



آزمون شماره ۳

۴ مهر ۱۴۰۴

پایه دوازدهم

رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۱ از ۲

مدت پاسخگویی: ۶۵

تعداد سؤال: ۳۵

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان (به ترتیب الفبا)
حسابان	۱۶	۱	۱۶	۲۹ دقیقه	علیرضا رفیعی حسین شفیعزاده علیرضا ندافزاده
هندسه	۱۰	۱۷	۲۶	۱۹ دقیقه	علیرضا فعلی نصیر کریمی صبا مهدوی
گسسته	۹	۲۷	۳۵	۱۷ دقیقه	احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



۱- اگر مساحت محدود به نمودارهای توابع $y = |x-2|$ و $y = k - |x|$ برابر ۱۶ باشد، مقدار k کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

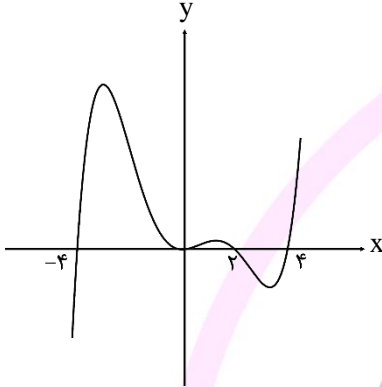
۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. مجموعه جوابهای نامعادله $\frac{f(2-2x)}{x-3} \geq 0$ شامل چند عضو صحیح است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



۳- حاصل $P = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - k}{3 - x^2}$ به ازای ریشه بزرگتر معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ برابر یک عدد گویا است. مقدار صحیح k کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۰ (۲)

-۱ (۱)

۴- اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = x^2 - 3x - 1$ و $\beta < \alpha$ باشد، حاصل $\beta + 2\beta^2 - \alpha^2$ برابر کدام است؟

$7 + \sqrt{13}$ (۴)

$15 + \sqrt{13}$ (۳)

$7 - \sqrt{13}$ (۲)

$15 - \sqrt{13}$ (۱)

۵- اگر توابع $f(x) = \frac{x+a}{x-2}$ و $g(x) = \frac{2x^2 + cx + d}{2x^2 + ax + b}$ باهم برابر باشند، حاصل $\frac{d-b}{a-c}$ کدام است؟

$\frac{15}{4}$ (۴)

$\frac{10}{3}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶- تابع $f(x) = 2x^2 + 12x + 3$ با دامنه $\mathbb{R} - \{a, b, c\}$ مفروض است. اگر برد f فقط دو عدد حقیقی از مجموعه جواب‌های نامعادله $-\frac{x}{3} > -6$ را

شامل نشود، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۸ (۳) -۱۲ (۴) -۹

۷- نمودار تابع $f(x) = x + \sqrt{2x-1}$ را ابتدا ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین جابه‌جا و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم. اگر نمودار خط $y = x + k$ را در نقطه‌ای به عرض ۸ قطع کند، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۸- تابع $f(x) = \begin{cases} 2|x-a|+3 & x \geq 1 \\ fax+4 & x < 1 \end{cases}$ اکیدا یکنواست. اگر بزرگترین محدوده a به صورت $[m, n]$ باشد، حاصل $n - m$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{7}{6}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۹- تابع اکیدا نزولی f با دامنه $[-1, 3]$ و برد $[-2, 4]$ مفروض است. اگر A و B نقاط ابتدا و انتهای واقع بر نمودار تابع f و نقاط A' و B' متناظر آن‌ها

روی نمودار تابع $g(x) = -2f^{-1}(1 - \frac{x}{2}) + 1$ باشند، شیب پاره‌خط $A'B'$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۱۰- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{4\sqrt{2}} \sqrt[3]{192} \sqrt[3]{\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $2\sqrt[3]{16}$ (۲) $2\sqrt[3]{32}$ (۳) $2\sqrt[3]{16}$ (۴) $2\sqrt[3]{32}$

۱۱- هرگاه چندجمله‌ای $P(x)$ را بر عبارت $x^2 + x + 1$ تقسیم کنیم، خارج قسمت $K(x)$ و باقی‌مانده برابر $3x + 1$ می‌شود. با فرض $P(1) = 1$ و $P(-2) = 10$ ، چنانچه خارج قسمت $K(x)$ را بر عبارت $x^2 + x - 2$ تقسیم کنیم، باقی‌مانده یک چندجمله‌ای می‌شود. کدام گزینه می‌تواند این چندجمله‌ای را نشان دهد؟

- (۱) $3x - 4$ (۲) $4x + 13$ (۳) $1 - 2x$ (۴) $-9 - 7x$

۱۲- علی و فرهاد کاری را با یک‌دیگر در $\frac{15}{8}$ ساعت انجام می‌دهند. اگر هر یک به تنهایی این کار را انجام دهند، علی ۲ ساعت دیرتر از فرهاد کار را تمام می‌کند. چنانچه هر دو با هم‌دیگر ۳۰ دقیقه کار کنند و سپس علی محیط کار را ترک کند، فرهاد چند ساعت دیگر باید کار کند تا هشتاد درصد کار تمام شود؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{7}$

۱۳- اگر چندجمله‌ای درجه سوم $P(x) = (2a - 1)x^4 + (2b - 1)x^3 + (2a + 1)x + 2b$ بر عبارت $2x + 4$ بخش‌پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{21}$ (۲) $\frac{2}{21}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۴- توابع $f = \{(-1, 2), (2, 3), (4, 1), (-3, 3), (1, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ مفروض‌اند، جزء صحیح مجموع اعضای برد تابع $\frac{f+g}{3f-3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵- اگر تابع $f(x) = 2ax + |ax - 6| - 3x$ اکیداً یکنوا باشد، چند عدد صحیح در بزرگترین محدوده a قرار نمی‌گیرد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶- اگر $a^2 + \frac{2}{a^2 + 3} = 3$ باشد، مقدار عددی عبارت $(a^2 + 3)^3 + \frac{8}{(a^2 + 3)^3}$ کدام است؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۵ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۰۵

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ و $BC^{-1} = 2I$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $C(AB)^{-1}$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۱۸- در ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ به کدام درایه عدد حقیقی k را اضافه کنیم تا مقدار دترمینان k واحد کم شود؟

(۱) سطر اول و ستون اول

(۲) سطر اول و ستون دوم

(۳) سطر دوم و ستون دوم

(۴) سطر سوم و ستون سوم

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A+I)^{1404} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & k \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه مقدار $x-y$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-1 (۲)

0 (۱)

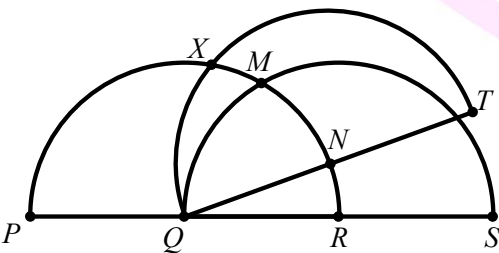
۲۰- مساحت هر یک از سه نیم‌دایره هم‌نهشت شکل زیر برابر ۷۲ است. اگر نقطه‌ی Q وسط پاره‌خط PR و $\angle TQR = 20^\circ$ باشد، آن گاه مساحت ناحیه محدود به سه کمان XQ ، XM و MQ کدام است؟

۶ (۱)

۱۲ (۲)

۹ (۳)

۸ (۴)

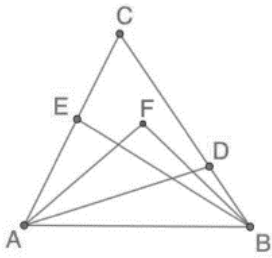


محاسبات

۲۱- فرض کنید A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبه ۲ باشند. اگر $AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و قدرمطلق تفاضل درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس B برابر

+3 باشد، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $AB^2 - B^2A$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) ۶ (۳) ± 6 (۴) به درایه‌های B بستگی دارد.



۲۲- در شکل زیر، نقاط دلخواه E و D بر روی اضلاع مثلث دلخواه ABC قرار دارند. اگر AF و BF به ترتیب نیمسازهای زوایای EAD و EBD باشند و $\hat{AFB} = 95^\circ$ باشد، آن گاه مجموع زوایای AEB و ADB چند درجه است؟

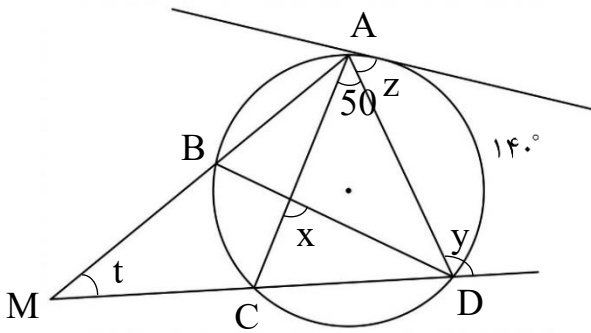
- (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۹۰ (۳) ۱۹۵ (۴) ۲۰۰

۲۳- در مثلث ABC ، نیمساز داخلی زاویه B و نیمساز خارجی زاویه C در نقطه D متقاطع‌اند. از D خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط M و L قطع کند. اگر $LC = 5$ و $MB = 7$ باشد، آن گاه طول LM کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

۲۴- دایره‌ای بر اضلاع AB و AD از مستطیل $ABCD$ مماس بوده، از راس C می‌گذرد و ضلع DC را در نقطه K قطع می‌کند. اگر $AB = 9$ و $AD = 8$ باشد، مساحت چهار ضلعی $ABKD$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰



۲۵- با توجه به شکل زیر، حاصل $(x+y) - (z+t)$ کدام است؟

- (۱) 70° (۲) 80° (۳) 90° (۴) 100°

۲۶- اندازه قاعده کوچک دوزنقه‌ای برابر ۷ است. اگر دایره محاط در دوزنقه، یکی از ساق‌ها را به دو پاره خط به طول‌های ۴ و ۹ تقسیم کند، مساحت دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۱۶۸ (۲) ۱۵۲ (۳) ۱۴۶ (۴) ۱۳۶

محاسبات

۲۷- گزاره $\sim p \Rightarrow [p \Rightarrow (p \wedge \sim q)]$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

- (۱) $q \Rightarrow p$ (۲) $p \wedge q$ (۳) $p \vee q$ (۴) $p \Rightarrow q$

۲۸- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، حاصل عبارت $(A \cup B) - A \cup (A \cap B)$ همواره برابر کدام مجموعه خواهد بود؟

- (۱) B (۲) A (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۲۹- اگر $A = \{a, b+1, 3\}$ ، $B = \{4, \frac{a}{4}, b\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، آنگاه a چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۰- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی‌مانده‌ی تقسیم از مربع خارج‌قسمت ۲ واحد کمتر باشد، بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۳۱- چند عدد طبیعی دورقمی مانند a وجود دارد به‌طوری که بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $8k+3$ و $6k+5$ بر آن بخش‌پذیر باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲- چند عدد طبیعی دورقمی مانند a وجود دارد تا $[a, 30] = 210$ شود؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۳- چند عدد طبیعی دورقمی مانند n می‌توان یافت به‌گونه‌ای که هر دو رابطه $2^{60} + 1 \mid 2^n + 1$ و $7 \mid 2^n - 1$ برقرار باشند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۴- اگر p عددی اول و a عدد طبیعی دلخواهی باشد، با شرط $p^3 \mid a^2$ حاصل (p^4, a^2) کدام یک نمی‌تواند باشد؟

- (۱) p (۲) p^2 (۳) p^3 (۴) p^4

۳۵- با توجه به روش در نظر گرفتن همه حالات، به‌ازای تمام مقادیر طبیعی n عدد $n^2 + 3n + 1$ در تقسیم بر ۶ چند باقی‌مانده مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶



آزمون شماره ۳

۴ مهر ۱۴۰۴

پایه دوازدهم

رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۲ از ۲

مدت پاسخگویی: ۶۵

تعداد سؤال: ۵۵

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان (به ترتیب الفبا)
فیزیک	۳۰	۳۶	۶۵	۴۰ دقیقه	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری ابوالفضل علیدوست نقی گندمی
شیمی	۲۵	۶۶	۹۰	۲۵ دقیقه	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمدرضا زهرهوند صمد صفوی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



@Helli1_12



۳۶- متحرکی $\frac{1}{3}$ طول مسیر مستقیمی را با تندی ثابت v_1 و مابقی مسیر را با تندی ثابت v_2 طی می‌کند و پس از ۱۶ دقیقه به انتهای مسیر می‌رسد. اگر متحرک تمام مسیر را با تندی ثابت v_1 طی کند ۴ دقیقه زودتر به مقصد می‌رسد. اگر کل مسیر با تندی ثابت v_2 طی شود، زمان حرکت چند دقیقه خواهد بود؟

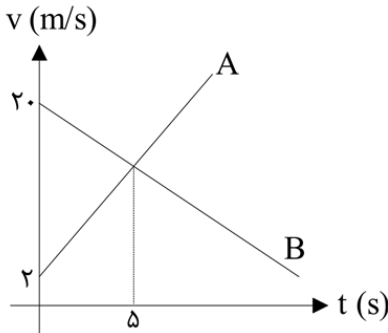
۱۴ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

۳۷- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور X حرکت می‌کنند مطابق شکل است. اگر در لحظه $t = 0$ S دو متحرک در کنار یکدیگر باشند، در لحظه $t = 20$ S فاصله دو متحرک از یکدیگر چند متر است؟



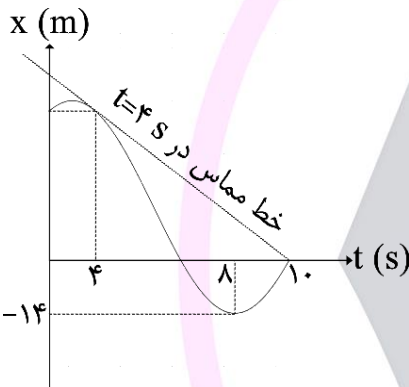
۴۰۵ (۱)

۳۶۰ (۲)

۱۳۵ (۳)

۹۰ (۴)

۳۸- نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر شتاب متوسط در بازه



مبدأ مکان چند متر است؟

۱۴ (۱)

۱۷ (۲)

۱۸ (۳)

۲۴ (۴)

۳۹- جسمی با سرعت ثابت روی مسیری مستقیم در حرکت است. اگر جسم در لحظه $t_1 = 3$ S در مکان $x_1 = 4$ m و در لحظه $t_2 = 8$ S در مکان $x_2 = -16$ m باشد، در کدام لحظه بر حسب ثانیه بردار مکان جسم تغییر جهت می‌دهد؟

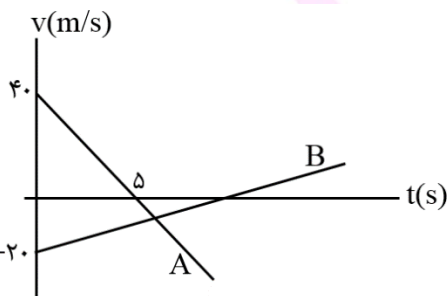
۷ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۴۰- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور X حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. مکان اولیه دو متحرک به ترتیب $x_A = -20$ m و $x_B = 10$ m است. اگر در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک با هم برابر می‌شود، متحرک A در مکان $x = -10.4$ m قرار داشته باشد، فاصله دو متحرک در این لحظه چند متر است؟



۶۰ (۱)

۲۸۸ (۲)

۱۲۰ (۳)

۱۴۴ (۴)

۴۱- معادله سرعت - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند در SI به صورت $v = 3t - 12$ است. مسافتی که این متحرک در سه ثانیه دوم طی می‌کند چند متر است؟

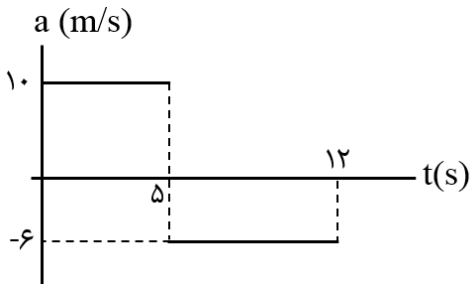
۹ (۴)

۷/۵ (۳)

۶ (۲)

۴/۵ (۱)

۴۲- شکل روبه‌رو نمودار شتاب - زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی محور X و با سرعت اولیه $20 \frac{m}{s}$ در خلاف جهت محور حرکت خود را آغاز می‌کند.



