times 0.4 (\theta_e - 80) = -3/36 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 3360 (\theta_e - 20) + 300 (\theta_e - 80) = -3/36 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 11/2 (\theta_e - 20) + (\theta_e - 80) = -11/20 \Rightarrow 12/2 \theta_e - 30.4 = -11/2 \Rightarrow 12/2 \theta_e = 29.2/8 \Rightarrow \theta = 24^\circ\text{C}$$



تست و پاسخ ۷۰

مقداری یخ به جرم m و دمای 0°C را درون ظرف حاوی 900 g آب 20°C می‌اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی، 60% درصد از جرم یخ ذوب شده باشد، m بر حسب گرم کدام است؟ $(c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$ ، $L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$ و تبادل گرمایی فقط بین آب و یخ صورت می‌گیرد.)

- ۷۵۰ (۱) ۶۲۵ (۲) ۳۷۵ (۳) ۲۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از آن جایی که بخشی از یخ هم‌چنان در مخلوط باقی مانده است، دمای تعادل 0°C است. مقدار گرمایی که لازم است تا 60% درصد جرم یخ ($0/6 m$) ذوب شود را با مقدار گرمایی که 900 g آب 20°C باید از دست بدهد تا به دمای 0°C برسد، برابر قرار دهی تا به مقدار جرم یخ برسید.

درس نامه

در تعادل بین آب و یخ، دمای تعادل صفر درجه سلسیوس است. در این حالت مقدار گرمایی که آب از دست می‌دهد با مقدار گرمایی که یخ دریافت می‌کند برابر است (البته اگر تبادل گرما فقط بین آب و یخ باشد).
نکته‌ای که در تعادل گرمایی بین آب و یخ وجود دارد، این است که ممکن است سه حالت رخ دهد:
(۱) یخ در دمای صفر درجه باشد و اصلاً ذوب نشود.
(۲) مقداری از یخ ذوب شود.
(۳) یخ به طور کامل ذوب شود.

پاسخ تشریحی

گام اول: پس از برقراری تعادل گرمایی بین آب و یخ، دمای هر دو به صفر درجه سلسیوس می‌رسد. 900 g آب 20°C گرما از دست می‌دهد تا به آب صفر درجه سلسیوس برسد و این مقدار گرما باعث ذوب شدن 60% درصد از جرم یخ می‌شود؛ به عبارتی در طرح‌واره زیر داریم:
 900 g آب 20°C $\xrightarrow{Q_1}$ $0/6 m + 900\text{ g}$ آب 0°C $\xleftarrow{Q_2}$ m گرم یخ 0°C
گام دوم: از آن‌جا که تبادل گرما بین آب و یخ صورت می‌گیرد، مجموع گرمای Q_1 و Q_2 برابر صفر است:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta\theta + m' L_F = 0$$

مقدار یخی که ذوب می‌شود.

$$900 \times 4/2 \times (-20) + 0/6 m \times (336) = 0 \Rightarrow -900 \times 42 \times 2 + 0/6 \times 336 m = 0$$

$$m = \frac{900 \times 42 \times 2}{0/6 \times 336} = \frac{900 \times 2}{0/6 \times 8} = \frac{1800}{4/8} = 375\text{ g}$$

تست و پاسخ ۷۱

در چاله کوچکی 800 g آب 0°C قرار دارد. اگر در همین دما بر اثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شود و باقی‌مانده آن یخ ببندد، جرم آب یخ‌زده چند گرم است؟ (گرمای نهان تبخیر آب در دمای 0°C برابر 2352 kJ/kg و گرمای نهان ذوب یخ برابر 336 kJ/kg است.)

- ۷۲۰ (۴) ۷۰۰ (۳) ۱۰۰ (۲) ۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید. این سؤال برگرفته از کتاب درسی است.

خودت حل کنی بهتره m گرم از آب چاله با از دست‌دادن مقداری گرما به یخ تبدیل می‌شود و بقیه آب ($800 - m$) گرم) با دریافت این مقدار گرما، تبخیر می‌شود. کافی است اندازه این دو گرما را با هم برابر قرار دهید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** اگر جرم آب یخ‌زده را m گرم در نظر بگیریم، $(800 - m)$ گرم آب با دریافت گرما تبخیر می‌شود (منظور همان تبخیر سطحی است).

$$Q_1 = (800 - m) L_V \quad \text{گرم آب گرمایی را که برای تبخیر نیاز دارد از } m \text{ گرم آبی دریافت می‌کند که تبدیل به یخ می‌شود:}$$

$$Q_2 = -m L_F$$



گام دوم: با توجه به اصل پایستگی انرژی، مجموع گرمای Q_1 و Q_2 برابر صفر است:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow (\lambda \cdot 100 - m) L_V - m L_F = 0 \Rightarrow (\lambda \cdot 100 - m) L_V = m L_F \Rightarrow (\lambda \cdot 100 - m) 2352 = m (336)$$

$$\Rightarrow (\lambda \cdot 100 - m)(\gamma) = m \Rightarrow \lambda \cdot 100 \times \gamma - \gamma m = m \Rightarrow \lambda \cdot 100 \times \gamma = \lambda m \Rightarrow m = 700 \text{ g}$$

تست و پاسخ ۷۲

در کدام یک از موارد زیر، روش انتقال گرما به درستی بیان شده است؟

الف) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن: رسانش گرمایی

ب) سیستم خنک کننده موتور اتومبیل: همرفت واداشته

پ) ذوب کردن برف اطراف توسط کلم اسکانک: تابش گرمایی

ت) سیستم گرم کننده مرکزی در ساختمان‌ها: همرفت طبیعی

الف و ب (۱) ب و پ (۲) پ و ت (۳) الف و ت (۴)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره طراحی سؤال کنکور جدیداً به متن کتاب درسی علاقه‌مند شده‌اند، پس کتاب درسی را خوب تحلیل کنید.

پاسخ تشریحی تک تک عبارتها را بررسی می‌کنیم:

الف) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن از طریق همرفت رخ می‌دهد. ✗

ب) سیستم خنک کننده موتور خودرو مثالی از انتقال گرما به روش همرفت واداشته است. ✓

پ) ذوب کردن برف توسط کلم اسکانک به روش تابش گرمایی صورت می‌گیرد. ✓

ت) سیستم گرم کننده مرکزی در ساختمان‌ها نمونه‌ای از مثال همرفت واداشته است که در آن شاره به کمک یک تلمبه به حرکت واداشته می‌شود. ✗

تست و پاسخ ۷۳

در محفظه‌ای به حجم ۴۲ لیتر، g ۲۴۰ گاز اکسیژن با دمای $7^\circ C$ قرار دارد. اگر دمای این گاز $70^\circ C$ افزایش یابد، فشار پیمانه‌ای آن چند برابر می‌شود؟ ($R = 8 \frac{J}{mol.K}$ ، فشار هوا $10^5 Pa$ و جرم مولی گاز اکسیژن $32 g/mol$ است).

الف) $\frac{6}{5}$ (۱) ب) $\frac{5}{4}$ (۲) ج) $\frac{4}{3}$ (۳) د) $\frac{3}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا طبق رابطه $PV = nRT$ ، فشار گاز را در حالت اول محاسبه کنید و در مرحله دوم با توجه به ثابت بودن

حجم گاز، فشار گاز را پس از تغییرات دما به دست آورید. در نهایت نسبت فشارهای پیمانه‌ای را حساب کنید.

درس نامه

در یک گاز کامل (آرمانی) نسبت PV به nT مقداری ثابت است و این مقدار ثابت تقریباً برابر $8 \frac{J}{mol.K}$ است.

$$\frac{PV}{nT} = R = \text{ثابت}$$

در صورتی که حجم گاز ثابت باشد و تعداد مول گاز تغییر نکنند، رابطه زیر در طی یک فرایند برقرار است:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{V_1 = V_2} \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \frac{\Delta P}{\Delta T}$$

پاسخ تشریحی گام اول: فشار گاز را قبل از تغییر دما (در حالت اول) به دست می‌آوریم:

$$P_1 V = nRT_1 \Rightarrow P_1 V = \frac{m}{M} RT_1 \Rightarrow P_1 \times 42 \times 10^{-3} = \frac{240}{32} \times 8 \times (273 + 7)$$

تبدیل سلسیوس به کلوین تبدیل لیتر به مترمکعب

$$\Rightarrow P_1 \times 42 \times 10^{-3} = \frac{240 \times 8 \times 280}{32} \Rightarrow P_1 = \frac{24 \times 8 \times 28}{32 \times 42} \times 10^5 = 4 \times 10^5 Pa$$

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



گام دوم: با توجه به این که حجم و مقدار گاز ثابت مانده است، برای محاسبه فشار در حالت دوم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \frac{\Delta P}{\Delta T} \Rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{\Delta P}{\Delta T} \Rightarrow \frac{4 \times 10^5}{(7 + 273)} = \frac{\Delta P}{70} \Rightarrow \Delta P = \frac{70 \times 4 \times 10^5}{280} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_2 = P_1 + \Delta P = 4 \times 10^5 + 10^5 = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

حواستون باشه تغییرات دما برحسب کلوین و سلسیوس برابر است. ($\Delta T = \Delta \theta$)

گام سوم: فشار پیمانه‌ای گاز را در حالت اول و دوم به دست آورده و نسبت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$P_{g1} = P_1 - P_0 = 4 \times 10^5 - 10^5 = 3 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{g2} = P_2 - P_0 = 5 \times 10^5 - 10^5 = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{P_{g2}}{P_{g1}} = \frac{4 \times 10^5}{3 \times 10^5} = \frac{4}{3}$$

تست و پاسخ ۷۴

یک حباب هوا به حجم 2 cm^3 در ته یک دریاچه به عمق 45 m و دمای 2°C قرار دارد. حباب تا سطح آب که دما در آنجا 27°C است، بالا می‌آید در لحظه‌ای که حباب به سطح آب می‌رسد، حجم آن چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، چگالی آب دریاچه 1 g/cm^3 ، فشار هوای محیط 10^5 Pa و دمای هوای حباب با دمای آب اطراف آن یکسان است.)

۲/۴ (۴)

۱/۲ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید. این سؤال برگرفته از تمرین کتاب درسی است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا فشار گاز را در عمق 45 m و سطح آب به دست آورید و سپس قانون گاز کامل را برای آن به کار ببرید

$$\left(\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \right) \text{ تا در نهایت حجم حباب را در سطح آب حساب کنید.}$$

درس نامه

اگر مقدار معینی از یک گاز کامل در ابتدای یک فرایند دارای فشار P_1 و حجم V_1 و دمای T_1 باشد و در انتهای فرایند فشار، حجم و دمای گاز به ترتیب به P_2 ، V_2 و T_2 برسد، در این صورت رابطه مقابل برقرار است:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

پاسخ تشریحی گام اول: فشار وارد بر حباب هوا را در هر دو حالت جداگانه به دست می‌آوریم:

$$P_1 = P_0 + \rho gh = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 45 = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_2 = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

گام دوم: با توجه به این که تعداد مول‌های گاز (حباب) تغییر نکرده است، معادله حالت را به کار می‌بریم:

$$\frac{PV}{T} = nR = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{5/5 \times 10^5 \times V_1}{(2+273)} = \frac{10^5 \times V_2}{(27+273)} \Rightarrow \frac{5/5 V_1}{275} = \frac{V_2}{300} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{300 \times 5/5}{275} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{0.2} = 6 \Rightarrow V_2 = 1.2 \text{ cm}^3$$

تست و پاسخ ۷۵

مطابق شکل در زیر پیستون آزاد به مساحت 20 cm^2 و وزن $W = 40 \text{ N}$ ، گاز آرمانی با دمای 17°C قرار دارد و فشار هوا 10^5 پاسکال است. اگر روی پیستون وزنه 80 نیوتونی قرار دهیم، وزنه 4 cm پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. در این حالت، دمای گاز چند درجه سلسیوس است؟

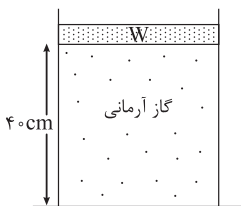
۷۵ (۲)

۵۸ (۱)

۳۴۸ (۴)

۳۳۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۲





خودت حل کنی بهتره فشار گاز را در حالت اول و دوم طبق رابطه $P = \frac{W}{A} + P_0$ محاسبه کنید، سپس از رابطه $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ برای محاسبه دمای ثانویه استفاده کنید.

پاسخ تشریحی گام اول: فشار گاز را در حالت اول و در حالت دوم (پس از قراردادن وزنه روی پیستون) به دست می‌آوریم:

$$P_1 = \frac{W}{A} + P_0 = \frac{40}{20 \times 10^{-4}} + 1.0^5 = 2 \times 10^4 + 1.0^5 = 12 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \frac{W + mg}{A} + P_0 = \frac{40 + 80}{20 \times 10^{-4}} + 1.0^5 = 6 \times 10^4 + 1.0^5 = 16 \times 10^4 \text{ Pa}$$

گام دوم: با توجه به این که قبل و بعد از قراردادن وزنه روی پیستون، تعداد مول گاز تغییر نکرده است، داریم:

$$\frac{PV}{T} = nR = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{12 \times 10^4 \times (40 \text{ A})}{(273 + 17)} = \frac{16 \times 10^4 \times (36 \text{ A})}{T_2} \Rightarrow \frac{12 \times 40}{290} = \frac{16 \times 36}{T_2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{290 \times 16 \times 36}{12 \times 40} = 348 \text{ K}$$

$$T_2 = \theta_2 + 273 \Rightarrow 348 = \theta_2 + 273 \Rightarrow \theta_2 = 75^\circ \text{C}$$

حواستون باشه در رابطه $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ ، دماها حتماً باید بر حسب کلوین باشند، اما فشارها و حجم‌ها می‌توانند بر حسب یکی SI نباشند و صرفاً باید یک‌گانه‌ی یکسانی داشته باشند.



