



حلی سنج

آزمون حلی سنج ۱

۱۲ مرداد ماه ۱۴۰۳

پایه دوازدهم - رشته تجربی

دفترچه پاسخ تشریحی جلد ۳

مدت پاسخگویی: ۳۵ دقیقه

تعداد سوال: ۲۰

| ردیف | موارد امتحانی | تعداد سوال | از شماره | تا شماره | مدت پاسخگویی | طراحان |
|------|---------------|------------|----------|----------|--------------|--------|
| ۱ | ریاضی | ۲۰ | ۷۱ | ۹۰ | ۳۵ | |

 @helli_sanj

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

۷۱- حاصل $\sqrt[3]{\sqrt{3^{24} + 3^{17} + 3^9 + 1} - \sqrt{3^{12} + 2 \times 3^6 + 1}}$ با کدام برابر است؟

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

جواب: گزینه ۳

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{(3^8 + 1)^2} - \sqrt{(3^6 + 1)^2}} &= \sqrt[3]{3^8 + 1 - (3^6 + 1)} = \sqrt[3]{3^8 - 3^6} = \sqrt[3]{3^6(3^2 - 1)} \\ &= \sqrt[3]{3^6 \times 8} = 3^2 \times 2 = 18 \end{aligned}$$

۷۲- در تجزیه عبارت زیر کدام عامل وجود ندارد؟

$$(x^r - y^r)(x^r + y^r + x^r y^r) + (y^r - z^r)(y^r + z^r)$$

$$x^r - z^r \quad (۴) \quad x^r - xz + z^r \quad (۳) \quad x^r + z^r \quad (۲) \quad x^r + xz + z^r \quad (۱)$$

جواب: گزینه ۲

$$\frac{(x^r - y^r)(x^r + y^r + x^r y^r)}{x^r - y^r} + \frac{(y^r - z^r)(y^r + z^r)}{y^r - z^r} = x^r - z^r$$

اکنون عبارت را تجزیه می کنیم:

$$x^r - z^r = (x^r - z^r)(x^r + z^r) = (x^r + xz + z^r)(x - z)(x + z)(x^r - xz + z^r)$$

۷۳- فرض کنید $a = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x$. مقدار $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2x}$ با کدام برابر است؟

$$\sqrt{a^3 - 6a^2 + 12a - 8} - 3\sqrt{a - 2} \quad (۲) \quad \sqrt{a^3 + 6a^2 + 12a + 8} - 3\sqrt{a + 2} \quad (۱)$$

$$\sqrt{a^3 - 6a^2 + 12a - 8} + 3\sqrt{a - 2} \quad (۴) \quad \sqrt{a^3 + 6a^2 + 12a + 8} + 3\sqrt{a + 2} \quad (۳)$$

جواب: گزینه ۱

فرض می کنیم $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = b$. بنابراین:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = \frac{1}{b} \quad \text{و} \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = b^2$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = \frac{1}{b^2}$$

پس می توان نوشت:

$$b^r + \frac{1}{b^r} = a \rightarrow b^r + \frac{1}{b^r} + 2 = a + 2 \rightarrow \left(b + \frac{1}{b}\right)^r = a + 2 \rightarrow b + \frac{1}{b} = \sqrt{a+2}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{rx} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{rx} &= b^r + \frac{1}{b^r} = \left(b + \frac{1}{b}\right)^r - 2 \left(b + \frac{1}{b}\right) \\ &= \sqrt{a+2}^r - 2\sqrt{a+2} \end{aligned}$$

۷۴- حاصل $\frac{3}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}} + \frac{2}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{49}}$ با کدام برابر است؟

$$\frac{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{49}}{5} \quad (۱)$$

$$\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{49} \quad (۳)$$

جواب: گزینه ۴

برای کسر اول داریم:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}} = \frac{3(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{2})} = \frac{3(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{2})}{5 - 2} = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{2}$$

برای کسر دوم داریم:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{49}} = \frac{2(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5})}{(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{49})(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5})} = \frac{2(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5})}{7 - 5} = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}$$

پس مجموع دو کسر برابر است با $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}$.