سرعت متوسط این متحرک در فاصله بین دو تغییر جهت حرکت آن چند متر بر ثانیه است؟

۱۰ (۱)

۱۵ (۲)

۲۵ (۳)

۳۰ (۴)

۴۳- دو قطار، هر دو با تندی $20 \frac{km}{h}$ به‌طور رو در رو در مسیر مستقیمی حرکت می‌کنند. پرنده‌ای که همواره با تندی ثابت $60 \frac{km}{h}$ پرواز می‌کند، وقتی که فاصله دو قطار از هم $200 km$ است، از جلوی قطار اول بلند می‌شود و به‌طور مستقیم به طرف قطار دوم پرواز می‌کند. در لحظه‌ای که به جلوی قطار دوم می‌رسد، فوراً به طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار ادامه پیدا می‌کند. تا رسیدن دو قطار به هم، پرنده چه مسافتی را برحسب کیلومتر پرواز کرده است؟

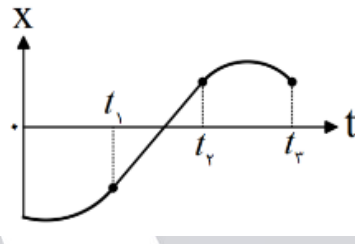
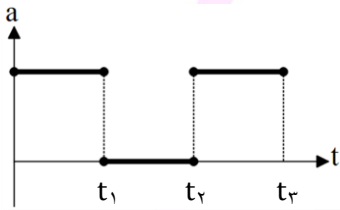
۶۰۰ (۴)

۴۵۰ (۳)

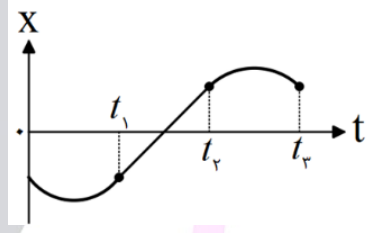
۳۰۰ (۲)

۲۰۰ (۱)

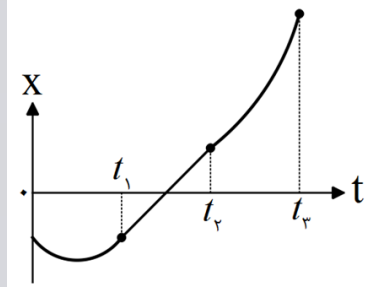
۴۴- شکل زیر نمودار شتاب - زمان متحرک را نشان می‌دهد که در خلاف جهت محور X و در مکانی منفی در حال حرکت است. کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند نمودار مکان - زمان این متحرک باشد؟



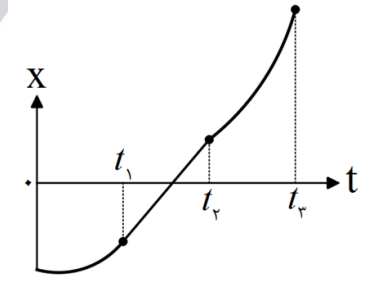
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۴۵- خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. به محض سبز شدن چراغ، کامیونی با سرعت $30 \frac{m}{s}$ از کنار خودرو می‌گذرد و خودرو نیز با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. اگر خودرو پس از $30 s$ به کامیون برسد، بیشترین فاصله بین این دو (قبل از سبقت گرفتن خودرو) چقدر خواهد بود؟

۴۵۰ (۴)

۳۵۰ (۳)

۲۲۵ (۲)

۱۲۵ (۱)

۴۶- گلوله‌ای را از ارتفاع 405 متری بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. مسافتی که این گلوله در سه بازه زمانی یکسان و متوالی از ابتدای حرکت تا لحظه رسیدن به زمین طی می‌کند به ترتیب در SI کدام گزینه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۲۳۵ - ۱۲۵ - ۴۵ (۴)

۲۲۵ - ۱۳۵ - ۴۵ (۳)

۲۴۵ - ۱۲۵ - ۳۵ (۲)

۲۳۵ - ۱۳۵ - ۳۵ (۱)

۴۷- گلدان کوچکی از بالای یک ساختمان بلند رها می‌شود. این گلدان در مدت 0.2 s به‌طور کامل از مقابل یک پنجره بلند به ارتفاع $2/2$ متر عبور می‌کند. تندی

گلدان در پایین پنجره چند متر بر تائیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ و از اثر مقاومت هوا چشم‌پوشی می‌شود).

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

۴۸- در تاریخ ۱۴ شهریور، دمای هوای جزیره ابوموسی که جنوبی‌ترین جزیره ایرانی خلیج فارس است، $34^\circ C$ ثبت شده است. در همین روز دمای هوا در شهر دهگلان استان کردستان $282 K$ بوده است. اختلاف دمای این دو نقطه از خاک کشور ایران چند درجه فارنهایت است؟

- ۴۵ (۱) ۶۳ (۲) ۷۷ (۳) ۸۰ (۴)

۴۹- دمای دو میله A و B را از $-50^\circ C$ تا $400^\circ C$ افزایش می‌دهیم. در این افزایش دما تنها در دو دمای $\theta_1 = -20^\circ C$ و $\theta_2 = 380^\circ C$ اختلاف طول دو میله ۱ میلی‌متر است. طول میله A در دمای $\theta_1 = -20^\circ C$ چند میلی‌متر است؟ (ضریب انبساط خطی میله‌های A و B به ترتیب

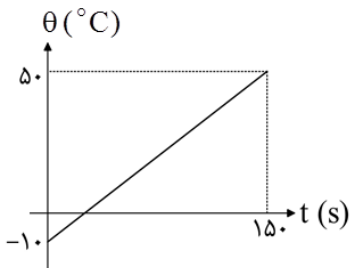
$\alpha_A = 9/6 \times 10^{-6} \frac{1}{K}$ و $\alpha_B = 5 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$ است.)

- ۹۹ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۴ (۳) ۱۲۵ (۴)

۵۰- برای پایین آوردن دمای مقداری آب $80^\circ C$ از ۲ گوی مشابه با دمای $0^\circ C$ استفاده می‌کنیم. اگر گوی اول را درون ظرف بیندازیم دمای تعادل مجموعه به $60^\circ C$ می‌رسد. پس از آن گوی دوم را درون ظرف می‌اندازیم. دمای نهایی مجموعه چند درجه سانتی‌گراد می‌شود؟ (تبادل گرما فقط بین آب و گوی‌ها

صورت می‌گیرد و گرمای ویژه آب $4200 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$ است.)

- ۵۰ (۱) ۴۸ (۲) ۴۲ (۳) ۴۰ (۴)



۵۱- درون گرماسنجی با ظرفیت گرمایی ناچیز، 400 گرم آب و یک قطعه فلزی به جرم 200 گرم وجود دارد. اگر به مجموعه با آهنگ ثابت $720 W$ گرما بدهیم، دمای آن با گذشت زمان مطابق شکل زیر تغییر می‌کند. گرمای ویژه فلز

چند $\frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$ است؟ (گرمای ویژه آب $4200 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$ است.)

- ۱۲۰ (۱)
۳۰۰ (۲)
۵۱۰۰ (۳)
۶۰۰ (۴)

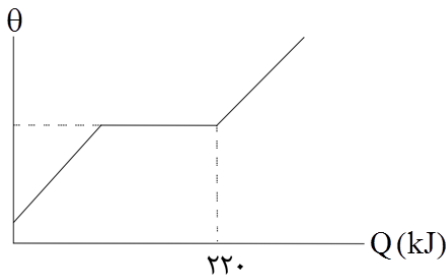
۵۲- درون کپسولی با حجم ثابت، 10 گرم گاز هلیوم در دمای $7^\circ C$ قرار دارد و فشار پیمانه‌ای گاز $6 P$ است. اگر 15 گرم گاز به گاز موجود در مخزن اضافه کنیم، فشار پیمانه‌ای گاز $8 P$ و دمای آن $27^\circ C$ می‌شود. جرم مولی گاز اضافه شده چند گرم بر مول است؟ (P فشار هوای محیط است و جرم مولی گاز هلیوم 4 گرم بر مول است.)

- ۵ (۱) ۷/۵ (۲) ۱۵ (۳) ۳۰ (۴)

۵۳- در ظرفی g 1400 آب صفر درجه سانتی‌گراد موجود است. در اثر تبخیر سطحی قسمتی از آب تبخیر شده و بقیه آن یخ می‌زند. اگر $L_V = 6L_F$ باشد، جرم یخ حاصل چند گرم است؟

- ۱۱۰۰ (۱) ۳۰۰ (۲) ۱۲۰۰ (۳) ۲۰۰ (۴)

۵۴- نمودار گرمای داده شده به یک جسم ۲ کیلوگرمی بر حسب تغییرات دمای آن مطابق شکل زیر است. اگر هنگامی که ۱۸۰ kJ گرما به جسم داده شده، $\frac{3}{4}$



جرم جسم ذوب شده باشد گرمای نهان ذوب آن چند $\frac{kJ}{kg}$ است؟

۸۰ (۱)

۴۰ (۲)

۱۲۰ (۳)

۶۰ (۴)

۵۵- مقداری آب $16^{\circ}C$ را با مقداری یخ صفر درجه سانتیگراد مخلوط کرده‌ایم و در حالت تعادل، مخلوطی از ۱۲۰ گرم آب و ۶۰ گرم یخ به دست می‌آید. جرم

اولیه آب چند گرم بوده است؟ ($c_w = 4200 \frac{J}{kg \cdot ^{\circ}C}$, $L_F = 336 \frac{J}{g}$)

۷۰ (۴)

۱۱۰ (۳)

۸۰ (۲)

۱۰۰ (۱)



۵۶- چند جمله از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) در انتقال گرما به روش رسانش در فلزات، نقش الکترون‌های آزاد از ارتعاشات شبکه اتمی بیشتر است.

(ب) در شب جریان هوا از سمت دریا به ساحل خواهد بود.

(ج) تنها راه انتقال گرما در خلاء همرفت است.

(د) تابش گرمایی به کمک امواج الکترومغناطیسی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

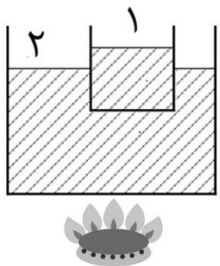
۱ (۱)

۵۷- دانش‌آموزی با احتیاط کامل آزمایش زیر را در منزل انجام می‌دهد. کدام گزینه نتیجه حاصل از این آزمایش را درست پیش‌بینی می‌کند؟

دو ظرف هم‌جنس (۱) و (۲) را که محتوی آب خالص هستند روی شعله‌های اجاق گاز قرار می‌دهیم (ظرف ۲ بزرگتر از ظرف ۱ است). پس از این که آب هر دو

ظرف شروع به جوشیدن کرد، ظرف (۱) را برداشته و داخل ظرف (۲) که هنوز روی شعله است، قرار می‌دهیم تا به صورت شناور در آن قرار گیرد (شکل زیر).

مشاهده می‌کنیم که



(۱) آب درون ظرف (۱) ابتدا نمی‌جوشد و پس از مدتی دوباره شروع به جوشیدن می‌کند.

(۲) آب درون ظرف (۱) دیگر نمی‌جوشد.

(۳) آب درون ظرف (۱) بدون وقفه به جوشیدن خود ادامه می‌دهد.

(۴) بسته به شدت شعله زیر ظرف (۲)، هر سه گزینه ممکن است.

۵۸- چه تعدادی از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) با کاهش قطر لوله موئین، اختلاف ارتفاع جیوه در لوله و سطح جیوه درون ظرف کاهش می‌یابد.

(ب) افزایش دما نیروی هم‌چسبی مولکول‌های مایع را افزایش می‌دهد.

(پ) قطره‌ای که آزادانه سقوط می‌کند، تمایل به کمینه کردن مساحتش دارد.

(ت) وزش باد روی سطح اقیانوس باعث افزایش ارتفاع موج اقیانوس می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۵۹- یک مخروط توپُر را ذوب کرده و آن را به شکل یک استوانهٔ توپُر فلزی در می‌آوریم طوری که ارتفاع هر دو جسم یکسان باشد. اگر فشار زیر استوانه در سطح افقی را P_1 و فشار زیر مخروط در سطح افقی را P_2 بنامیم، کدام گزینه درست است؟

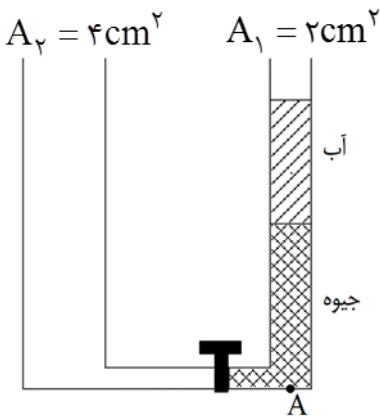
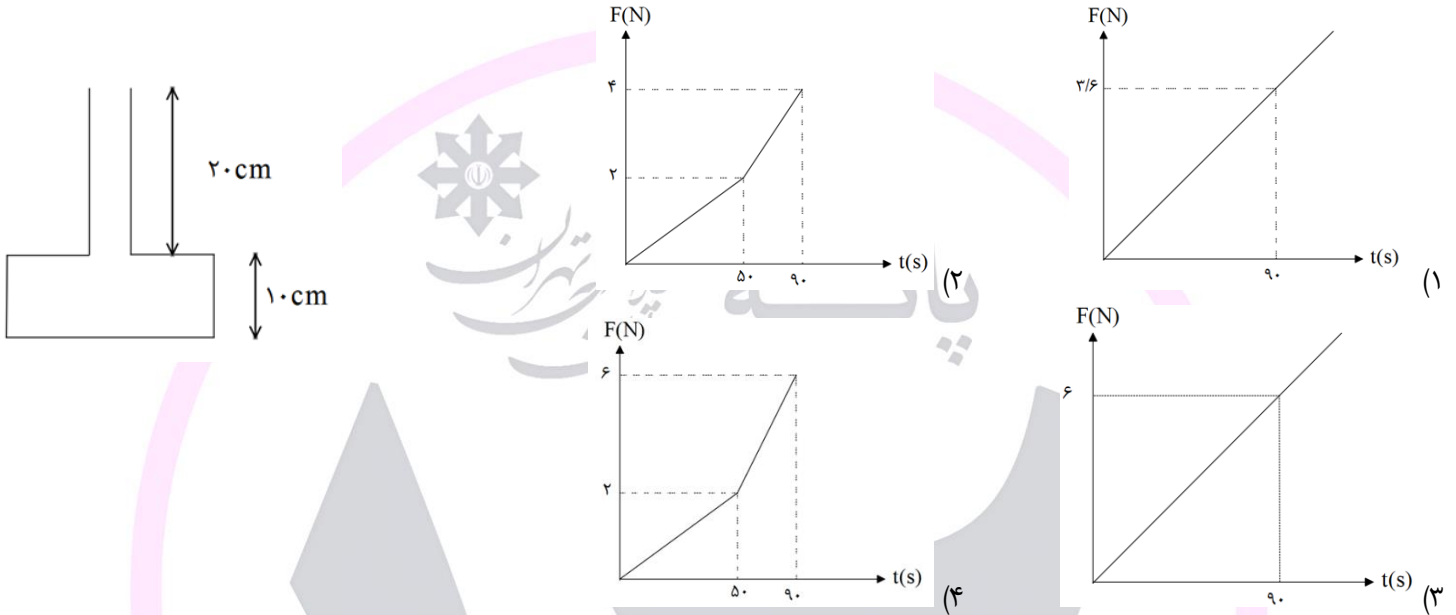
$P_1 = 9P_2$ (۴)