شیمی دوازدهم

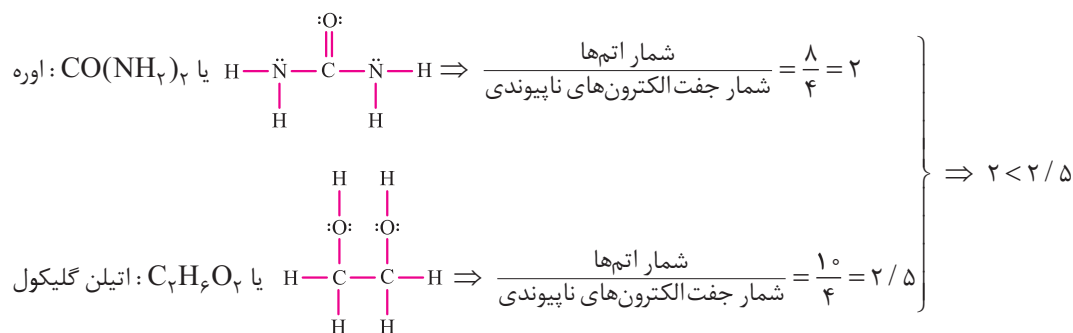
تست و پاسخ ۷۶

کدام مطلب درست است؟

- (۱) در دهه‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی و نرخ رشد آن در نواحی برخوردار، نسبت به نواحی کم‌برخوردار بیشتر بوده است.
- (۲) در فرایند انحلال روغن زیتون در هگزان همانند فرایند انحلال نمک خوراکی در آب، ماده حل‌شونده ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ می‌کند.
- (۳) شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول وازلین را می‌توان ۳/۴ برابر شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول بنزین در نظر گرفت. C_8H_{18}
- (۴) نسبت شمار اتم‌ها به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در ساختار اوره، کوچک‌تر از این مقدار در ساختار اتیلن گلیکول است. $C_2H_6O_2$
- $CO(NH_2)_2$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: با توجه به ساختار لوویس و فرمول شیمیایی مولکول‌های اوره و اتیلن گلیکول، خواهیم داشت:



بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) در دهه‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی در نواحی برخوردار، نسبت به نواحی کم‌برخوردار بیشتر بوده است، ولی نرخ رشد امید به زندگی در نواحی کم‌برخوردار، نسبت به نواحی برخوردار، بیشتر بوده است (شیب نمودار امید به زندگی در نواحی کم‌برخوردار از نواحی برخوردار، بیشتر است).
- (۲) نمک خوراکی (NaCl) یک ترکیب یونی است و هنگام انحلال در آب، ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ نمی‌کند؛ زیرا یون‌های سازنده آن، تفکیک و آبپوشیده می‌شوند، اما روغن زیتون ($C_{57}H_{104}O_6$) یک ترکیب مولکولی است و به صورت مولکولی در هگزان حل می‌شود؛ یعنی ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ می‌کند.

۳

نکته: شمار پیوندهای اشتراکی در همهٔ هیدروکربن‌ها را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

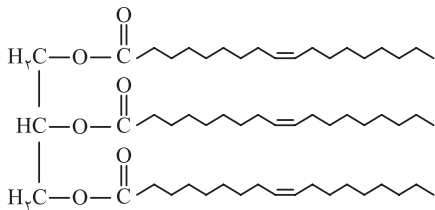
$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های هیدروژن}) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times 4)}{2}$$

فرمول مولکولی وازلین و بنزین را به ترتیب می‌توان به صورت $C_{25}H_{52}$ و C_8H_{18} در نظر گرفت:

$$\left. \begin{array}{l} \text{شمار پیوندهای اشتراکی در } C_{25}H_{52} = \frac{(25 \times 4) + (52 \times 1)}{2} = 76 \\ \text{شمار پیوندهای اشتراکی در } C_8H_{18} = \frac{(8 \times 4) + (18 \times 1)}{2} = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{شمار پیوندهای اشتراکی در وازلین}}{\text{شمار پیوندهای اشتراکی در بنزین}} = \frac{76}{25} = 3.04$$

تست و پاسخ

کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ استر بلندزنجیر داده شده، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



(۴) الف - ت

(الف) تفاوت جرم مولی الکل سازندهٔ استر مورد نظر با اتانول، برابر ۴۸ است.

(ب) از واکنش یک مول از آن با مقدار کافی سدیم هیدروکسید، ۳ مول صابون جامد با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{34}COONa$ تولید می‌شود.

(پ) این استر سه‌عاملی را می‌توان روغن زیتون در نظر گرفت. $C_{57}H_{110}O_6$

(ت) واکنش‌پذیری این استر بلندزنجیر در شرایط یکسان از چربی موجود در

کوهان شتر، بیشتر است. $C_{57}H_{110}O_6$

(۳) پ - ت

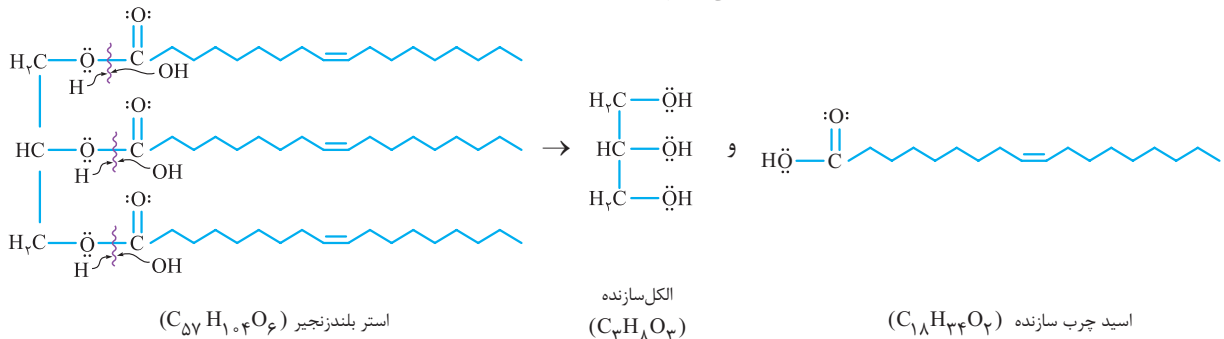
(۲) ب - پ

(۱) الف - ب

پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های «پ» و «ت» دربارهٔ استر بلندزنجیر داده شده، درست‌اند.

ابتدا الکل و اسید چرب سازندهٔ استر مورد نظر را تعیین می‌کنیم:



بررسی عبارت‌ها:

(الف) فرمول مولکولی اتانول، C_2H_6O است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$C_2H_6O \text{ و } C_3H_8O_3 : C_3H_8O_3 - C_2H_6O = CH_2O_2 = 12 + (2 \times 1) + (2 \times 16) = 46 g.mol^{-1}$$

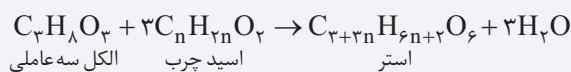
(ب) هر مول از استر بلندزنجیر مورد نظر دارای ۳ مول گروه عاملی استری است که با ۳ مول سدیم هیدروکسید ($NaOH$) واکنش داده و ۳ مول صابون جامد تولید می‌کند که تفاوت صابون جامد تولید شده با اسید چرب سازندهٔ استر مورد نظر در این است که در صابون جامد تولید شده،

یک اتم سدیم به جای هیدروژن گروه کربوکسیل قرار می‌گیرد:

(پ) فرمول شیمیایی ترکیب داده شده مانند مولکول روغن زیتون، $C_{57}H_{110}O_6$ است.

(ت) استر بلندزنجیر مورد نظر به دلیل وجود پیوندهای دوگانه در ساختار خود، ترکیبی سیر نشده و چربی موجود در کوهان شتر با فرمول شیمیایی $C_{57}H_{110}O_6$ ، ترکیبی سیر شده است؛ بنابراین واکنش‌پذیری این استر در شرایط یکسان از چربی کوهان شتر، بیشتر است.

نکته اگر اسیدهای چرب سازندهٔ استر، یکسان و زنجیر هیدروکربنی در آن‌ها سیر شده باشد (گروه آلکیل)، می‌توان نوشت:



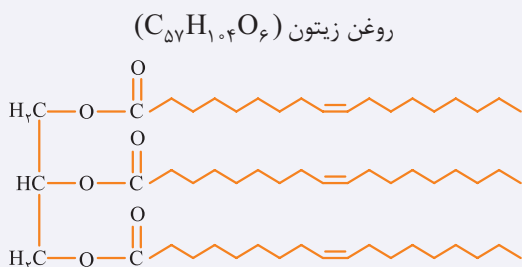
در معادله بالا، رابطهٔ میان شمار اتم‌های کربن و هیدروژن استر را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} \text{شمار اتم‌های کربن} &= 3 + 3n = x \\ \text{شمار اتم‌های هیدروژن} &= 6n + 2 = y \end{aligned} \Rightarrow \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{6} \Rightarrow y = 2x - 4$$

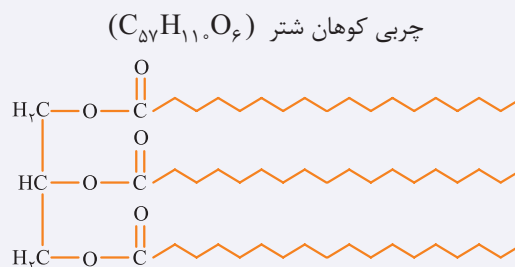
فرمول کلی استرهای سنگین (به شرط R : گروه آلکیل): $C_xH_{2x-4}O_6$

فرمول چربی کوهان شتر ($C_{57}H_{110}O_6$) از رابطهٔ $C_xH_{2x-4}O_6$ پیروی می‌کند؛ در نتیجه سیر شده است. (پیوند دوگانه $C=C$ ندارد.)

■ ساختار روغن زیتون و چربی کوهان شتر در زیر آورده شده است:



الکل سازنده: ($C_3H_8O_3$)
اسید چرب سازنده: ($C_{18}H_{34}O_2$)



الکل سازنده: ($C_3H_8O_3$)
اسید چرب سازنده: ($C_{18}H_{36}O_2$)

تست و پاسخ ۷۸

چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- ممکن است در ساختار یک صابون، عنصر فلزی وجود نداشته باشد.
- پاک کننده‌های غیرصابونی برخلاف پاک کننده‌های صابونی با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند.
- صابون از طریق بخش قطبی جزء آنیونی خود با مولکول‌های آب پیوند اشتراکی برقرار می‌کند.
- شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک کننده‌های غیرصابونی، $1/8$ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک کننده‌های صابونی است.

۳ (۲)

۴ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

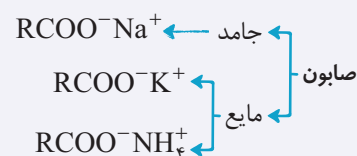
پاسخ تشریحی عبارت‌های دوم و سوم نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول:

نکته به نمک اسیدهای چرب، صابون می‌گویند. صابون‌های جامد، نمک سدیم اسید چرب و صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسید چرب

هستند؛ پس اگر در ساختار اسیدهای چرب به جای هیدروژن متصل به اتم اکسیژن ($-C(=O)-O-H$)، کاتیون Na^+ ، K^+ یا NH_4^+ قرار گیرد، صابون یا همان نمک اسید چرب به دست می‌آید.



یک نوع صابون مایع، نمک آمونیوم اسید چرب با فرمول عمومی $RCOO^-NH_4^+$ است که زنجیره هیدروکربنی آن از اتم‌های نافلزی کربن و هیدروژن تشکیل شده است و در ساختار آن، عنصر فلزی وجود ندارد.

عبارت دوم: پاک کننده‌های صابونی همانند پاک کننده‌های غیرصابونی با آلاینده‌ها واکنش نمی‌دهند؛ بلکه هر دو پاک کننده براساس برهم کنش‌های میان ذره‌ها عمل می‌کنند.