۷۵- با فرض $\begin{cases} x^r y + xy^r + 2x^r y^r = 32 \\ x^f y + xy^f + 3x^r y^r + 3x^r y^r = 128 \end{cases}$ مقدار $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

جواب: گزینه ۲

$$\begin{cases} x^r y + xy^r + 2x^r y^r = 32 \rightarrow xy(x+y)^r = 32 \\ x^f y + xy^f + 3x^r y^r + 3x^r y^r = 128 \rightarrow xy(x+y)^f = 128 \end{cases}$$

از تقسیم تساوی پایین بر تساوی بالا داریم:

$$\frac{xy(x+y)^f}{xy(x+y)^r} = \frac{128}{32} \rightarrow x+y = 4 \rightarrow xy = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{4}{2} = 2$$

۷۶- حاصل عبارت زیر به ازای $a = \sqrt[4]{3 + \sqrt{5}}$ و $b = \sqrt[4]{3 - \sqrt{5}}$ کدام است؟

$$(a^x + ab + b^x)(a^x - ab + b^x)(a^x - a^x b^x + b^x)$$

۴ (۴)

۸ (۳)

۲ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

جواب: گزینه ۳

از اتحاد مزدوج کمک می گیریم:

$$\begin{aligned} & (a^x + b^x + ab)(a^x + b^x - ab)(a^x + b^x - a^x b^x) \\ &= ((a^x + b^x)^2 - a^x b^x)(a^x + b^x - a^x b^x) \\ &= (a^x + b^x + a^x b^x)(a^x + b^x - a^x b^x) = (a^x + b^x)^2 - a^x b^x \\ &= a^{2x} + b^{2x} + (ab)^x \end{aligned}$$

با جای گذاری داریم:

$$\begin{aligned} a^x + b^x + (ab)^x &= 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} + \left(\sqrt[4]{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} \right)^4 \\ &= 6 + (\sqrt[4]{9 - 5})^4 = 6 + \sqrt{4} = 8 \end{aligned}$$

۷۷- در تساوی $7 \cdot a = (\gamma^{10} + \gamma^9)(2^{10} + 2^8)(5^{12} + 5^{12} - 5^{10}) = \log_{a-\gamma}^{a+\delta}$ مقدار $\log_{a-\gamma}^{a+\delta}$ کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴)

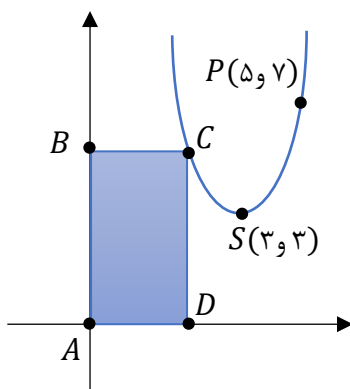
۳ (۳)

۲ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

جواب: گزینه ۲

$$\begin{aligned} & (\gamma^{10} + \gamma^9)(2^{10} + 2^8)(5^{12} + 5^{12} - 5^{10}) \\ &= 7 \cdot 9 (\gamma + 1) \times 2^8 (2^2 + 1) \times 5^{10} (2 \times 5^2 - 1) \\ &= 7^9 \times 8 \times 2^8 \times 5 \times 5^{10} \times 49 = 7^{9+2} \times 2^{8+3} \times 5^{10+1} \\ &= 7^{11} \times 2^{11} \times 5^{11} = 7 \cdot 11 \rightarrow a = 11 \rightarrow \log_{a-\gamma}^{a+\delta} = \log_7^{16} = 2 \end{aligned}$$



۷۸- در شکل روبه رو، نقطه $S(3, 3)$ رأس سهمی است. مساحت مستطیل

ABCD برابر با ۶ است. طول نقطه D کدام است؟

$2 - \sqrt{2}$ (۲)

$1 + \sqrt{2}$ (۱)

$2 - \sqrt[3]{2}$ (۴)

$1 + \sqrt[3]{2}$ (۳)

