



آزمون شماره ۱
۲۴ مرداد ۱۴۰۴
پایه دوازدهم
رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۱ از ۲

مدت پاسخگویی: ۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت زمان پاسخگویی	طراحان (به ترتیب الفبا)
حسابان	۱۳	۱	۱۳	۲۳ دقیقه	علیرضا رفیعی حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده
هندسه	۹	۱۴	۲۲	۱۷ دقیقه	علیرضا فعلی نصیر کریمی صبا مهدوی
گسسته و آمار	۸	۲۳	۳۰	۱۵ دقیقه	احسان ایزدپناه محمد پیشنهاد علیرضا شریف خطیبی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



@Helli1_12



۱- اگر $f(x) = x + [x]$ باشد، نمودار تابع $y = |f(x)|$ در چند نقطه خط $y = \frac{2}{3}$ را قطع می‌کند؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲- اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $(2a - 3)x^2 + (3b - 1)x + 3 > 0$ بازه $(c, 2)$ باشد، با فرض $a \in \mathbb{N}$ ، حاصل $b + c$ چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۳- توابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & |2x + 1| > 1 \\ 2x + 1 & |2x + 1| \leq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ مفروض‌اند. حاصل ضرب جواب‌های معادله $(f \circ g)(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۴

۴- اگر f یک تابع خطی غیرثابت، g تابعی ثابت و $4 - 5x = g(4x) + 3f(1 - x)$ باشد، مقدار $(f + \frac{1}{3}g)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{14}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۵- معادله $\frac{a}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{3}{x^2 + x}$ جواب ندارد. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۰ (۴) ۱

۶- توابع f و g به صورت $f = \{(2, -2), (3, -1), (4, 5), (6, 2), (8, -4)\}$ و $g = \{(4, 7), (9, 6), (-2, 8), (11, 8), (5, 3)\}$ تعریف شده‌اند.

اگر $f(g(b)) = c$ و $g(f(c)) = a$ حاصل $a - bc$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۱۰ (۳) -۱۲ (۴) -۱۵

۷- اگر دامنه و برد تابع $f(x) = \sqrt{6mx - mx^2}$ به ازای $m > 0$ با هم برابر باشند، مقدار $\left[\frac{f(m)}{m}\right]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۵

۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{16\alpha + \beta^9}{\beta^4}$ کدام است؟

- (۱) ۱۹۹۵ (۲) ۱۹۸۵ (۳) ۱۹۷۵ (۴) ۱۹۶۵

۹- تابع $f(x) = 3 - 2x$ با دامنه $[-2, 3]$ مفروض است. برد تابع $g(x) = (f \circ f)(2x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۰- اگر تابع $f(x) = (ax - 2)(2x + b) + 4x^2$ خطی و تابع $g(x) = af(x) + c$ همانی باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۷

۱۱- اگر α یکی از جواب‌های معادله $\sqrt{2x + 12} - \sqrt{x + 1} = 3$ باشد، مقدار $\alpha - \frac{32}{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) -۳۲ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

۱۲- اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{9}{x} - \frac{1}{x+2} < -8$ به صورت $(a, b) - \{c\}$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۱۳- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع درجه دوم $f(x) = (2m + 1)x^2 - 6x + m - 1$ دارای دو ریشه است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴- اگر $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ باشد، حاصل $3A^5 + A^2 - A - I$ کدام است؟

(۱) I (۲) $2A$ (۳) $A + I$ (۴) $A - I$

۱۵- ماتریس های $A = [i+2j]_{3 \times 3}$ و $B = [2i-j]_{3 \times 3}$ مفروض اند. مجموع درایه های سطر اول ماتریس $A^2 - AB$ کدام است؟

(۱) ۶۸ (۲) ۸۶ (۳) ۱۶۸ (۴) ۱۸۶

۱۶- اگر $A^2 = -I$ باشد، A^{43} کدام است؟

(۱) A (۲) $-I$ (۳) $-A$ (۴) I

۱۷- چند ماتریس به شکل $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix}$ وجود دارد به طوری که $A^2 = A$ باشد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۱۸- چند ماتریس مربعی وارون پذیر از مرتبه ۲ وجود دارد که درایه های آنها فقط صفر و یک باشند؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۶

۱۹- اگر A و B ماتریس های مربعی باشند و $AB = 2I$ ، آن گاه حاصل $(2AB - BA)^2$ کدام است؟

(۱) $AB + BA$ (۲) $AB - BA$ (۳) $BA + 3I$ (۴) $AB + I$

۲۰- اگر ماتریس های مربعی و هم مرتبه A و B در تساوی $(AB)^{100} = (AB) + I$ صدق کند، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) $|AB| = \pm 1$ (۲) $|AB| = 0$ (۳) $|AB| > 0$ (۴) $|AB| \neq 0$

۲۱- A و B دو ماتریس مربعی می باشند. اگر $A^2 B = BA$ و $(AB)^{10} = A^k B^{10}$ باشد، آن گاه k کدام است؟

(۱) ۱۰۲۰ (۲) ۱۰۱۹ (۳) ۱۰۲۳ (۴) ۱۰۲۵

۲۲- اگر $(2A + 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A(2A + 3I)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۱۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

۲۳- اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، ارزش گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p)$ چگونه است؟

- (۱) همواره درست است. (۲) معادل ارزش گزاره‌ی p است.

- (۳) معادل ارزش گزاره‌ی $p \vee q$ است. (۴) معادل ارزش گزاره‌ی q است.

۲۴- اگر گزاره‌های $q \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow \sim q$ به ترتیب درست و نادرست باشند، آنگاه ارزش گزاره‌های $(r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow (\sim r \Rightarrow p)$ و

$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Leftrightarrow q)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) درست- درست (۲) درست- نادرست (۳) نادرست- درست (۴) نادرست- نادرست

۲۵- اگر A ، B و C سه مجموعه‌ی غیرتهی و $(A \cap B)' \cap (A \cup B)' \cap C = C$ باشد، کدام رابطه‌ی زیر لزوماً درست است؟

- (۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $B \cap C' = \emptyset$ (۳) $A \cap C = \emptyset$ (۴) $A \cap C' = \emptyset$

۲۶- اگر تعداد اعضای مجموعه‌های A ، B و C به ترتیب ۶، ۸ و ۱۱ و $A \subseteq B \subseteq C$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $(C - A) \cup (C - B)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۷- اگر $A = \{-۸, ۴b + ۳, b^2\}$ ، $B = \{۴, -۵, ۳a + ۱\}$ ، $C = [۲a, b + ۳]$ و $A \times B = B \times A$ باشد، آنگاه مساحت نمودار مجموعه‌ی C^2 کدام

است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۶ (۳) ۴۹ (۴) ۶۴

۲۸- جاهای خالی جملات زیر با کدام گزینه به درستی تکمیل می شود؟

«برای حکم اگر A ، B و C سه مجموعه باشند به طوری که $A \cup B = A \cup C$ ، آنگاه $B = C$ ، از استفاده می کنیم.

(۱) اثبات- روش بازگشتی

(۲) اثبات- در نظر گرفتن تمام حالتها

(۳) رد کردن- مثال نقض $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ و $C = \{3, 4, 5\}$

(۴) رد کردن- مثال نقض $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3\}$ و $C = \{1, 3\}$

۲۹- برای اثبات نامساوی $4x^2 + y^2 \geq 2(xy - y - 2x - 2)$ به صورت بازگشتی، به کدام رابطه ی بدیهی می رسیم؟ $(x, y \in \mathbb{R})$

(۱) $(2x - y)^2 + (2x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$

(۲) $(2x + y)^2 + (2x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$

(۳) $(2x - y)^2 + (2x + 2)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$

(۴) $(2x + y)^2 + (2x + 2)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$

۳۰- اگر A ، B و C سه مجموعه ی غیر تهی باشند، آنگاه کدام دسته از گزاره های زیر هم ارز هستند؟

(۱) $A - B = A - C$ و $B = C$

(۲) $A \cap B \subseteq C$ و $A' \cup B' \cup C' = C'$

(۳) $B - A = C - A$ و $B = C$

(۴) $A \cup B \subseteq C$ و $A' \cap B' \cap C' = C'$

محاسبات



آزمون شماره ۱

۲۴ مرداد ۱۴۰۴

پایه دوازدهم

رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۲ از ۲

مدت پاسخگویی: ۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۰

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت زمان پاسخگویی	طراحان (به ترتیب الفبا)
فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۲۸ دقیقه	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری ابوالفضل علیدوست
شیمی	۲۰	۵۱	۷۰	۲۲ دقیقه	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمدرضا زهره‌وند صمد صفوی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.



@Helli1_12

۳۱ - کدام یک از گزینه‌های زیر واحد ضریب خودالقاوری را درست نشان می‌دهد؟

$$\frac{\text{kg.m}}{\text{C}} \quad (۴)$$

$$\frac{\text{kg.m}^2}{\text{A}^2} \quad (۳)$$

$$\frac{\text{kg.m}^2}{\text{C}^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\text{kg.m}}{\text{A}} \quad (۱)$$

۳۲ - در کدام گزینه تمامی کمیت‌ها فرعی و نرده‌ای هستند؟

- (۱) جریان الکتریکی، چگالی، حجم
(۲) کار، فشار، شار مغناطیسی
(۳) میدان مغناطیسی، دما، جرم
(۴) توان، اختلاف پتانسیل، مقدار ماده

۳۳ - مکعبی به طول ضلع ۲۰ cm از ماده‌ای با چگالی $4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ساخته شده است. اگر جرم مکعب kg ۳۰ باشد، حجم حفره خالی داخل آن چند سانتی‌متر مکعب است؟

$$۲۰۰ \quad (۴)$$

$$۱۰۰۰ \quad (۳)$$

$$۵۰۰ \quad (۲)$$

$$۸۰۰ \quad (۱)$$

۳۴ - اگر دو مایع A و B با جرم‌های برابر مخلوط شوند، چگالی مخلوط به دست آمده برابر با $\frac{16}{3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ می‌شود. در مخلوطی دیگر از $\frac{1}{3}$ جرم اولیه A و

$\frac{2}{3}$ جرم اولیه B، چگالی مخلوط $4/8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ خواهد بود. چگالی مایعات A و B به ترتیب از راست به چپ چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟

$$۴، ۸ \quad (۴)$$

$$۴، ۹ \quad (۳)$$

$$۶، ۹ \quad (۲)$$

$$۶، ۸ \quad (۱)$$

۳۵ - یک استوانه فلزی با سطح مقطع A و ارتفاع h روی سطح افقی قرار دارد و فشار وارد بر سطح از طرف آن برابر P است. این استوانه را ذوب کرده و با مذاب آن مخروطی می‌سازیم که فشار ناشی از این مخروط بر سطح افقی برابر ۲P می‌شود. ارتفاع مخروط چند برابر h است؟

$$۸ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

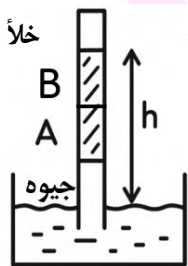
۳۶ - فشار کل در عمق ۱۰ متری آب یک دریاچه $\frac{9}{5}$ برابر فشار کل در عمق ۲ متری آن است. اگر چگالی آب $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ باشد، فشار هوا در این محیط برابر با چند کیلوپاسکال است؟

$$۷۵ \quad (۴)$$

$$۹۰ \quad (۳)$$

$$۱۰۰ \quad (۲)$$

$$۸۰ \quad (۱)$$



۳۷ - در لوله آزمایش اندازه‌گیری فشار هوا مطابق شکل، جیوه و دو مایع A و B به ارتفاع‌های برابر قرار گرفته‌اند. اگر فشار هوا در