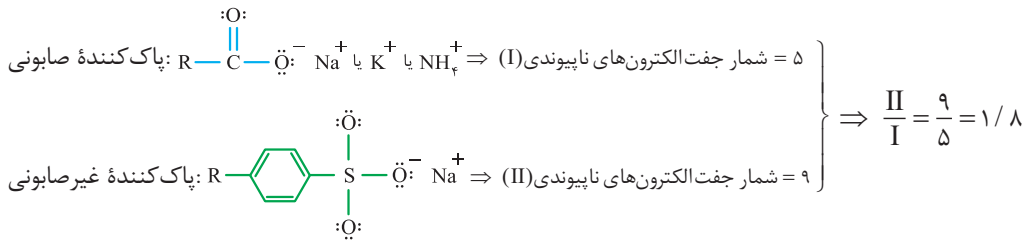
عبارت سوم: صابون از طریق بخشی قطبی جزء آنیونی خود (COO^-)، با مولکول‌های آب جاذبه یون-دوقطبی (نه پیوند اشتراکی!) و از طریق بخش ناقطبی جزء آنیونی خود (R) با مولکول‌های چربی، جاذبه وان‌دروالسی برقرار می‌کند.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

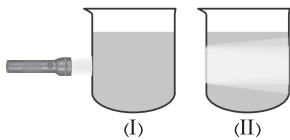
شیمی

عبارت چهارم: با توجه به ساختار پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، خواهیم داشت:



تست و پاسخ ۷۹

با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به دو مخلوط پایدار هستند، کدام مطلب نادرست است؟



محلول و کلوئید

- ۱) آب‌قند، نمونه‌ای از مخلوط (I) و شیر، نمونه‌ای از مخلوط (II) است.
- ۲) مخلوط آب و روغن از نوع (I) است که با افزودن صابون به نوع (II) تبدیل می‌شود.
- ۳) مخلوط (II) برخلاف مخلوط (I)، ناهمگن است، اما ذره‌های سازنده هیچ‌کدام از این دو مخلوط با گذشت زمان، ته‌نشین نمی‌شوند.
- ۴) ذرات سازنده مخلوط (II)، درشت‌تر از ذرات سازنده مخلوط (I) هستند.

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

مقایسه سه دسته از مخلوط‌ها در جدول زیر آورده شده است:

ویژگی / نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است / ته‌نشین می‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریز ماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلوده، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب‌قند و آب‌نمک

پاسخ تشریحی دو مخلوط پایدار، کلوئیدها و محلول‌ها هستند. با توجه به شکل‌های داده‌شده، مخلوط (I)، محلول و مخلوط (II)، کلوئید

است؛ زیرا محلول‌ها نور را عبور می‌دهند؛ در حالی که کلوئیدها نور را پخش می‌کنند و مسیر عبور نور در آن‌ها مشخص است. مخلوط آب و روغن نوعی محلول نیست، بلکه مخلوطی ناهمگن و ناپایدار است. اگر به این مخلوط، صابون اضافه کنیم، مخلوط حاصل نوعی کلوئید خواهد بود. بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) آب‌قند، نمونه‌ای از محلول‌ها و شیر، نمونه‌ای از کلوئیدها است.
- ۳) کلوئید، مخلوطی ناهمگن ولی محلول، مخلوطی همگن است. هر دوی این مخلوط‌ها پایدارند و ذرات سازنده آن‌ها با گذشت زمان، ته‌نشین نمی‌شوند.
- ۴) ذرات سازنده کلوئیدها، توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت و ذرات سازنده محلول‌ها، یون‌ها یا مولکول‌ها هستند؛ بنابراین اندازه ذرات سازنده کلوئیدها، بیشتر از اندازه ذرات سازنده محلول‌ها است.



تست و پاسخ ۸۰

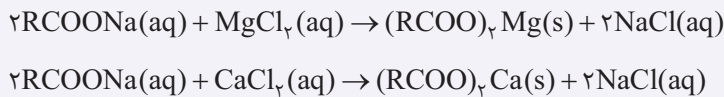
در ساختار صابونی جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، نسبت شمار اتم(های) نافلزی به اتم(های) فلزی برابر ۴۹ است. از واکنش ۰/۲ مول از این صابون با مقدار کافی محلول منیزیم کلرید، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود؟ ($Mg = ۲۴, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)

- ۵۵/۸ (۴) ۲۷/۹ (۳) ۱۰۶/۸ (۲) ۵۳/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خود حل کنی بهتره اول با توجه به فرمول عمومی صابون‌های جامد، تعداد اتم‌های کربن زنجیر آلکیلی آن رو به دست بیار، سپس مطابق معادله واکنش صابون‌ها با آب سخت، جرم رسوب تشکیل شده رو محاسبه کن!

نکته صابون‌ها در آب سخت و در حضور یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} ، رسوب می‌کنند و قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها کاهش می‌یابد. معادله کلی این واکنش‌ها به صورت زیر است:

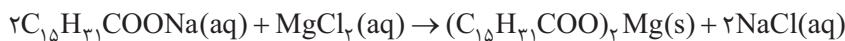


پاسخ تشریحی گام اول: فرمول عمومی صابون‌های جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده $C_nH_{2n+1}COONa$ است. با توجه به نسبت داده شده در سؤال، فرمول شیمیایی صابون مورد نظر برابر است با:

$$C_nH_{2n+1}COONa \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های نافلزی (C, H, O)}}{\text{شمار اتم فلزی (Na)}} = \frac{\overset{C}{n} + \overset{H}{2n+1} + \overset{C}{1} + \overset{O}{2}}{1} = \frac{3n+4}{1} \Rightarrow 49 = \frac{3n+4}{1}$$

$\Rightarrow n = 15 \Rightarrow C_{15}H_{31}COONa$ صابون جامد مورد نظر

گام دوم: در ادامه، معادله موازنه‌شده واکنش بیان شده در سؤال را می‌نویسیم و در نهایت با توجه به آن و شمار مول‌های صابون جامد مصرف‌شده، جرم رسوب تشکیل شده از واکنش را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



$$(C_{15}H_{31}COO)_2Mg : 2((16 \times 12) + (31 \times 1) + (2 \times 16)) + 24 = (2 \times 255) + 24 = 534 g.mol^{-1}$$

$$0.2 \text{ mol } C_{15}H_{31}COONa \times \frac{1 \text{ mol } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg}{2 \text{ mol } C_{15}H_{31}COONa} \times \frac{534 \text{ g } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg}{1 \text{ mol } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg}$$

$$= \frac{0.2 \times 534}{2} = 53.4 \text{ g } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg$$

تست و پاسخ ۸۱

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) فرمول شیمیایی نمک حاصل از واکنش یون کلسیم با صابون جامد که زنجیر آلکیل آن ۱۴ اتم کربن دارد؛ به صورت $C_{30}H_{58}O_4Ca$ است.
 (ب) در شرایط یکسان، ارتفاع کف حاصل از صابون در آب مقطر، نسبت به ارتفاع کف حاصل از صابون در محلول منیزیم کلرید، بیشتر است.
 (پ) در شرایط یکسان، قدرت صابون در از بین بردن لکه‌های چربی روی پارچه پلی‌استری، بیشتر از پارچه نخی است.
 (ت) از صابون فسفردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

- الف - پ (۱) ب - ت (۲) پ - ت (۳) الف - ب (۴)

پاسخ: گزینه ۲

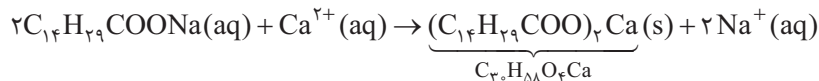
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



پاسخ تشریحی عبارتهای «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی همه عبارت‌ها:

الف) فرمول عمومی صابون جامد با n اتم کربن در زنجیر آلکیلی، به صورت $C_nH_{2n+1}COONa$ است؛ پس صابون جامد مورد نظر همان $C_{14}H_{29}COONa$ می‌باشد که با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش آن با یون کلسیم، رسوب سفیدرنگی با فرمول شیمیایی $C_{30}H_{58}O_4Ca$ در این واکنش تولید می‌شود:



ب) صابون در آب سخت یا همان آب حاوی یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} به خوبی کف نمی‌کند و قدرت پاک‌کنندگی آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین در شرایط یکسان، ارتفاع کف حاصل از صابون در آب مقطر و آب معمولی، نسبت به ارتفاع کف حاصل از صابون در محلول منیزیم کلرید که مشابه آب سخت است، بیشتر می‌باشد.

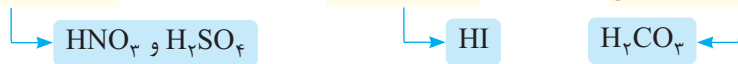
پ) میزان چسبندگی چربی روی پارچه‌های نخی، کم‌تر از پارچه‌های پلی‌استری است؛ بنابراین در شرایط یکسان، قدرت صابون در آب بین بردن لکه‌های چربی روی پارچه‌های نخی، بیشتر از پارچه‌های پلی‌استری است.

ت) از صابون گوگرددار (نه فسفردار)، برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

تست و پاسخ ۸۲

کدام مطلب درست است؟

- از دید آرنیوس، جامدهای یونی اکسیژن‌دار، اسید به شمار می‌آیند.
- محلول مولکول‌های قطبی در آب، نوعی الکترولیت محسوب می‌شود.
- با افزایش غلظت اتیلن گلیکول در محلول آن، رسانایی الکتریکی محلول تغییری نمی‌کند.
- در دمای اتاق، ثابت یونش اسید موجود در باران معمولی از ثابت یونش هیدروکسیدیک اسید، بیشتر و از ثابت یونش اسیدهای مسبب ایجاد باران اسیدی، کم‌تر است.



پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

- بعضی از جامدهای یونی اکسیژن‌دار مانند Na_2O که نوعی اکسید فلزی هستند، باز آرنیوس (نه اسید آرنیوس!) به شمار می‌آیند. البته برخی دیگر از جامدهای یونی اکسیژن‌دار، نه اسید آرنیوس محسوب می‌شوند و نه باز آرنیوس!
- لزوماً همه محلول‌های ترکیبات مولکولی قطبی در آب، الکترولیت نیستند؛ به طور مثال برخی مولکول‌های قطبی مانند متانول (CH_3OH)، اتانول (C_2H_5OH) و استون (CH_3COCH_3)، در آب کاملاً به صورت مولکولی حل شده و غیرالکترولیت به شمار می‌آیند.
- اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و محلول آبی آن رسانای جریان برق نیست؛ بنابراین در صورت قرارگرفتن در مدار الکتریکی (با هر غلظتی)، لامپ خاموش می‌ماند و روشنایی نخواهد داشت.

نکته در مورد مواد الکترولیت و غیرالکترولیت، به جدول زیر توجه کنید:

نوع ماده	نحوه حل شدن در آب	رسانایی الکتریکی محلول	روشنایی لامپ در مدار الکتریکی	موارد معروف
غیرالکترولیت	کاملاً مولکولی	نارسانا	خاموش	اغلب مواد آلی مانند اتانول، شکر، اتیلن گلیکول، استون و ...

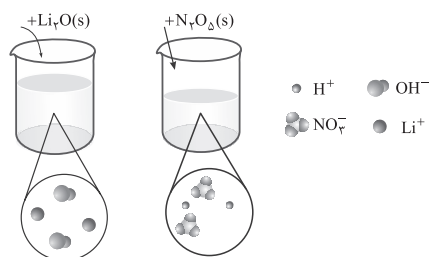
نوع ماده	نحوه حل شدن در آب	رسانایی الکتریکی محلول	روشنایی لامپ در مدار الکتریکی	موارد معروف
الکترولیت قوی	کاملاً یونی	رسانای قوی (به شرط غلظت کافی)	روشن	اسیدهای قوی (مانند HCl)، بازهای قوی (مانند KOH)، نمک‌ها (مانند NaCl)
				الکترولیت ضعیف

۴) اسید موجود در باران معمولی، (کربنیک اسید (H₂CO₃)) اسید ضعیف و هیدرویدیک اسید (HI) و همچنین اسیدهای مسبب ایجاد باران اسیدی، (نیتریک اسید (HNO₃) و سولفوریک اسید (H₂SO₄)) جزء اسیدهای قوی هستند؛ بنابراین در دمای اتاق، ثابت یونش H₂CO₃، کوچک‌تر از ثابت یونش HI، HNO₃ و H₂SO₄ می‌باشد.

نکته در دمای معین، هر چه ثابت یونش اسیدی بزرگ‌تر باشد، آن اسید قوی‌تر است.