جواب: گزینه ۴

رأس سهمی نقطه $S(3 و 3)$ است، پس:

$$y = a(x - 3)^2 + 3 \xrightarrow{P(5, 7)} 7 = a(5 - 3)^2 + 3 \rightarrow a = 1$$

$$\rightarrow y = (x - 3)^2 + 3 = x^2 - 6x + 12$$

اکنون فرض می‌کنیم $C(t و t^2 - 6t + 12)$ پس $AD = t$ و $AB = t^2 - 6t + 12$.

$$S_{ABCD} = 6 \rightarrow AD \cdot AB = 6 \rightarrow t(t^2 - 6t + 12) = 6 \rightarrow t^3 - 6t^2 + 12t - 6 = 0$$

$$\rightarrow (t - 2)^3 = -2 \rightarrow t = -\sqrt[3]{2} + 2$$

۷۹- یک سهمی از نقاط $(0 و 6)$ و $(-1 و 0)$ می‌گذرد و رأسش که دارای مختصات صحیح است و روی نیمساز نواحی اول و سوم قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (-۱) ۴ (-۲)

جواب: گزینه ۴

فرض می‌کنیم $y = ax^2 + bx + c$ معادله سهمی باشد. با توجه به نقطه $(0 و 6)$ نتیجه می‌گیریم $c = 6$.

$$y = ax^2 + bx + 6 \xrightarrow{(-1, 0)} a - b + 6 = 0 \rightarrow b = a + 6$$

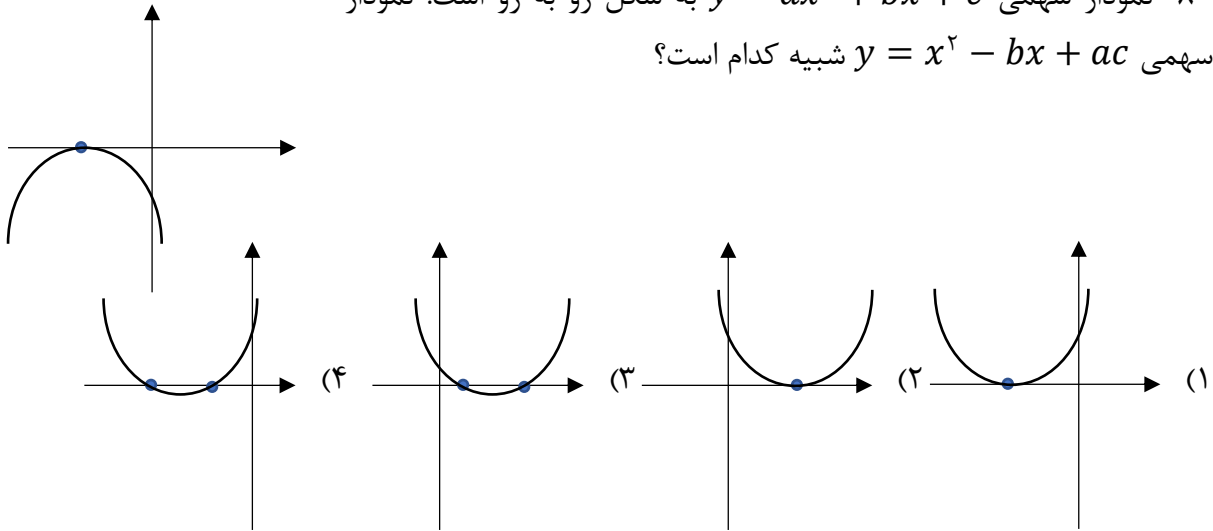
$$\rightarrow y = ax^2 + (a + 6)x + 6 \rightarrow \text{رأس سهمی} = \left(\frac{-a - 6}{2a}, \frac{-a^2 + 12a - 36}{4a} \right)$$

با توجه به این که رأس روی نیمساز ناحیه سوم قرار دارد، نتیجه می‌گیریم طول و عرض رأس برابر هستند:

$$\frac{-a^2 + 12a - 36}{4a} = \frac{-a - 6}{2a} \rightarrow a^2 - 14a + 24 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 2 \rightarrow S(-2 و -2) \checkmark \\ a = 12 \rightarrow S\left(\frac{-3}{4} و \frac{-3}{4}\right) \times \end{cases}$$