محل آزمایش cmHg ۶۳ باشد، ارتفاع h چند سانتی‌متر است؟ (چگالی جیوه و مایع‌های A و B به ترتیب $13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ، $6/8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ، $3/4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ است.)

$$۱۲۳ \quad (۴)$$

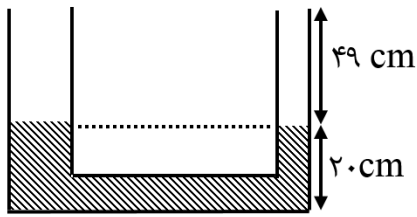
$$۱۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۱۱ \quad (۲)$$

$$۱۰۸ \quad (۱)$$

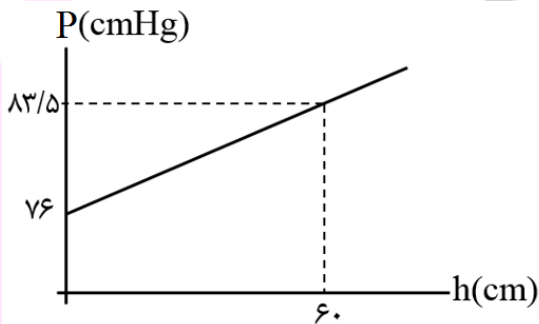
محاسبات

۳۸ - در لوله U شکل زیر، سطح مقطع قسمت باریک 10 cm^2 و سطح مقطع قسمت ضخیم 30 cm^2 است. اگر تا ارتفاع 20 cm در لوله‌ها جیوه وجود داشته باشد، در لوله سمت راست حداکثر چند گرم آب می‌توان ریخت تا لبریز شود؟ (چگالی آب و جیوه به ترتیب $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $13 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ است.)



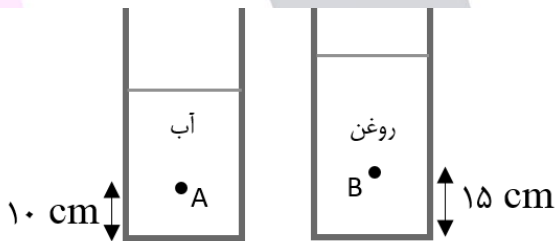
- (۱) ۵۲۰
- (۲) ۵۵۰
- (۳) ۵۰۰
- (۴) ۵۳۰

۳۹ - اگر از سطح آزاد مایع به سمت عمق آن حرکت کنیم، فشار به صورت نمودار زیر تغییر می‌کند. چگالی مایع و فشار در عمق 40 cm کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و چگالی جیوه $13.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ است.)



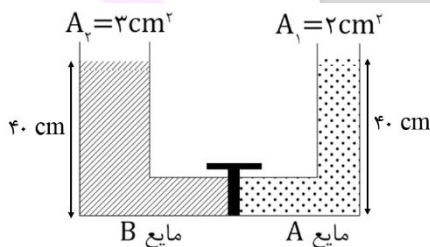
- (۱) $P = 78.5 \text{ cmHg}$ و $\rho = 1.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- (۲) $P = 81 \text{ cmHg}$ و $\rho = 1.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- (۳) $P = 78.5 \text{ cmHg}$ و $\rho = 3.4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- (۴) $P = 81 \text{ cmHg}$ و $\rho = 3.4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

۴۰ - در شکل مقابل دو ظرف مشابه‌اند. در ظرف (۱)، آب و در ظرف (۲)، روغن ریخته‌ایم و جرم آب و روغن درون ظرف‌ها برابر است. اگر فشار ناشی از مایع در نقطه B برابر 4500 Pa باشد، فشار ناشی از مایع در نقطه A چند پاسکال است؟ (چگالی آب و روغن به ترتیب $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است.)



- (۱) ۴۱۰۰
- (۲) ۴۳۰۰
- (۳) ۴۷۰۰
- (۴) ۴۹۰۰

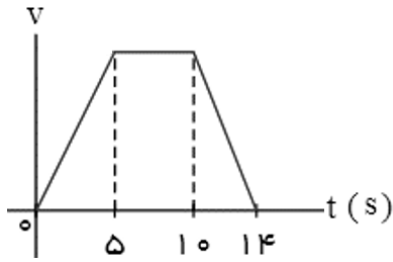
۴۱ - در لوله U شکل زیر، جرم مایع B، ۲۰ درصد از جرم مایع A بیشتر است و ارتفاع مایعات در دو طرف ابتدا 40 cm است. اگر شیر رابط را باز کنیم، سطح آزاد مایع A در شاخه سمت راست چند سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود؟ (حجم لوله رابط ناچیز است.)



- (۱) ۴/۸
- (۲) ۷/۲
- (۳) ۳/۲
- (۴) صفر

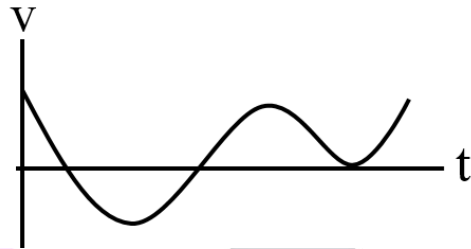
محاسبات

۴۲ - متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می کند و نمودار سرعت - زمان آن مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در کدام بازه زمانی زیر از بقیه بزرگتر است؟



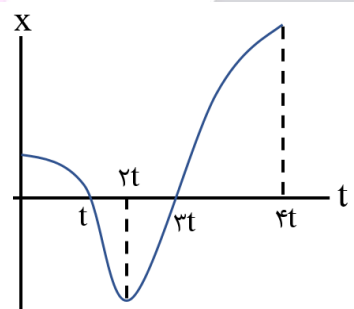
- (۱) صفر تا ۵
- (۲) صفر تا ۱۰
- (۳) ۵ تا ۱۴
- (۴) صفر تا ۱۴

۴۳ - نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. این متحرک به ترتیب چند بار تغییر جهت حرکت و چند بار تغییر نوع حرکت (از تند شونده به کند شونده و بالعکس) داشته است؟



- (۱) ۳، ۳
- (۲) ۳، ۲
- (۳) ۵، ۳
- (۴) ۵، ۲

۴۴ - شکل زیر نمودار مکان - زمان متحرکی را نشان می دهد که روی محور X حرکت می کند. در کدام بازه زمانی، متحرک تندی متوسط بیشتری دارد؟

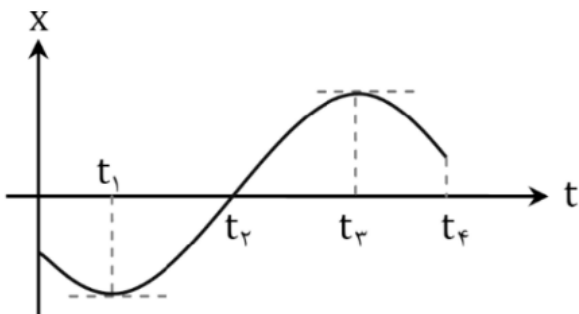


- (۱) ۰ تا t
- (۲) ۲t تا t
- (۳) ۲t تا ۴t
- (۴) t تا ۴t

۴۵ - معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = 2t^3 - 7$ است. شتاب متوسط آن در سه ثانیه دوم حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

- (۱) ۱۰۱/۳
- (۲) ۱۸
- (۳) ۱۲۶
- (۴) ۸۴

۴۶ - نمودار مکان - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، در شکل زیر دیده می شود. در کدام بازه زمانی علامت سرعت متوسط و علامت شتاب متوسط یکسان است؟



- (۱) صفر تا t_1
- (۲) t_3 تا t_2
- (۳) صفر تا t_3
- (۴) t_4 تا t_1

محاسبات

۴۷- راننده خودرویی که در جاده مستقیم در حرکت است، پای خود را روی پدال گاز می‌فشارد و عقربه تندی شمار خودرو در مدت ۲۰ ثانیه از عدد $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به

عدد $78 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ می‌رسد. بزرگی شتاب متوسط خودرو در این مدت چند یکای SI است؟

۹ (۴)

۲/۵ (۳)

۰/۹ (۲)

۰/۲۵ (۱)

۴۸- معادله مکان - زمان متحرکی به صورت $x = \frac{t+1}{t+2}$ در SI داده شده است. بزرگی سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی صفر تا ۱۰S چند متر بر

ثانیه است؟

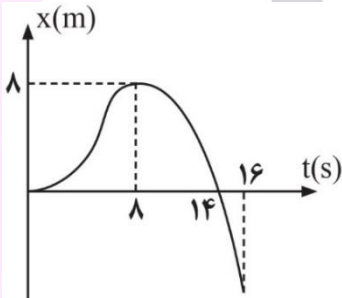
$\frac{5}{24}$ (۴)

$\frac{1}{24}$ (۳)

$\frac{1}{12}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

۴۹- نمودار مکان - زمان متحرکی که در $t = 0$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. بزرگی شتاب متوسط این متحرک در بازه زمانی ۸S تا ۱۶S چند برابر بازه زمانی صفر تا ۱۶S است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

(۴) بستگی به سرعت در لحظه $t = 16S$ دارد.

۵۰- معادله مکان - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 3t^2 - 24t + 36$ است. این متحرک از لحظه‌ای که در بیشترین فاصله از مبدأ در قسمت منفی محور X است تا زمانی که برای دومین بار بردار مکان آن تغییر جهت دهد، چه مسافتی را بر حسب متر می‌پیماید؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۲۴ (۲)

۸ (۱)

۵۱- چه تعداد از موارد زیر در مورد دو یون A: یون کربنات و B: یون آمونیوم درست است؟

(آ) نسبت شمار آنیون به کاتیون در آمونیوم سیانید با روی کربنات برابر است.

(ب) از انحلال هر واحد نمک حاصل از ترکیب این دو یون در آب، سه یون تولید می‌شود.

(پ) نسبت تعداد کاتیون به آنیون در هر واحد از نمک حاصل از این دو یون، برابر با همین نسبت در هر واحد نمک NaHCO_3 است.

(ت) از واکنش نمک $\text{CaA}_{(aq)}$ و $\text{B}_3\text{PO}_4(aq)$ ، رسوب سفید رنگ تولید می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

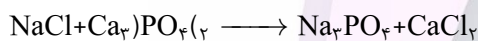
۵۲- چربی مخلوطی از اسید چرب و استر با جرم مولی زیاد است. اگر یک لکه چربی شامل ۸۰ مول مولکول، به نسبت یک به یک از این دو نوع مولکول باشد، از

واکنش این لکه چربی با سود کافی، به تقریب چه تعداد مولکول صابون تولید می‌شود؟

۱۲٫۰۴ × ۱۰^{۲۴} (۴)۶٫۰۲ × ۱۰^{۲۴} (۳)۴٫۸ × ۱۰^{۲۵} (۲)۹٫۶ × ۱۰^{۲۵} (۱)

۵۳- اگر ۶۰۰ میلی لیتر محلول کلسیم کلرید در واکنش کامل با ۹۰۰ ml محلول Na_3PO_4 ، ۰/۳۶ مول سدیم کلرید تشکیل دهد، مجموع غلظت مولی یون‌ها پس

از پایان واکنش کدام است؟ (واکنش موازنه نشده است)



۱٫۶۸ (۴)

۰٫۴۸ (۳)

۰٫۲۴ (۲)

۰٫۱۲ (۱)

۵۴- کدام موارد زیر درست است؟

(آ) مولکول‌های موجود در گلاب، دارای زنجیرهای کربنی بلند هستند.

