



# حلج سنج

آزمون حلی سنج ۳

۱۰ شهریور ماه ۱۴۰۲

پایه دوازدهم - رشته ریاضی

دفترچه شماره ۱

مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

تعداد سوال: ۴۰

ردیف	موارد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه	حسابان: حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده هندسه: صبا مهدوی با همکاری: محمد مهدی توکلی یاران رزمی امیررضا یارمحمدی گسسته: احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی

 @helli\_sanj

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



## محل انجام محاسبات

۱- با فرض  $A = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x} - x^2$  و  $B = \sqrt[6]{x^2}$ ، به ازای کدام مقدار  $x$  تساوی  $\frac{1}{A} = \frac{1}{B}$  برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲- حاصل عبارت  $A = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x + 2} - (x+1)^2$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{4}$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt[3]{4} - 1 + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{7}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{\frac{5}{3}}$

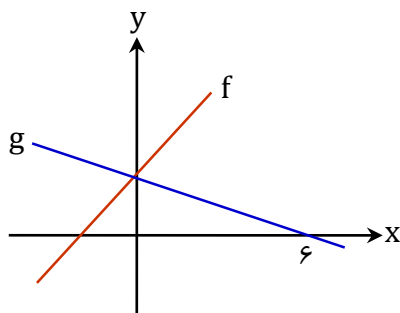
۴- فرض کنید  $f(x+1) = \frac{1}{x-1}$  و  $g(x-1) = \frac{x+c}{x^2+ax+b}$  باشد، اگر دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  برابر باشند، حاصل  $a-b+c$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۲ (۳) -۹ (۴) -۱۸

۵- تابع  $f(x) = \left[ \frac{a}{9}(x^2 - 3x) \right]$  با دامنه  $[0, 3]$  مفروض است. اگر برد تابع  $f$  به صورت  $\{b\}$  باشد، مجموع اعداد صحیح قابل قبول برای  $a$  کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۱۰ (۲) -۱۵ (۳) -۶ (۴) -۴

۶- نمودار توابع خطی  $f$  و  $g$  به صورت زیر است. اگر تابع  $f+g$  ثابت و  $f-g$  همانی باشد، حاصل  $fog(f)$  کدام است؟



- (۱) ۳  
(۲) ۳/۵  
(۳) ۵/۵  
(۴) ۵

۷- تابع  $f(x) = 3x - |x|$  مفروض است. اگر تابع  $y = mf(x) + f^{-1}(nx)$  با دامنه  $\mathbb{R}$  خطی باشد، حاصل  $\frac{n}{m}$  کدام است؟ ( $nm \neq 0$ )

- (۱)  $\pm 8$  (۲)  $\pm 4$  (۳)  $\pm 2$  (۴)  $\pm 1$

۸- اگر  $f(x) = x + [-x]$  و  $g(x) = x + [f(x)]$  باشد، آنگاه  $g^{-1}(x)$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $g(-x)$  (۲)  $-g(x)$  (۳)  $-g(-x)$  (۴)  $g(x)$

محل انجام محاسبات

۹- طول نقاط نمودار  $y = x^2 - 12x + 5$  را نصف می‌کنیم و سپس منحنی جدید را  $a$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا تابع  $g$  به دست آید. اگر تابع  $y = \frac{b+g(x)}{4x}$  همانی باشد،

حاصل  $a+b$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

۱۰- نمودار تابع  $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$  را نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم و سپس یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا تابع  $g$  به دست آید. دامنه تابع  $f \circ g$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $[1, +\infty)$  (۲)  $\mathbb{R}$  (۳)  $[1, 3]$  (۴)  $\{1\}$

۱۱- تابع  $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$  را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا تابع جدید  $g(x)$  به دست آید. برد تابع  $y = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $[1, 3]$  (۲)  $[1, 10]$   
(۳)  $(-\infty, 10]$  (۴)  $[1, +\infty)$