$P_1 = 3P_2$ (۳)

$P_1 = \frac{1}{3}P_2$ (۲)

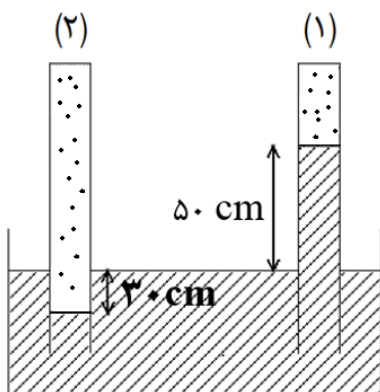
$P_1 = P_2$ (۱)

۶۰- درون یک ظرف خالی، مطابق شکل، با آهنک ثابت $5 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ روغن با چگالی $0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ می‌ریزیم. سطح مقطع قسمت‌های پهن و باریک ظرف به ترتیب 25cm^2 و 10cm^2 است. کدام نمودار تغییرات نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع را تا لحظهٔ پر شدن کامل ظرف درست نشان می‌دهد؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



۶۱- در لولهٔ U شکل روبه‌رو جرم جیوه 680 g و جرم آب 40 g است. اگر شیر رابط را باز کنیم، پس از رسیدن به تعادل فشار پیمانه‌ای در نقطهٔ A چند کیلو پاسکال می‌شود؟ (چگالی جیوه و آب به ترتیب $13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و حجم لولهٔ رابط ناچیز و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ است.)

- ۶ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۸ (۳)
- ۲۴ (۴)



۶۲- دو لولهٔ مشابه مطابق شکل، درون مایعی قرار دارند. سطح مقطع لوله‌ها 4cm^2 و نیرویی که گاز درون لوله به انتهای آن وارد می‌کند، در یکی از لوله‌ها $F = 28 \text{ N}$ و در دیگری $F = 40/8 \text{ N}$ است. فشار هوای محیط چند کیلو پاسکال است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

- ۹۰ (۱)
- ۹۶ (۲)
- ۹۸ (۳)
- ۱۰۰ (۴)

۶۳- در یک استوانه مقداری مایع با چگالی $\frac{9}{4} \frac{g}{cm^3}$ ریخته شده است. یک مکعب فلزی به چگالی $\frac{4}{5} \frac{g}{cm^3}$ را به آرامی درون مایع می‌اندازیم. این مکعب کاملاً در مایع فرو رفته و ارتفاع مایع در استوانه مندرج ۳۰ درصد افزایش می‌یابد. جرم مکعب چند برابر جرم مایع درون استوانه است؟

$\frac{3}{2} (4)$

$\frac{3}{4} (3)$

$\frac{9}{4} (2)$

$\frac{9}{2} (1)$

۶۴- مکعبی به طول اضلاع ۱۰ cm از فلزی با چگالی $\frac{3}{cm^3} \frac{g}{cm^3}$ ساخته شده است. درون آن حفره‌ای قرار دارد که اگر با مایعی به چگالی $\frac{1}{2} \frac{g}{cm^3}$ پر شود، جرم کل مجموعه ۲۷۷۵ g می‌شود. حجم حفره چند سانتی‌متر مکعب است؟

۴۵۰ (۴)

۲۵۰ (۳)

۲۲۵ (۲)

۱۲۵ (۱)

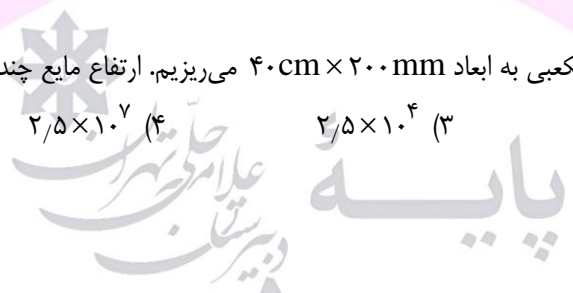
۶۵- دو دسی‌متر مکعب از مایعی در یک ظرف مکعبی به ابعاد $40 \text{ cm} \times 200 \text{ mm}$ می‌ریزیم. ارتفاع مایع چند نانومتر خواهد شد؟

$2,5 \times 10^7 (4)$

$2,5 \times 10^4 (3)$

$1,25 \times 10^7 (2)$

$1,25 \times 10^4 (1)$



۶۶- اگر درصد جرمی N_2O_5 در ۲۰۰ میلی‌لیتر آب، برابر 0.108 باشد، پس از انجام واکنش pH محلول حاصل کدام است؟ (چگالی محلول $1 \frac{g}{mL}$ است)

$(N_2O_5 : 108 \text{ g.mol}^{-1})$

۱ (۴)

۱/۳ (۳)

۲/۴ (۲)

۲/۷ (۱)

۶۷- در رابطه با دو پاک‌کننده غیرصابونی (A) و صابونی جامد (B) با R یکسان، کدام موارد نادرست‌اند؟

۱- هر مول از B، $5N_A$ اتم کربن، کمتر از هر مول از A دارد.

۲- نسبت تعداد آنیون به کاتیون در A بیشتر از B است.

۳- اگر R در A، $\frac{3}{4}$ کل اتم‌های کربن آن را داشته باشد، فرمول شیمیایی B به صورت $C_{19}H_{37}O_2Na$ است.

۴- با استفاده از جرم‌های برابر از A و B، پاک‌کننده A در واکنش با Ca^{2+} ، رسوب بیشتری تولید می‌کند.

۱) آ و ت

۲) آ و پ

۳) ب و ت

۴) ب و پ

۶۸- در دمای $25^\circ C$ انحلال‌پذیری باز قوی BOH برابر با ۱۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. اگر چگالی محلول سیرشده این ماده برابر با $1/1 \text{ g.mL}^{-1}$ باشد،

pH این محلول چقدر است؟ ($BOH = 125 \text{ g.mol}^{-1}$)

۱) ۱۱/۳

۲) ۱۲/۷

۳) ۱۳/۹

۴) ۱۴/۶

۶۹- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر در کدام گزینه درست مشخص شده است؟

۱- برقراری تعادل در یک سامانه به معنی برابر شدن سرعت مصرف یا تولید واکنش‌دهنده‌ها و فرآورده‌هاست.

۲- واکنش مخلوط پودر آلومینیوم و سود با آب در ظرف سر باز، هیچگاه به تعادل نمی‌رسد.

۳- در حالت تعادل، سرعت تولید هر ماده با سرعت مصرف آن برابر است.

۴- ثابت یونش اسید، بیانی از میزان پیشرفت فرآیند یونش تا رسیدن به تعادل است.

۱) درست - درست - درست - نادرست

۲) نادرست - درست - درست - درست

۳) نادرست - درست - درست - نادرست

۴) درست - نادرست - نادرست - درست

۷۰- با توجه به یون‌های موجود در آب دریا کدام عبارت نادرست است؟

۱) کاتیون عنصرهایی از گروه‌های ۱ و ۲ جدول دوره‌ای در آب دریا وجود دارند.

۲) مقدار یون کلرید از بقیه آنیون‌ها در آب دریا بیشتر است.

۳) در بین کاتیون‌های دو بار مثبت موجود، Ca^{2+} فراوان‌ترین آن‌ها در آب دریا است.

۴) دو یون $Ba^{2+}(aq)$ و $SO_4^{2-}(aq)$ به طور همزمان در بخش کوچکی از آب دریا وجود ندارند.

۷۱- کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

۱) اسمز فرآیندی خودبه‌خودی است که ذره‌های حل‌شونده با عبور از غشای نیمه‌تراوا از محلول رقیق به محلول غلیظ جابه‌جا می‌شوند.

۲) آب به‌دست‌آمده از روش تقطیر، نسبت به اسمز معکوس و صافی کربنی، میکروب بیشتری دارد.

۳) در روش اسمز معکوس با اعمال فشار می‌توان ناخالصی‌های موجود در آب را برخلاف اسمز، به محلول غلیظ‌تر فرستاد و آب را شیرین کرد.

۴) ردپای آب برای تولید یک کیلوگرم چرم، بیش‌تر از تولید یک کیلوگرم گندم است.

۷۲- اگر از عنصر A ترکیبات ASO_4 و APO_4 وجود داشته باشد، چه تعداد از ترکیبات زیر وجود دارند؟

الف- ACO_3	ب- A_3P	پ- A_2O_3	ت- $A(NO_3)_2$
ث- ACl_3	ج- $ASiO_4$	چ- $A(CH_3COO)_2$	ح- $A_2(SO_3)_3$
۳ (۱)	۴ (۲)	۵ (۳)	۶ (۴)

۷۳- در محلول Na_3PO_4 در آب، درصد جرمی یون PO_4^{3-} برابر 0.019 درصد است. غلظت Na^+ برحسب ppm کدام است؟
(O = ۱۶، P = ۳۱، Na = ۲۳)

۱۳۸ (۱)	۴۶ (۲)	۹۲ (۳)	۱۸۴ (۴)
---------	--------	--------	---------

۷۴- کدام مورد در مقایسه دمای جوش ترکیب‌های زیر در شرایط یکسان درست است؟

(Br = ۸۰، S = ۳۲، F = ۱۹، O = ۱۶، N = ۱۵، C = ۱۲، H = ۱g.mol⁻¹)

۱) HF < NH₃ < H₂O

۲) O₂ < N₂ < O₃

۳) CH₃-O-CH₃ < CH₃CH₂OH < CH₃COOH

۴) HBr < CH₄ < H₂S

۷۵- کدامیک از موارد زیر نادرست است؟

۱) مخلوط آب، روغن و صابون ناهمگن و کدر است.

۲) آب دریا، گلاب دو آتشه، هوای شهرهای بزرگ و کات کبود در آب نمونه‌ای از مخلوط‌های همگن هستند.

۳) شربت خاکشیر و شربت معده نور را پخش می‌کنند و مسیر عبور نور از میان آنها مشخص است.

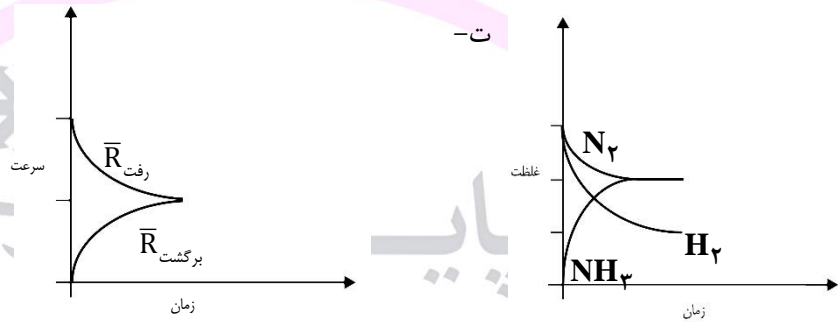
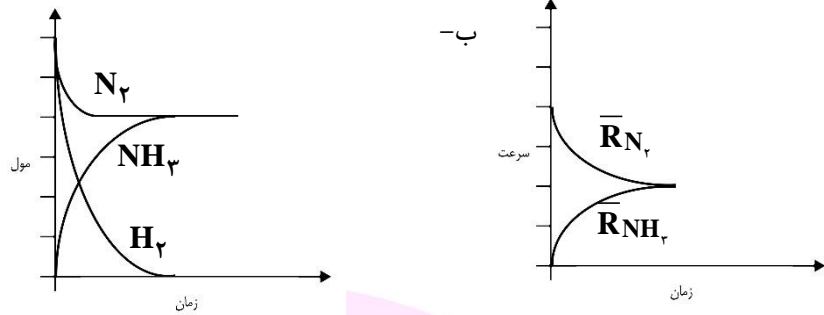
۴) ذرات سازنده ژله و سس مایونز توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت هستند.

۷۶- pH محلول حاصل از مخلوط کردن ۲ لیتر $Ca(OH)_2$ با غلظت $\frac{mol}{L}$ 0.05 با ۸ لیتر محلول NaOH با غلظت $\frac{g}{L}$ 4 کدام است؟

(Na = ۲۳، O = ۱۶، H = ۱: $\frac{g}{mol}$)

۱۳ (۴)	۱۲/۷ (۳)	۱۳/۳ (۲)	۱۳/۷ (۱)
--------	----------	----------	----------

۷۷- چه تعداد از نمودارهای زیر در مورد واکنش $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ که در ظرفی به حجم ۲L با وارد کردن ۶mol از هر یک از واکنش دهنده‌ها آغاز و تا رسیدن به تعادل ادامه می‌یابد، درست هستند؟



۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۷۸- کدامیک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) در محلول $\frac{1 \text{ mol}}{L}$ از اسید ضعیف HF با درجه یونش $\alpha = 0.1$ ، نسبت غلظت مجموع ذرات محلول پس از یونش به قبل از یونش، $1/1$ است.
- (۲) با افزایش دما درجه یونش نیترواسید و نیتریک اسید به یکدیگر نزدیک می‌شود.
- (۳) با افزودن آب به محلول هیدروفلوئوریک اسید و هیدروکلریک اسید درجه یونش هر دو، بر خلاف ثابت یونش آن‌ها افزایش می‌یابد.
- (۴) مجموع ذرات حاصل از یونش و ذرات یونیده‌نشده در اسید ضعیف HA با درصد یونش ۲ و غلظت $\frac{0.1 \text{ mol}}{L}$ برابر با 0.102 است.