تست و پاسخ ۸۳

مطابق شکل‌های زیر، جرم برابری از دو نوع اکسید را به صورت جداگانه در مقدار معینی آب حل می‌کنیم. اگر اختلاف مجموع جرم کاتیون‌های تولیدشده در اثر انحلال این دو ماده با مجموع جرم آنیون‌های تولیدشده در اثر انحلال آن‌ها برابر ۱۹۴ گرم باشد، مجموع شمار مول‌های اولیه اکسیدها، کدام است؟ (O = ۱۶, N = ۱۴, Li = ۷, H = ۱ : g.mol⁻¹)



۹/۲ (۱)

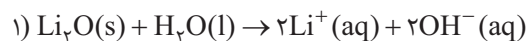
۴/۶ (۲)

۲/۳ (۳)

۱۸/۴ (۴)

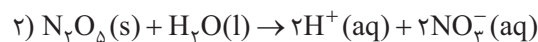
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا فرض می‌کنیم که m گرم از هر یک از ترکیب‌های Li_2O و N_2O_5 به طور جداگانه در آب حل شده‌اند. در ادامه با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش‌های یونش اکسیدها و اختلاف جرم مقادیر داده‌شده، مقدار m را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



$$? g Li^+ = m g Li_2O \times \frac{1 \text{ mol } Li_2O}{30 \text{ g } Li_2O} \times \frac{2 \text{ mol } Li^+}{1 \text{ mol } Li_2O} \times \frac{7 \text{ g } Li^+}{1 \text{ mol } Li^+} = \frac{1}{15} \times 7 \times m = \frac{7}{15} m g Li^+$$

$$? g OH^- = m g Li_2O \times \frac{1 \text{ mol } Li_2O}{30 \text{ g } Li_2O} \times \frac{2 \text{ mol } OH^-}{1 \text{ mol } Li_2O} \times \frac{17 \text{ g } OH^-}{1 \text{ mol } OH^-} = \frac{1}{15} \times 17 \times m = \frac{17}{15} m g OH^-$$



$$? g H^+ = m g N_2O_5 \times \frac{1 \text{ mol } N_2O_5}{108 \text{ g } N_2O_5} \times \frac{2 \text{ mol } H^+}{1 \text{ mol } N_2O_5} \times \frac{1 \text{ g } H^+}{1 \text{ mol } H^+} = \frac{1}{54} \times m = \frac{1}{54} m g H^+$$



$$? \text{ g NO}_3^- = \text{m g N}_2\text{O}_5 \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{108 \text{ g N}_2\text{O}_5} \times \frac{2 \text{ mol NO}_3^-}{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5} \times \frac{62 \text{ g NO}_3^-}{1 \text{ mol NO}_3^-} = \frac{1 \times 62 \text{ m}}{54} = \frac{31}{27} \text{ m g NO}_3^-$$

مجموع جرم کاتیون‌های تولیدشده - مجموع جرم آنیون‌های تولیدشده = $(\text{g OH}^- + \text{g NO}_3^-) - (\text{g Li}^+ + \text{g H}^+)$

$$\Rightarrow 194 = \left(\frac{17}{15} \text{ m} + \frac{31}{27} \text{ m}\right) - \left(\frac{7}{15} \text{ m} + \frac{1}{54} \text{ m}\right) \Rightarrow 194 = \frac{308}{135} \text{ m} - \frac{131}{270} \text{ m}$$

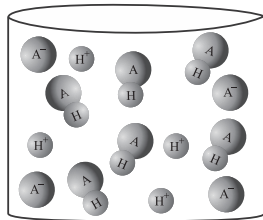
$$\Rightarrow 194 = \frac{616 - 131}{270} \text{ m} \Rightarrow 194 = \frac{485}{270} \text{ m} = \frac{97}{54} \text{ m} \Rightarrow \text{m} = \frac{194 \times 54}{97} = 108 \text{ g}$$

گام دوم: با توجه به جرم اولیه اکسیدهای مورد نظر، مجموع شمار مول‌های اولیه Li_2O و N_2O_5 را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \text{مول} \Rightarrow \text{مول Li}_2\text{O} + \text{مول N}_2\text{O}_5 = \frac{108}{30} + \frac{108}{108} = 4/6 \text{ mol}$$

تست و پاسخ ۸۴

شکل زیر، محلولی از اسید ضعیف HA را در دما و حجم معین نشان می‌دهد. درجه یونش اسید HA در محلول مورد نظر، چند برابر درجه یونش محلول ۰/۲ مولار اسید ضعیف HB، با غلظت یون هیدرونیوم برابر 4×10^{-3} مول بر لیتر است؟



- ۲ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۰/۲ (۳)
- ۰/۰۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نکته برای محاسبه درجه یونش اسیدها می‌توان از رابطه‌های زیر استفاده کرد:

$$1) \text{ درجه یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار یون H}^+ \text{ (یا آنیون) حاصل از اسید}}{\text{شمار مولکول‌های اسید حل شده}} = \frac{\text{شمار مولکول‌های اسید یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های اسید حل شده}}$$

$$2) \text{ درجه یونش } (\alpha) = \frac{\text{غلظت مولار H}^+ \text{ (یا آنیون) حاصل از اسید}}{\text{غلظت مولار اسید حل شده}} = \frac{\text{غلظت مولار اسید یونیده شده}}{\text{غلظت مولار اسید حل شده}} \quad (\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M})$$

پاسخ تشریحی گام اول: به ازای یونیده شدن هر مولکول اسید HA، ۲ یون H^+ و A^- تولید می‌شود؛ بنابراین با توجه به شکل می‌توان گفت که در این محلول، ۴ مولکول اسید HA یونیده شده و ۴ یون H^+ و ۴ یون A^- تولید کرده‌اند؛ در ضمن شمار کل مولکول‌های حل شده اسید HA برابر با ۱۰ بوده است؛ زیرا ۶ مولکول یونیده نشده از اسید HA در شکل موجود است و ۴ مولکول اسید HA یونیده شده و یون‌های حاصل از یونش آن‌ها قابل مشاهده هستند؛ پس خواهیم داشت:

$$\text{HA} \text{ درجه یونش اسید} = \frac{\text{شمار مولکول‌های اسید یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های اسید حل شده}} = \frac{4}{10} = 0/4$$

گام دوم: درجه یونش اسید HB را با توجه به غلظت یون هیدرونیوم تولیدشده در محلول آن، غلظت اولیه محلول اسید و رابطه درجه یونش به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{HB} \text{ درجه یونش اسید} = \frac{[\text{H}^+]}{M} = \frac{4 \times 10^{-3}}{0/4} = 2 \times 10^{-2} = 0/02$$



گام سوم: نسبت درجه یونش اسید HA به درجه یونش اسید HB را به صورت مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\alpha(\text{HA})}{\alpha(\text{HB})} = \frac{0/4}{0/2} = 20$$

تست و پاسخ ۸۵

ترتیب رسانایی الکتریکی محلول‌های زیر، در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱: g.mol⁻¹)

(a) محلول ۲۵ درصد جرمی نیتریک اسید با چگالی ۱/۲۶ گرم بر میلی‌لیتر

(b) محلول ۱/۵ مولار استیک اسید با درصد یونش ۸

(c) محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید

(d) محلول ۰/۸ مولار نیترواسید با درجه یونش ۰/۲

(۱) a > d > c > b (۲) d > a > b > c (۳) a > c > d > b (۴) b > a > d > c

پاسخ: گزینه ۲

نکات ۱ هر چه مجموع غلظت یون‌ها در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است.

۲ برای اسیدهای ضعیف (مانند HA)، رابطه بین غلظت یون‌ها با درجه یونش و غلظت اولیه محلول، به صورت زیر است:

$$[\text{H}^+] = [\text{A}^-] = M\alpha \Rightarrow 2M\alpha = \text{مجموع غلظت مولی یون‌ها}$$

۳ اگر درصد جرمی محلولی برابر a و چگالی آن بر حسب g.mL⁻¹ برابر d باشد، غلظت مولی آن محلول از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10 \cdot ad}{\text{جرم مولی}}$$

پاسخ تشریحی باید مجموع غلظت مولی یون‌ها را در محلول‌های داده شده حساب کنیم:

$$a) \text{HNO}_3 \text{ محلول مولی} = \frac{10 \cdot ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 25 \times \frac{1}{26}}{63} = 5 \text{ mol.L}^{-1}$$

از آن‌جا که محلول نیتریک اسید، نوعی اسید قوی تک‌پروتون‌دار است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد؛ بنابراین به ازای یونیده شدن هر مول اسید HNO₃، دو مول یون (H⁺ و NO₃⁻) تولید می‌شود؛ پس غلظت یون‌های حاصل از یونش در محلول نیتریک اسید ۵ مولار، برابر ۱۰ مول بر لیتر است.



$$[\text{H}^+] = M\alpha = 1/5 \times \frac{1}{10} = 0/12 \text{ mol.L}^{-1}$$

غلظت یون‌های حاصل از یونش محلول استیک اسید = [H⁺] + [CH₃COO⁻]

$$\xrightarrow{[\text{H}^+] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]} \text{مجموع غلظت مولی یون‌ها} = 2[\text{H}^+] = 2 \times 0/12 = 0/24 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$c) [\text{H}^+] = [\text{HCl}] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

از آن‌جا که محلول هیدروکلریک اسید، نوعی اسید قوی تک‌پروتون‌دار است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد؛ بنابراین به ازای یونیده شدن هر مول اسید HCl، دو مول یون (H⁺ و Cl⁻) تولید می‌شود؛ پس غلظت یون‌های حاصل از یونش در محلول هیدروکلریک اسید ۱ مولار، برابر ۲ مول بر لیتر است.



$$[\text{H}^+] = M\alpha = 0/8 \times 0/2 = 0/16 \text{ mol.L}^{-1}$$

غلظت یون‌های حاصل از یونش محلول نیترو اسید = [H⁺] + [NO₂⁻]

$$\xrightarrow{[\text{H}^+] = [\text{NO}_2^-]} \text{مجموع غلظت مولی یون‌ها} = 2[\text{H}^+] = 2 \times 0/16 = 0/32 \text{ mol.L}^{-1}$$

بنابراین خواهیم داشت: $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $10 \text{ mol.L}^{-1} \quad 2 \text{ mol.L}^{-1} \quad 0/32 \text{ mol.L}^{-1} \quad 0/24 \text{ mol.L}^{-1}$



تست و پاسخ ۸۶

کدام مطلب درست است؟

- ۱) ثابت تعادل، بیانی از میزان پیشرفت یک واکنش تا لحظه برقراری تعادل است و به غلظت اولیه واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها وابسته است.
- ۲) در واکنش‌های تعادلی، در لحظه تعادل، سرعت مصرف واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها به صفر می‌رسد.
- ۳) ثابت ماندن غلظت مواد شرکت کننده در تعادل، برخلاف برابری غلظت واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها، جزء ویژگی‌های واکنش تعادلی است.
- ۴) محلول کربوکسیلیک اسیدها در آب، برخلاف محلول هیدروسیانیک اسید، نمونه‌ای از یک سامانه تعادلی است.

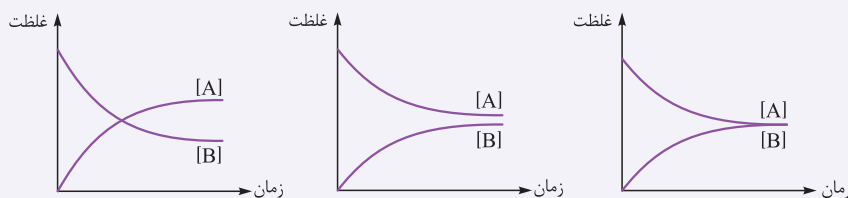
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی پس از رسیدن به تعادل، غلظت مواد شرکت کننده در واکنش ثابت می‌ماند، اما لزوماً با هم برابر نمی‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) ثابت تعادل، بیانی از میزان پیشرفت یک واکنش تا لحظه برقراری تعادل است و برای یک واکنش معین، فقط به دما بستگی دارد.
- ۲) در واکنش‌های تعادلی، از لحظه برقراری تعادل، سرعت مصرف یا تولید واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها با هم برابر می‌شود، ولی *مواستون باشه* که سرعت واکنش‌های رفت و برگشت به صفر نمی‌رسد.

نکته در لحظه تعادل، غلظت واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌شود و ممکن است غلظت آن‌ها با یکدیگر برابر باشد یا نباشد، پس نمودار غلظت - زمان واکنش تعادلی $A(g) \rightleftharpoons B(g)$ می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:



۴) کربوکسیلیک اسیدها همانند هیدروسیانیک اسید (HCN)، جزء اسیدهای ضعیف هستند؛ بنابراین واکنش یونش آن‌ها در آب به صورت تعادلی است.

تست و پاسخ ۸۷

با توجه به شکل‌های زیر که رسانایی الکتریکی محلول اسیدهای HA و HB را با غلظت‌های یکسان در دمای $25^{\circ}C$ نشان می‌دهد، چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست است؟



محلول HA

محلول HB

- غلظت مولار یون هیدرونیوم در محلول‌ها: $HA > HB$
- شمار مولکول‌های دوامی در محلول‌ها: $HB > HA$
- قدرت اسیدی: $HA > HB$
- سرعت واکنش محلول‌ها با نوار منیزیم: $HB > HA$

۳ (۲)

۴ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی مقایسه‌های اول، دوم و سوم درباره محلول اسیدهای HA و HB درست‌اند.

با توجه به شکل‌های داده شده، شدت نور لامپ در محلول HA، بیشتر از شدت نور لامپ در محلول HB است، پس HA اسید قوی‌تری نسبت به HB است و در دما و غلظت یکسان، غلظت کاتیون‌های حاصل از یونش اسید یا همان یون هیدرونیوم (H_3O^+)، قدرت اسیدی و سرعت واکنش اسید با نوار منیزیم در محلول HA بیشتر از محلول HB است. درجه یونش اسید HA نسبت به اسید HB، بزرگ‌تر است؛ بنابراین شمار مولکول‌های یونیده نشده یا همان مولکول‌های دوامی در محلول HB، بیشتر از محلول HA می‌باشد.

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



تست و پاسخ ۸۸

۱/۵۳ گرم از یک اسید آلی (RCOOH) با زنجیر هیدروکربنی سیرشده را به مقدار معینی آب اضافه می‌کنیم و حجم محلول را به ۱۰۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. اگر غلظت یون هیدرونیوم در این محلول، $1/5 \times 10^{-3}$ مولار باشد، به تقریب چند درصد جرم اسید را کربن تشکیل داده

است؟ $(K_a(\text{RCOOH}) = 1/5 \times 10^{-5}, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$

- ۵۴ / ۵ (۱) ۵۸ / ۸ (۲) ۶۳ / ۲ (۳) ۶۶ / ۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک رابطه ثابت یونش و غلظت یون هیدرونیوم، غلظت اولیه محلول رو به دست بیار. بعد با توجه به جرم اسید و حجم و غلظت محلول، جرم مولی اسید رو حساب کن. با مشخص شدن فرمول اسید ($\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$)، درصد جرمی کربن در آن رو محاسبه کن!