۸۰- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به شکل رو به رو است. نمودار سهمی $y = x^2 - bx + ac$ شبیه کدام است؟



جواب: گزینه ۱

در سهمی $y_1 = ax^2 + bx + c$ ، با توجه به مماس شدن بر محور x داریم

$\Delta_1 = b^2 - 4ac = 0$. همچنین در سهمی $y_2 = x^2 - bx + ac$ نیز داریم $\Delta_2 = b^2 - 4ac = 0$. پس سهمی دوم نیز بر محور x مماس است. در سهمی اول علامت ضریب x (یعنی b) منفی است، ولی در سهمی دوم علامت ضریب x (یعنی $-b$) مثبت می شود، پس محور تقارن سمت چپ محور y است.

۸۱- به ازای چند مقدار صحیح a ، هر دو ریشه حقیقی معادله $2x^2 + 6x + a = 0$ منفی است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

جواب: گزینه ۴

باید شرایط $P > 0$ ، $S < 0$ و $\Delta > 0$ را اشتراک بگیریم:

$$P > 0 \Rightarrow \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-6}{2} < 0$$

$$\Delta = 36 - 8a > 0 \rightarrow a < \frac{9}{2}$$

اشتراک موارد بالا به صورت $0 < a < 4.5$ است که شامل ۴ عدد صحیح است.

۸۲- سهمی $y = a(x - x^2)$ و خط $y = x - a - 1$ یکدیگر را در هیچ نقطه ای قطع نمی کنند. چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

جواب: گزینه ۴

باید معادله تقاطع دو تابع فاقد ریشه حقیقی باشد:

$$ax - ax^2 = x - a - 1 \Rightarrow ax^2 + (1 - a)x - a - 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (1 - a)^2 + 4a(a + 1) < 0 \Rightarrow 5a^2 + 2a + 1 < 0 \xrightarrow{\Delta \text{ همواره منفی است}}$$

۸۳- به ازای چند مقدار طبیعی x ، نامعادله $0 < \frac{1}{x-3} < -4$ برقرار است؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) شش

جواب: گزینه ۲

ابتدا از شرط $0 < \frac{1}{x-3}$ نتیجه می شود $0 < x - 3 < 3$ پس $x < 3$. اکنون نامعادله $\frac{1}{x-3} > -4$ را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} & \times (x - 3) \\ & \xrightarrow{x < 3} 1 < -4x + 12 \Rightarrow 4x < 11 \Rightarrow x < \frac{11}{4} \end{aligned}$$

اشتراک مجموعه جواب های بالا به صورت $x < \frac{11}{4}$ است که شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ است. البته وقتی می فهمیم $x < 3$ است، می توانیم دو مقدار ۱ و ۲ را دستی چک کنیم

۸۴- اگر a و b صفرهای سهمی $y = 25bx^2 + 4x + a$ و $a > b$ باشد، رأس سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟

- (۱) ناحیه اول (۲) ناحیه دوم (۳) ناحیه سوم (۴) ناحیه چهارم

جواب: گزینه ۱

a و b ریشه های معادله $0 = 25bx^2 + 4x + a$ هستند، پس داریم:

$$a + b = \frac{-4}{25b}$$

۸۶- به ازای چند مقدار طبیعی و یک رقمی b ، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-b} = b$ عددی صحیح است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۱ (۱)

جواب: گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که $b \geq 0$. اکنون به حل معادله می پردازیم:

$$\sqrt{x-b} = b - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} x - b = b^2 + x - 2b\sqrt{x}$$

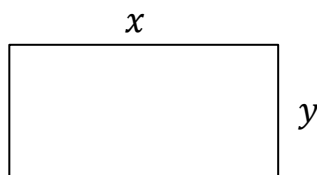
$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{b + b^2}{2b} \xrightarrow{b \neq 0} \sqrt{x} = \frac{1+b}{2}$$

برای این که جواب معادله صحیح باشد باید b فرد و $1+b \geq 0$ باشد پس مقادیر طبیعی قابل قبول برای b عبارت است از: ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹

۸۷- در مستطیلی نسبت طول به عرض $\frac{7}{6}$ است. با افزایش اندازه ی طول این مستطیل، مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه چقدر است؟

$$\frac{3}{5}(\sqrt{5}+1) \quad (۱) \quad \frac{3}{5}(\sqrt{5}+1) \quad (۲) \quad \frac{1}{5}(\sqrt{5}+1) \quad (۳) \quad \frac{3}{5}(\sqrt{5}-1) \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۲



$$\frac{x}{y} = \frac{7}{6} \text{ داریم}$$

با افزایش a واحد به طول مستطیل خواهیم داشت:

$$\frac{x+a}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

اکنون خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\text{مساحت مستطیل طلایی}}{\text{مساحت مستطیل اولیه}} &= \frac{(x+a)y}{xy} = \frac{x+a}{x} = \frac{x+a}{\frac{7}{6}y} = \frac{6}{7} \left(\frac{x+a}{y} \right) \\ &= \frac{6}{7} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = \frac{3}{7}(\sqrt{5}+1) \end{aligned}$$

۸۸- مجموع جواب های معادله $|x-1| + 3|x| = 10$ کدام است؟

۱/۷۵ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۵ (۱)

جواب: گزینه ۱

به کمک بازه بندی معادله را حل می کنیم:

$$x \leq 0 : -3x - x + 1 = 10 \Rightarrow x = \frac{-9}{4}$$

$$0 \leq x \leq 1 : 3x - x + 1 = 10 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ غ ق ق}$$

$$x \geq 1 : 3x + x - 1 = 10 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

پس مجموع جواب ها برابر است با:

$$-\frac{9}{4} + \frac{11}{4} = \frac{1}{2}$$

۸۹- به ازای چه مقادیری از a معادله $x^4 + (2-a)x^2 + 2a - 8 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز است؟

(۲ و $+\infty$) (۲)

(۴ و $+\infty$) (۱)

(۶ و $+\infty$) - {۸} (۴)

(۴ و $+\infty$) - {۶} (۳)

جواب: گزینه ۳

ابتدا معادله را به صورت زیر تجزیه می کنیم:

$$x^4 + (2-a)x^2 + 2a - 8 = 0 = (x^2 - 2)(x^2 + 4 - a)$$

اکنون خواهیم داشت:

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x^2 = a - 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{a - 4}$$

اکنون برای آن که معادله دارای ۴ ریشه متمایز باشد باید داشته باشیم:

$$a - 4 > 0 \quad \text{و} \quad a - 4 \neq 2 \Rightarrow a \in (4, +\infty) - \{6\}$$

۹۰- معادله $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + x - \frac{9}{x} = 3$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

جواب: گزینه ۴

ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{2x}{x^2-9} + \frac{x^2-9}{x} = 3$$

با فرض $a = \frac{x}{x^2-9}$ معادله به صورت $2a + \frac{1}{a} = 3$ تبدیل می شود:

$$\Rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ و } a = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2-9} = 1 \rightarrow x^2 - x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2} \\ \frac{x}{x^2-9} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 - 2x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} \end{cases}$$

پس معادله مورد نظر ۴ جواب دارد.

| ریاضی تجربی | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|
| ۷۱ | ۳ | | | ■ | |
| ۷۲ | ۲ | | ■ | | |
| ۷۳ | ۱ | ■ | | | |
| ۷۴ | ۴ | | | | ■ |
| ۷۵ | ۲ | | ■ | | |
| ۷۶ | ۳ | | | ■ | |
| ۷۷ | ۲ | | ■ | | |
| ۷۸ | ۴ | | | | ■ |
| ۷۹ | ۴ | | | | ■ |
| ۸۰ | ۱ | ■ | | | |
| ۸۱ | ۴ | | | | ■ |
| ۸۲ | ۴ | | | | ■ |
| ۸۳ | ۲ | | ■ | | |
| ۸۴ | ۱ | ■ | | | |
| ۸۵ | ۴ | | | | ■ |
| ۸۶ | ۳ | | | ■ | |
| ۸۷ | ۲ | | ■ | | |
| ۸۸ | ۱ | ■ | | | |
| ۸۹ | ۳ | | | ■ | |
| ۹۰ | ۴ | | | | ■ |