۷۹- ظرف I حاوی یک لیتر محلول HF با $pH = 5$ و ظرف II حاوی یک لیتر محلول HNO_3 با $pH = 5$ است. چه تعداد از موارد ذکر شده زیر برای محلول I از محلول II بیشتر است؟

- غلظت آنیون
- مقدار گاز H_2 تولید شده از واکنش با مقدار کافی Mg
- رسانایی الکتریکی
- تعداد کل ذرات
- میزان تغییرات pH با افزودن یک لیتر آب

۴ (۴) مورد

۳ (۳) مورد

۲ (۲) مورد

۱ (۱) مورد

۸۰- مقدار ۲۰ میلی‌لیتر گاز CO_2 را در ۱۰۰ لیتر آب حل می‌کنیم اگر pH آب به اندازه $1/3$ تغییر کند، چگالی گاز CO_2 چند گرم بر لیتر است؟

$K_a(H_2CO_3) = 10^{-6}$ (از یونش دوم کربنیک اسید صرف نظر شود). ($O = 16, C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)

۴/۴ (۴)

۲/۴ (۳)

۱/۹ (۲)

۰/۸۸ (۱)

۸۱- مقدار ۵۱/۲ گرم از یک اسید چرب را که در بخش آلکیل سیر شده خود ۳۱ اتم هیدروژن دارد، در یک متر مکعب آب وارد می‌کنیم. اگر pH محلول

حاصل ۵/۱۵ شود، درجه یونش اسید چرب کدام است؟ ($O = ۱۶$ ، $C = ۱۲$ ، $H = ۱\text{g.mol}^{-1}$)

۰/۰۵ (۱) ۰/۰۰۵ (۲) ۰/۰۳۵ (۳) ۰/۰۳۵ (۴)

۸۲- کدام عبارت درست است؟

(۱) با ورود آمونیاک در آب حاصلضرب $[OH^-] \times [H^+]$ ثابت مانده و رسانایی محلول تغییر نمی‌کند.

(۲) نوع جاذبه‌های ذره‌های حاصل از حل شدن HF درون آب کاملاً شبیه گلوکز در آب است.

(۳) گازهای O_2 و SO_3 ناقطبی بوده و در آب نامحلول هستند.

(۴) داخل محلولی که حاوی ۰/۰۱ مول OH^- است اگر ۰/۸ گرم NaOH حل کنیم pH به تقریب ۰/۴۸ افزایش می‌یابد. ($NaOH = ۴۰ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$)

۸۳- با توجه به نمودار رو به رو چه تعداد از مطالب زیر در مورد انحلال پذیری نمک‌های A تا E درست است؟ (کاتیون هر پنج ترکیب فلزهای قلیایی هستند.)

(آ) اگر A ترکیب KCl باشد، نمودار E را می‌توان به NaCl نسبت داد.

(ب) در ترکیب C سبک‌ترین فلز قلیایی وجود دارد.

(پ) شیب نمودار نترات فلز قلیایی دوره سوم از کلرید آن بیشتر است.

(ت) محلول سیر شده نمک C، با افزایش ناگهانی دما سیر شده باقی می‌ماند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۴- کدام عبارت نادرست است؟

(۱) از میان دو گاز آمونیاک و نیتروژن، آمونیاک آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود.

(۲) اتانول و استون هر دو غیر الکترولیت بوده و به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.

(۳) اگر جرم‌های برابر $CaCl_2$ و $MgCl_2$ در مقدار یکسانی آب و صابون ریخته شود، در ظرف حاوی $MgCl_2$ ارتفاع کف بیشتر خواهد شد.

(۴) استخراج سدیم کلرید از آب دریا با یک روش فیزیکی و منیزیم با یک روش شیمیایی انجام می‌شود.

۸۵- در چه تعداد از موارد زیر، میانگین نیروی جاذبه مولکول‌های حلال خالص و مولکول‌های حل‌شونده خالص از نیروی جاذبه یون - دو قطبی حلال و حل‌شونده کم‌تر است؟

$FeCl_3$ •	$(C_{18}H_{33}COO)Mg$ •	$Ca_3(PO_4)_2$ •
$Ba(OH)_2$ •	$AgNO_3$ •	CH_3COONa •
۵ (۴)	۴ (۳)	۳ (۲) ۲ (۱)

۸۶- کدام یک از مقایسه‌های انجام شده در مورد ۳ محلول زیر درست است؟

A: ۲۰ میلی‌لیتر محلول HBr با $pH = 2$

B: ۴۰۰ میلی‌لیتر محلول HCN با $pH = 2$

C: ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول CH_3COOH با $pH = 2$

(آ) رسانایی الکتریکی محلول: $A = B = C$

(ب) غلظت اسید اولیه: $B > C > A$

(پ) مقدار منیزیم مصرفی در واکنش کامل با محلول: $A = B = C$

(ت) تعداد مول مولکول اسید تعادلی: $C > B > A$

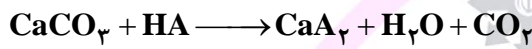
(۱) آ و ب (۲) آ و پ (۳) ب و پ (۴) پ و ت

۸۷- ۲۰۰ میلی لیتر محلول سدیم سولفات ۰/۱ مولار و ۵۰۰ گرم محلول سدیم هیدروکسید ۰/۲ درصد جرمی با چگالی $1/2 \text{ g.mL}^{-1}$ موجود است. به محلول اول مقدار کافی باریم کلرید جامد و به محلول دوم مقدار کافی منیزیم کلرید جامد اضافه می کنیم تا واکنش ها به صورت کامل انجام شود. نسبت غلظت مولی یون ها در محلول اول به غلظت مولی یون سدیم در محلول دوم پس از کامل شدن واکنش کدام است؟

$$(\text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1})$$

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{4}{3} \quad (3) \quad \frac{8}{3} \quad (4)$$

۸۸- محلولی به حجم ۱۰۰ میلی لیتر از اسید HA با $\text{pH} = 2/4$ موجود است. اگر این محلول با ۱ گرم CaCO_3 مطابق واکنش موازنه نشده زیر واکنش کامل دهد، ثابت یونش اسید در دمای واکنش به تقریب کدام است؟ ($\text{C} = 12, \text{O} = 16, \text{Ca} = 40: \text{g.mol}^{-1}$)



$$2 \times 10^{-2} \quad (1) \quad 4 \times 10^{-6} \quad (2) \quad 8 \times 10^{-5} \quad (3) \quad 6 \times 10^{-4} \quad (4)$$

۸۹- کدام عبارت نادرست است؟

- (۱) اگر محلول HCN را ۹ برابر رقیق کنیم درجه یونش آن در دمای ثابت تقریباً ۳ برابر می شود.
- (۲) اگر در ۵ mL محلول HCl مقدار ۲۵ میلی لیتر آب اضافه کنیم pH به تقریب ۰/۸ افزایش می یابد.
- (۳) ورود فاضلاب های صنعتی به محیط زیست، باعث تغییر pH آب می شوند.
- (۴) با مدل آرنیوس می توان واکنش $\text{NH}_3(\text{g}) + \text{HCl}(\text{g}) \rightarrow \text{NH}_4\text{Cl}(\text{s})$ را توجیه کرد.

۹۰- افزودن کدام ماده در یک لیتر آب تغییر pH بیشتری ایجاد می کند؟

$$10 \text{ mol NO} \quad (4) \quad 0/1 \text{ mol CaO} \quad (3) \quad 0/1 \text{ mol HNO}_2 \quad (2) \quad 0/1 \text{ mol HI} \quad (1)$$



آزمون شماره ۳

۴ مهر ۱۴۰۴

پایه دوازدهم

رشته ریاضی فیزیک

پاسخ تشریحی آزمون

صاحب امتیاز: دبیرستان علامه حلی (۱) تهران

مدیر گروه: پوریا دیار کجوری

ناظر محتوایی: نیما مهندس

نام درس	حسابان	هندسه	گسسته	فیزیک	شیمی
طراحان	حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده علیرضا رفیعی	علیرضا فعلی نصیر کریمی صبا مهدوی	احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی	محمدجواد حیدری پوریا دیار کجوری ابوالفضل علیدوست علی گندمی	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمد رضا زهرهوند سید صمد صفوی
ویراستاران	کیارش بازرگان امیرحسین ملازنیل حسین هوشدار	مهدی خراسانی امیررضا عرب شهرباب	امیررضا عرب شهرباب مهدی خراسانی	امیرحسین فرقانی علی صادق تهرانی	محسن ابراهیمی ژیلوان محمدی پور هیراد سیرتی علی صادق تهرانی علیرضا رفتاری

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

۱- گزینه ۱

مبحث: توابع قدرمطلق

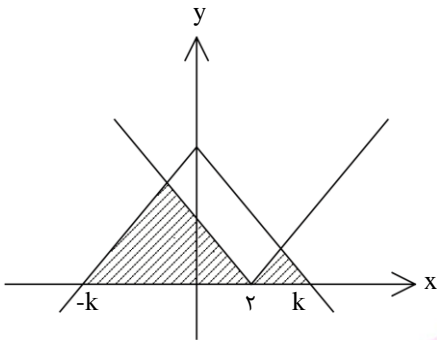
درجه دشواری: متوسط

طراح: حسین شفیعزاده

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم. از آنجایی که شیب تمام خطوط ± 1 است پس تمام مثلث‌ها قائم الزاویه و

متساوی‌الساقین هستند که اگر وتر آن‌ها برابر a باشد، مساحت آن‌ها برابر $\frac{1}{4}a^2$ است.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}(2k)^2 - \frac{1}{4}(k-2)^2 - \frac{1}{4}(k+2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(4k^2 - k^2 + 4k - 4 - k^2 - 4k - 4) \\ &= \frac{1}{4}(2k^2 - 8) = \frac{k^2}{2} - 2 \quad \begin{matrix} S=16 \\ \rightarrow k=6 \end{matrix} \end{aligned}$$



۲- گزینه ۲

مبحث: تعیین علامت (ترکیب با تبدیلات)

درجه دشواری: متوسط

طراح: حسین شفیعزاده

نمودار تابع $y = f(2-2x)$ به صورت زیر است:

	-1	0	1	3
$f(2-2x)$	+	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$\frac{f(2-2x)}{x-3}$	-	+	-	-



بر اساس جدول تعیین علامت مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $\{1\} \cup [-1, 0]$ است که شامل سه عدد صحیح می‌شود.

۳- گزینه ۲

مبحث: عبارات جبری و معادله درجه دو

درجه دشواری: متوسط

طراح: حسین شفیعزاده

ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

ریشه بزرگ‌تر برابر $x = 1 + \sqrt{2}$ می‌شود. حالا داریم:

$$x^3 = (1 + \sqrt{2})^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$$

$$x^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{(7 + 5\sqrt{2}) - 3(3 + 2\sqrt{2}) + 2(1 + \sqrt{2}) - k}{3 - (3 + 2\sqrt{2})} = \frac{-k + \sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$$

پس باید $k = 0$ باشد تا حاصل عبارت داده شده گویا شود.

۴- گزینه ۱

مبحث: روابط بین ریشه‌ها در معادله درجه دو

درجه دشواری: متوسط

طراح: علیرضا ندافزاده

$$\beta^2 - 3\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 - \beta = 2\beta + 1$$

ریشه کوچک‌تر معادله برابر $\beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ است. حالا دقت کنید که

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 9 - 2(-1) = 11$$

و در گام آخر از روابط بین ریشه‌ها کمک می‌گیریم.

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - \beta = \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 - \beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta + 1$$

$$= 11 + 2\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) + 1 = 15 - \sqrt{13}$$

طراح: حسین شفیعزاده

درجه دشواری: ساده

مبحث: تساوی دو تابع

۵- گزینه ۲

تنها ریشهٔ معادله ضابطه f ، $x = 2$ است در نتیجه:

$$2x^2 + ax + b = 2(x-2)^2 = 2x^2 - 4x + 8 \Rightarrow a = -4, b = 8$$

$$f(x) = \frac{x-8}{x-2} = \frac{(x-8)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 20x + 32}{2(x-2)^2} = g(x) \Rightarrow c = -20, d = 32$$

پس $\frac{d-b}{a-c} = \frac{24}{12} = 2$ است.

طراح: حسین شفیعزاده

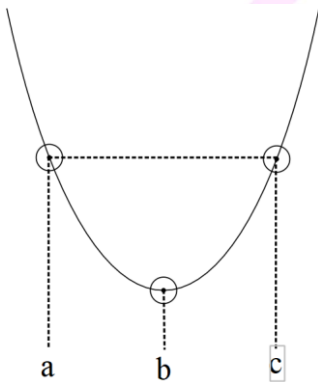
درجه دشواری: متوسط

مبحث: دامنه و برد تابع درجه دو

۶- گزینه ۴

باید یکی از اعداد a ، b یا c برابر طول رأس سهمی و دو پارامتر دیگر به طور متقارن در دو طرف آن قرار داشته باشند. بنابراین:

$$a + b + c = x_s + 2x_s = 3x_s = 3 \times \left(-\frac{12}{4}\right) = -9$$



ضمناً مجموعه جواب‌های نامعادله $\left[\frac{x}{3}\right] > -6$ به صورت $x \geq -15$ است که اعداد حقیقی بزرگ‌تر مساوی y_s را نشان می‌دهد.

طراح: حسین شفیعزاده

درجه دشواری: دشوار

مبحث: تبدیلات و وارون

۷- گزینه ۴

روند تبدیل نمودار را دنبال کنید:

انتقال ۳ واحد به راست: $y = x - 3 + \sqrt{2(x-3)-1} = x - 3 + \sqrt{2x-7}$

انتقال ۲ واحد به پایین: $y = x - 3 + \sqrt{2x-7} - 2 = x + \sqrt{2x-7} - 5$

(جای x و y در ضابطه باهم جابه‌جا می‌شود) $x = y + \sqrt{2y-7} - 5$ ؛ قرینه نسبت به $y = x$

حالا برای معادله تقاطع می‌توان نوشت:

تقاطع با $x = y - k$: $y - k = y + \sqrt{2y-7} - 5 \Rightarrow \sqrt{2y-7} = 5 - k \xrightarrow{y=8} k = 2$

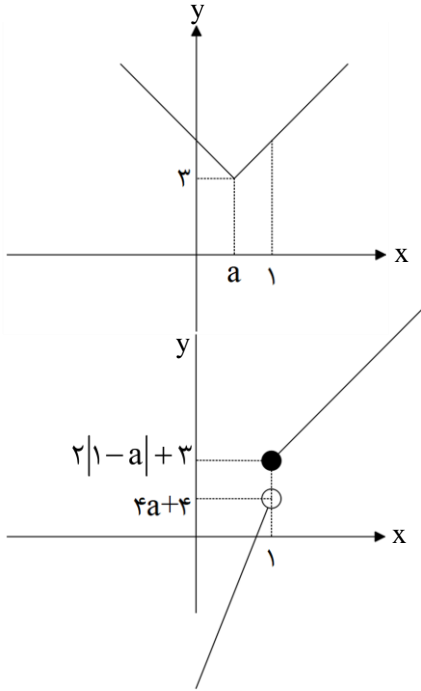
۸- گزینه ۲

مبحث: یکنوایی

درجه دشواری: متوسط

طراح: علیرضا ندافزاده

اگر تابع $y = 2|x - a| + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیدا یکنوا باشد، با توجه به نمودار تابع نتیجه می‌گیریم $a \leq 1$.