نکته فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $\text{C}_m\text{H}_{2m+1}\text{COOH}$ یا $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: از رابطه ثابت یونش استفاده کرده و غلظت مولی محلول اسید را حساب می‌کنیم:



$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{RCOO}^-]}{[\text{RCOOH}]} \approx \frac{[\text{H}^+]^2}{M} \Rightarrow 1/5 \times 10^{-5} = \frac{(1/5 \times 10^{-3})^2}{M} \Rightarrow M = \frac{1/5 \times 10^{-3} \times 1/5 \times 10^{-3}}{1/5 \times 10^{-5}} = 0.15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

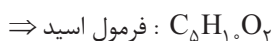
گام دوم: با توجه به جرم اسید و حجم و غلظت محلول، جرم مولی اسید و سپس فرمول مولکولی آن را پیدا می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی اسید} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی}} \rightarrow 0.15 = \frac{1/53}{0.1} \Rightarrow \text{جرم مولی اسید} = \frac{\text{شمار مول}}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{1/53}{0.15 \times 0.1}$$

$$\text{جرم مولی اسید} = \frac{1/53}{0.15 \times 0.1} = \frac{1530}{15} = \frac{1500}{15} + \frac{30}{15} = 102 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

فرمول عمومی اسیدهای آلی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$ است:

$$\text{جرم مولی } \text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2 = 14n + 32 \Rightarrow 14n + 32 = 102 \Rightarrow 14n = 70 \Rightarrow n = 5$$



گام سوم: درصد جرمی کربن در اسید مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$100 \times \frac{\text{جرم مولی اتم عنصر} \times \text{تعداد اتم عنصر در فرمول ترکیب}}{\text{جرم مولی ترکیب}} = 100 \times \frac{\text{جرم عنصر در یک مول ترکیب}}{\text{جرم مولی ترکیب}} = \text{درصد جرمی یک عنصر در ترکیب}$$

$$\text{درصد جرمی C در } \text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}_2 = \frac{5 \times 12}{102} \times 100 = \frac{60}{102} \times 100 \rightarrow \text{کمی کم‌تر از } 60\% \rightarrow 58.8\%$$

تست و پاسخ ۸۹

در دو ظرف جداگانه، محلول‌های نیتریک اسید و نیترو اسید با دمای یکسان وجود دارند. اگر غلظت آنیون‌های حاصل از یونش این دو اسید

با هم برابر و حجم محلول نیترو اسید، دو برابر حجم محلول نیتریک اسید باشد، کدام مطلب درست است؟

(۱) اگر غلظت اسید در یکی از محلول‌ها افزایش یابد، درصد یونش دو محلول به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شود.

(۲) شمار مولکول‌های اسید موجود در محلول نیتریک اسید از شمار مولکول‌های اسید موجود در محلول نیترو اسید، بیشتر است.

(۳) شمار مول‌های آغازی نیترو اسید، بیش از دو برابر شمار مول‌های آغازی نیتریک اسید است.

(۴) حجم نهایی گاز هیدروژن آزادشده از واکنش هر دو محلول اسیدی با مقدار کافی فلز منیزیم، یکسان است.

پاسخ: گزینه ۳



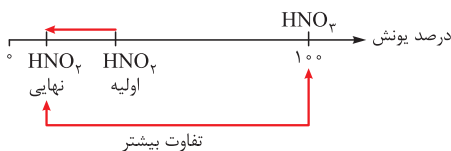
نکته اسیدهای قوی و ضعیف کتاب درسی:

اسیدهای قوی: هیدروکلریک اسید (HCl) - هیدروبرومیک اسید (HBr) - هیدرویدیک اسید (HI) - سولفوریک اسید (H₂SO₄) - نیتریک اسید (HNO₃)
 اسیدهای ضعیف: هیدروفلوئوریک اسید (HF) - نیترو اسید (HNO₂) - فورمیک (متانوئیک) اسید (HCOOH) - استیک (اتانوئیک) اسید (CH₃COOH) - HCN (هیدروسیانیک اسید)

پاسخ تشریحی

نیتریک اسید (HNO₃)، یک اسید قوی و نیترو اسید (HNO₂)، یک اسید ضعیف است. اگر غلظت این دو محلول یکسان باشد، غلظت یون‌های حاصل از یونش نیتریک اسید در محلول بیشتر است، اما غلظت آنیون حاصل از یونش این دو اسید با هم برابر است و این نشان می‌دهد که غلظت اولیه محلول اسید ضعیف (HNO₂) حتماً بیشتر بوده که باعث برابری غلظت آنیون‌ها در دو محلول شده است (در واقع اسید ضعیف به اندازه اسید قوی، یون تولید کرده است؛ بنابراین غلظت محلول اسید ضعیف، بیشتر است).
 بررسی گزینه‌ها:

۱) درصد یونش اسید قوی HNO₃، همواره برابر ۱۰۰ است و با افزایش غلظت این اسید، مقدار تفاوت درصد یونش دو اسید، تغییری نمی‌کند، از طرفی درصد یونش اسیدهای ضعیف (مانند HNO₂) طبق رابطه $K_a = M\alpha^2$ ، با غلظت آن‌ها رابطه وارونه دارد؛ بنابراین با افزایش غلظت اسید ضعیف، درصد یونش آن کم‌تر شده و تفاوت درصد یونش دو اسید، بیشتر می‌شود:



۲) نیتریک اسید، یک اسید قوی است و به طور کامل یونش می‌یابد؛ بنابراین در محلول آن (برخلاف محلول نیترو اسید)، تقریباً مولکول اسید یونیده نشده وجود ندارد.

۳) غلظت اولیه محلول نیترو اسید بیشتر از محلول نیتریک اسید بوده است، از طرفی حجم محلول نیترو اسید، دو برابر حجم محلول نیتریک اسید می‌باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\text{شمار مول حل شونده}}{\text{حجم محلول}} = \frac{\text{مول HNO}_2}{V(\text{HNO}_2)} > \frac{\text{مول HNO}_3}{V(\text{HNO}_3)}$$

$$\frac{V(\text{HNO}_2) = 2V(\text{HNO}_3)}{\text{مول HNO}_2 > 2(\text{مول HNO}_3)}$$

۴) حجم نهایی گاز آزاد شده، به شمار مول‌های اسید اولیه بستگی دارد. با توجه به این که هم حجم و هم غلظت محلول نیترو اسید بیشتر است، شمار مول‌های اسید در این محلول بیشتر بوده و در نتیجه حجم گاز آزاد شده در واکنش آن با نوار منیزیم بیشتر خواهد بود.

تست و پاسخ ۹۰

با توجه به معادله یونش و ثابت یونش فورمیک اسید و استیک اسید، اگر در محلول‌هایی از این دو اسید در دمای اتاق، غلظت تعادلی استیک اسید، ۲/۵ برابر غلظت تعادلی فورمیک اسید باشد، نسبت جرم یون فورمات به یون استات در این دو محلول، به تقریب کدام است؟ (حجم هر دو محلول را ۰/۵ لیتر در نظر بگیرید؛ $O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)



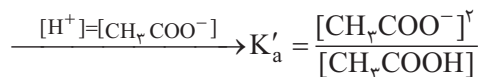
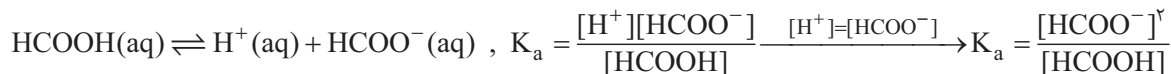
- | | |
|-------|---------|
| ۲ (۲) | ۲/۵ (۱) |
| ۱ (۴) | ۱/۵ (۳) |

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا با توجه به معادله موازنه شده واکنش یونش اسیدها، رابطه ثابت یونش را برای هر دو اسید می نویسیم، سپس به کمک اطلاعات داده شده، نسبت غلظت تعادلی آنیون ها را به دست می آوریم:



با توجه به این که نسبت غلظت تعادلی اسیدهای مورد نظر داده شده است و نسبت مقادیر تعادلی آنیون های حاصل از یونش را می خواهیم، رابطه های ثابت یونش دو اسید را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{K_a(\text{HCOOH})}{K'_a(\text{CH}_3\text{COOH})} = \frac{\frac{[\text{HCOO}^-]^2}{[\text{HCOOH}]}}{\frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]^2}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}} \Rightarrow \frac{1/8 \times 10^{-4}}{1/8 \times 10^{-5}} = \left(\frac{[\text{HCOO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}\right)^2 \times 2/5 \Rightarrow \left(\frac{[\text{HCOO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}\right)^2 = \frac{10}{2/5} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{[\text{HCOO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COO}^-]} = 2$$

گام دوم: با توجه به نسبت غلظت تعادلی آنیون ها، نسبت جرم آن ها را به دست می آوریم. با توجه به این که حجم دو محلول یکسان است، نسبت غلظت تعادلی آن ها با نسبت مول آن ها رابطه مستقیم دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{[\text{HCOO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COO}^-]} = \frac{\text{mol}(\text{HCOO}^-)}{\text{mol}(\text{CH}_3\text{COO}^-)} \xrightarrow{\text{جرم مولی}} 2 = \frac{\frac{\text{جرم}(\text{HCOO}^-)}{45}}{\frac{\text{جرم}(\text{CH}_3\text{COO}^-)}{59}} \Rightarrow \frac{\text{جرم}(\text{HCOO}^-)}{\text{جرم}(\text{CH}_3\text{COO}^-)} = \frac{2 \times 45}{59} = \frac{90}{59} \approx \frac{90}{60} = 1/5$$

شیمی دهم

تست و پاسخ ۹۱

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) در میان منابع آب در کره زمین، کوه های یخ سهم بیشتری نسبت به آب های زیرزمینی دارند.

(ب) آب های موجود در کره زمین در صورت مسطح بودن آن، همه سطح زمین را تا ارتفاع بیش از ۲ متر می پوشانند.

(پ) مقدار یون های تک اتمی و محلول در آب دریا، به میزان قابل توجهی بیشتر از یون های چند اتمی است.

گروه اول

(ت) مجموع جرم یون های فلزهای قلیایی در آب دریا، کم تر از این مقدار برای یون های فلزهای قلیایی خاکی است.

گروه دوم

(۴) ب - ت

(۳) الف - پ

(۲) پ - ت

(۱) الف - ب

پاسخ: گزینه ۳

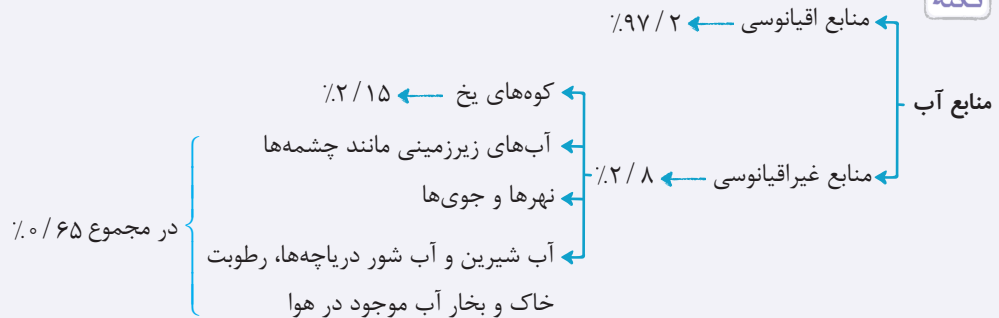
پاسخ تشریحی عبارت های «الف» و «پ» درست اند.

بررسی عبارت ها:

(الف) به طور کلی منابع آب را می توان به دو دسته کلی منابع اقیانوسی و غیر اقیانوسی تقسیم کرد. در منابع آبی غیر اقیانوسی، پس از کوه های یخ، بیشترین سهم مربوط به آب های زیرزمینی است، پس از آن آب نهرها و جوی ها هستند و در نهایت مجموعه آب شیرین و شور دریاچه ها، رطوبت خاک و بخار آب موجود در هوا سهم بسیار کمی از منابع غیر اقیانوسی را به خود اختصاص می دهند.



نکته



ب) اگر کره زمین را مسطح در نظر بگیریم، آب همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر می‌پوشاند. (پ) با توجه به جدول زیر، مقدار یون‌های تک‌اتمی محلول در آب دریا که شامل یون‌های Cl^- ، Na^+ ، Ca^{2+} ، K^+ و Br^- است، به میزان قابل توجهی بیشتر از یون‌های چنداتمی که شامل یون‌های SO_4^{2-} و CO_3^{2-} است، می‌باشد.