۱۲- فرض کنید  $g^{-1}(x)$  وارون تابع  $g(x)$  باشد. با کدام تبدیلات زیر می‌توان از تابع  $f(x)$  به وارون تابع  $\frac{1}{3}f^{-1}(3x)$  رسید؟

- (۱) انبساط افقی و انقباض عمودی (۲) انقباض عمودی و انقباض افقی  
(۳) انقباض افقی و انقباض عمودی (۴) انقباض عمودی و انبساط افقی

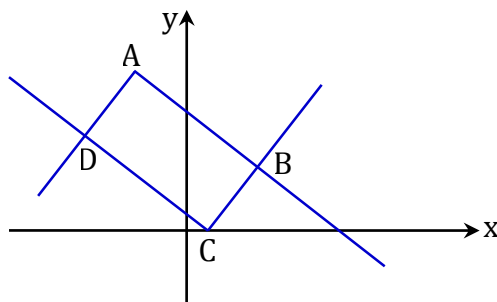
۱۳- نقطه  $A(\alpha, 2)$  روی نمودار تابع  $y = 2 - 3f\left(\frac{-x}{4}\right)$  با نقطه  $A'(\beta, -\frac{\alpha}{4})$  واقع بر وارون تابع  $y = 3f(2x+1)$  متناظر است. حاصل  $\alpha + \beta$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۴- سهمی  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $g(x) = a + 4f\left(b - \frac{x}{2}\right)$  بر نمودار  $f(x)$  منطبق باشد، حاصل  $a+b$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۵- نمودار تابع  $y = |x-1|$  را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و  $k$  واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. مطابق شکل زیر مستطیل  $ABCD$  با مساحت ۱۶ به وجود می‌آید. مقدار  $k$  چقدر است؟



- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۶

محل انجام محاسبات

۱۶- تابع  $f(x) = \sqrt{x-3}$  را یک بار ۳ واحد به راست انتقال داده و وارون آن را به دست می آوریم. بار دیگر ابتدا وارون آن را به دست آورده و سپس یک واحد به چپ انتقال می دهیم.

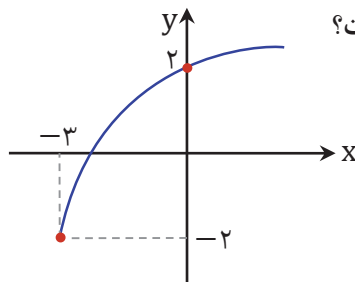
دو تابع به دست آمده در نقطه ای با کدام طول متقاطع اند؟

- ۱ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴)

۱۷- تابع  $f(x) = \frac{2x}{x+a}$  را نسبت به خط  $y = x$  قرینه سپس تابع حاصل را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می کنیم تا تابع  $g$  به دست آید. به ازای کدام مقدار  $a$  توابع  $f$  و  $g$  در نقطه ای به عرض یک متقاطع اند؟

- ۱ (۱) ۱ یا -۲ (۲) ۲ یا -۱ (۳) ۳ یا -۱ (۴) ۳ یا -۱ (۵)

۱۸- نمودار تابع  $f(x)$  به صورت زیر است. اگر نمودار  $y = a - 2f(\frac{x-b}{3})$  محورهای مختصات را قطع نکند، حدود  $a$  و  $b$  برابر با کدام گزینه است؟

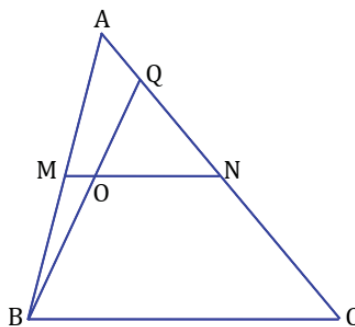


- ۱ (۱)  $a < -4$   
۲ (۲)  $b > 3$  و  $a < -1$   
۳ (۳)  $b < -9$  و  $a < 4$   
۴ (۴)  $b > 9$  و  $a < -4$

۱۹- از بین پنج تکه چوب با طول های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ واحد به چند طریق می توان سه تکه انتخاب کرد و یک مثلث ساخت؟

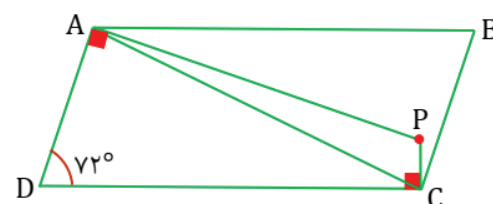
- ۱ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۲۰- در مثلث  $ABC$ ، مطابق شکل پاره خط  $MN$  موازی ضلع  $BC$  رسم شده است. اگر



- چقدر است  $\frac{MO}{ON}$ ، باشد،  $AQ = \frac{NQ}{2} = \frac{NC}{3}$ ؟  
۱ (۱)  $\frac{1}{3}$   
۲ (۲)  $\frac{1}{4}$   
۳ (۳)  $\frac{1}{5}$   
۴ (۴)  $\frac{2}{5}$

۲۱- در متوازی الاضلاع  $ABCD$  می دانیم  $AD < CD$ ،  $\hat{D} = 72^\circ$  است و قطر  $AC$ ، زاویه  $\hat{C}$  را با نسبت ۱ به ۳ تقسیم می کند. عمودی که در نقطه  $A$  از ضلع  $AD$  خارج می شود، عمود خارج شده از نقطه  $C$  بر ضلع  $CD$  را در نقطه  $P$  قطع می کند. زاویه  $\hat{CBP}$  چقدر است؟

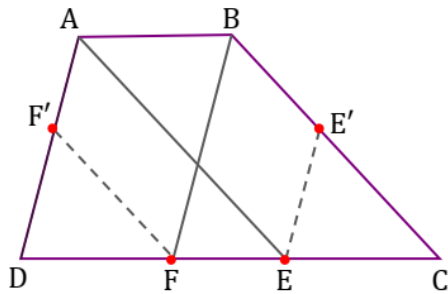


- ۱ (۱)  $63^\circ$   
۲ (۲)  $9^\circ$   
۳ (۳)  $18^\circ$   
۴ (۴)  $12/5^\circ$

محل انجام محاسبات

۲۲- در دوزنقه ABCD می دانیم  $AB=3$  و  $CD=8$  است. اگر  $FF' \parallel AE \parallel BC$  و

$EE' \parallel BF \parallel AD$  باشد، طول  $E'F'$  چقدر است؟



(۱) ۴

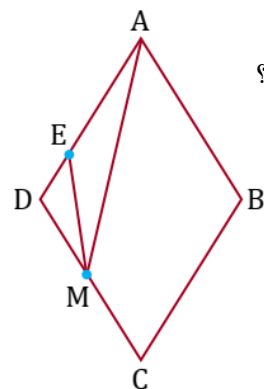
(۳)  $\frac{19}{3}$

(۴)  $\frac{14}{3}$

(۲) ۵

۲۳- در لوزی زیر M وسط ضلع CD است.

اگر  $AM=10$  و  $DE=2$  و  $AE=6$  باشد، طول ME چقدر است؟



(۱) ۳

(۳) ۵

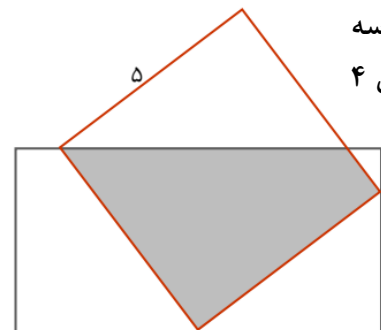
(۲) ۴

(۴) ۶

۲۴- مطابق شکل، مربعی به ضلع ۵ طوری قرار گرفته که سه

تا از رئوسش هر کدام روی مستطیلی به طول ۸ و عرض ۴

قرار دارد. مساحت ناحیه رنگ شده کدام است؟



(۱)  $\frac{121}{8}$

(۳)  $\frac{125}{8}$

(۲)  $\frac{123}{8}$

(۴)  $\frac{127}{8}$

۲۵- ماتریس مربعی A از مرتبه ۲ مفروض است. اگر درایه‌های این ماتریس،  $0, 1, 2, 4$  باشد

و این درایه‌ها طوری چیده شده باشند که دترمینان ماتریس A کمترین مقدار ممکن باشد،

آنگاه  $|4A^{-1}|$  کدام است؟

(۱) -۲

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲)  $-\frac{1}{2}$

۲۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}$  باشد، به طوری که  $x+y+z > 0$  و  $xyz=2$  و  $A^T = I$  باشد،

آنگاه مقدار  $x^T + y^T + z^T$  کدام است؟

(۱) ۵

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

(۲) ۷

۲۷- دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}$  مفروضند. اگر  $AB = B$  و

$a+d=1403$  باشد، آنگاه مقدار  $ad-bc$  کدام است؟

(۱) ۱۴۰۰

(۴) ۱۴۰۳

(۳) ۱۴۰۲

(۲) ۱۴۰۱

## محل انجام محاسبات

۲۸- اگر برای ماتریس مربعی  $A$  رابطه  $A^3 = 2A^2 - 2A + 5I$  برقرار باشد، از تساوی

$$(A^2 + 2I)^{-1} = \alpha A + \beta I \quad \text{حاصل } \alpha + \beta \text{ کدام است؟}$$

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۲

۲۹- فرض کنید  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ بوده و  $2|A^2 + I| = 3|A + I| = 6$  و

$$(A - I)^3 = 0 \quad \text{باشد. دترمینان ماتریس } A^2 + 2I \text{ برابر کدام است؟}$$

- (۱) ۱/۵ (۲) ۴/۵ (۳) ۱۳/۵ (۴) ۴۰/۵

۳۰- به ازای چند عدد سه رقمی برای  $n$ ، حاصل  $n^3 - n$  مضرب ۲۴ می باشد؟

- (۱) ۴۵۰ (۲) ۵۱۲ (۳) ۵۴۸ (۴) ۵۶۲

۳۱- اگر  $a, b$  اعداد صحیح باشند حاصل عبارت  $(a, (a, b)) \times [a, (a, b)]$  کدام است؟

(۱)  $(a, b)$  (۲)  $|ab|$

(۳)  $|a|(a, b)$  (۴)  $(a, b)^2$

۳۲- اگر  $a, b$  عددی فرد باشند و  $abc = 2k$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  باشد، باقی مانده  $a^{100} + b^{100} + c^{100}$

بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۷

۳۳- عدد  $2^{32} - 1$  چند مقسوم علیه بزرگ تر از ۱۰ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۳۰ (۴) ۶۴

۳۴- اگر  $(n^4, 480) = 96$  باشد، چند مقدار متفاوت برای  $(n^2, 210^2)$  قابل قبول است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰

۳۵- اگر  $a$  عددی طبیعی و بزرگ تر از ۱ باشد، حاصل  $[8a^2 - 8, a^2 + 1]$  برابر است با .....

(۱)  $8(a^2 + 1)$  (۲)  $8(a - 1)(a^2 + 1)$

(۳)  $8(a^2 - 1)(a^2 + 1)$  (۴)  $8(a + 1)(a^2 - 1)$

۳۶- در تقسیم عدد ۱۰۰۰ بر عدد طبیعی  $b$ ، خارج قسمت برابر ۲۳ می باشد، بزرگترین مقدار

ممکن برای باقی مانده این تقسیم کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۳۴

۳۷- باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۷ و ۱۱ به ترتیب برابر ۴ و ۵ می باشد. باقی مانده تقسیم

عدد  $3a$  بر ۷۷ کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۹ (۳) ۳۶ (۴) ۴۲