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر می‌شود. در نتیجه:

$$\begin{cases} 2|1-a| + 3 \geq 4a + 4 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

حالا چون $a \leq 1$ است، $|1-a| = 1-a$ می‌باشد و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2|1-a| + 3 \geq 4a + 4 \\ a \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - 2a + 3 \geq 4a + 4 \\ a \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 \geq 6a \\ a \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{6} \\ a \geq 0 \end{cases} \rightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{6}$$

۹- گزینه ۴

مبحث: تبدیل نمودار

درجه دشواری: دشوار

طراح: علیرضا ندافزاده

چون تابع f اکیدا نزولی است پس $A \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$ می‌باشد. حال مراحل تبدیل را به ترتیب می‌نویسیم:

راه حل اول:

$y = f(x)$	$A \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$	$B \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$
$y_1 = f^{-1}(x)$	$A_1 \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix}$	$B_1 \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$
$y_2 = f^{-1}(1+x)$	$A_2 \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$	$B_2 \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \end{vmatrix}$
$y_3 = f^{-1}(1 + \frac{x}{2})$	$A_3 \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \end{vmatrix}$	$B_3 \begin{vmatrix} -6 \\ 3 \end{vmatrix}$
$y_4 = f^{-1}(1 - \frac{x}{2})$	$A_4 \begin{vmatrix} -6 \\ -1 \end{vmatrix}$	$B_4 \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \end{vmatrix}$
$y_5 = 2f^{-1}(1 - \frac{x}{2})$	$A_5 \begin{vmatrix} -6 \\ -2 \end{vmatrix}$	$B_5 \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \end{vmatrix}$

$$y_f = -2f^{-1}\left(1 - \frac{x}{2}\right) \quad A_f \begin{vmatrix} -6 \\ 2 \end{vmatrix} \quad B_f \begin{vmatrix} 6 \\ -6 \end{vmatrix}$$

$$y_g = -2f^{-1}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1 \quad A_g \begin{vmatrix} -6 \\ 3 \end{vmatrix} \quad B_g \begin{vmatrix} 6 \\ -5 \end{vmatrix} \longrightarrow m_{A'B'} = \frac{-5-3}{6+6} = -\frac{2}{3}$$

راه حل دوم:

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} f(-1) = 4 \rightarrow f^{-1}(4) = -1 \\ g(a) = b \end{cases}$$

$$B \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} \rightarrow B' \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} f(3) = -2 \rightarrow f^{-1}(-2) = 3 \\ g(c) = d \end{cases}$$

$$b = g(a) = -2f^{-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right) + 1 \rightarrow 1 - \frac{a}{2} = 4 \rightarrow a = -6$$

$$b = -2 \times (-1) + 1 = 3 \rightarrow A' \begin{vmatrix} -6 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$d = g(c) = -2f^{-1}\left(1 - \frac{c}{2}\right) + 1 \rightarrow 1 - \frac{c}{2} = -2 \rightarrow c = 6$$

$$\rightarrow d = -2 \times 3 + 1 = -5 \rightarrow B' \begin{vmatrix} 6 \\ -5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow m_{A'B'} = \frac{-5-3}{6+6} = -\frac{2}{3}$$

طراح: علیرضا ندافزاده

درجه دشواری: ساده

مبحث: توان‌های گویا و ریشه

۱۰- گزینه ۴

$$\frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{64} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times 4\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$$

تا حد امکان زیر رادیکال‌ها را تجزیه و سپس از قانون $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ استفاده می‌کنیم:

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 2^2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 2^2 \times 3^{\frac{1}{6}} = 4\sqrt[6]{3}$$

طراح: علیرضا ندافزاده

درجه دشواری: متوسط

مبحث: بخش پذیری

۱۱- گزینه ۳

$$P(x) = (x^2 + x + 1)K(x) + 3x + 1$$

قضیه تقسیم را دو بار می‌نویسیم و شروط را در آن اعمال می‌کنیم:

$$P(1) = 1 \rightarrow 3K(1) + 4 = 1 \rightarrow K(1) = -1$$

$$P(-2) = 10 \rightarrow 3K(-2) - 5 = 10 \rightarrow K(-2) = 5$$

$$K(x) = (x^2 + x - 2)q(x) + (ax + b)$$

$$K(x) = (x+2)(x-1)q(x) + ax + b \begin{cases} K(-2) = -2a + b \\ K(1) = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + b = 5 \\ a + b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow r(x) = -2x + 1$$

با استفاده از اطلاعات مسئله می توان نوشت:

$$A = \text{توان علی}$$

$$F \rightarrow A \times t_A = F \times t_F = T \quad t_A = t_F + 2$$

$$T = \text{کل کار}$$

$$\frac{15}{8}A + \frac{15}{8}F = T \rightarrow A + F = \frac{8}{15}T$$

$$\rightarrow \frac{T}{t_A} + \frac{T}{t_F} = \frac{8}{15}T \rightarrow \frac{1}{t_F+2} + \frac{1}{t_F} = \frac{8}{15} \rightarrow t_F = 3$$

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}F + tF = \frac{8}{10}T$$

$$\frac{1}{2}(A+F) + tF = \frac{4}{5}T \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{8}{15}T + t' \times \frac{T}{3} = \frac{4}{5}T \rightarrow \frac{4}{15} + \frac{t'}{3} = \frac{4}{5} \rightarrow t' = \frac{8}{5}$$

چون $P(x)$ درجه سوم است، پس $0 = 2a - 1$ و $0 \neq 2b - 1$ می‌باشد و داریم: $a = \frac{1}{2}$ و $b \neq \frac{1}{3}$ حال می‌توان نوشت:

$$P(x) = (2b-1)x^3 + 3x + 2b$$

چون $P(x)$ بر $2x+4$ بخش پذیر است، نتیجه می‌گیریم $P(-2) = 0$ و خواهیم داشت:

$$(2b-1)(-8) - 6 + 2b = 0 \rightarrow -24b + 8 - 6 + 2b = 0$$

$$-21b + 2 = 0 \rightarrow b = \frac{2}{21}$$

$$D_f = \{-1, 2, 4, -3, 1\}, D_g = [-3, 3] \rightarrow D_f \cap D_g = \{-1, 2, -3, 1\}$$

می‌دانیم $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ است. بنابراین:

$$f+g = \{(-1, 2+\sqrt{1}), (2, 3+\sqrt{5}), (-3, 3), (1, 1+\sqrt{1})\}$$

$$3f-3 = \{(-1, 3), (2, 6), (4, 0), (-3, 6), (1, 0)\}$$

حالا تابع منخرج را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f+g}{3f+3} = \left\{ \left(-1, \frac{2+\sqrt{1}}{3}\right), \left(2, \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right), \left(-3, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$R = \left\{ \frac{2+\sqrt{1}}{3}, \frac{3+\sqrt{5}}{6}, \frac{1}{2} \right\}$$

بنابراین برد تابع مذکور به صورت روبه‌رو خواهد بود: مجموع اعضای بُرد

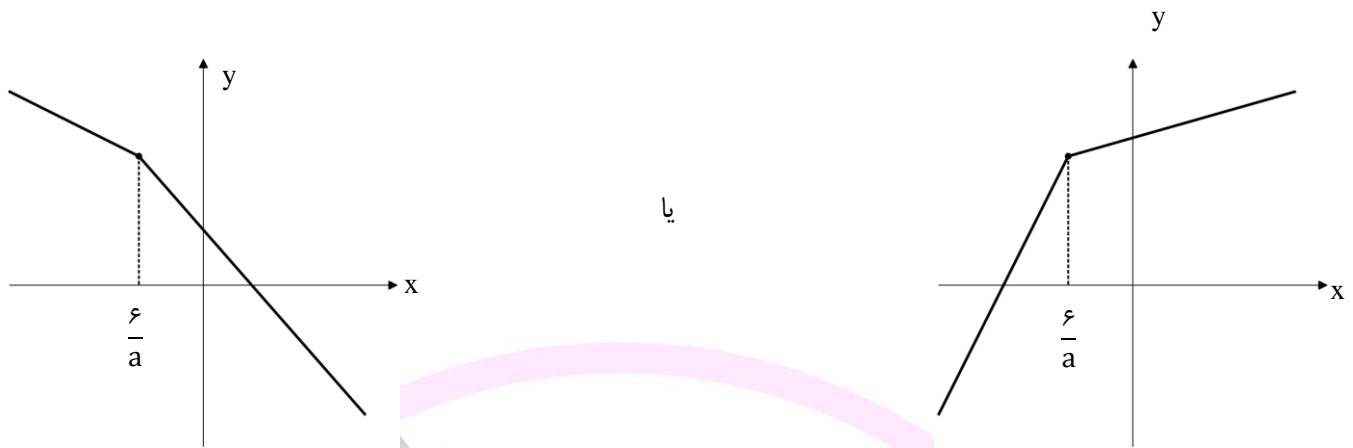
$$\frac{2+2\sqrt{2}}{3} + \frac{3+\sqrt{5}}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4+4\sqrt{2}+3+\sqrt{5}+3}{6} = \frac{10+4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{6} \rightarrow \left[\frac{10+4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{6} \right] = 2$$

$$f(x) = 2ax + |a|x - \frac{6}{a} - 3x = 0$$

ابتدا تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (2a + |a| - 3)x - \frac{6}{a} & x \geq \frac{6}{a} \\ (2a - |a| - 3)x + \frac{6}{a} & x \leq \frac{6}{a} \end{cases}$$

نمودار تابع پیوسته f در \mathbb{R} ، به صورت اتصال همراه با شکستگی دو تابع خطی می باشد که برای شرط اکیداً یکنوا بودن باید به یکی از دو صورت زیر شود:



یا

یعنی هر دو شیب همزمان یا مثبت و یا منفی هستند. به عبارتی دیگر:

$$(2a + |a| - 3)(2a - |a| - 3) > 0 \rightarrow (2a - 3 + |a|)(2a - 3 - |a|) > 0 \rightarrow$$

$$(2a - 3)^2 - a^2 > 0 \rightarrow (2a - 3 + a)(2a - 3 - a) > 0$$

$$\rightarrow (3a - 3)(a - 3) > 0 \rightarrow a > 3, a < 1$$

پس اعداد صحیح $\{1, 2, 3\}$ در مجموعه مقادیر قابل قبول برای a قرار ندارند.

طراح: علیرضا رفیعی

درجه دشواری: متوسط

مبحث: عبارت جبری

۱۶- گزینه ۳

ابتدا ظاهر فرض مسئله را به صورت زیر تغییر می دهیم و سپس طرفین آن را به توان ۳ می رسانیم:

$$(a^2 + 3) + \frac{2}{a^2 + 3} = 6 \xrightarrow{\text{توان ۳}} (a^2 + 3)^3 + \frac{8}{(a^2 + 3)^3} + 3(a^2 + 3)\left(\frac{2}{a^2 + 3}\right)(a^2 + 3 + \frac{2}{a^2 + 3}) = 216 \rightarrow$$

$$(a^2 + 3)^3 + \frac{8}{(a^2 + 3)^3} + 6(6) = 216 \rightarrow (a^2 + 3)^3 + \frac{8}{(a^2 + 3)^3} = 180$$

طراح: علیرضا فعلی

درجه دشواری: متوسط

مبحث: ماتریس وارون

۱۷- گزینه ۱

ابتدا ماتریس CB^{-1} را با استفاده از فرض مسئله بدست می آوریم: $BC^{-1} = 2I \rightarrow (BC^{-1})^{-1} = (2I)^{-1} \rightarrow CB^{-1} = \frac{1}{2}I$

حال می توان نوشت:

$$C(AB)^{-1} = CB^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع مولفه ها} = 0$$

طراح: علیرضا فعلی

درجه دشواری: متوسط

مبحث: دترمینان

۱۸- گزینه ۴

چون برای درایه سوم و ستون سوم در بسط دترمینان داریم $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$ و $3(-1)^{3+3} = 3$ است، با k واحد افزایش این درایه مقدار دترمینان با شرط عدم تغییر سایر درایه ها به همان میزان کاهش می یابد.

طراح: علیرضا فعلی

درجه دشواری: ساده

مبحث: اعمال جبری ماتریس ها

۱۹- گزینه ۳

ابتدا باید ماتریس $A+I$ را بسازیم و سپس به توان های بالاتر آن برسیم: $A+I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow (A+I)^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (A+I)^3 = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

همان طور که مشاهده می شود $x-y$ در تمام توان ها برابر ۱ است و در توان های بالاتر نیز به همین منوال خواهد بود.

طراح: صبا مهدوی

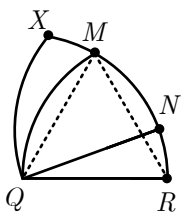
درجه دشواری: دشوار

مبحث: زاویه در دایره

۲۰- گزینه ۴

با توجه به اینکه نقطه Q وسط پاره خط PR است و سه نیم دایره هم نهشت اند، شعاع های آن ها برابر خواهد بود. در نتیجه:

$$QX = QM = QN = QR = XN$$



پس هر دو ناحیه XQN و MQR به دو کمان 60° درجه هم طول و یک ضلع هم اندازه محدودند و در نتیجه مساحت این دو ناحیه برابر است. از طرفی چون ناحیه XQM با کم کردن ناحیه MQR از ناحیه XQR به دست می آید و ناحیه NQR با کم کردن ناحیه XQN از ناحیه XQR به دست می آید، مساحت دو ناحیه XQM و NQR نیز با یکدیگر برابر است. چون $\hat{TQR} = \hat{NQR} = 20^\circ$ است، مساحت قطاع NQR برابر $\frac{20}{180}$ مساحت نیم دایره

PXR ، یعنی برابر $8 = 72 \times \frac{20}{180}$ خواهد بود. پس مساحت ناحیه XQM نیز، برابر ۸ می شود.

طراح: نصیر کریمی جونی

درجه دشواری: دشوار

مبحث: اعمال جبری ماتریس‌ها

گزینه ۳

فرض کنید $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{B \times} BAB - B^T A = B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{\times B} AB^T - BAB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} B \end{array} \right. \xrightarrow{+} AB^T - B^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} B + B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2d \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های $AB^T - B^T A$ برابر $2(a-d)$ است. حال چون $|a-d| = 3$ است، پس مقدار مطلوب ± 6 خواهد بود.

طراح: صبا مهدوی

درجه دشواری: متوسط

مبحث: نیمساز

گزینه ۲

با توجه به زوایای خارجی مثلث‌های ADC و BEC داریم:

$$\hat{A}DB = \hat{C} + \hat{C}AD = \hat{C} + 2\hat{C}AF$$

$$\hat{A}EB = \hat{C} + \hat{E}BC = \hat{C} + 2\hat{F}BC$$

از طرفی می‌دانیم $\hat{A}FB = \hat{C}AF + \hat{C} + \hat{F}BC$ در نتیجه:

$$\hat{A}DB + \hat{A}EB = 2\hat{C} + 2(\hat{C}AF + \hat{F}BC) = 2(\hat{C} + \hat{C}AF + \hat{F}BC) = 2\hat{A}FB = 190^\circ$$

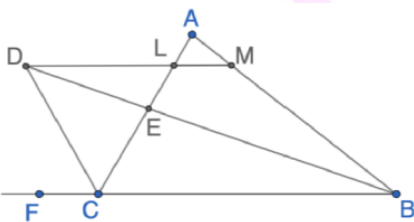
طراح: صبا مهدوی

درجه دشواری: متوسط

مبحث: نیمساز

گزینه ۲

چون $LM = DM - DL$ است، باید طول پاره‌خط‌های DL، DM را بدست می‌آوریم. حال داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}BE = \hat{E}BC \\ ML \parallel BC \rightarrow \hat{L}DE = \hat{E}BC \end{array} \right\} \rightarrow \hat{L}DE = \hat{M}BE \rightarrow DM = MB = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}CE = \hat{D}CF \\ LD \parallel FC \rightarrow \hat{L}DC = \hat{D}CF \end{array} \right\} \rightarrow \hat{L}DC = \hat{D}CE \rightarrow LD = LC = 5 \rightarrow LM = DM - DL = 7 - 5 = 2$$

طراح: احسان ایزدپناه

درجه دشواری: ساده

مبحث: منطق گزاره

۲۷- گزینه ۴

طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$[p \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p \equiv [\sim p \vee (p \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p \equiv [\underbrace{(\sim p \vee p)}_T \wedge (\sim p \vee \sim q)] \Rightarrow \sim p$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \vee \sim p \equiv (p \wedge q) \vee \sim p \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \wedge (q \vee \sim p) \equiv q \vee \sim p \equiv p \Rightarrow q$$

طراح: احسان ایزدپناه

درجه دشواری: ساده

مبحث: مجموعه

۲۸- گزینه ۱

عبارت صورت سؤال را با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ساده می‌کنیم:

$$[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \cap A'] \cup (A \cap B) = [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B)$$

$$= (B \cap A') \cup (A \cap B) = (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap \underbrace{(A' \cup A)}_U = B$$

ضمناً این سؤال با نمودار ون هم قابل حل است.