نام یون	کلرید	سدیم	سولفات	منیزیم	کلسیم	پتاسیم	کربنات	برمید
نماد یون	Cl^-	Na^+	SO_4^{2-}	Mg^{2+}	Ca^{2+}	K^+	CO_3^{2-}	Br^-
میلی گرم یون در یک کیلوگرم آب دریا	۱۹۰۰۰	۱۰۵۰۰	۲۶۵۵	۱۳۵۰	۴۰۰	۳۸۰	۱۴۰	۶۵

ت) فلزهای قلیایی همان فلزهای گروه اول جدول تناوبی و فلزهای قلیایی‌خاکی همان فلزهای گروه دوم جدول تناوبی هستند. یون‌های فلزهای قلیایی در آب دریا به طور عمده شامل یون‌های Na^+ و K^+ و یون‌های فلزهای قلیایی‌خاکی در آب دریا شامل یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} می‌باشند؛ با توجه به جدول کتاب درسی، مجموع جرم فلزهای قلیایی در آب دریا، بیشتر از مجموع جرم فلزهای قلیایی‌خاکی است.

تکنیک برای حل این تست نیازی به بررسی همه عبارات‌ها نیست! عبارات‌های «پ» و «ت» عبارات‌های سختی محسوب می‌شوند، اما با توجه به فرمت سؤال، می‌توانیم فقط با بررسی عبارات‌های «الف» و «ب» به جواب تست برسیم. عبارت «الف» درست است، پس جواب یکی از **۱** یا **۳** است. عبارت «ب» نادرست است؛ بنابراین **۱** حذف شده و جواب درست، **۳** می‌باشد.

تست و پاسخ ۹۲

- کدام گزینه درباره ترکیب آمونیوم سولفات، درست است؟
- نسبت شمار آنیون به کاتیون در آن، با این نسبت در منیزیم کربنات برابر است.
 - مدل فضاپرکن کاتیون سازنده آن با یون نیتрат، مشابه است.
 - نسبت شمار اتم‌ها به شمار انواع عنصرها در یک واحد فرمولی آن، برابر $3/75$ است.
 - شمار پیوندهای اشتراکی هر اتم نیتروژن در آن، با شمار پیوندهای اشتراکی اتم نیتروژن در آمونیاک برابر است.

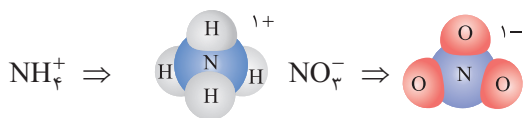
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی آمونیوم سولفات با فرمول شیمیایی $(NH_4)_2SO_4$ ، یک ترکیب یونی چندتایی است که دارای $1 + 4 = 15$ اتم 4 و نوع عنصر سازنده (N, H, S, O) است؛ بنابراین نسبت شمار اتم‌ها به شمار انواع عنصرها در یک واحد فرمولی آن برابر $3/75 = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ می‌باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

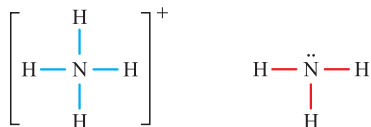
۱ نسبت شمار آنیون به شمار کاتیون در ترکیب آمونیوم سولفات، کم‌تر از این نسبت در ترکیب منیزیم کربنات است:

$$\left. \begin{aligned} (NH_4)_2SO_4: \text{آمونیم سولفات} &\Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{1}{2} \\ MgCO_3: \text{منیزیم کربنات} &\Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

۲) مدل فضاپرکن یون‌های NH_4^+ و NO_3^- مشابه هم نیست:



۳) اتم نیتروژن در NH_4^+ ، ۴ پیوند اشتراکی و در NH_3 ، ۳ پیوند اشتراکی تشکیل داده است:



تست و پاسخ ۹۳

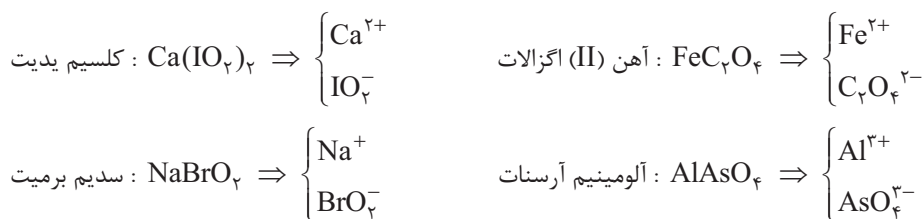
با توجه به جدول زیر، شمار اتم‌ها در هر واحد فرمولی از کدام ترکیب، درست نوشته شده است؟

نام	کلسیم یدید	آهن (II) اگزالات	سدیم برمیت	آلومینیم آرسنات
فرمول شیمیایی	$\text{Ca}(\text{IO}_3)_2$	FeC_2O_4	NaBrO_3	AlAsO_4

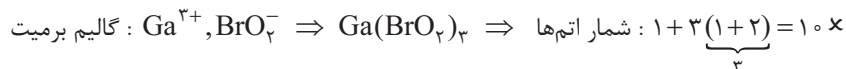
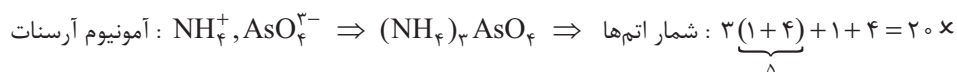
(۱) آمونیوم آرسنات - ۱۰ (۲) نقره اگزالات - ۸ (۳) گالیم برمیت - ۹ (۴) روبیدیم یدید - ۵

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: با توجه به فرمول شیمیایی ترکیبات داده‌شده، فرمول شیمیایی یون‌های سازنده آن‌ها را می‌نویسیم:

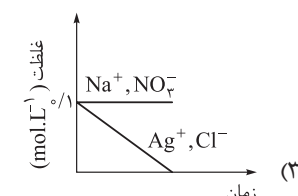
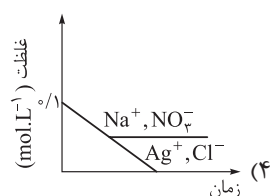
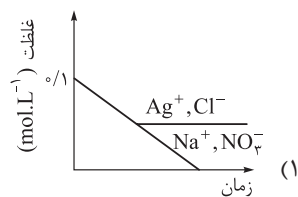
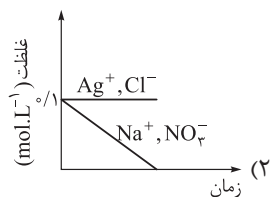


بررسی گزینه‌ها:



تست و پاسخ ۹۴

در ظرفی، ۱/۱ مول نقره نیترات را در یک لیتر آب و در یک ظرف دیگر، ۱/۱ مول سدیم کلرید را در یک لیتر آب حل و سپس این دو محلول را به هم اضافه می‌کنیم. کدام گزینه نمودار تقریبی تغییرات غلظت یون‌های محلول در آب را در تمام این فرایند به درستی نشان می‌دهد؟



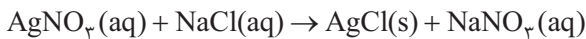
پاسخ: گزینه ۲



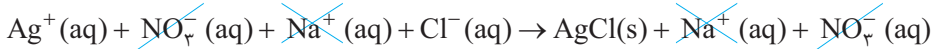
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

پاسخ تشریحی معادله واکنش محلول‌های سدیم کلرید و نقره نیترات به صورت زیر است:

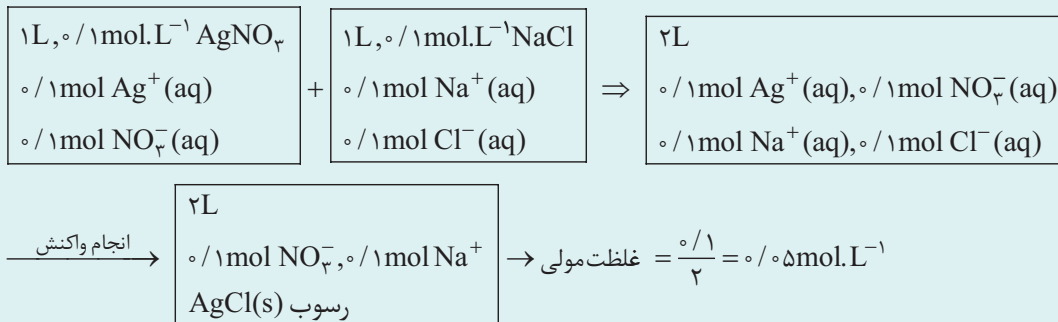


هالا! اگر مواد محلول را با یون‌های سازنده نشان دهیم، خواهیم داشت:



با انجام واکنش، به دلیل تشکیل رسوب AgCl ، غلظت یون‌های $\text{Ag}^+(\text{aq})$ و $\text{Cl}^-(\text{aq})$ کاهش می‌یابد؛ پس تا این جا (۱) و (۲) پر!
غلظت اولیه هر یک از یون‌های $\text{Na}^+(\text{aq})$ و $\text{NO}_3^-(\text{aq})$ ، 0.1 مولار است، اما وقتی دو محلول را با هم مخلوط می‌کنیم، به دلیل دو برابر شدن حجم محلول، غلظت اولیه هر یک از یون‌های $\text{Na}^+(\text{aq})$ ، $\text{NO}_3^-(\text{aq})$ نصف شده و کاهش می‌یابد. پس (۳) هم پر! پس از مخلوط شدن محلول‌ها، غلظت این دو یون ثابت باقی می‌ماند، زیرا در واکنش شرکت نمی‌کنند و در واقع یون‌های ناظر هستند؛ بنابراین (۴) درست است.

دام تستی اگر در ابتدا مخلوطی از محلول‌های AgNO_3 و NaCl را داشتیم، جواب درست (۳) می‌شد، اما دقت کنید که در این جا ابتدا محلول‌های AgNO_3 و NaCl از هم جدا بوده‌اند و با مخلوط کردن آن‌ها و افزایش حجم، غلظت یون‌ها کاهش یافته است:



تست و پاسخ ۹۵

غلظت یون نقره در محلول سیرشده نقره کلرید با دمای 25°C ، به تقریب چند ppm است؟ (انحلال پذیری نقره کلرید در دمای 25°C برابر

$$2 \times 10^{-4} \text{ گرم در } 100 \text{ گرم آب است؛ } (\text{Ag} = 108, \text{Cl} = 35.5 : \text{g.mol}^{-1})$$

$$1/9 (4)$$

$$1/5 (3)$$

$$1/0.8 (2)$$

$$0/9 (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی برای محاسبه غلظت یون Ag^+ در محلول سیرشده نمک AgCl برحسب ppm، به جرم این یون و جرم محلول نیاز داریم. در 100 گرم آب، حداکثر 2×10^{-4} گرم AgCl حل و محلول سیرشده‌ای از این نمک تهیه می‌شود. از اون بایی که عدد 2×10^{-4} در مقابل 100 عدد بسیار کوچکی است، می‌توانیم جرم محلول را به تقریب برابر با جرم آب (100g) در نظر بگیریم. حالا جرم Ag^+ را به کمک جرم AgCl به دست می‌آوریم:

$$2 \times 10^{-4} \text{g AgCl} \times \frac{1 \text{mol AgCl}}{143.5 \text{g AgCl}} \times \frac{1 \text{mol Ag}^+}{1 \text{mol AgCl}} \times \frac{108 \text{g Ag}^+}{1 \text{mol Ag}^+} = \frac{2 \times 10^{-4} \times 108}{143.5} \approx 1.5 \times 10^{-4} \text{g Ag}^+$$

در آخر از رابطه ppm استفاده و غلظت یون Ag^+ را حساب می‌کنیم:

$$\text{ppm}(\text{Ag}^+) = \frac{\text{جرم Ag}^+}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{1.5 \times 10^{-4}}{100} \times 10^6 = 1.5$$



تست و پاسخ ۹۶

سدیم کلرید ۰/۹ درصد جرمی

در ارتباط با نمک موجود در محلول شست و شوی دهان، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟
 الف) عمده ترین ترکیب انحلال یافته در آب دریاها و اقیانوس ها است.
 ب) این نمک، به روش فیزیکی از آب دریا جدا می شود.
 پ) در هر ۱۰۰ گرم از محلول شست و شوی دهان، ۹ گرم از آن وجود دارد.
 ت) بیشترین کاربرد آن، استفاده در تهیه خمیر کاغذ، پارچه، رنگ، پلاستیک و صنعت نفت است.

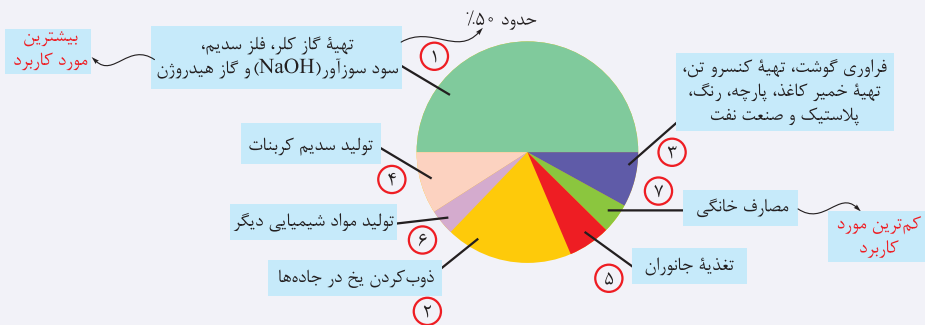
(۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) الف - ب - پ (۴) پ - ت

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی عبارت های «الف» و «ب» درست اند.