(ب) از NaCl برای تولید فلز سدیم و گاز هیدروژن استفاده می‌شود.

(پ) در استخراج منیزیم از آب دریا، در پایان فرآیند با استفاده از جریان برق، دو عنصر، یکی به حالت گاز و دیگری به حالت مایع به دست می‌آید.

(ت) در هر کیلو سرکه خوراکی، ۵ گرم استیک اسید وجود دارد.

پ و ت (۴)

ب و پ (۳)

آ و ت (۲)

آ و ب (۱)

محاسبات

۵۵- کدام عبارت از نظر درستی و یا نادرستی با عبارتهای دیگر متفاوت است؟

- (۱) هوای آلوده شهرها، سرکه و ضدیخ همگن بوده و محلول محسوب می‌شوند.
- (۲) سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون از سنگ‌کره وارد آب‌کره شده و سبب افزایش تدریجی جرم کل مواد حل‌شده در آن می‌شود.
- (۳) در یون چنداتی SO_4^{2-} به علت خصلت نافلزی بیشتر اکسیژن، بار الکتریکی -۲ متعلق به اتم‌های این عنصر است.
- (۴) تفاوت آب آشامیدنی و دیگر آب‌ها، در نوع و مقدار حل‌شونده آن‌هاست.

۵۶- در میان ترکیب‌های زیر، ترکیب نسبت شمار آنیون به کاتیون بیشتر از یک و ترکیب نامحلول در آب هستند.

الف) نقره کلرید (ب) منیزیم سولفات (پ) کلسیم کلرید (ت) آهن (III) هیدروکسید (ث) کلسیم استات (ج) باریم سولفات

- (۱) ۳، ۲ (۲) ۲، ۳ (۳) ۲، ۲ (۴) ۳، ۳

۵۷- انحلال‌پذیری نمک KNO_3 در آب در دمای 60°C و 10°C به ترتیب ۴۴۰ گرم و ۲۱۰ گرم است. اگر ۱۰۸ گرم از محلول سیرشده KNO_3 را از دمای 60°C تا 10°C سرد کنیم، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود؟

- (۱) ۴۶ (۲) ۵۶٫۴ (۳) ۲۴٫۸ (۴) ۴۲

۵۸- اگر معادله انحلال‌پذیری نمک A از رابطه $S = 0.8\theta + 80$ پیروی کند، برای تهیه دو لیتر محلول سیرشده آن در دمای 25°C با چگالی d گرم بر میلی‌لیتر به ۱۲۰۰ گرم از آن نیاز داریم. d کدام است؟

- (۱) ۲٫۴ (۲) ۱٫۲ (۳) ۰٫۶ (۴) ۳

۵۹- اختلاف جرم مولی پاک‌کننده صابونی مایع با ۱۶ اتم کربن بدون یون فلزی و دارای زنجیر آلکیل سیرشده، با پاک‌کننده غیرصابونی با ۱۶ اتم کربن و زنجیر هیدروکربنی سیرشده کدام است؟ ($\text{Na} = 23, \text{K} = 39, \text{N} = 14, \text{O} = 16, \text{H} = 1, \text{S} = 32 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۹ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

محاسبات

۶۰- در میان موارد زیر کدام عبارت‌ها درست هستند؟

(الف) در ساختار اوره یک گروه عاملی آمیدی و گروه آمینی وجود دارد.

(ب) اسید چرب سازنده روغن زیتون $C_{18}H_{34}O_2$ است.

(پ) درصد جرمی کربن در وازلین بیشتر از این مقدار در بنزین است.

(ت) اتیلن گلیکول برخلاف استون قطبی است و با آب پیوند هیدروژنی دارد.

(۱) الف و پ (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) ب و ت

۶۱- کدام عبارت با توجه به مفهوم غلظت در محلول‌ها درست بیان شده است؟ ($H=1, Na=23, O=16, C=12 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۱) اگر ۲ لیتر محلول سدیم کلرید در دمای اتاق را $10^\circ C$ افزایش دما دهیم، درصد جرمی محلول تغییر می‌کند.

(۲) اگر دستگاه گلوکومتر عدد ۹۰ را نشان دهد، غلظت گلوکز در خون ۹۰ ppm است.

(۳) اگر x گرم اتیلن گلیکول و x گرم اتانول را مخلوط کنیم، اتانول نقش حلال را خواهد داشت.

(۴) برای تهیه محلول ۰/۵ مولار سدیم هیدروکسید، مقدار ۲۰ گرم از آن را در یک لیتر آب حل می‌کنیم.

۶۲- مقدار ۵۰۰ گرم محلول سدیم فسفات با درصد جرمی ۳۲/۸ درصد را با مقدار کافی کلسیم کلرید وارد واکنش می‌کنیم و مقدار یک و نیم لیتر آب به مخلوط

اضافه می‌کنیم. غلظت یون سدیم در محلول نهایی چند مول بر لیتر است؟ (از تغییر حجم صرف نظر کنید. چگالی محلول اولیه را 1 g.mL^{-1} در نظر بگیرید.)

($O=16, P=31, Na=23 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۱) ۰/۵ (۲) ۱ (۳) ۱/۵ (۴) ۲

۶۳- کدام عبارت‌ها نادرست بیان شده‌اند؟

(آ) درشت مولکول‌ها در هوا کره نقش اساسی ایفا می‌کنند.

(ب) جانداران سالانه مقدار بسیار زیادی از ترکیب‌های کربن دار وارد کره زمین می‌کنند.

(پ) نمک‌های دوتایی سدیم کلرید و کلسیم کلرید به مقدار زیاد در آب دریا وجود دارند.

(ت) در فرآیند تشکیل برف و باران، همه مواد حل شده در آب از آن جدا می‌شود.

(۱) آ- ب (۲) ب- پ (۳) پ- ت (۴) آ- ت

محاسبات

۶۴- یک استر سنگین سه عاملی با ۵۴ کربن و یک پیوند دوگانه $C=C$ در هر زنجیره آلکیل را با پتاسیم هیدروکسید به صابون تبدیل می‌کنیم؛ سپس صابون حاصل را با یون Ca^{2+} رسوب می‌دهیم. جرم مولی رسوب حاصل کدام است؟ ($C-12, O-16, H-1 \text{ g.mol}^{-1}$)

- (۱) ۵۷۴ (۲) ۶۰۶ (۳) ۵۸۰ (۴) ۶۰۲

۶۵- اگر بخش آبدوست یک شوینده غیرصابونی را با بخش آبدوست یک شوینده صابونی جایگزین کنیم، کدام نتیجه گیری درست بیان شده است؟

- (۱) جرم مولی شوینده افزایش می‌یابد.
 (۲) میزان کف کردن شوینده جدید در آب حاوی Mg^{2+} افزایش می‌یابد.
 (۳) قدرت پاک‌کنندگی شوینده جدید افزایش می‌یابد.
 (۴) تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی کاهش می‌یابد.

۶۶- کدام عبارت نادرست است؟

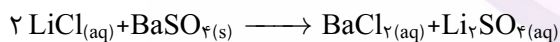
- (۱) فراوان‌ترین یون چند اتمی در آب دریاها در آب آشامیدنی و شیرین وجود ندارد.
 (۲) مقدار نمک‌های کلسیم‌دار در ادرار افراد سالم، کمتر از انحلال پذیری این نمک‌هاست.
 (۳) مخلوط آب و روغن و صابون، ناهمگن و حاوی توده‌های مولکولی با اندازه یکسان است.
 (۴) انحلال پذیری هر دو ترکیب منیزیم هیدروکسید و کلسیم سولفات در دمای اتاق، کمتر از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.

۶۷- شمار اتم‌های نیتروژن در ۱۶ گرم آمونیوم نیترات با شمار آنیون‌ها در چند گرم محلول ۲۰ درصد جرمی کلسیم برمید برابر است؟

$$\left(\frac{\text{g}}{\text{mol}} : H = 1, N = 14, O = 16, Ca = 40, Br = 80 \right)$$

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۴۰۰

۶۸- انحلال پذیری نمک لیتیم سولفات در دمای $40^\circ C$ برابر ۳۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. چند گرم محلول سیرشده این نمک در همین دما برای واکنش کامل با ۲۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۳ مولار باریم کلرید لازم است؟ ($Li = 7, O = 16, S = 32 : \text{g.mol}^{-1}$)



- (۱) ۲۲/۴ (۲) ۲۸/۶ (۳) ۳۲/۶ (۴) ۳۸/۴

۶۹- انحلال پذیری دو نمک I و II در دمای 20°C ، یکسان و برابر $40 \frac{\text{g}}{100\text{g H}_2\text{O}}$ است. در صورتی که انحلال پذیری نمک I در دمای 35°C ، 10 گرم بیشتر از نمک II باشد، کدام مطلب به یقین درست است؟ (علامت شیب دو خط متفاوت است)

(۱) انحلال نمک II در آب، فرآیندی گرماگیر است.

(۲) در جرم‌های برابر از آب، محلول سیر شده نمک II جرم بیشتری از محلول سیر شده I دارد.

(۳) انحلال پذیری نمک I از انحلال پذیری نمک II بیشتر است.

(۴) محلول سیر شده‌ای از نمک I با افزایش دما به محلول سیر نشده تبدیل می‌شود.

۷۰- ترکیب A یک صابون جامد با زنجیر هیدروکربن سیر شده و ترکیب B یک پاک کننده غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیر شده است. اگر شمار اتم‌های کربن در هر دو ترکیب برابر باشد، اختلاف جرم مولی A و B کدام است؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16, \text{S} = 32 : \text{g.mol}^{-1}$)

۴۲ (۴)

۴۱ (۳)

۴۰ (۲)

۳۹ (۱)

محاسبات



آزمون شماره ۱

۲۴ مرداد ۱۴۰۴

پایه دوازدهم

رشته ریاضی فیزیک

پاسخ تشریحی آزمون

صاحب امتیاز: دبیرستان علامه حلی (۱) تهران

مدیر گروه: پوریا دیار کجوری

ناظر محتوایی: نیما مهندس

نام درس	حسابان	هندسه	گسسته	فیزیک	شیمی
طراحان (به ترتیب حروف الفبا)	علیرضا رفیعی حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده	علیرضا فعلی نصیر کریمی صبا مهدوی	احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی	محمد جواد حیدری پوریا دیار کجوری ابوالفضل علی دوست	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمد رضا زهرهوند صمد صفوی
ویراستاران	علیرضا فرهی متین غیائی مهدی خراسانی	امیر حسین ملازینل محمد پارسا ترکمان امیر حسین قرقانی	محمد پارسا ترکمان مهدی خراسانی علیرضا رفتاری	محمد امین بلوردی محمد امین افشاری رادین حیدر امیر حسین قرقانی	محسن ابراهیمی امیر رضا جدیدی علیرضا رفتاری

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

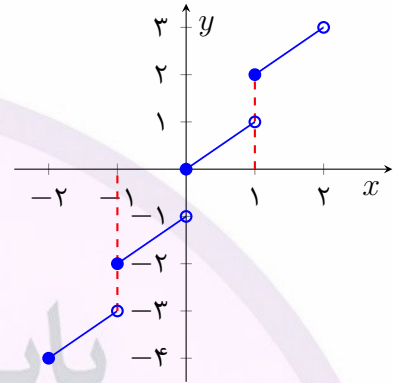


@Helli1_12

گزینه ۲ - ۱- مبحث: قدر مطلق و جزء صحیح (فصل ۱ یازدهم) درجه دشواری: متوسط طراح: علیرضا ندافزاده

سوال از ما عملیات تعداد جوابهای معادله $|x + [x]| = \frac{3}{2}$ را می‌خواهد و چون مقدار دقیق ریشه‌ها مهم نیست، از روش هندسی کمک می‌گیریم. ابتدا نمودار $y = x + [x]$ را رسم می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} x - 2 & -2 \leq x < -1 \\ x - 1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



حال می‌نویسیم:

$$|x + [x]| = \frac{3}{2} \implies \begin{cases} x + [x] = \frac{3}{2} \\ x + [x] = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

از روی نمودار مشخص است که فقط خط $y = -\frac{3}{2}$ تابع $y = x + [x]$ را در یک نقطه قطع می‌کند.