طراح: احسان ایزدپناه

درجه دشواری: متوسط

مبحث: مجموعه

۲۹- گزینه ۲

اگر $A \times B = B \times A$ و $A, B \neq \emptyset$ ، آنگاه $A = B$ است.

در این صورت یکی از دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

حالت اول: $a = 4$ باشد. در این صورت داریم: $A = \{4, b+1, 3\}$ ، $B = \{4, 2, b\}$

در این حالت، برای برقراری تساوی دو مجموعه A و B ، لازم است $b = 3$ و $b+1 = 2$ باشد که امکان‌پذیر نیست.

حالت دوم: $b+1 = 4$ باشد، در این صورت $b = 3$ است و داریم: $A = \{a, 4, 3\}$ ، $B = \{4, \frac{a}{3}, 3\}$

در این حالت، برای برقراری تساوی دو مجموعه A و B ، کافی است $a = \frac{a}{3}$ باشد که در نتیجه $a = 0$ است.

تذکر: در حالت دوم، مجموعه‌های A و B حتماً ۳ عضوی هستند، چون در غیر این صورت a باید برابر ۳ یا ۴ باشد که در این صورت $\frac{a}{3}$ مخالف ۳ و ۴ خواهد بود.

طراح: احسان ایزدپناه

درجه دشواری: متوسط

مبحث: قضیه تقسیم

۳۰- گزینه ۴

قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$a = bq + r, \quad r = q^2 - 2$$

$$a = 37q + q^2 - 2 \Rightarrow 0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq q^2 - 2 < 37 \Rightarrow 2 \leq q^2 < 39$$

از این رابطه معلوم می‌شود که حداکثر مقدار q عدد ۶ خواهد بود.

$$a = 37q + q^2 - 2 \Rightarrow a = 37 \times 6 + 36 - 2 = 256 = 16k$$

نکته ۱: $\frac{a|b}{a|c} \Rightarrow a|mb \pm nc \quad (m, n \in \mathbb{Z})$

نکته ۲: $a|p \Rightarrow \frac{p|a}{a>} \Rightarrow a=p \text{ or } a=1$

چون عدد a مقسوم علیه هر دو عدد $8k+3$ و $6k+5$ است، داریم:

$$\begin{cases} a|8k+3 \times (-3) & \xrightarrow{(1)} a|(-24k-9) \\ a|6k+5 \times (4) & \xrightarrow{(2)} a|(24k+20) \end{cases} \Rightarrow a|11 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=11$$

تنها عدد دورقمی که هر دو عدد داده شده را به ازای $k=11q+1$ ($q \in \mathbb{Z}$) عاد می کند، عدد ۱۱ است.

نکته: عدد طبیعی C را k . م. م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می نامیم و می نویسیم $[a, b] = c$ ، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد.

الف) $a|c, b|c$ ب) $\forall m > 0; a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

با توجه به شرط سؤال معلوم است که a مقسوم علیه ای از عدد ۲۱۰ است که عامل ۷ را دارد. بنابراین:

$$a \in \{7, 7 \times 2, 7 \times 3, 7 \times 5, 7 \times 6, 7 \times 10, 7 \times 15, 7 \times 30\}$$

در بین اعداد فوق، اعداد ۱۴، ۲۱، ۳۵، ۴۲ و ۷۰ دورقمی هستند.

نکته: به ازای تمامی مقادیر طبیعی برای k رابطه $a-b|a^k - b^k$ برقرار است.

نکته: به ازای تمامی مقادیر فرد طبیعی برای k رابطه $a+b|a^k + b^k$ برقرار است.

مطابق نکات بالا می توان نوشت:

$$\begin{cases} 7|2^n - 1 \Rightarrow 2^3 - 1|2^n - 1 \\ 2^3 - 1|2^{2k} - 1 \end{cases} \Rightarrow n = 2k \quad (1)$$

با توجه به نکته دوم $2^n + 1|2^{60} + 1 \Rightarrow 60 = nx \quad (x = 2k + 1) \Rightarrow n = 60$ یا ۲۰ یا ۱۲ یا ۴ (۲)

(۱)، (۲) $\Rightarrow n = 60$ یا $n = 12$

می دانیم p/a ، آنگاه: $(p^4, a^2) = 1$

اگر $p|a$ و p^2/a ، آنگاه: $(p^4, a^2) = p^2$

اگر $p^2|a$ ، آنگاه: $(p^4, a^2) = p^4$

نکته: گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم که به این روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالتها می گویند.

عدد n در تقسیم بر ۶ به یکی از شش فرم $6k$ ، $6k+1$ ، $6k+2$ ، $6k+3$ ، $6k+4$ یا $6k+5$ قابل نوشتن است. در هریک از این ۶ حالت خواهیم داشت:

$$n = 6k \Rightarrow A = n^2 + 3n + 1 = 6k_1 + 6k_2 + 1 = 6q + 1$$

$$n = 6k + 1 \Rightarrow A = n^2 + 3n + 1 = [6k_1 + 1] + [6k_2 + 3] + 1 = 6q + 5$$

$$n = 6k + 2 \Rightarrow A = n^2 + 3n + 1 = [6k_1 + 4] + [6k_2] + 1 = 6q + 5$$

$$n = 6k + 3 \Rightarrow A = n^2 + 3n + 1 = [6k_1 + 3] + [6k_2 + 3] + 1 = 6q + 7 = 6q' + 1$$

$$n = 6k + 4 \Rightarrow A = n^2 + 3n + 1 = [6k_1 + 4] + [6k_2] + 1 = 6q + 5$$

$$n = 6k + 5 \Rightarrow A = n^2 + 3n + 1 = [6k_1 + 1] + [6k_2 + 3] + 1 = 6q + 5$$

بنابراین فقط یکی از دو باقی مانده ۱ یا ۵ بدست می آید.

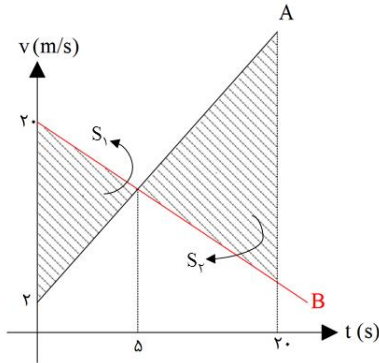
۳۶- گزینه ۱ **مبحث:** حرکت یکنواخت **درجه دشواری:** ساده **طراح:** ابوالفضل علیدوست

اگر طول مسیر را $3d$ در نظر بگیریم، مجموع زمان حرکت طی دو مرحله ۱۶ دقیقه است: $t_1 + t_2 = 16 \Rightarrow \frac{d}{v_1} + \frac{2d}{v_2} = 16$

در حالت دوم، زمان حرکت ۱۲ دقیقه بوده است: $4 + \frac{2d}{v_2} = 16 \Rightarrow \frac{d}{v_2} = 6 \text{ min} \Rightarrow t = \frac{3d}{v_1} = 12 \Rightarrow \frac{d}{v_1} = 4 \text{ min}$

در حالت سوم تمام مسیر با تندی v_2 طی می‌شود: $t = \frac{3d}{v_2} = 3 \times 6 = 18 \text{ min}$

۳۷- گزینه ۲ **مبحث:** نمودار سرعت - زمان **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** ابوالفضل علیدوست



فاصله دو متحرک در $t = 5 \text{ s}$ برابر S_1 است و $S_1 = \frac{18 \times 5}{2} = 45 \text{ m}$

در این مدت متحرک B، ۴۵ متر از A جلو افتاده است. از $t = 5 \text{ s}$ به بعد جابجایی متحرک A از B به اندازه S_2 بیشتر است. ابعاد مثلث هاشور خورده سمت راست ۳ برابر مثلث سمت چپ است.

$$S_2 = 9S_1 = 9 \times 45 = 405 \text{ m}$$

فاصله دو متحرک: $d = 405 - 45 = 360 \text{ m}$

۳۸- گزینه ۲ **مبحث:** شتاب متوسط **درجه دشواری:** دشوار **طراح:** ابوالفضل علیدوست

سرعت متحرک در $t = 8 \text{ s}$ ، صفر است. سرعت در $t = 4 \text{ s}$ برابر شیب خط مماس رسم شده است. اگر مکان اولیه متحرک X باشد:

$$v_4 = \frac{-x_1}{10-4} = \frac{-x_1}{6}$$

$$a_{av_{4 \rightarrow 8}} = \frac{v_8 - v_4}{8-4} \Rightarrow 0/5 = \frac{0 + \frac{x_1}{6}}{4} \Rightarrow x_1 = 12 \text{ m}$$

تندی متوسط در ۱۰ ثانیه اول برابر $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. اگر فاصله متحرک از مبدأ در لحظه t برابر d باشد:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{(d-x_1) + d + 2 \times 14}{10} \Rightarrow 22 = 2d - x_1 \xrightarrow{x_1=12} d = 17 \text{ m}$$

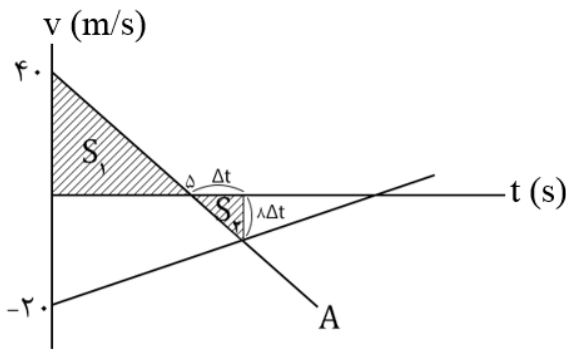
۳۹- گزینه ۱ **مبحث:** حرکت یکنواخت **درجه دشواری:** ساده **طراح:** محمدجواد حیدری

ابتدا سرعت حرکت جسم را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-16-4}{8-3} = \frac{-20}{5} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

یعنی جسم هر ثانیه ۴ متر در جهت منفی حرکت می‌کند. لحظه تغییر بردار مکان، زمانی است که جسم از مبدأ مختصات ($x=0$) می‌گذرد. با توجه به این که جسم در لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ در مکان $x_1 = 4 \text{ m}$ بوده است، پس ۱ ثانیه بعد به مبدأ می‌رسد و بردار مکان تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین در $t = 4 \text{ s}$ تغییر جهت بردار مکان صورت می‌گیرد.

مبحث: نمودار سرعت - زمان درجه دشواری: دشوار طراح: پوریا دیبار کجوری



$$S_1 = \frac{40 \times 5}{2} = 100 \text{ m} \text{ را به دست می آوریم:}$$

یعنی تا لحظه $t = 5 \text{ s}$ متحرک A، ۱۰۰ متر جابه‌جا شده و در مکان 100 m قرار می‌گیرد.
($x_{5A} = x_A + S_1$)

بازه زمانی بین لحظه $t = 5 \text{ s}$ تا لحظه برابری سرعت‌ها را Δt در نظر می‌گیریم که در این بازه باید جابه‌جایی متحرک A برابر -4 متر باشد تا در مکان 104 m قرار گیرد. پس اندازه مساحت S_2 برابر ۴ متر است. از رابطه نسبت مساحت دو مثلث متشابه خواهیم داشت:

$$\left(\frac{5}{\Delta t}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow \Delta t = 1 \text{ s}$$

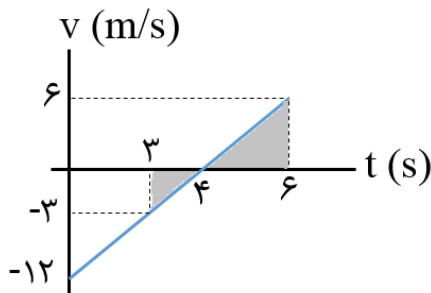
چون اندازه شیب نمودار A برابر ۸ است، پس سرعت در نقطه مورد نظر برابر $-8\Delta t$ یا $-8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. حال مساحت زیر نمودار B را تا این لحظه پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x_B = -\frac{(20+8) \times 6}{2} = -84 \text{ m} \Rightarrow x_B = 100 - 84 = 16 \text{ m}$$

$$\text{فاصله} = 16 - (-104) = 120 \text{ m}$$

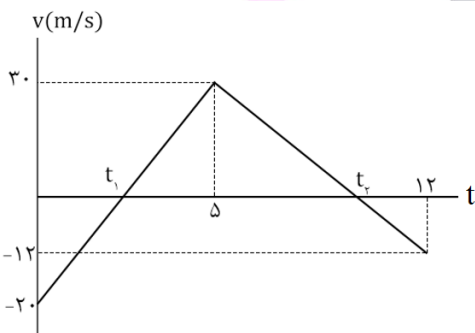
۴۱- گزینه ۳ مبحث: حرکت شتاب ثابت درجه دشواری: ساده طراح: پوریا دیبار کجوری

با رسم نمودار سرعت - زمان و با کمک مساحت زیر نمودار، می‌توان مسافت طی شده را در بازه ۳ تا ۶ حساب کرد:



$$l = \frac{3 \times 1}{2} + \frac{6 \times 2}{2} = 7.5 \text{ m}$$

۴۲- گزینه ۲ مبحث: حرکت شتاب ثابت درجه دشواری: متوسط طراح: پوریا دیبار کجوری



ابتدا نمودار سرعت - زمان متناظر با این حرکت را رسم می‌کنیم.

متحرک در لحظات t_1 و t_2 تغییر جهت داده است. برای سرعت متوسط باید جابه‌جایی بین این دو لحظه را به دست آوریم که برابر با مساحت زیر نمودار $v-t$ است.

$$\Delta x = \frac{30(t_2 - t_1)}{2} = 15(t_2 - t_1) \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

یادآوری: در نمودار $v-t$ ، اگر نمودار بین دو نقطه t_1 و t_2 مثلثی به ارتفاع v تشکیل دهد، سرعت

متوسط متحرک بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر با $v_{av} = \frac{v}{2}$ خواهد بود!

۴۳- گزینه ۲ **مبحث:** حرکت یکنواخت **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** پوریا دیارکجوری

ابتدا حساب می‌کنیم چقدر طول می‌کشد تا دو قطار به هم برسند. فاصله دو قطار از هم ۲۰۰ km و تندی نسبی‌ها (جمع تندی‌ها) برابر $40 \frac{km}{h}$ است. پس ۵ ساعت طول می‌کشد تا این دو قطار به هم برسند. پرنده در این مدت همواره با تندی ثابت $60 \frac{km}{h}$ در حرکت بوده (مهم نیست چه شکل مسیری داشته!)، پس $60 \frac{km}{h} \times 5h = 300 km$ مسافت طی کرده است.