محلول شست و شوی دهان، محلول استریل سدیم کلرید ۰/۹ درصد است؛ بنابراین نمک موجود در این محلول، سدیم کلرید (NaCl) می باشد. بررسی موارد:
 الف) یون های کلرید (Cl⁻) و سدیم (Na⁺)، فراوان ترین یون های حل شده در آب دریاها و اقیانوس ها هستند؛ بنابراین نمک سدیم کلرید (NaCl)، عمده ترین ترکیب انحلال یافته در آب دریاها و اقیانوس ها است.
 ب) سالانه میلیون ها تن سدیم کلرید با روش تبلور از آب دریا جداسازی و استخراج می شود. روش تبلور (جداسازی حل شونده از محلول به شکل بلورهای جامد)، جزء روش های فیزیکی جداسازی است.
 پ) در ۱۰۰ گرم محلول شست و شوی دهان، ۰/۹ گرم NaCl و $99/1 = 100 - 0/9$ گرم آب وجود دارد.
 ت) بیشترین کاربرد سدیم کلرید در تهیه گاز کلر، فلز سدیم، سود سوزآور و گاز هیدروژن است.

نکته در نمودار زیر، کاربردهای سدیم کلرید آورده شده است:



تست و پاسخ ۹۷

به ۲۰۰ گرم محلول ۲۵ درصد جرمی پتاسیم نیترات، چند برابر جرم نمک موجود در محلول، باید پتاسیم نیترات اضافه کنیم تا درصد جرمی نمک در محلول، دو برابر شود؟

(۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا با توجه به جرم محلول پتاسیم نیترات و مقدار و رابطه درصد جرمی آن، جرم نمک موجود در محلول مورد نظر را به دست می آوریم:

$$\text{جرم حل شونده (g)} = \frac{\text{جرم محلول (g)}}{\text{درصد جرمی محلول اولیه}} \times 100$$

$$25 = \frac{g \text{KNO}_3}{200} \times 100 \Rightarrow 0/25 = \frac{g \text{KNO}_3}{200} \Rightarrow g \text{KNO}_3 = 50$$

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



گام دوم: در ادامه با در نظر گرفتن این که درصد جرمی نمک در محلول جدید، دو برابر یا همان $2 \times 25 = 50$ درصد شده است، جرم نمک افزوده شده به محلول جدید را با توجه به جرم محلول جدید و مقدار و رابطه درصد جرمی آن، محاسبه می‌کنیم:

$$100 \times \frac{\text{جرم پتاسیم نیترات اضافه شده} + \text{جرم پتاسیم نیترات اولیه}}{\text{جرم محلول اولیه}} = \text{درصد جرمی محلول جدید}$$

$$50 = \frac{50 + g \text{KNO}_3}{200 + g \text{KNO}_3} \times 100 \Rightarrow 0.5 = \frac{50 + g \text{KNO}_3}{200 + g \text{KNO}_3} \Rightarrow g \text{KNO}_3 = 100$$

گام سوم: در نهایت می‌توان گفت که جرم نمک افزوده شده، $2 = \frac{100}{50}$ برابر جرم نمک موجود در محلول اولیه است.

تست و پاسخ ۹۸

برای تهیه محلول‌های سیر شده از مواد زیر در ۱۰۰ گرم آب با دمای 25°C ، از کدام ماده جرم کم‌تری نیاز است؟

- (۱) سدیم کلرید
(۲) سدیم نیترات
(۳) کلسیم فسفات
(۴) باریوم کلرید

یعنی انحلال‌پذیری آن کم‌تر است.

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه ●● مواد محلول، نامحلول و کم‌محلول

مواد حل‌شونده جامد براساس میزان انحلال‌پذیری در آب در دمای اتاق، به ۳ دسته تقسیم می‌شوند:

- مواد محلول: موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب، بیشتر است.
 - مواد نامحلول: موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها از ۰/۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب، کم‌تر است.
 - مواد کم‌محلول: موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها بین ۰/۱ تا ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.
- (۱) مواد کم‌محلول: در شیمی دهم، فقط به کلسیم سولفات (CaSO_4) اشاره شده است. در شیمی یازدهم نیز می‌خوانیم که الکل‌های ۶ تا ۸ کربنی (۱- هگزانول ($\text{C}_6\text{H}_{13}\text{OH}$)، ۱- هپتانول ($\text{C}_7\text{H}_{15}\text{OH}$) و ۱- اوکتانول ($\text{C}_8\text{H}_{17}\text{OH}$)) نیز جزء مواد کم‌محلول در آب هستند.
- (۲) مواد نامحلول:

- نقره کلرید (AgCl)
- باریم سولفات (BaSO_4)
- آهن (II) هیدروکسید ($\text{Fe}(\text{OH})_2$)
- کلسیم فسفات ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$)
- منیزیم هیدروکسید ($\text{Mg}(\text{OH})_2$)
- آهن (III) هیدروکسید ($\text{Fe}(\text{OH})_3$)
- آلومینیم هیدروکسید ($\text{Al}(\text{OH})_3$)

(۳) اگر لیست مواد کم‌محلول و نامحلول را بلد باشید، در حد کتاب درسی و کنکور، بقیه مواد را می‌توانید محلول فرض کنید. در ضمن بد نیست بدانید که همه ترکیب‌های شامل کاتیون فلزهای گروه اول (Li^+ ، Na^+ ، K^+ ، ...)، یون آمونیوم (NH_4^+) و یون نیترات (NO_3^-)، در آب محلول هستند.

مهم‌ترین مواد محلول در آب معرفی شده در کتاب درسی

<ul style="list-style-type: none"> باریم کلرید (BaCl_2) سدیم هیدروکسید (NaOH) 	<ul style="list-style-type: none"> استون (CH_3COCH_3 یا $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$) کلسیم کلرید ($\text{CaCl}_2$) منیزیم سولفات (MgSO_4) 	<ul style="list-style-type: none"> اتانول یا الکل معمولی ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) سدیم سولفات ($\text{Na}_2\text{SO}_4$) آمونیم سولفات ($(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$) سدیم فسفات ($\text{Na}_3\text{PO}_4$)
---	--	--

پاسخ تشریحی هر چه انحلال پذیری ماده حل شونده کم تر باشد، برای تهیه محلول سیر شده آن، به جرم کمتری ماده نیاز است. در بین گزینه های داده شده، سدیم کلرید، سدیم نیترات و باریم کلرید در آب محلول ($S > 1$) هستند اما کلسیم فسفات در آب نامحلول ($S < 0.01$) بوده و انحلال پذیری کمتری دارد؛ بنابراین طبیعتاً برای تهیه محلول سیر شده آن، به جرم کمتری حل شونده نیاز است.

تست و پاسخ ۹۹

۷۲ گرم از سولفات فلز X را در یک بشر ۲۵۰ میلی لیتری ریخته (شکل ۱) و در ادامه آن را با اضافه کردن آب مقطر پر می کنیم (شکل ۲). اگر ۱۰۰ میلی لیتر از محلول حاصل را تا ۱۰۰ مرتبه با افزودن آب رقیق تر کنیم، در هر ۱۰۰ میلی لیتر از محلول رقیق شده، $57/6$ میلی گرم از یون فلز X وجود دارد. نسبت جرم مولی فلز X به بار آن در این آزمایش کدام است؟ ($S = 32, O = 16 : g.mol^{-1}$)



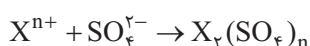
شکل (۱)



شکل (۲)

- ۱۲ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۲۸ (۳)
- ۳۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی اگر نماد کاتیون X را X^{n+} در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

مراحل کار به صورت زیر بوده است:

محلول ۲۵۰ mL $72 \text{ g } X_2(SO_4)_n$ محلول اولیه	$\xrightarrow[100 \text{ mL}]{\text{برمی داریم.}}$ $(\frac{2}{5} \text{ کل})$	۱۰۰ mL $72 \times \frac{2}{5} = 28.8 \text{ g}$ $X_2(SO_4)_n$	
با افزودن آب، حجم محلول را ۱۰۰ برابر می کنیم.		محلول $100 \times 100 \text{ mL}$ $28.8 \text{ g } X_2(SO_4)_n$	$\xrightarrow[100 \text{ mL}]{\text{برمی داریم.}}$
		۱۰۰ mL $\frac{28.8}{100} \text{ g} = 288 \text{ mg } X_2(SO_4)_n$ اطلاعات سؤال: $57/6 \text{ mg } X^{n+}$	

در ۲۸۸ میلی گرم $X_2(SO_4)_n$ ، $57/6$ میلی گرم X^{n+} وجود دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$X_2(SO_4)_n \sim 2X^{n+}$$

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{X_2(SO_4)_n} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{X^{n+}} \Rightarrow \frac{288}{2M_X + 96n} = \frac{57/6}{2M_X}$$

$$\Rightarrow 10M_X = 2M_X + 96n \Rightarrow 8M_X = 96n \Rightarrow \frac{M_X}{n} = \frac{96}{8} = 12$$

تست و پاسخ ۱۰۰

اگر دستگاه گلوکومتر، قند خون فردی را برابر ۹۰ نشان دهد، در هر میلی لیتر از خون این فرد، چند میکروگرم گلوکز وجود دارد؟ ($1 \mu\text{g} = 10^{-6} \text{ g}$)

- ۹۰ (۱)
- ۹۰۰ (۲)
- ۹۰ (۳)
- ۹۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه •• گلوکومتر



برای اندازه گیری قند خون از دستگاهی به نام گلوکومتر استفاده می شود. عددی که این دستگاه نشان می دهد، بیانگر مقدار گلوکز ($C_6H_{12}O_6$) بر حسب میلی گرم در یک دسی لیتر از خون است؛ به عبارت دیگر، یکای عدد نشان داده شده توسط گلوکومتر، mg/dL است.

$$1 \text{ dL} = 100 \text{ mL} = 0.1 \text{ L}$$

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



برای تبدیل عدد دستگاه گلوکومتر به غلظت مولی گلوکز در خون، باید از یکای mg/dL به یکای mol/L برسیم. برای این کار صورت و مخرج را *پدا پدا* به یکای *دلفواهمون می رسونیم!* فرض کنید دستگاه گلوکومتر، عدد ۹۵ را نشان می دهد:

$$95 \frac{\text{mg C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{\text{dL}} \times \frac{1 \text{g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{1000 \text{mg C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} \times \frac{1 \text{mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{180 \text{g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} \times \frac{1 \text{dL}}{0.1 \text{L}} = \frac{95}{18000} \approx 5.28 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

تبدیل میلی گرم گلوکز به مول آن تبدیل دسی لیتر به لیتر

با توجه به محاسبات بالا، معلومه که برای تبدیل عدد دستگاه گلوکومتر به غلظت مولی گلوکز، می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\text{عدد دستگاه گلوکومتر} \times 10^{-5} \times 5.28 \approx \frac{\text{عدد دستگاه گلوکومتر}}{18000} = \text{غلظت مولی گلوکز}$$

پاسخ تشریحی دستگاه گلوکومتر، غلظت گلوکز را بر حسب mg/dL نشان می دهد؛ بنابراین باید از یکای mg/dL به یکای $\mu\text{g/mL}$ برسیم:

$$1 \text{dL} = 0.1 \text{L} = 100 \text{mL}$$

$$\frac{90 \text{mg}}{\text{dL}} \times \frac{1 \text{dL}}{100 \text{mL}} \times \frac{1 \text{g}}{1000 \text{mg}} \times \frac{10^6 \mu\text{g}}{1 \text{g}} = 900 \frac{\mu\text{g}}{\text{mL}}$$

تست و پاسخ ۱۰۱

کدام گزینه درست است؟

$$S \approx 0.25$$

۱) انحلال پذیری نمک های نیترات در هر دمایی بیشتر از انحلال پذیری سایر نمک ها است.

۲) نمکی با توانایی تشکیل محلولی با حداکثر غلظت 0.25% درصد جرمی در آب و در دمای اتاق، کم محلول محسوب می شود.

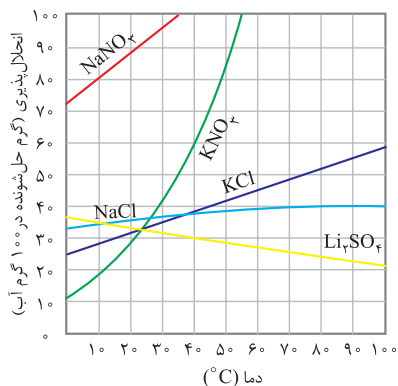
۳) در یک دمای معین، تفاوت انحلال پذیری دو ماده کم محلول در صد گرم آب، می تواند بیش از یک گرم باشد.

۴) اگر عرض از مبدأ نمودار «انحلال پذیری - دما» در نمک A، بیشتر از این کمیت در نمک B باشد، انحلال پذیری نمک A در هر دمایی بیشتر از نمک B خواهد بود.

پاسخ: گزینه ۲

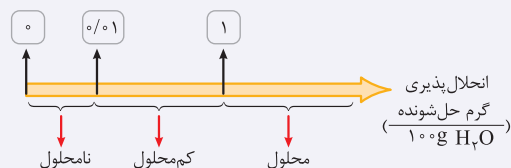
پاسخ تشریحی بررسی گزینه ها:

۱) لزوماً در هر دمایی، انحلال پذیری نمک های نیترات بیشتر از نمک های دیگر نیست. مثلاً با توجه به نمودار مقابل که در کتاب درسی آمده است، در دمای 10°C ، انحلال پذیری پتاسیم نیترات (KNO_3) کم تر از انحلال پذیری نمک های NaCl ، KCl و Li_2SO_4 است.



۲

نکته با توجه به میزان انحلال پذیری، مواد را به سه دسته تقسیم می کنند:



غلظت 0.25% درصد جرمی، یعنی در 100 گرم محلول، 0.25 گرم نمک و $(100 - 0.25)$ گرم آب وجود دارد:

$$\text{نمک } 0.25 \text{g} \times \frac{\text{نمک } 0.25 \text{g}}{99.75 \text{g آب}} \approx 0.25 \text{g}$$

انحلال پذیری

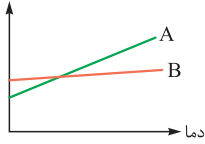
با توجه به این که انحلال پذیری ماده مورد نظر، بین 0.01% تا 1 گرم در 100 گرم آب است، یک ماده کم محلول محسوب می شود.

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز



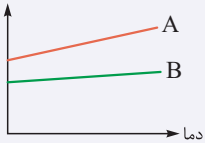
۳ انحلال پذیری مواد کم محلول بین ۰/۰۱ تا ۱ گرم است؛ پس هیچ‌گاه تفاوت انحلال پذیری دو ماده از این دسته بیشتر از ۱ گرم نمی‌تواند باشد. (حداکثر تفاوت انحلال پذیری دو ماده کم محلول برابر با $0/99 = 1 - 0/01$ گرم است.)

انحلال پذیری



۴ انحلال پذیری دو ماده، علاوه بر عرض از مبدأ، به شیب نمودار آن‌ها هم بستگی دارد، مثلاً در نمودار مقابل، عرض از مبدأ نمودار B بیشتر از A است، اما با توجه به این که شیب نمودار A بیشتر از B می‌باشد، در برخی از دماها، نمک A انحلال پذیری بیشتری نسبت به نمک B دارد:

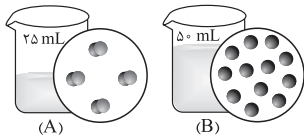
انحلال پذیری



نکته برای این که انحلال پذیری نمک A از نمک B در هر دمایی بیشتر باشد، باید نمودار انحلال پذیری نمک A: (۱) عرض از مبدأ بیشتری داشته و (۲) شیب آن بزرگ‌تر یا مساوی نمودار B باشد. بدین ترتیب نمودار انحلال پذیری نمک A در هر دمایی بالاتر از نمودار انحلال پذیری نمک B قرار خواهد داشت:

تست و پاسخ ۱۰۲

با توجه به شکل زیر، اگر هر ذره حل شونده نشان داده شده در محلول‌های آبی، هم‌ارز با ۰/۰۵ مول باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (از تغییر حجم حلال بر اثر انحلال حل شونده‌ها در آن صرف نظر شود، دمای دو محلول با هم برابر است و چگالی دو محلول را با چگالی آب یکسان در نظر بگیرید.)



(۱) اگر با افزودن ۲۵ میلی‌لیتر آب مقطر به محلول A، درصد جرمی حل شونده در دو محلول برابر شود، جرم مولی حل شونده A، سه برابر جرم مولی حل شونده B است.
 (۲) نسبت غلظت ppm حل شونده در این دو محلول، برابر با نسبت درصد جرمی حل شونده در آن‌ها است.

(۳) اگر نسبت جرم مولی حل شونده محلول (B) به محلول (A) برابر $\frac{2}{3}$ باشد، غلظت دو محلول بر حسب ppm با هم برابر است.

(۴) اگر هر دو محلول A و B سیر شده باشند، انحلال‌پذیری حل شونده B در این دما بیشتر از حل شونده A است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱ با افزودن ۲۵ میلی‌لیتر آب به محلول A، حجم این محلول مانند محلول B، ۵۰ mL می‌شود. با توجه به این که چگالی محلول‌ها برابر 1 g.mL^{-1} است، جرم دو محلول، ۵۰ گرم خواهد بود:

$$\text{جرم حل شونده B} = \text{جرم حل شونده A}' \rightarrow \text{نسبت درصد جرمی دو محلول} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \text{درصد جرمی}$$

$$\rightarrow (4 \times 0/05) \times M_A = (12 \times 0/05) \times M_B \Rightarrow M_A = 3M_B$$

۲ نسبت درصد جرمی یا ppm دو محلول، با نسبت $\frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}}$ در آن‌ها برابر است:

$$\left. \begin{aligned} \text{ppm} &= \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \\ \text{درصد جرمی} &= \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نسبت} \left(\frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \right) \text{ دو محلول} = \text{نسبت درصد جرمی دو محلول} = \text{نسبت ppm دو محلول}$$

$$\text{ppm(A)} = \frac{\text{جرم A}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{4 \times 0/05 \times M_A}{25} \times 10^6$$

$$\text{ppm(B)} = \frac{\text{جرم B}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{12 \times 0/05 \times M_B}{50} \times 10^6$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

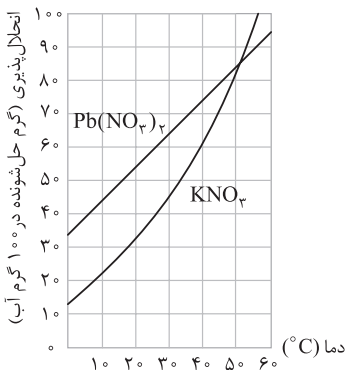
$$\left. \begin{aligned} \text{ppm}(A) &= \frac{0.2M_A}{25} \times 10^6 \\ \text{ppm}(B) &= \frac{0.6 \times \frac{2}{3} M_A}{50} \times 10^6 = \frac{0.2M_A}{25} \times 10^6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ppm}(A) = \text{ppm}(B)$$

اگر M_B ، $\frac{2}{3}$ برابر M_A باشد، حاصل کسرهای بالا با هم برابر خواهد شد:

۴) با توجه به فرضیات سؤال، در ۲۵ گرم آب، $4 \times 0.05 = 0.2$ مول A و در ۵۰ گرم آب، $12 \times 0.05 = 0.6$ مول B حل شده است، اما با توجه به این که جرم مولی حل شونده‌ها را نداریم، نمی‌توانیم مول آن‌ها را به جرم تبدیل کنیم و در نتیجه مقایسه انحلال پذیری آن‌ها ممکن نیست.

تست و پاسخ ۱۰۳

مقداری نمک A را در ۲۰ گرم آب در دمای 55°C حل می‌کنیم تا محلولی سیر شده از آن تهیه شود. اگر بر اثر کاهش دمای محلول تا 3°C ، ۱۱ گرم نمک A در ظرف ته‌نشین شود، کدام یک از نمک‌های موجود در نمودار مقابل است و جرم محلول اولیه چند گرم است؟



۱) KNO_3 ، ۵۰

۲) KNO_3 ، ۴۰

۳) $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ ، ۵۰

۴) $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ ، ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: به ازای ۲۰ گرم آب، ۱۱ گرم نمک رسوب می‌کند؛ بنابراین جرم رسوب تشکیل شده به ازای ۱۰۰ گرم آب برابر با $55 \times 11 = 55$ گرم است؛ در نتیجه اختلاف انحلال پذیری نمک A در دماهای 55°C و 3°C به ازای ۱۰۰ گرم آب، برابر ۵۵ گرم است. حالا با توجه به نمودار، باید ببینیم اختلاف انحلال پذیری در دو دما برای کدام یک از نمک‌های $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ یا KNO_3 ، برابر ۵۵ گرم است:

$$\left. \begin{aligned} \text{Pb}(\text{NO}_3)_2 \Rightarrow \theta_1 = 55^\circ\text{C} \Rightarrow S_1 = 90 \\ \theta_2 = 3^\circ\text{C} \Rightarrow S_2 = 65 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 90 - 65 = 25 \text{ g } x$$

$$\left. \begin{aligned} \text{KNO}_3 \Rightarrow \theta_1 = 55^\circ\text{C} \Rightarrow S_1 = 100 \\ \theta_2 = 3^\circ\text{C} \Rightarrow S_2 = 45 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 100 - 45 = 55 \text{ g } \checkmark$$

بنابراین نمک مورد نظر، همان KNO_3 است. در دمای 55°C ، انحلال پذیری این نمک برابر ۱۰۰ گرم است؛ بنابراین به ازای ۲۰۰ گرم محلول و کاهش دما تا 3°C ، ۵۵ گرم نمک رسوب می‌کند:

$$11 \text{ g رسوب} \times \frac{200 \text{ g محلول}}{55 \text{ g رسوب}} = 40 \text{ g محلول}$$

تست و پاسخ ۱۰۴

انحلال پذیری نمک فرضی A در دمای 40°C ، برابر ۴۲ گرم در صد گرم آب است. اگر در ۳۰۸ گرم محلول سیر شده نمک A در دمای 56°C ، $1/2$ مول نمک وجود داشته باشد، جرم مولی نمک A چند g.mol^{-1} است؟ (معادله انحلال پذیری نمک، خطی و عرض از مبدأ آن برابر ۱۲ است.)

۱۰۸ (۴)

۹۰ (۳)

۸۴ (۲)

۶۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: معادله انحلال پذیری نمک A را به دست می‌آوریم:

θ	۰	۴۰
S	۱۲	۴۲

$$a = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{42 - 12}{40 - 0} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}, \text{ یا عرض از مبدأ } b = 12$$

$$\Rightarrow S = a\theta + b = \frac{3}{4}\theta + 12$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

گام دوم: با توجه به معادله انحلال پذیری به دست آمده، انحلال پذیری نمک در دمای 56°C را حساب می‌کنیم:

$$S = \left(\frac{3}{4} \times 56\right) + 12 = 42 + 12 = 54 \frac{\text{g}}{100 \text{g H}_2\text{O}}$$

در 100 گرم آب 56°C ، 54 گرم نمک حل شده و 154 گرم محلول سیر شده تشکیل می‌شود؛ یعنی در 154 گرم محلول سیر شده، 54 گرم نمک وجود دارد. حالا به ازای 308 گرم محلول سیر شده خواهیم داشت:

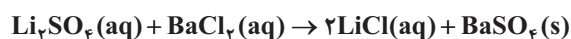
$$\text{نمک } 108 \text{ g} = \frac{54 \text{ g نمک}}{154 \text{ g محلول}} \times 308 \text{ g محلول}$$

گام سوم: با استفاده از جرم نمک و تعداد مول آن، جرم مولی نمک را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{108}{1/2} \Rightarrow \frac{108}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \text{جرم مولی} = \frac{108}{1/2} = \frac{108 \times 2}{1} = 216 \text{ g.mol}^{-1}$$

تست و پاسخ ۱۰۵

برای رسوب دادن یون باریم در نمونه‌ای به حجم 250 میلی‌لیتر از باریم کلرید با غلظت 0.2 مولار، این محلول را با لیتیم سولفات واکنش می‌دهیم. برای انجام کامل واکنش، به تقریب چند گرم محلول سیر شده لیتیم سولفات در دمای 18°C نیاز است؟



$$\begin{array}{ccccccc} \text{(معادله انحلال پذیری لیتیم سولفات بر حسب دما به صورت: « } S = -\frac{\theta}{6} + 36 \text{ » است: } & & & & & & \\ S = 32, O = 16, Li = 7 : \text{g.mol}^{-1} & & & & & & \\ 33 \text{ (4)} & & 27/5 \text{ (3)} & & 22 \text{ (2)} & & 5/5 \text{ (1)} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک معادله واکنش انجام شده، حساب کن که چند گرم لیتیم سولفات با محلول باریم کلرید به طور کامل

واکنش می‌دهد، سپس جرم لیتیم سولفات را به کمک معادله انحلال پذیری آن، به جرم محلول سیر شده‌اش تبدیل کن!

پاسخ تشریحی گام اول: به کمک معادله واکنش، جرم Li_2SO_4 مصرف شده در واکنش کامل با محلول باریم کلرید را حساب می‌کنیم:

$$\frac{250}{1000} \text{ L BaCl}_2 \times \frac{0.2 \text{ mol BaCl}_2}{1 \text{ L BaCl}_2} \times \frac{1 \text{ mol Li}_2\text{SO}_4}{1 \text{ mol BaCl}_2} \times \frac{110 \text{ g Li}_2\text{SO}_4}{1 \text{ mol Li}_2\text{SO}_4} = 5.5 \text{ g Li}_2\text{SO}_4$$

گام دوم: به کمک معادله انحلال پذیری، حساب می‌کنیم در چند گرم محلول سیر شده لیتیم سولفات در دمای 18°C ، 5.5 گرم Li_2SO_4 وجود دارد:

$$S = -\frac{\theta}{6} + 36 \xrightarrow{\theta=18^{\circ}\text{C}} S = -\frac{18}{6} + 36 = 33 \text{ g}$$

در دمای 18°C ، در 133 گرم محلول سیر شده، 33 گرم لیتیم سولفات وجود دارد؛ \therefore باید ببینیم در چند گرم محلول سیر شده، 5.5 گرم

لیتیم سولفات وجود دارد:

$$5.5 \text{ g Li}_2\text{SO}_4 \times \frac{133 \text{ g محلول سیر شده}}{33 \text{ g Li}_2\text{SO}_4} = \frac{133}{6} = \frac{120}{6} + \frac{13}{6} \approx 22 \text{ g محلول سیر شده}$$