گزینه ۴ - ۲- مبحث: نامعادله و تعیین علامت (فصل ۴ دهم) درجه دشواری: سخت طراح: علیرضا ندافزاده

چون a عددی طبیعی است، $a \neq \frac{3}{2}$ است. پس عبارت $p(x) = (2a - 3)x^2 + (3b - 1)x + 3$ حتماً یک چندجمله‌ای درجه دو خواهد بود که با توجه به بازه جواب به این صورت تعیین علامت می‌شود:

x	c	۲	
$p(x)$	-	+	-

$2a - 3 < 0$ است، چون می‌دانیم مقدار یک عبارت درجه دو خارج دو ریشه هم علامت با ضریب x^2 است. بنابراین:

$$2a - 3 < 0 \implies a < \frac{3}{2} \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1$$

$$p(x) = -x^2 + (3b - 1)x + 3$$

از طرفی اعداد ۲ و c باید ریشه‌های $p(x)$ باشند. پس:

$$p(2) = 0 \implies -4 + (3b - 1)(2) + 3 = 0 \implies b = \frac{1}{2}$$

$$p(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \xrightarrow{(مجموع ریشه‌ها) S = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}} c + 2 = \frac{1}{2} \implies c = -\frac{3}{2}$$

$$\implies b + c = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

ابتدا حدود هر ضابطه را به طور دقیق مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} |2x+1| > 1 \implies \begin{cases} 2x+1 > 1 \implies x > 0 \\ 2x+1 < -1 \implies x < -1 \end{cases} \\ |2x+1| \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

پس ضابطه f به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x > 0 \text{ یا } x < -1 \\ 2x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

حال صفرهای تابع f با دامنه \mathbb{R} را بدست می‌آوریم:

$$f(x) = 0 \implies \begin{cases} x^2 - x = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 0 \text{ غ ق} \\ x_2 = 1 \text{ قابل قبول} \end{cases} \\ 2x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

حال هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

(الف) $f(1) = 0$:

$$(f \circ g)(x) = 0 \implies f(g(x)) = 0 \implies g(x) = 1 \xrightarrow{x \in D_g} \frac{x^2 - 1}{x} = 1 \implies x^2 - 1 = x \implies x^2 - x - 1 = 0$$

که $\Delta > 0$ است و $x = 0$ نیز جواب نیست؛ پس هر دو ریشه قابل قبول اند.

$$\xrightarrow{P=\frac{c}{a}} x_1 \cdot x_2 = -1$$

(ب) $f(-\frac{1}{2}) = 0$:

$$(f \circ g)(x) = 0 \implies f(g(x)) = 0 \implies g(x) = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \in D_g} \frac{x^2 - 1}{x} = -\frac{1}{2} \implies 2x^2 - 2 = -x \implies 2x^2 + x - 2 = 0$$

که $\Delta > 0$ است و $x = 0$ نیز جواب نیست؛ پس هر دو ریشه این معادله نیز قابل قبول اند.

$$\implies x_3 \cdot x_4 = -1$$

معادله‌های درجه دوم بدست آمده ریشه مشترکی ندارند، پس حاصل ضرب جواب‌های $(f \circ g)(x) = 0$ برابر ۱ است.

۴- گزینه ۱ **مبحث:** تابع دهم (فصل ۵ دهم) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** علیرضا ندافزاده

چون f تابعی خطی است، ضابطه f را به صورت $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) در نظر می‌گیریم. g تابعی ثابت است، پس $g(x) = k$. حال می‌نویسیم:

$$g(4x) + 3f(1-x) = 4 - 5x$$

$$\implies k + 3(a(1-x) + b) = 4 - 5x$$

$$\implies -3ax + 3a + 3b + k = -5x + 4$$

$$\implies \begin{cases} -3a = -5 & \implies a = \frac{5}{3} \\ 3a + 3b + k = 4 & \implies 3b + k = -1 \end{cases}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\left(f + \frac{1}{3}g\right)(3) = 3a + b + \frac{k}{3} = 5 + \frac{3b+k}{3} = 5 + \frac{-1}{3} = \frac{14}{3}$$

۵- گزینه ۱ **مبحث:** معادلات گویا و گنگ (فصل ۱ یازدهم) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** حسین شفیع زاده

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{a(x+1) + 2x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x(x+1)}$$

$$\xrightarrow{x \neq 0, 1, -1} ax + a + 2x = 3(x-1) \implies (a-1)x = -3 - a$$

به ازای $a = 1$ ، معادله جواب ندارد. همچنین

$$x = \frac{-3-a}{a-1}$$

اگر $x = 1$ یا $x = -1$ یا $x = 0$ باشد نیز معادله جواب ندارد:

$$\frac{-3-a}{a-1} = 1 \implies a = -1$$

$$\frac{-3-a}{a-1} = 0 \implies a = -3$$

$$\frac{-3-a}{a-1} = -1 \implies -3 = 1 \times$$

پس به ازای $a = 1, -1, -3$ ، معادله جواب ندارد که مجموع این مقادیر برابر با -3 است.

۶- گزینه ۲ **مبحث:** تابع دهم و یازدهم (فصل ۵ دهم و فصل ۲ یازدهم) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** علیرضا رفیعی

از صورت سوال می‌توان فهمید $c \in D_f$ و $c \in R_f$ است، پس $c = 2$. حال می‌توان نوشت:

$$g(f(c)) = g(f(2)) = g(-2) = 8 \implies a = 8$$

$$f(g(b)) = 2 \implies g(b) = 6 \implies b = 9$$

در نتیجه $a - bc = 8 - 18 = -10$ است.

طراح: علیرضا رفیعی

درجه دشواری: متوسط

مبحث: تابع دهم و یازدهم (فصل ۵ دهم و فصل ۲ یازدهم)

گزینه ۷-

با توجه به فرض $m > 0$ ، دامنه تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$\overbrace{m(6x - x^2)}^{\text{عبارت زیر رادیکال}} \geq 0 \implies 0 \leq x \leq 6$$

اکنون برد تابع $y = -mx^2 + 6mx$ را تعیین می‌کنیم:

$$x_s = \frac{-6m}{-2m} = 3 \implies y_s = -9m + 18m = 9m$$

پس R_f به صورت $[0, 3\sqrt{m}]$ خواهد بود. حال برای آن که دامنه و برد یکسان باشند، داریم:

$$3\sqrt{m} = 6 \implies m = 4$$

پس مقدار $\left[\frac{f(4)}{4}\right]$ را می‌خواهیم:

$$f(4) = \sqrt{24 \times 4 - 4 \times 4^2} = \sqrt{32} \xrightarrow{\sqrt{32} = 4\sqrt{2}} \left[\frac{f(4)}{4}\right] = [4\sqrt{2}] = 1$$

طراح: علیرضا رفیعی

درجه دشواری: دشوار

مبحث: معادله درجه دوم (فصل ۱ یازدهم)

گزینه ۸-

ابتدا از معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ می‌توان فهمید $P = \alpha\beta = 2$ پس $\alpha^4\beta^4 = 16$. با جایگذاری $\alpha^4\beta^4$ به جای عدد ۱۶ در رابطه داده شده خواهیم داشت: $(\alpha, \beta \neq 0)$

$$\frac{16\alpha + \beta^9}{\beta^4} = \frac{\alpha^5\beta^4 + \beta^9}{\beta^4} = \frac{\beta^4(\alpha^5 + \beta^5)}{\beta^4} = \alpha^5 + \beta^5$$

اکنون با توجه به $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 21$ و $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP = 95$ می‌توان نوشت:

$$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - \underbrace{\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2}_{=-SP^2} = 95 \times 21 - 5 \times 4 = 1975$$

طراح: حسین شفیعی‌زاده

درجه دشواری: دشوار

مبحث: تابع یازدهم (فصل ۲ یازدهم)

گزینه ۹-

چون $f(2x) = 3 - 2(2x) = 3 - 4x$ است، خواهیم داشت:

$$g(x) = (f \circ f)(2x) = f(3 - 4x) = 3 - 2(3 - 4x) = 8x - 3$$

حال دامنه تابع g را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} -2 \leq \overbrace{2x}^{f \text{ ورودی}} < 3 \\ -2 \leq \underbrace{3 - 4x}_{f \text{ ورودی}} < 3 \end{cases} \implies \begin{cases} -1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 0 < x \leq \frac{5}{4} \end{cases} \quad \cap \quad 0 < x \leq \frac{5}{4}$$

پس $7 \leq 8x - 3 < 10$ شامل g و برد g شامل ۱۰ عدد صحیح است.

طراح: حسین شفیعزاده

درجه دشواری: ساده

مبحث: تابع دهم (فصل ۵ دهم)

گزینه ۴ -۱۰

در ضابطه f ضریب x^2 باید صفر باشد. در نتیجه:

$$f(x) = 2ax^2 - 4x + abx - 2b + 4x^2 \implies 2a = -4 \implies a = -2$$

$$\implies f(x) = -4x - 2bx - 2 = (-4 - 2b)x - 2b$$

ضابطه g باید به صورت $g(x) = x$ باشد. بنابراین:

$$g(x) = af(x) + c = -2f(x) + c = \underbrace{(8 + 4b)}_1 x + \underbrace{(4b + c)}_1$$

$$\implies b = -\frac{7}{4}, c = 7$$

طراح: حسین شفیعزاده

درجه دشواری: متوسط

مبحث: معادلات گویا و گنگ (فصل ۱ یازدهم)

گزینه ۱ -۱۱

طرفین معادله داده شده را با شروط $x \geq -1$ و $x \geq -6$ به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{2x+12} = 3 + \sqrt{x+1} \implies 2x+12 = 9+x+1+6\sqrt{x+1}$$

$$\implies 6\sqrt{x+1} = x+2 \xrightarrow[\text{مجددا به توان دو می‌رسانیم}]{\text{برای حذف رادیکال}} 36(x+1) = x^2+4x+4 \implies x^2-32x-32=0$$

چون $x=0$ ریشه معادله بدست آمده نیست، معادله را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$x - 32 - \frac{32}{x} = 0 \implies x - \frac{32}{x} = 32$$

طراح: حسین شفیعزاده

درجه دشواری: متوسط

مبحث: نامعادله و تعیین علامت (فصل ۴ دهم)

گزینه ۳ -۱۲

همه عبارت‌ها را به یک سمت نامعادله می‌بریم؛ چون تکلیف علامت مخرج‌ها مشخص نیست:

$$\frac{9x+18-x}{x(x+2)} < -8 \implies \frac{8x+18}{x(x+2)} + 8 < 0$$

$$\implies \frac{8x+18+8x^2+16x}{x(x+2)} < 0 \implies \frac{8x^2+24x+18}{x(x+2)} < 0$$

$$\implies \frac{2(2x+3)^2}{x(x+2)} < 0 \xrightarrow{x \neq -\frac{3}{2}} x(x+2) < 0$$

$$\implies -2 < x < 0$$

پس $a = -2$ ، $b = 0$ و $c = -\frac{3}{2}$ است و $\frac{a+b}{c} = \frac{4}{3}$ خواهد بود.