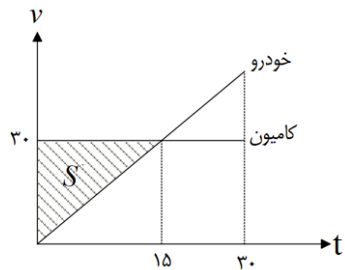
۴۴- گزینه ۴ **مبحث:** حرکت شتاب ثابت **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** علی گندمی

از آنجا که سرعت اولیه متحرک منفی بوده و در تمام گزینه‌ها بین t_1 تا t_2 سرعت مثبت است، پس قبل از t_1 متحرک باید تغییر جهت بدهد (گزینه ۲ و ۳ حذف می‌شوند) و چون بعد از لحظه t_1 متحرک دیگر نمی‌تواند تغییر جهت بدهد، پس گزینه ۴ درست است.

۴۵- گزینه ۲ **مبحث:** سینماتیک **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** علی گندمی

نمودار سرعت - زمان این دو متحرک را رسم می‌کنیم:
وقتی دو متحرک در لحظه $t = 30s$ به هم می‌رسند در $t = 15s$ سرعت یکسانی دارند و در بیشترین فاصله از هم هستند. پس بیشترین فاصله دو متحرک از هم برابر است با:

$$S = \frac{15 \times 30}{2} = 225 m$$



۴۶- گزینه ۳ **مبحث:** سقوط آزاد **درجه دشواری:** ساده **طراح:** علی گندمی

کل مدت زمان حرکت برابر است با:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 40.5 = 5t^2 \Rightarrow t^2 = 81 \Rightarrow t = 9s$$

پس سه بازه ۳ ثانیه‌ای داریم که برای هر کدام با استفاده از معادله مستقل از شتاب می‌نویسیم:

$$\Delta y = \frac{v + v_1}{2} \Delta t \begin{cases} 0 \rightarrow 3: \Delta y = \frac{0 + 30}{2} \times 3 = 45 m \\ 3 \rightarrow 6: \Delta y = \frac{30 + 60}{2} \times 3 = 135 m \\ 6 \rightarrow 9: \Delta y = \frac{60 + 90}{2} \times 3 = 225 m \end{cases}$$

۴۷- گزینه ۱ **مبحث:** سقوط آزاد **درجه دشواری:** ساده **طراح:** پوریا دیارکجوری

سرعت متوسط گلدان در بازه عبور از روبه‌روی پنجره برابر است با: $v_{av} = \frac{2/2 m}{0.2 s} = 11 \frac{m}{s}$

این عدد، سرعت گلدان در لحظه وسط این بازه هم هست. پس $0.1 s$ قبل‌تر، سرعت گلدان به اندازه $1 \frac{m}{s} = 0.1 s \times 10 \frac{m}{s^2}$ کمتر بوده است. یعنی $10 \frac{m}{s}$ پاسخ سؤال است.

۴۸- گزینه ۱ **مبحث:** دما و دماسنجی **درجه دشواری:** ساده **طراح:** ابوالفضل علیدوست

دمای شهر دهگلان بر حسب درجه سانتی‌گراد برابر است با: $\theta = 282 - 273 = 9^\circ C$

اختلاف دمای جزیره ابوموسی در خلیج فارس و شهر دهگلان برابر است با: $\Delta\theta = 34 - 9 = 25^\circ C$

این اختلاف بر حسب درجه فارنهایت برابر می‌شود با: $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta\theta \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5} \times 25 = 45^\circ F$

۴۹- گزینه ۴ مبحث: انبساط درجه دشواری: دشوار طراح: ابوالفضل علیدوست

با در نظر گرفتن ضریب انبساط خطی میله‌ها، میله B در دمای 20°C ، یک میلی‌متر از میله A کوتاه‌تر بوده است و به خاطر ضریب انبساط بیشتر، در دمای 38°C ، طول آن از میله A، یک میلی‌متر بیشتر شده است. به عبارت دیگر در این افزایش دما، تغییر طول میله B از میله A، ۲ میلی‌متر بیشتر بوده است. اگر طول میله A در دمای 20°C $\theta_1 = -20$ بر حسب میلی‌متر برابر L باشد:

$$\Delta L_B - \Delta L_A = 2 \Rightarrow (\alpha_B(L-1) - \alpha_A L) \times \Delta \theta = 2$$

$$(5 \times 10^{-5}(L-1) - 9/6 \times 10^{-6} \times L) \times 400 = 2$$

$$(40/4 L - 50) \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-3} \Rightarrow 40/4 L = 5000 + 50 \Rightarrow L = \frac{5050}{40/4} = 125 \text{ mm}$$

۵۰- گزینه ۲ مبحث: تعادل گرمایی درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

ظرفیت گرمایی گوی‌ها و آب را به ترتیب C' و C در نظر می‌گیریم. برای تعادل گرمایی در حالت اول می‌نویسیم:

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{گوی}} = 0 \Rightarrow C(80 - 60) = C'(60 - 0) \Rightarrow C = 3C'$$

برای تعیین دمای تعادل در حالت جدید می‌نویسیم:

$$Q_{\text{آب}} + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$C(60 - \theta) + C'(60 - \theta) = C'(\theta - 0)$$

$$4C'(60 - \theta) = C'\theta \Rightarrow 240 = 5\theta \Rightarrow \theta = 48^{\circ}\text{C}$$

۵۱- گزینه ۴ مبحث: گرما و تغییر دما درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

گرمای داده‌شده به مجموعه دمای آب و فلز را با هم بالا می‌برد. در مدت ۱۵۰ ثانیه دمای مجموعه 60°C افزایش یافته است. پس:

$$P \times \Delta t = Q_{\text{آب}} + Q_{\text{فلز}} = mc\Delta\theta + mc\Delta\theta$$

$$720 \times 150 = (0/4 \times 4200 + 0/2 \times c) \times 60 \Rightarrow 1800 = 1680 + 0/2c$$

$$120 = 0/2c \Rightarrow c = 600 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

۵۲- گزینه ۴ مبحث: قانون گازها درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

فشار مطلق گاز در حالت اول و دوم به ترتیب $7P_1$ و $9P_1$ است. مقدار گاز اولیه موجود در ظرف $n = \frac{10}{4} = 2/5 \text{ mol}$ است.

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \rightarrow \frac{7P_1}{2/5 \times (273 + 7)} = \frac{9P_1}{n_2 \times (273 + 27)}$$

$$\frac{7}{2/5 \times 280} = \frac{9}{n_2 \times 300} \Rightarrow n_2 = 3 \text{ mol}$$

$$0/5 = \frac{15}{M} \Rightarrow M = 30 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

پس مقدار گاز اضافه شده $0/5 \text{ mol}$ است. در نتیجه:

۵۳- گزینه ۳ مبحث: تغییر حالت درجه دشواری: ساده طراح: محمدجواد حیدری

فرض کنیم m گرم یخ و $1400 - m$ گرم بخار باشد. داریم:

$$|Q_{\text{انجماد}}| = Q_{\text{تبخیر}}$$

$$m \times \mathcal{L}_f = (1400 - m) \mathcal{L}_v \Rightarrow m = 1400 \times 6 - 6m \Rightarrow 7m = 1400 \times 6 \Rightarrow m = 1200 \text{ g}$$

۵۴- گزینه ۱ مبحث: تغییر حالت درجه دشواری: دشوار طراح: محمدجواد حیدری

گرمای باقی مانده برای ذوب $\frac{1}{4}$ جرم جسم، $40 \text{ kJ} = 220 - 180$ است. پس: $40 \text{ kJ} = \frac{m}{4} \times L_F \Rightarrow L_F = \frac{40}{2} = 80 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

۵۵- گزینه ۱ مبحث: تغییر حالت درجه دشواری: متوسط طراح: محمدجواد حیدری

اگر جرم اولیه آب m_1 و جرم اولیه یخ m_2 باشد، داریم:

$$m_1 + m_2 = 180 \text{ g} \Rightarrow m_1 = 180 - m_2$$

اکنون با نوشتن معادله تعادل گرمایی تا دمای تعادل صفر درجه (و استفاده از یکای کالری)، خواهیم داشت:

$$m_1 \times 1 \times 16 = (m_2 - 60) \times 80 \Rightarrow m_1 = 5m_2 - 300$$

با ترکیب دو معادله:

$$180 - m_2 = 5m_2 - 300 \Rightarrow 6m_2 = 480 \Rightarrow m_2 = 80 \text{ g}, m_1 = 100 \text{ g}$$

۵۶- گزینه ۲ مبحث: انتقال گرما درجه دشواری: ساده طراح: محمدجواد حیدری

گزینه‌های الف و د درست هستند.

در شب، آب دریا گرمتر از ساحل است، پس هوای روی آب دریا به دلیل همرفت بالا می‌رود و هوای خنک روی ساحل به طرف دریا می‌وزد. در خلأ فقط امکان انتقال گرما به روش تابش وجود دارد و همرفت نمی‌تواند رخ دهد.

۵۷- گزینه ۲ مبحث: انتقال گرما درجه دشواری: دشوار طراح: علی گندمی

آب درون هر دو ظرف در دمای 100°C می‌جوشد و با هم همدماست. اگر ظرف (۱) را درون ظرف (۲) قرار بدهیم، گرما دیگر از ظرف (۲) به ظرف (۱) منتقل نمی‌شود؛ زیرا شرط انتقال گرما وجود اختلاف دماست. پس آب درون ظرف (۱) دیگر گرما نمی‌گیرد و نمی‌جوشد.

۵۸- گزینه ۲ مبحث: نیروهای بین مولکولی درجه دشواری: ساده طراح: ابوالفضل علیدوست

مورد الف نادرست است. کاهش قطر لوله موئین، اختلاف ارتفاع جیوه درون لوله و ظرف را افزایش می‌دهد.

مورد ب نادرست است. افزایش دما، باعث افزایش انرژی جنبشی و کاهش نیروی هم‌چسبی مولکول‌های مایع می‌شود.

مورد پ و ت درست است.

۵۹- گزینه ۳ مبحث: فشار جامدات درجه دشواری: ساده طراح: ابوالفضل علیدوست

حجم استوانه و مخروط یکسان است. اگر سطح مقطع قاعده استوانه و مخروط به ترتیب A_1 و A_2 باشد:

$$A_1 \times h = \frac{1}{3} A_2 \times h \Rightarrow A_2 = 3A_1$$

$$P = \frac{mg}{A} \xrightarrow{m_1 = m_2} \frac{P_1}{P_2} = \frac{A_2}{A_1} = 3 \Rightarrow P_1 = 3P_2$$

۶۰- گزینه ۴ مبحث: فشار در مایعات ساکن درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

با تقسیم کردن حجم هر یک از قسمت‌های پایین و بالای ظرف به آهنگ ورود روغن به آن زمان پر شدن تعیین می‌گردد.

$$\text{قسمت پایین: } t = \frac{25 \times 10}{5} = 50 \text{ s} \text{ و قسمت بالا: } t = \frac{10 \times 20}{5} = 40 \text{ s}. \text{ یعنی کل ظرف در } 90 \text{ s} \text{ پر می‌شود.}$$

برای محاسبه نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع، در هر مرحله، ابتدا فشار مایع و سپس نیرو تعیین می‌شود. نیروی وارد بر کف ظرف هنگامی که قسمت پایین پر نشده است:

$$P = \rho gh \quad F = \rho ghA \rightarrow F = 800 \times 10 \times 0.1 \times 25 \times 10^{-4} = 2 \text{ N}$$

$$F = P \times A$$

و در ادامه هنگامی که قسمت بالای ظرف هم پر شود، داریم:

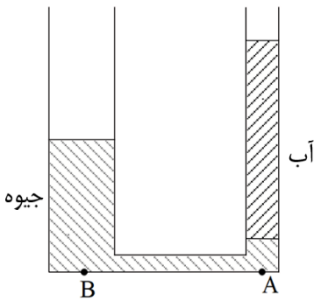
$$F = 800 \times 10 \times (0.1 + 0.2) \times 25 \times 10^{-4} = 6 \text{ N}$$

گزینه ۴ تغییرات نیرو را درست نشان می دهد.

دقت شود در هر دو مرحله، برای تعیین نیرو، مساحت کف ظرف ($A = 25 \text{ cm}^2$) باید در نظر گرفته شود.

۶۱- گزینه ۲ **مبحث:** فشار در مایعات ساکن **درجه دشواری:** دشوار **طراح:** ابوالفضل علیدوست

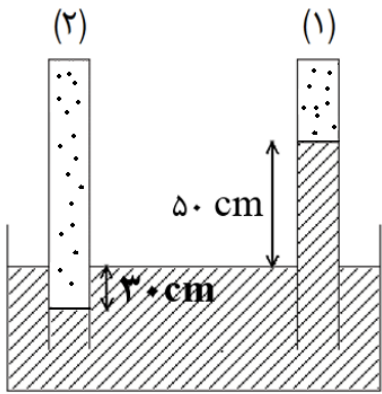
پس از باز شدن شیر، قسمتی از جیوه وارد شاخه سمت چپ می شود و فشار در نقاط A و B برابر خواهند بود. به عبارت دیگر می توان اینگونه در نظر گرفت مایعات در لوله بزرگتری به مساحت $A = 2 + 4 = 6 \text{ cm}^2$ قرار گرفته اند و فشار کف ظرف برابر است با:



$$P = \frac{mg}{A} = \frac{(40 + 680) \times 10^{-3} \times 10}{6 \times 10^{-4}} = 12000 \text{ Pa} = 12 \text{ kPa}$$

۶۲- گزینه ۱ **مبحث:** فشارسنج جو **درجه دشواری:** دشوار **طراح:** ابوالفضل علیدوست

فشار گاز درون لوله (۲) از گاز درون لوله (۱) بیشتر است. پس $F_1 = 28 \text{ N}$ و $F_2 = 40/8 \text{ N}$ است. فشار گاز درون لوله ها برابر است با:



$$P_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{28}{4} \times 10^4 = 70000 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \frac{F_2}{A} = \frac{40/8}{4} \times 10^4 = 102000 \text{ Pa}$$

اگر فشار هوای محیط P و چگالی مایع ρ باشد داریم:

$$\begin{cases} P_1 + \rho gh_1 = P \\ P_2 + \rho gh_2 = P \end{cases} \xrightarrow{h_1=0.5 \text{ m}, h_2=0.3 \text{ m}} P_1 + \rho g(h_1 + h_2) = P_2$$

$$70000 + \rho \times 10 \times (0.5 + 0.3) = 102000 \Rightarrow 32000 = 8\rho \Rightarrow \rho = 4000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$70000 + 4000 \times 10 \times 0.5 = P \Rightarrow P = 90000 \text{ Pa} \Rightarrow P = 90 \text{ kPa}$$

۶۳- گزینه ۲ **مبحث:** چگالی **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** محمدجواد حیدری

اگر حجم مکعب را با V و حجم مایع را با V' نشان دهیم، داریم:

$$V = 0.3V'$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \rho V = 4/5 \times 0.3V' \\ m' &= \rho V' = 0.6 \times V' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{4/5 \times 0.3V'}{0.6V'} = \frac{4/5}{2} = \frac{9}{4}$$

۶۴- گزینه ۱ **مبحث:** چگالی **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** محمدجواد حیدری

اگر حجم حفره را V بنامیم، داریم:

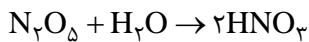
$$1/2 \times V + (1000 - V) \times 3 = 2775 \Rightarrow 1/2V - 3V + 3000 = 2775 \Rightarrow V = 125 \text{ cm}^3$$

$$2 \text{ dm}^3 = 2 \times (10^{-1})^3 \text{ m}^3 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$A = 200 \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-2} = 8 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$h = \frac{V}{A} = \frac{2 \times 10^{-3}}{8 \times 10^{-2}} = \frac{1}{4} \times 10^{-1} \text{ m} = \frac{1}{4} \times 10^{-1} \times 10^9 \text{ nm} = 2,5 \times 10^7 \text{ nm}$$





$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow \text{جرم حل شونده} = \frac{0.108 \times 200}{100} = 0.216 \text{ g } N_2O_5$$

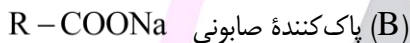
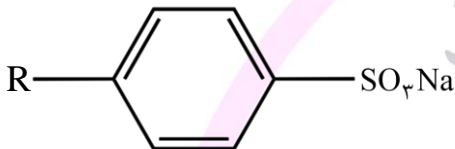
$$HNO_3 \text{ مولاریته} = \frac{4 \times 10^{-4} \text{ mol}}{0.2 \text{ L}} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

HNO_3 اسید تک پروتون دار قوی است. ($\alpha = 1$)

$$[H^+] = M \cdot \alpha = 2 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log H^+ = -\log(2 \times 10^{-3}) = 2.7$$

(آ) درست - هر مولکول B، ۵ اتم کربن کمتر از مولکول A دارد. بنابراین هر مول آن ۵ اتم کربن کمتر دارد.