برای اینکه تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 36 - 4(2m + 1)(m - 1) = 4(9 - 2m^2 + m + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 & \Rightarrow 2m^2 - m - 10 < 0 \Rightarrow -2 < m < \frac{5}{2} \\ a \neq 0 & \Rightarrow m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in \{-1, 0, 1, 2\}$$



پایه
علما طهرانی
دبیرستان



۱۴- گزینه ۲ مبحث: هندسه دوازدهم (فصل ۱) درجه دشواری: ساده طراح: علیرضا فعلی

چون A یک ماتریس قطری است و درایه های قطر اصلی هم ۱ و ۱- هستند، بنابراین:

$$A^2 = I \rightarrow A^5 = A^4 \times A = (A^2)^2 \times A = I \times A = A \rightarrow 3A^5 + A^2 - A - I = 3A + I - A - I = 2A$$

۱۵- گزینه ۳ مبحث: هندسه دوازدهم (فصل ۱: اعمال روی ماتریس) درجه دشواری: ساده طراح: نصیر کریمی

نخست A و B را با درایه ها نمایش می دهیم

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

حال می توان نوشت

$$A^2 - AB = A(A - B) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 56 & 101 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{مجموع درایه های سطر اول} = 11 + 56 + 101 = 168$$

۱۶- گزینه ۳ مبحث: هندسه دوازدهم (فصل ۱: خواص ماتریس) درجه دشواری: ساده طراح: علیرضا فعلی

$$A^2 = -I \rightarrow A^4 = I \rightarrow A^{43} = A^{40} \times A^3 = (A^4)^{10} \times A^3 = I \times A^3 = A^3 = A^2 \times A = -I \times A = -A$$

۱۷- گزینه ۱ مبحث: هندسه دوازدهم (فصل ۱: اعمال روی ماتریس) درجه دشواری: متوسط طراح: نصیر کریمی

با توجه به روش محاسبه ضرب ماتریس ها داریم:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 2xy & x^2 & 0 \\ y^2 + 2xz & 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 2xy & x^2 & 0 \\ y^2 + 2 & 2xy & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2xy = 6 \\ 2xy = 8 \end{cases}$$

که نتیجه می دهد چنین x و y وجود ندارد، پس ماتریسی با ویژگی مطلوب یافت نمی شود.

۱۸- گزینه ۳ **مبحث:** هندسه دوازدهم (فصل ۱) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** نصیر کریمی

چون دترمینان ماتریس وارون پذیر باید ناصفر باشد، پس فقط می توان ماتریس های زیر را با این ویژگی ساخت :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & . \end{pmatrix} \text{ و } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & . \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A_3 = \begin{pmatrix} . & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ . & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A_5 = I \text{ و } A_6 = \begin{pmatrix} . & 1 \\ 1 & . \end{pmatrix}$$

۱۹- گزینه ۱ **مبحث:** هندسه دوازدهم (فصل ۱: خواص ماتریس) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** علیرضا فعلی

نکته: اگر A و B ، ماتریس های مربعی باشند و $AB = rI$ ($r \in \mathbb{R}$)، آنگاه $BA = rI$ ، پس $AB = BA = rI$. بنابراین:

$$(2AB - BA)^2 = (4I - 2I)^2 = 4I = AB + BA$$

۲۰- گزینه ۴ **مبحث:** هندسه دوازدهم (فصل ۱: دترمینان) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** علیرضا فعلی

$$(AB)^{1404} - AB = I \rightarrow (AB)(AB^{1403} - I) = I$$

بنابراین AB ماتریس وارون پذیر است و در نتیجه $|AB| \neq 0$.

۲۱- گزینه ۳ **مبحث:** هندسه دوازدهم (فصل ۱) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** صبا مهدوی

$$(AB)^2 = \underbrace{A}_{A^2} \underbrace{BA}_{A^2} B = A^2 B^2$$

$$(AB)^3 = (AB)^2 AB = \underbrace{A^2 B^2}_{A^2 B} AB = A^2 B^2 \underbrace{BA}_{A^2} B = A^2 \underbrace{BA^2}_{A^2} BB = A^2 \underbrace{BA}_{A^2} \underbrace{ABB}_{A^2} = A^5 \underbrace{BA}_{A^2} BB = A^5 B^4$$

$$(AB)^4 = (AB)^3 AB = \underbrace{A^5 B^4}_{A^5 B} AB = A^5 \underbrace{B^4}_{A^5} \underbrace{BA}_{A^5} B = A^5 \underbrace{BBA^5}_{A^5} BB = A^5 \underbrace{B}_{A^5} \underbrace{BA}_{A^5} \underbrace{ABB}_{A^5} = A^5 \underbrace{BA}_{A^5} \underbrace{A}_{A^5} \underbrace{BA}_{A^5} BB$$

$$= A^5 \underbrace{A^2}_{A^5} \underbrace{BA}_{A^5} \underbrace{A^2}_{A^5} \underbrace{BBB}_{A^5} = A^{11} \underbrace{BA}_{A^5} \underbrace{AB^3}_{A^5} = A^{13} \underbrace{BA}_{A^5} B = A^{15} B^4$$

⋮

$$(AB)^n = A^{2n-1} B^n \Rightarrow (AB)^{10} = A^{19} B^{10}$$

۲۲- گزینه ۲ مبحث: هندسه دوازدهم (فصل ۱: وارون ماتریس) درجه دشواری: سخت طراح: نصیر کریمی

با توجه به تعریف وارون یک ماتریس و ویژگی پخشی ضرب ماتریس‌ها روی جمع آنها می‌توان نوشت

$$(2A + 3I)(2A + 3I)^{-1} = I \rightarrow 2A(2A + 3I)^{-1} + 3I(2A + 3I)^{-1} = I$$

$$\rightarrow 2A(2A + 3I)^{-1} = I - 3(2A + 3I)^{-1}$$

$$\rightarrow A(2A + 3I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A(2A + 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -9 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = (-7 + 12 - 6) + (-9 - 4 + 3) + (0 - 3 - 1) = -15$$

۲۳- گزینه ۱ مبحث: آمار و احتمال (آشنایی با منطق ریاضی) درجه دشواری: ساده طراح: احسان ایزدپناه

روش اول: طبق جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	~p	p ⇒ q	~p ⇒ (p ⇒ q)
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

یعنی ارزش گزاره‌ی $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ همواره درست است.

روش دوم: طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p) \vee (p \Rightarrow q) \equiv p \vee (\sim p \vee q) \equiv (p \vee \sim p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

۲۴- گزینه ۴ مبحث: آمار و احتمال (آشنایی با منطق ریاضی) درجه دشواری: متوسط طراح: احسان ایزدپناه

گزاره‌ی $p \Rightarrow \sim q$ نادرست است، پس گزاره‌ی p درست و گزاره‌ی $\sim q$ نادرست است، در نتیجه گزاره‌ی q درست است. از طرفی هر دو گزاره‌ی $q \Rightarrow r$ و q درست هستند، پس گزاره‌ی r نیز لزوماً درست است. حال برای دو گزاره‌ی داده شده داریم:

$$(\sim r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim p) \equiv (F \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Leftrightarrow q) \equiv (T \wedge T) \Rightarrow (F \Leftrightarrow T) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

۲۵- گزینه ۱ مبحث: آمار و احتمال (جبر مجموعه‌ها) درجه دشواری: متوسط طراح: احسان ایزدپناه

$$(A \cap B)' \cap (A \cup B)' \cap C = C \Rightarrow [(A' \cup B') \cap (A \cup B)] \cap C = C \Rightarrow \underbrace{(A' \cap A) \cup B'}_{\emptyset} \cap C = C$$

$$\Rightarrow B' \cap C = C \Rightarrow C \subseteq B' \Rightarrow C, B \text{ جدا از هم هستند.} \Rightarrow B \cap C = \emptyset$$

۲۶- گزینه ۴ مبحث: آمار و احتمال (جبر مجموعه‌ها) درجه دشواری: ساده طراح: احسان ایزدپناه

$$(C - A) \cup (C - B) = (C \cap A') \cup (C \cap B') = C \cap (A' \cup B') = C \cap (A \cap B)' = C - \underbrace{(A \cap B)}_A = C - A$$

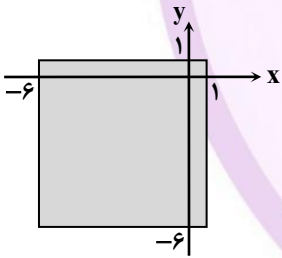
$$\Rightarrow |(C - A) \cup (C - B)| = |C - A| = |C| - |C \cap A| = |C| - |A| = 11 - 6 = 5$$

۲۷- گزینه ۳ مبحث: آمار و احتمال (جبر مجموعه‌ها) درجه دشواری: ساده طراح: احسان ایزدپناه

A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی هستند، بنابراین اگر $A \times B = B \times A$ باشد، آنگاه $A = B$ است. داریم:

$$\{-8, 4b+3, b^2\} = \{4, -5, 3a+1\} \Rightarrow \begin{cases} 3a+1 = -8 \Rightarrow a = -3 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \\ 4b+3 = -5 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

بنابراین $a = -3$ ، $b = -2$ و در نتیجه $C = [-6, 1]$ است.



مطابق شکل نمودار مجموعه‌ی C^2 ، یک مربع به طول ضلع ۷ است، پس مساحت آن برابر $7^2 = 49$ خواهد بود.

۲۸- گزینه ۴ مبحث: ریاضیات گسسته (استدلال ریاضی) درجه دشواری: ساده طراح: احسان ایزدپناه

حکم (اگر $A \cup B = A \cup C$ ، آنگاه $B = C$) غلط است و برای رد کردن آن از مثال نقض استفاده می‌کنیم. باید طوری مثال بزنیم که $A \cup B = A \cup C$ باشد؛ اما $B \neq C$ که گزینه ۴ جواب است.

۲۹- گزینه ۳ مبحث: ریاضیات گسسته (استدلال ریاضی) درجه دشواری: متوسط طراح: احسان ایزدپناه

$$4x^2 + y^2 \geq 2(xy - y - 2x - 2) \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \times 2 \\ 8x^2 + 2y^2 - 4xy + 4y + 8x + 8 \geq 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4xy + y^2) + (4x^2 + 8x + 4) + (y^2 + 4y + 4) \geq 0 \Leftrightarrow (2x - y)^2 + (2x + 2)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است.

۳۰- گزینه ۴ مبحث: آمار و احتمال (آشنایی با منطق ریاضی و جبر مجموعه‌ها) درجه دشواری: سخت طراح: احسان ایزدپناه

گزینه‌ی ۱: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 4\}$ و $C = \{2, 3, 5\}$ باشند، آنگاه $A - B = A - C = \{1\}$ است ولی $B \neq C$ می‌باشد، بنابراین گزینه‌ی ۱ نادرست است.

گزینه‌ی ۲:

$$A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow C' \subseteq (A \cap B)' \Leftrightarrow C' \subseteq A' \cup B' \Leftrightarrow (A' \cup B') \cup C' = A' \cup B'$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ نادرست است.

گزینه‌ی ۳: اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1\}$ و $C = \{2\}$ باشند، آنگاه $B - A = C - A = \emptyset$ ولی $B \neq C$ می‌باشد، بنابراین گزینه‌ی ۳ نادرست است.

گزینه‌ی ۴:

$$A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow C' \subseteq (A \cup B)' \Leftrightarrow C' \subseteq A' \cap B' \Leftrightarrow (A' \cap B') \cap C' = C'$$

بنابراین گزاره‌های $A' \cap B' \cap C' = C'$ و $A \cup B \subseteq C$ هم‌ارز هستند و در نتیجه گزینه‌ی ۴ درست است.

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: متوسط

مبحث: کمیت و یکا (فصل ۱۱م)

۳۱- گزینه ۲

مطابق فرمول انرژی ذخیره شده در القاگر $(U = \frac{1}{2}LI^2)$ ، داریم:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow L = \frac{2U}{I^2} \rightarrow [L] = \frac{J}{A^2}$$

حال با داشتن یکاهای J و A ، یکاها را ساده می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \rightarrow [L] = \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot A^2} \\ I &= \frac{Q}{\Delta t} \Rightarrow Q = I \Delta t \rightarrow [Q] = C = A \cdot s \end{aligned} \right\} \rightarrow [L] = \frac{kg \cdot m^2}{C^2}$$

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: ساده

مبحث: کمیت و یکا (فصل ۱۱م)

۳۲- گزینه ۲

گزینه‌های نادرست را بررسی می‌کنیم:

در گزینه ۱ جریان یک کمیت اصلی است.

در گزینه ۳ جرم و دما جزئی از کمیت‌های اصلی هستند و میدان مغناطیسی یک کمیت برداری است.

در گزینه ۴ مقدار ماده یک کمیت اصلی است.

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: ساده

مبحث: چگالی (فصل ۱۱م)

۳۳- گزینه ۲

با داشتن جرم و چگالی مکعب حجم واقعی و با داشتن طول ضلع آن، حجم ظاهری آن را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{ظاهری}} &= 20 \times 20 \times 20 = 8000 \text{ cm}^3 \\ V_{\text{واقعی}} &= \frac{m}{\rho} = \frac{3000}{4} = 7500 \text{ cm}^3 \end{aligned} \right\} \rightarrow V_{\text{حفره}} = 8000 - 7500 = 500 \text{ cm}^3$$

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: دشوار

مبحث: چگالی (فصل ۱۱م)

۳۴- گزینه ۴

$$\frac{16}{3} = \frac{m + m}{\rho_A + \rho_B} = \frac{2\rho_A \rho_B}{\rho_A + \rho_B} \Rightarrow 6\rho_A \rho_B = 16(\rho_A + \rho_B) \Rightarrow 3\rho_A \rho_B = 8\rho_A + 8\rho_B \quad (1)$$

حال فرمول چگالی مخلوط را برحسب شرایط ثانویه نوشته و ساده می‌کنیم:

$$\frac{4}{8} = \frac{m}{\frac{m}{3\rho_A} + \frac{2m}{3\rho_B}} \Rightarrow \frac{24}{5} = \frac{3\rho_A \rho_B}{\rho_B + 2\rho_A} \Rightarrow 5\rho_A \rho_B = 8\rho_B + 16\rho_A \quad (2)$$

حال با داشتن دو معادله ۱ و ۲ می‌توانیم چگالی‌ها را به دست آوریم:

$$(2) - (1) \rightarrow 2\rho_A \rho_B = 8\rho_A \Rightarrow \rho_B = 4 \frac{g}{cm^3}$$

$$(1) \rightarrow 3\rho_A \times 4 = 8\rho_A + 8 \times 4 \Rightarrow \rho_A = 8 \frac{g}{cm^3}$$

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: متوسط

مبحث: محاسبه فشار (فصل ۲ دهم)

۳۵ - گزینه ۳

با توجه به اینکه جرم استوانه و مخروط برابر است داریم:

$$\begin{cases} P = \frac{m}{A} & \text{استوانه} \\ 2P = \frac{m}{A} & \text{مخروط} \end{cases} \rightarrow 2A_{\text{مخروط}} = A_{\text{استوانه}}$$

یعنی پس دو برابر شدن فشار به معنی نصف شدن سطح مقطع کف مخروط است. اکنون با برابری حجمها داریم:

$$V_{\text{استوانه}} = V_{\text{مخروط}} \Rightarrow h \times A = \frac{1}{3} h' \frac{A}{2} \Rightarrow h' = 6h$$

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: ساده

مبحث: فشار در شارهها (فصل ۲ دهم)

۳۶ - گزینه ۱

$$P_1 + \rho g h_1 = \frac{9}{5} (P_2 + \rho g h_2) \Rightarrow P_1 + 1000 \times 10 \times 10 = \frac{9}{5} P_2 + \frac{9}{5} \times 1000 \times 10 \times 2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} P_2 = 0.64 \times 10^5 = 64 \times 10^3 \text{ Pa} \Rightarrow P_2 = 8.0 \times 10^3 \text{ Pa} = 8.0 \text{ kPa}$$

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فشارسنج هوا (فصل ۲ دهم)

۳۷ - گزینه ۱

چون ارتفاعها یکسان است پس هرکدام از مایعات $\frac{h}{3}$ ارتفاع دارند.

مایع A و مایع B را با جیوه جایگزین می‌کنیم و فشار ستون مایع آنها را بر حسب cmHg به دست می‌آوریم:

$$\frac{h}{3} \rho_A = x_A \rho_{\text{Hg}} \Rightarrow \frac{h}{3} \times 6/8 = x_A \times 13/6 \Rightarrow x_A = \frac{h}{6}$$

$$\frac{h}{3} \rho_A = x_B \rho_{\text{Hg}} \Rightarrow \frac{h}{3} \times 3/4 = x_B \times 13/6 \Rightarrow x_B = \frac{h}{12}$$

با داشتن فشار ناشی از ستونهای مایع A و B و جیوه بر حسب h و داشتن فشار هوا، h را به دست می‌آوریم:

$$\frac{h}{3} + \frac{h}{6} + \frac{h}{12} = \frac{7h}{12} = 63 \text{ cmHg} \Rightarrow h = 10.8 \text{ cm}$$

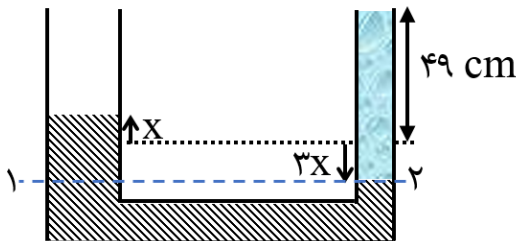
طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فشار در شارهها (فصل ۲ دهم)

۳۸ - گزینه ۱

حالت ثانویه لوله U شکل را در نظر می‌گیریم. چون حجم جیوه جابه‌جا شده در دو طرف برابر است و سطح مقطع لوله (۲) سه برابر سطح مقطع لوله (۱) است، پس ارتفاع ستون جیوه جابه‌جا شده در لوله (۱) باید سه برابر ارتفاع ستون جیوه جابه‌جا شده در لوله (۲) باشد:



$$P_1 = P_2 \Rightarrow 1 \times (49 + 3x) = 3 \times 4x \Rightarrow x = 1 \text{ cm}$$

$$h_W = 49 + 3 = 52 \text{ cm}$$

$$V_W = 52 \times 10 = 520 \text{ cm}^3 \rightarrow m = 520 \times 1 = 520 \text{ g}$$

۳۹ - گزینه ۲ **مبحث:** فشار در شاره‌ها (فصل ۲ دهم) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** ابوالفضل علیدوست

اگر از سطح مایع ۶۰ cm پایین برویم، فشار $cmHg \ 7/5 = 83/5 - 76$ افزایش می‌یابد؛ پس برای فشار در عمق ۴۰ cm از مایع می‌توان نوشت:

$$\Delta P = \frac{40}{60} \times 7/5 = 5 \text{ cmHg} \Rightarrow P = 76 + 5 = 81 \text{ cmHg}$$

اگر مایع درون ظرف جیوه باشد، در عمق ۶۰ cm فشار باید ۶۰ cmHg افزایش یابد. در مایع ذکر شده در سوال، فشار تنها ۷/۵ cmHg افزایش یافته است. پس چگالی مایع برابر است با:

$$\rho = \frac{7/5}{60} \rho_{Hg} = \frac{1}{8} \times 13/6 = 1/7 \frac{g}{cm^3}$$

۴۰ - گزینه ۳ **مبحث:** فشار در شاره‌ها (فصل ۲ دهم) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** ابوالفضل علیدوست

از آن جا که ظرف‌ها منشوری هستند، جرم مایع‌های درون ظرف‌ها و سطح مقطع آن‌ها یکسان است، پس فشار مایع‌ها در کف دو ظرف برابر است. اگر فشار در کف ظرف‌های (۱) و (۲) را به ترتیب P_1 و P_2 بنامیم، داریم:

$$P_1 = P_2 = \frac{mg}{A} \Rightarrow \rho g h_A + P_A = \rho g h_B + P_B$$

$$1000 \times 10 \times 0/1 + P_A = 800 \times 10 \times 0/15 + 4500$$

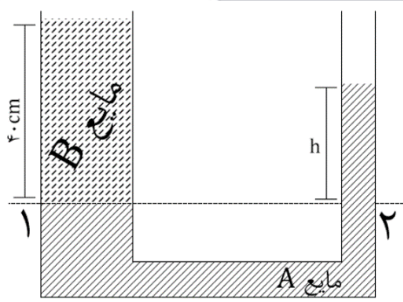
$$1000 + P_A = 1200 + 4500 \Rightarrow P_A = 4700 \text{ Pa}$$

۴۱ - گزینه ۱ **مبحث:** فشار در شاره‌ها (فصل ۲ دهم) **درجه دشواری:** دشوار **طراح:** ابوالفضل علیدوست

ابتدا لازم است فشار دو طرف شیر، مقایسه شود تا جهت حرکت مایعات پس از باز شدن شیر معلوم باشد:

$$M_B = 1/2 M_A \Rightarrow \rho_B h_B A_B = 1/2 \times \rho_A h_A A_A \Rightarrow \rho_B A_B = 1/2 \rho_A A_A \Rightarrow 3 \rho_B = 1/2 \times 2 \rho_A \Rightarrow \rho_B = 0/8 \rho_A$$

از آن جا که چگالی مایع A بیشتر است، پس از باز شدن شیر، مایع A وارد شاخه سمت چپ می‌شود:



$$P_1 = P_2 \Rightarrow \rho_B \times 40 = \rho_A \times h \Rightarrow 0/8 \times 40 = h \Rightarrow h = 32 \text{ cm}$$

اختلاف سطح آزاد دو مایع ۸ cm است. اگر مایع درون شاخه سمت راست پایین به اندازه X بیاید، در شاخه سمت

چپ $\frac{2}{3} X$ بالا می‌رود:

$$x + \frac{2}{3} x = 8 \Rightarrow x = 4/8 \text{ cm}$$

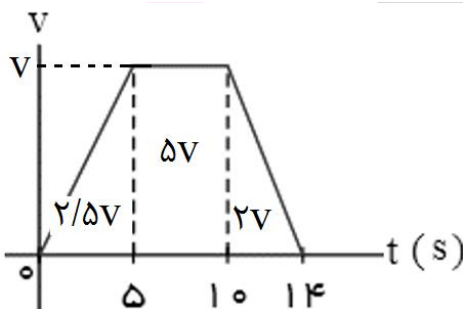
۴۲ - گزینه ۳ **مبحث:** سرعت - زمان (فصل ۱ دوازدهم) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** پوریا دیار کجوری

اگر تندی متوسط هر بازه را حساب کنیم، داریم:

$$S_{av(0,5)} = \frac{2/5V}{5} \quad S_{av(0,10)} = \frac{7/5V}{10}$$

$$S_{av(5,14)} = \frac{7V}{9} \quad S_{av(0,14)} = \frac{9/5V}{14}$$

بین این‌ها $\frac{7V}{9}$ از همه بزرگتر است.

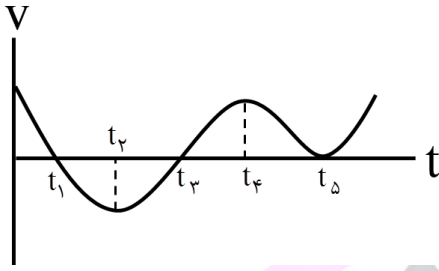


طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: ساده

مبحث: سرعت - زمان (فصل ۱ دوازدهم)

۴۳ - گزینه ۴



در نمودار $v-t$ تغییر جهت حرکت زمانی رخ می‌دهد که منحنی محور زمان را قطع کرده و از آن عبور کند که دوبار در t_1 و t_3 رخ داده است. از طرفی در نمودار $v-t$ تغییر اندازه سرعت (یعنی $|v|$) تعیین‌کننده تندشونده یا کندشونده بودن حرکت است که پنج بار (در نقاط t_1 تا t_5) این رویه تغییر کرده است.

طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: متوسط

مبحث: مکان - زمان (فصل ۱ دوازدهم)

۴۴ - گزینه ۳

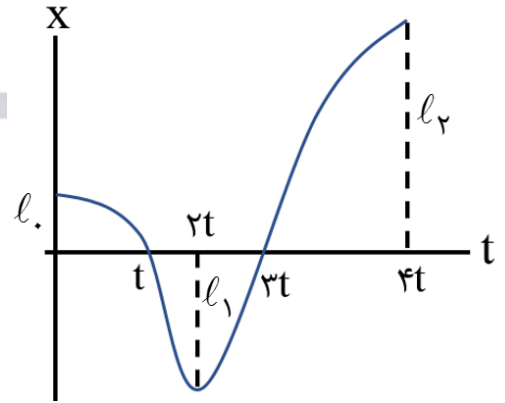
$$S_{av}(\cdot \rightarrow t) = \frac{l_1}{t} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} l_1 > l_2 \rightarrow S_{av}(t \rightarrow 2t) > S_{av}(\cdot \rightarrow t) \\ \\ \end{array}$$

$$S_{av}(t \rightarrow 2t) = \frac{l_1}{t}$$

$$S_{av}(2t \rightarrow 4t) = \frac{l_1 + l_2}{2t} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} S_{av}(2t \rightarrow 4t) > S_{av}(t \rightarrow 2t)$$

$$l_2 > l_1 \rightarrow l_2 + l_1 > 2l_1$$

$$\frac{S_{av}(2t \rightarrow 4t)}{S_{av}(t \rightarrow 2t)} = \frac{\frac{l_1 + l_2}{2t}}{\frac{2l_1 + l_2}{3t}} = \frac{3l_1 + 3l_2}{4l_1 + 2l_2} \xrightarrow{l_2 > l_1} \frac{S_{av}(2t \rightarrow 4t)}{S_{av}(t \rightarrow 2t)} > 1$$



طراح: محمدجواد حیدری

درجه دشواری: ساده

مبحث: شتاب (فصل ۱ دوازدهم)

۴۵ - گزینه ۳

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a_{av} = \frac{378}{3} = 126 \frac{m}{s^2}$$

$$v_6 - v_3 = 2(6^3 - 3^3) = 378$$

طراح: پوریا دیارکجوری

درجه دشواری: متوسط

مبحث: شتاب (فصل ۱ دوازدهم)

۴۶ - گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

$$t_1 \text{ تا } t_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x < 0 \Rightarrow v_{av} < 0 \\ \Delta v = v_1 - v_1 = 0 \text{ (منفی)} > 0 \Rightarrow a_{av} > 0 \end{array} \right.$$

$$t_1 \text{ تا } t_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x > 0 \Rightarrow v_{av} > 0 \\ \Delta v = v_2 - v_1 = 0 \text{ (مثبت)} < 0 \Rightarrow a_{av} < 0 \end{array} \right.$$

$$t_2 \text{ تا } t_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x > 0 \Rightarrow v_{av} > 0 \\ \Delta v = v_3 - v_2 = 0 \text{ (منفی)} > 0 \Rightarrow a_{av} > 0 \end{array} \right.$$

$$t_1 \text{ تا } t_4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x > 0 \\ \Delta v = v_4 - v_1 = \text{منفی} < 0 \Rightarrow a_{av} < 0 \end{array} \right.$$

پس فقط در گزینه ۳ این دو کمیت هم علامت (هر دو مثبت) هستند.

$$v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad v_2 = 78 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

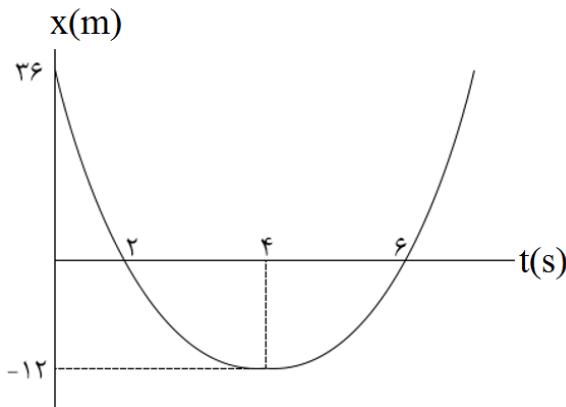
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{18 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{20 \text{ s}} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \text{ s}} = 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x = \frac{t+1}{t+2} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{11}{12} \end{cases} \rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{11}{12} - \frac{1}{2}}{10 - 2} = \frac{\frac{5}{12}}{8} = \frac{5}{96} = \frac{1}{24} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

سرعت در هر دو لحظه صفر و $t = 8 \text{ s}$ صفر است. (مماس افقی است). پس:

$$a_{av(8,16)} = \frac{v_{16} - v_8}{16 - 8} = \frac{v_{16} - 0}{8} = 2$$

$$a_{av(8,16)} = \frac{v_{16} - v_0}{16 - 0} = \frac{v_{16}}{16} = 2$$

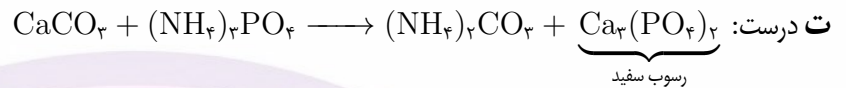


معادله مکان به صورت $x = 3(t^2 - 8t + 12) = 3(t-2)(t-6)$ درمی آید. نمودار $x-t$ این معادله را رسم می کنیم.

متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ در بیشترین فاصله از مبدأ در قسمت منفی قرار دارد و در لحظه $t = 6 \text{ s}$ برای دومین بار بردار مکان آن تغییر جهت می دهد؛ پس مسافت طی شده بین این دو لحظه برابر ۱۲ متر است.

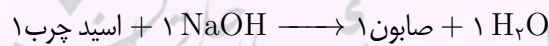
۵۱- گزینه ۳ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۸۵ تا ۹۲) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** مسعود خوش طینت

(آ) درست: ترکیب‌ها به صورت $ZnCO_3$ و NH_4CN هستند و نسبت برای آن‌ها برابر ۱ هستند.



۵۲- گزینه ۱ **مبحث:** فصل یک دوازدهم (ص ۵ تا ۷) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** مسعود خوش طینت

به دلیل نسبت یک به یک استر و اسید چرب، چهل مول اسید چرب و چهل مول استر داریم. با توجه به دو واکنش زیر:



از چهل مول اسید چرب و چهل مول استر سنگین، ۱۶۰ مول صابون تشکیل می‌شود. تعداد مولکول صابون برابر است با

$$160 \times 10^{23} \times 10^{23} = 9.632 \times 10^{25}$$

۵۳- گزینه ۳ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۹۳ تا ۱۰۳) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** مسعود خوش طینت



$$\frac{0.36 \text{ mol NaCl}}{6} = \frac{x \text{ mol Na}^+, \text{Cl}^-}{6+6} \implies x = 0.72 \text{ mol Na}^+, \text{Cl}^-$$

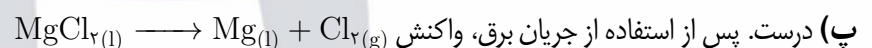
توجه کنید $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ نامحلول در آب است و یون محلول ایجاد نمی‌کند.

$$\text{غلظت مولی} = \frac{0.72}{0.9 + 0.6} = 0.48 \text{ mol.L}^{-1}$$

۵۴- گزینه ۳ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۹۳-۱۰۳) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** مسعود خوش طینت

(آ) نادرست. گلاب در آب حل می‌شود. بنابراین باید بخش قطبی مولکول‌های آن بر بخش ناقطبی غلبه داشته باشند. بنابراین نمی‌تواند دارای زنجیرهای کربنی بلند باشد.

(ب) درست.



(ت) نادرست. سرکه خوراکی محلول پنج درصد جرمی استیک اسید در آب است.

$$5 = \frac{\text{حل شونده } x}{\text{محلول } 1000 \text{ g}} \times 100 \implies x = 50 \text{ g اسید}$$

۵۵- گزینه ۴ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۸۵ تا ۹۲) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** مسعود خوش طینت

تنها عبارت چهارم درست است.

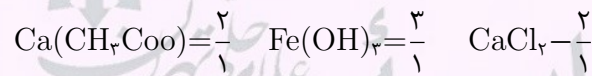
(۱) هوای آلوده شهرها همگن و محلول نیست.

(۲) جرم کل مواد حل شده در آب دریاها تقریباً ثابت است.

(۳) در یون چند اتمی SO_4^{2-} بار منفی متعلق به تمامی اتم‌هاست.

۵۶- گزینه ۴ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۸۵ تا ۹۲) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** محمدرضا زهره‌وند

ترکیب‌ها به ترتیب، $AgCl$ ، $MgSO_4$ ، $CaCl_2$ ، $Fe(OH)_3$ ، $Ca(CH_3COO)_2$ و $BaSO_4$ نسبت آنیون به کاتیون بیشتر از ۱:



مورد الف، ت و ج در آب نامحلول هستند.

۵۷- گزینه ۱ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۹۳ تا ۱۰۳) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** محمدرضا زهره‌وند

انحلال پذیری نمک در دمای ۶۰: ۴۴۰g در ۱۰۰g آب؛ ۴۴۰ گرم در ۵۴۰ گرم محلول.

انحلال پذیری نمک در دمای ۱۰: ۲۱۰g در ۱۰۰g آب؛ با کاهش دمای ۵۴۰ گرم محلول، ۲۱۰ - ۴۴۰ گرم رسوب خواهیم داشت.

$$\text{رسوب } 46g = \frac{(440 - 210)g \text{ رسوب}}{540g \text{ محلول}} \times 108g \text{ محلول}$$

۵۸- گزینه ۲ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۹۳ تا ۱۰۳) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** محمدرضا زهره‌وند

راه اول:

درصد جرمی محلول سیرشده از رابطه $\frac{s}{100+s} \times 100$ محاسبه می‌شود که s انحلال پذیری است. با تعیین درصد جرمی می‌توان آن را در رابطه $M = \frac{100ad}{\text{جرم مولی}}$

قرار داد تا چگالی محاسبه شود.

$$\frac{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}}{\text{حجم}} = \frac{100 \times \left(\frac{100}{100+100} \times 100\right) \times d}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{1200}{2} = 500d \Rightarrow d = 1,2g.ml^{-1}$$

راه دوم:

$$s = 0,8 \times \theta + 80 = 0,8 \times 25 + 80 = 100$$

$$1200g \text{ حلال} \times \frac{100g \text{ حلال}}{100g \text{ حلال}} = 1200g \text{ حلال}$$

پس مجموع جرم حل شونده و حلال برابر است با $1200 + 1200 = 2400$.

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = \frac{2400}{2} = 1,2$$

۵۹- گزینه ۳ **مبحث:** فصل یک دوازدهم (ص ۱ تا ۱۶) **درجه دشواری:** متوسط **طراح:** محمدرضا زهرهوند
فرمول پاک کننده صابونی $C_{15}H_{31}COONH_4$ با جرم مولی 273 g.mol^{-1} و پاک کننده غیرصابونی $C_{10}H_{21}C_6H_4SO_3Na$ با جرم مولی 320 g.mol^{-1} است.

$$320 - 273 = 47$$

۶۰- گزینه ۲ **مبحث:** فصل یک دوازدهم (ص ۱ تا ۱۶) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** محمدرضا زهرهوند
الف) در ساختار اوره فقط یک گروه عاملی آمیدی داریم.
ب) $\frac{C_{57}H_{104}O_6 - C_3H_7}{3} = C_{18}H_{34}O_2$
پ) با افزایش کربن در آلکانها درصد جرمی آنها افزایش می یابد.
ت) اتیلن گلیکول همانند استون قطبی است و با آب پیوند هیدروژنی دارد.

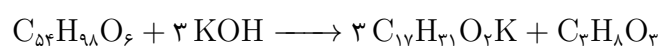
۶۱- گزینه ۳ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۹۸ تا ۱۰۲) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** سید صمد صفوی
بررسی گزینه ها:
گزینه ۱: نادرست. با تغییر دما، غلظت بر اساس درصد جرمی محلول تغییر نمی کند.
گزینه ۲: نادرست. عدد گلوکومتر بر اساس واحد $\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ می باشد. اگر گلوکومتر عدد ۹۰ را نشان دهد، غلظت گلوکز در خون به تقریب برابر 900 ppm می شود.
گزینه ۳: درست. با توجه به فرمول اتیلن گلیکول $(C_2H_6O_2)$ و اتانول (C_2H_6O) ، در جرم برابر، مول اتانول بیشتر است و حلال محسوب می شود.
گزینه ۴: نادرست. در محلول 0.5 مولاز سدیم هیدروکسید، 20 گرم از آن در یک لیتر محلول وجود دارد.

۶۲- گزینه ۳ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۹۸ تا ۱۰۱) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** سید صمد صفوی
با توجه به اینکه یون سدیم در واکنش شرکت نمی کند، مقدار اولیه Na^+ با مقدار نهایی برابر است:
$$500 \text{ g} \times \frac{3278 \text{ g}(Na_3PO_4)}{100 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol } Na_3PO_4}{164 \text{ g}(Na_3PO_4)} \times \frac{3 \text{ mol } Na^+}{1 \text{ mol } Na_3PO_4} = 3 \text{ mol } Na^+$$

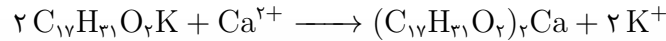
حجم کل محلول: $0.5L + 1.5L = 2L$
$$[Na^+] = \frac{3 \text{ mol}}{2 \text{ L}} = 1.5 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

۶۳- گزینه ۴ **مبحث:** فصل سه دهم (ص ۸۶ تا ۹۰) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** سید صمد صفوی
عبارت های (آ) و (ت) نادرست بیان شده اند. شکل صحیح آنها به صورت زیر است:
(آ) درشت مولکولها در زیست کره نقش اساسی ایفا می کنند.
(ت) در فرآیند تشکیل برف و باران، تقریباً همه موارد حل شده در آب از آن جدا می شود.

۶۴- گزینه ۱ **مبحث:** فصل یک دوازدهم (ص ۱ تا ۱۶) **درجه دشواری:** سخت **طراح:** سید صمد صفوی
ابتدا واکنش صابونی شدن استر 54 کربنی را می نویسیم:



سپس واکنش رسوب صابون حاصل را می‌نویسیم:



$$(C_{17}H_{31}O_2)_2Ca \text{ جرم مولی} = (17 \times 12 + 31 + 32) \times 2 + 40 = 574 \text{ g.mol}$$

۶۵- گزینه ۴ **مبحث:** فصل یک دوازدهم (ص ۱ تا ۱۶) **درجه دشواری:** ساده **طراح:** سید صمد صفوی

بررسی گزینه‌ها:

- (۱) جرم کربوکسیلات (COO^-) از جرم سولفونات (SO_3^-) کمتر است. در نتیجه جرم شوینده صابونی کمتر از غیرصابونی است.
 (۲) شوینده جدید، صابونی است و در آب سخت (Mg^{2+}) کمتر کف می‌کند.
 (۳) شوینده غیرصابونی، قدرت پاکندگی بیشتری دارند.

۶۶- گزینه ۳ **مبحث:** فصل یک دوازدهم و فصل سه دهم **درجه دشواری:** ساده **طراح:** حسن ایزدی

مخلوط آب و روغن و صابون، یک مخلوط ناهمگن و حاوی توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت است.

گزینه ۴: منیزیم هیدروکسید نامحلول در آب و کلسیم سولفات کم‌محلول است. هر دو در دمای اتاق کمتر از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شوند.

۶۷- گزینه ۲ **مبحث:** فصل سه دهم **درجه دشواری:** سخت **طراح:** حسن ایزدی

در ۱۶ گرم NH_4NO_3 (جرم مولی = ۸۰)، مقدار ۰٫۴ مول N وجود دارد:

$$\text{mol } NH_4NO_3 = \frac{16}{80} = 0,2 \rightarrow \text{mol } N = 2 \times 0,2 = 0,4 \text{ mol}$$

اکنون تعیین می‌کنیم در چند گرم محلول کلسیم برمید، همین مقدار (۰٫۴ مول) آنیون وجود دارد:

$1 \text{ mol } CaBr_2$	$2 \text{ mol } Br^-$	$\Rightarrow x = 0,2 \text{ mol } CaBr_2$
x	$0,4$	

$$CaBr_2 \text{ جرم} = \text{جرم مولی} \times \text{مول} = 0,2 \times 200 = 40 \text{ g } CaBr_2$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم } CaBr_2}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow 20 = \frac{40}{y} \times 100$$

$$\Rightarrow y = \frac{40}{20} \times 100 = 200 \text{ g محلول}$$

۶۸- گزینه ۲

مبحث: فصل سه دهم

درجه دشواری: سخت

طراح: حسن ایزدی

ابتدا گرم Li_2SO_4 لازم برای واکنش را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x \text{ g Li}_2\text{SO}_4}{110 \times 1} = \frac{0,7 \text{ L BaCl}_2 \times 0,3 \text{ mol.L}^{-1}}{1}$$

$$\Rightarrow x = 6,6 \text{ g Li}_2\text{SO}_4$$

با توجه به انحلال پذیری لیتیم سولفات، در ۱۳۰ گرم محلول سیر شده آن در دمای مورد نظر، ۳۰ گرم حل شونده Li_2SO_4 وجود دارد:

۱۳۰ گرم محلول	x	$\Rightarrow x = \frac{6,6 \times 130}{30} = 2,2 \times 13 = 28,6 \text{ g محلول}$
Li_2SO_4 گرم ۳۰	۶,۶	

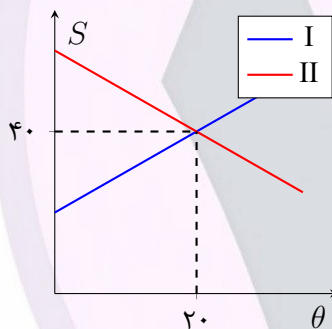
۶۹- گزینه ۴

مبحث: فصل سه دهم

درجه دشواری: متوسط

طراح: حسن ایزدی

نمودار انحلال پذیری این دو نمک به صورت زیر رسم می‌شود:



با توجه به این شکل، فقط عبارت موجود در گزینه (۴) در هر دمایی درست است.

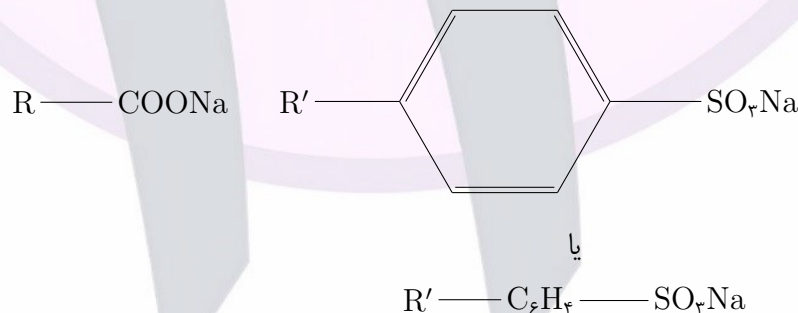
۷۰- گزینه ۴

مبحث: فصل یک دوازدهم

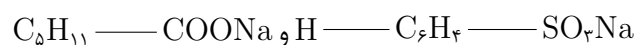
درجه دشواری: متوسط

طراح: حسن ایزدی

ساختار پاک کننده‌های مورد نظر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



با توجه به ساختار این دو ترکیب، تعداد کربن‌های گروه R، ۵ عدد بیشتر از R' است. به طور فرضی می‌توان R را به شکل C_5H_{11} و R' را به صورت H در نظر گرفت:



اگر اتم‌های مشترک هر دو فرمول را حذف کنیم، از پاک کننده صابونی ۶ تا H و از پاک کننده غیر صابونی یک اتم S یک اتم O باقی می‌ماند:

$$۴۲ = ۶ - (۱۶ + ۳۲) = \text{اختلاف جرم}$$