(ب) نادرست - نسبت تعداد آنیون به کاتیون در هر دو نوع پاک کننده یکسان و برابر با ۱ است.

(پ) درست - در پاک کننده غیر صابونی ۶ کربن متعلق به حلقه بنزنی است. بنابراین در صورتی که $\frac{3}{4}$ کل اتمها مربوط به R باشد، R ۱۸ کربنه است. در نتیجه فرمول شیمیایی پاک کننده صابونی که R برابر با پاک کننده غیر صابونی دارد، به صورت $C_{19}H_{37}O_2Na$ می باشد.

(ت) نادرست - پاک کننده غیر صابونی (A) با یون Ca^{2+} رسوب تشکیل نمی دهد.

ابتدا درصد جرمی BOH را در محلول به دست می آوریم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{100S}{100+S} = \frac{100 \times 10}{100+10} = \frac{100}{11}$$

حال غلظت مولی را به دست می آوریم:

$$M = \frac{100 \times 10 \times 10}{11 \times 125} = 8 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

غلظت OH^- در محلول باز قوی با غلظت باز برابر است. ($\alpha = 1$)

$$[OH^-] = M \cdot \alpha = M = 8 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = 14 + \log[OH^-] \Rightarrow pH = 14 + \log(8 \times 10^{-1}) = 14 - 0.1 = 13.9$$

۶۹- گزینه ۲ مبحث: سامانه تعادلی درجه دشواری: دشوار طراح: مسعود خوش طینت
بررسی مطالب (آ) تا (ت):

(آ) نادرست

اگر چه در هنگام تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت برابر است ولی نمی‌توان گفت که سرعت مصرف یا تولید واکنش‌دهنده‌ها و فرآورده‌ها نیز با هم برابر است. زیرا سرعت مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در واکنش به ضرایب استوکیومتری آن‌ها بستگی دارد.

(ب) درست

در این واکنش گاز تولید می‌شود (H_2) و در صورت باز بودن در ظرف و خروج گاز، هیچ‌گاه تعادل برقرار نمی‌شود.

(پ) درست

(ت) درست

ثابت یونش اسید، بیانی از میزان پیشرفت فرآیند یونش تا رسیدن به تعادل است.

۷۰- گزینه ۳ مبحث: انحلال پذیری درجه دشواری: ساده طراح: مسعود خوش طینت
دلیل نادرستی عبارت ۳: در بین کاتیون‌ها با دو بار مثبت در آب مقدار Mg^{2+} بیشتر از Ca^{2+} است.

توضیح عبارت ۴: $BaSO_4$ نمک نامحلول در آب است. پس دو یون $Ba^{2+}(aq)$ و $SO_4^{2-}(aq)$ به طور همزمان در بخش کوچکی از دریا وجود ندارند.

۷۱- گزینه ۴ مبحث: اسمز درجه دشواری: دشوار طراح: مسعود خوش طینت
گزینه ۱) اسمز، جابه‌جایی مولکول‌های حلال (آب) از غشاء نیمه‌تراوا است. (نادرست)

گزینه ۲) در هیچ‌یک از این ۳ روش، میکروب از آب جدا نمی‌شود. (نادرست)

گزینه ۳) در روش اسمز معکوس، مولکول‌های حلال (آب) از غشاء به سمت محلول رقیق‌تر مهاجرت می‌کنند. (نادرست)

گزینه ۴) ردپای آب برای تولید هر کیلوگرم چرم حدود ۱۶۰۰۰ لیتر و برای هر کیلوگرم گندم حدود ۱۸۰۰ لیتر است. (درست)

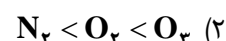
۷۲- گزینه ۴ مبحث: نامگذاری درجه دشواری: ساده طراح: محمدرضا زهره‌وند
با توجه به ترکیبات داده شده، A می‌تواند +۲ یا +۳ باشد؛ پس موارد الف، پ، ت، ث، چ و ح وجود دارند.

۷۳- گزینه ۱ مبحث: مسئله ppm درجه دشواری: متوسط طراح: محمدرضا زهره‌وند
ابتدا درصد جرمی را به ppm تبدیل می‌کنیم سپس از PO_4^{3-} به Na^+ می‌رسیم.



$$190 \text{ ppm } PO_4^{3-} \times \frac{3 \times 23 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{95 \text{ g } PO_4^{3-}} = 138 \text{ ppm } Na^+$$

۷۴- گزینه ۳ مبحث: مقایسه دمای جوش درجه دشواری: متوسط طراح: محمدرضا زهره‌وند
برای موارد نادرست مقایسه درست در زیر آمده است:



۷۵- گزینه ۲ مبحث: مخلوطها درجه دشواری: ساده طراح: محمدرضا زهرهوند

هوای شهرهای بزرگ به دلیل وجود ریزگردها کدر است در نتیجه ناهمگن محسوب می شود

۷۶- گزینه ۴ مبحث: pH درجه دشواری: متوسط طراح: محمدرضا زهرهوند

با استفاده از رابطه

$$M_{\text{نهایی}} = \frac{M_1 V_1 n_1 + M_2 V_2 n_2}{V_1 + V_2}$$

داریم:

$$= \frac{\frac{5}{100} \times 2 \times 2 + \frac{4}{40} \times 8 \times 1}{2 + 8} = \frac{0.2 + 0.8}{10} = 0.1 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$\text{pH} = 14 + \log\left(\frac{1}{0.1}\right) = 13$$

۷۷- گزینه ۲ مبحث: تعادل درجه دشواری: دشوار طراح: محمدرضا زهرهوند

فقط مورد ت درست است.

برای سایر موارد:

الف- سرعت اجزای واکنش به ضرایب آنها وابسته است.

ب- در واکنشی که به تعادل می رسد، مقدار هیچ ماده ای نباید صفر شود.

پ- شیب نمودار غلظت - زمان متناسب است با ضرایب استوکیومتری.

۷۸- گزینه ۳ مبحث: ترکیبی فصل ۳ (۱۰) و ۱ (۱۲) درجه دشواری: متوسط طراح: محمدرضا زهرهوند

درجه یونش اسید قوی HCl برابر با ۱ است و با تغییر غلظت تغییری نمی کند.

۷۹- گزینه ۲ مبحث: مقایسه خواص اسیدها درجه دشواری: متوسط طراح: سید صمد صفوی

HF اسید ضعیف و HNO₃ اسید قوی است با توجه به اینکه دو اسید pH برابر دارند مقایسه موارد ذکر شده به صورت زیر است:

- غلظت آنیون: HF = HNO₃
- مقدار H₂: HF > HNO₃
- رسانایی الکتریکی: HF = HNO₃
- تعداد کل ذرات: HF > HNO₃
- میزان تغییر pH در اثر رقیق شدن: HF < HNO₃

۸۰- گزینه ۱ مبحث: محاسبه pH اسید ضعیف درجه دشواری: دشوار طراح: سید صمد صفوی

اگر ورود CO₂ مقدار pH آب به اندازه ۱/۳ تغییر کند pH محلول ۵/۷ می شود.

$$\text{pH} = 5.7 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-5.7} = 2 \times 10^{-6}$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M} \Rightarrow 10^{-6} = \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{M} \Rightarrow M = 4 \times 10^{-6}$$

حال با توجه به غلظت محلول می توان مول و گرم CO₂ را محاسبه کرد:

$$100 \text{ L} \times \frac{4 \times 10^{-6} \text{ mol}}{1 \text{ L}} \times \frac{44 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 176 \times 10^{-4} \text{ g CO}_2$$

حال با توجه به حجم اولیه گاز CO₂ و گرم آن، چگالی این گاز را محاسبه می‌کنیم:

$$d = \frac{m}{v} = \frac{176 \times 10^{-4}}{20 \times 10^{-3}} = 0.88 \frac{g}{L}$$

۸۱- گزینه ۳ **مبحث:** محاسبه درجه یونش **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** سید صمد صفوی

فرمول اسید چرب با ۳۱ اتم هیدروژن در بخش آکیل به صورت C₁₅H₃₁COOH می‌باشد که جرم مولی آن برابر ۲۵۶ گرم بر مول است:

$$pH = 5/15 \Rightarrow [H^+] = 10^{-5/15} = 10^{-6} \times 10^{0/15} = 7 \times 10^{-6}$$

$$7 \times 10^{-6} \frac{mol}{L} \times 10^3 L = 7 \times 10^{-3} mol H^+ \rightarrow 51/2 g \times \frac{1 mol}{256 g} = 0.2 mol Acid \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{mol H^+}{mol Acid} = \frac{7 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-1}} = 0.35$$

۸۲- گزینه ۴ **مبحث:** مفاهیم اسید و باز **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** سید صمد صفوی

بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست - با ورود آمونیاک در آب مجموع غلظت یون‌ها در آب افزایش یافته و رسانایی محلول نیز زیاد می‌شود.

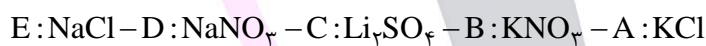
(۲) نادرست - جاذبه HF درون آب از نوع هیدروژنی و کمی یون - دو قطبی است در حالی که جاذبه گلوکز در آب فقط از نوع هیدروژنی نیست.

(۳) نادرست - با وجود اینکه SO₃ ناقطبی است ولی به دلیل واکنش در آب حل شده و H₂SO₄ ایجاد می‌کند.

(۴) درست - با حل شدن ۰/۸ گرم NaOH که معادل ۰/۰۲ مول است مقدار OH⁻ درون محلول سه برابر می‌شود که (log ۳ = ۰/۴۸) مقدار pH را در حدود ۰/۴۸ تغییر می‌دهد.

۸۳- گزینه ۴ **مبحث:** انحلال پذیری **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** حسن ایزدی

نمودارهای موجود در شکل را مطابق شکل کتاب درسی می‌توان به صورت زیر نسبت داد:



بر این اساس هر چهار عبارت داده شده درست هستند.

۸۴- گزینه ۳ **مبحث:** خواص صابون **درجه دشواری:** ساده **طراح:** حسن ایزدی

در جرم‌های برابر تعداد مول MgCl₂ بیشتر از CaCl₂ است و مقدار آنیون صابون بیشتری را رسوب می‌دهد. بنابراین ارتفاع کف در ظرف حاوی MgCl₂ کمتر از CaCl₂ است.

۸۵- گزینه ۳ **مبحث:** رسوب‌ها **درجه دشواری:** ساده **طراح:** حسن ایزدی

ویژگی بیان شده یک ترکیب محلول در آب را توصیف می‌کند. ترکیب‌های Ba(OH)₂, FeCl₃, AgNO₃, CH₃COONa در آب محلول هستند.

۸۶- گزینه ۱

مبحث: مقایسه خواص اسیدها

درجه دشواری: دشوار

طراح: حسن ایزدی

با توجه به قدرت اسیدی: $\text{HCN} < \text{CH}_3\text{COOH} < \text{HBr}$ و اینکه pH و غلظت H^+ در هر سه محلول برابر است می توان مقایسه های زیر را نوشت:

غلظت اسید اولیه: $B > C > A$

رسانایی الکتریکی: $A = B = C$

مقدار منیزیم مصرفی: $B > C > A$

تعداد مول مولکول اسید تعادلی: $B > C > A$

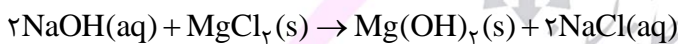
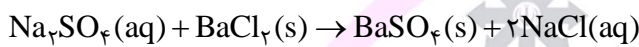
۸۷- گزینه ۳

مبحث: استوکیومتری محلول

درجه دشواری: دشوار

طراح: حسن ایزدی

واکنش های انجام شده به صورت زیر است:



در محلول اول، ابتدا ۰/۰۲ مول Na_2SO_4 (۰/۰۴ مول Na^+) وجود دارد در نتیجه در پایان فرایند ۰/۰۴ مول NaCl (۰/۰۸ مول یون) موجود است.

$$\text{غلظت مولی NaOH در محلول دوم} = \frac{10 \times x \times d}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 0.2 \times 1/2}{40} = 0.25$$

بنابراین تا پایان غلظت یون Na^+ در محلول دوم ۰/۰۶ مولار است. پس:

$$\frac{0.08}{0.06} = \frac{4}{3} = \text{نسبت}$$

۸۸- گزینه ۳

مبحث: مسائل اسید و باز

درجه دشواری: متوسط

طراح: حسن ایزدی



اکنون غلظت مولی اسید HA را حساب می کنیم:

$$\frac{1 \text{ g CaCO}_3}{100 \times 1} = \frac{x \text{ mol.L}^{-1} \text{ HA} \times 0.1 \text{ L}}{2} \Rightarrow x = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/4} = 10^{-3+0.6} = 4 \times 10^{-3}$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} = \frac{(4 \times 10^{-3})^2}{0.2 - (4 \times 10^{-3})} \approx \frac{16 \times 10^{-6}}{0.2} = 8 \times 10^{-5}$$

۸۹- گزینه ۴

مبحث: اسید و باز (آرنیوس)

درجه دشواری: ساده

طراح: سید صمد صفوی

آرنیوس واکنش های اسید و بازی که در آب واکنش می دهند را می تواند توجیه و بررسی کند.

اسید یا باز می تواند pH آب را بیشتر تغییر دهد که مقدار H^+ یا OH^- بیشتری در لیتر آب وارد کند؛ مقدار H^+ و OH^- که مواد موجود در گزینه ها تولید می کنند به صورت زیر است:

