پاسخنامه حلی‌سنج ۳

۱۰ شهریور ماه ۱۴۰۲

پایه دوازدهم ـ رشته ریاضی

ردیف	موارد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه
۲	فیزیک	۲۵	۴۱	۶۵	۴۵ دقیقه
۳	شیمی	۲۰	۶۶	۸۵	۳۰ دقیقه

نام درس	طراحان (حروف الفبا)
ریاضی و حسابان	حسین شفیع‌زاده، علیرضا ندافزاده
هندسه	صبا مهدوی با همکاری: محمدمهدی توکلی، یاران رزمی، امیررضا یارمحمدی
آمار و احتمال و گسسته	احسان ایزدپناه، محمد پیشنماز، علیرضا شریف‌خطیبی
فیزیک	محمد جواد حیدری، پوریا دیارکجوری، امیر حسن محمدپور با همکاری: ابوالفضل علیدوست
شیمی	علیرضا رفیعی، کیان کریمی‌خراسانی

@helli_sanj

پاسخنامه درس حسابان

۱- گزینه ۲

عبارت A فقط به ازای $x > ۰$ تعریف شده است. (کتاب ریاضی ۱ صفحهٔ ۵۹) و در ضمن به ازای $x > ۰$ داریم $x^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{x}$ پس:

$$A \underset{x>۰}{=} ۲\sqrt[۳]{x} - x^۳ \quad , \quad B = \sqrt[۶]{x^۲} = \sqrt[۳]{|x|}$$

حال می‌نویسیم: (با فرض $x > ۰$)

$$\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{x} - x^۳} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{|x|}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$$
$$\Rightarrow ۲\sqrt[۳]{x} - x^۳ = \sqrt[۳]{x} \Rightarrow \sqrt[۳]{x} = x^۳ \Rightarrow x = x^۹$$
$$\Rightarrow x^۸ = ۱ \Rightarrow x = ۱$$

۲- گزینه ۱

$$x^۴ + ۴ + ۴x^۲ - ۴x^۲ = (x^۲ + ۲)^۲ - ۴x^۲$$
$$= (x^۲ + ۲ + ۲x)(x^۲ + ۲ - ۲x)$$

حال می‌نویسیم:

$$A = \frac{(x^۲+۲x+۲)(x^۲-۲x+۲)}{x^۲-۲x+۲} - x^۲ - ۲x - ۱$$
$$A = x^۲ + ۲x + ۲ - x^۲ - ۲x - ۱ = ۱$$

۳- گزینه ۱

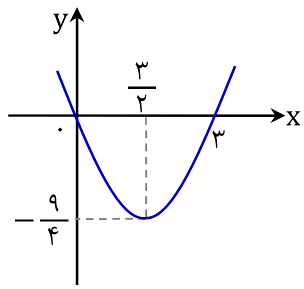
$$\sqrt{\sqrt[۳]{۴} - ۱} + \sqrt{\sqrt[۳]{۴}(\sqrt[۳]{۴} - ۱)} = A$$
$$\Rightarrow \sqrt[۳]{۴} - ۱ + \sqrt[۳]{۴}(\sqrt[۳]{۴} - ۱) + ۲\sqrt{\sqrt[۳]{۴}(\sqrt[۳]{۴} - ۱)^۲} = A^۲$$
$$\Rightarrow -۱ + \sqrt[۳]{۱۶} + ۲\sqrt[۶]{۴}(\sqrt[۳]{۴} - ۱) = A^۲$$
$$\Rightarrow -۱ + ۲\sqrt[۳]{۲} + ۲\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴} - ۱) = A^۲$$
$$\Rightarrow -۱ + ۲\sqrt[۳]{۲} + ۲\sqrt[۳]{۸} - ۲\sqrt[۳]{۲} = -۱ + ۴ = ۳ = A^۲$$
$$\Rightarrow A = \sqrt{۳}$$

۴- گزینه ۴

$$f(x+۱) = \frac{۱}{x-۱} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{x-۲}$$
$$f(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{۱}{x-۲} = \frac{x-۲}{(x-۲)^۲}$$
$$\Rightarrow \; g(x-۱) = \frac{x-۳}{(x-۳)^۲} = \frac{x-۳}{x^۲-۶x+۹}$$
$$\Rightarrow \; c = -۳ \, , a = -۶ \, , b = ۹$$
$$\Rightarrow \; a - b + c = -۱۸$$

۵- گزینه ۳

$y=۰$ عضو برد است، پس نباید عضو دیگری داشته باشد.



$$-\frac{۹}{۴}\le x^{۲}-۳x\le ۰$$
$$a\le ۰\Rightarrow ۰\le \frac{a}{۹}(x^{۲}-۳x)\le -\frac{۹a}{۴\times ۹}$$

به شرطی برد f تک‌عضوی است که:

$$۰\le \frac{-۹a}{۴\times ۹}<۱\Rightarrow -۴<a\le ۰$$

پس: $a=۰\,,-۱\,,-۲\,,-۳$

۶- گزینه ۲

عرض از مبدأ خطوط را a فرض کنید.

$$g(x)=-\frac{a}{۶}x+a$$
$$f(x)-g(x)=x\Rightarrow f(x)=x-\frac{a}{۶}x+a$$
$$f(x)+g(x)=k\Rightarrow x-\frac{a}{۶}x+a-\frac{a}{۶}x+a=k$$
$$(۱-\frac{a}{۳})x+۲a=k$$
$$\Rightarrow ۱-\frac{a}{۳}=۰\Rightarrow a=۳$$
$$\begin{cases}f(x)=\frac{۱}{۲}x+۳\\ g(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳\end{cases}\Rightarrow fog(۴)=f(۱)=۳/۵$$

۷- گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}۲x & x\ge ۰\\ ۴x & x<۰\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x & x\ge ۰\\ \frac{۱}{۴}x & x<۰\end{cases}$$

با فرض $n>۰$ داریم:

$$y=mf(x)+f^{-۱}(nx)=\begin{cases}۲mx+\frac{n}{۲}x & x\ge ۰\\ ۴mx+\frac{n}{۴}x & x<۰\end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع y خطی است، داریم:

$$\Rightarrow ۲m+\frac{n}{۲}=۴m+\frac{n}{۴}\Rightarrow ۲m=\frac{n}{۴}\Rightarrow \frac{n}{m}=۸$$

با فرض $n<۰$ داریم:

$$y=mf(x)+f^{-۱}(nx)=\begin{cases}۲mx+\frac{n}{۴}x & x\ge ۰\\ ۴mx+\frac{n}{۲}x & x<۰\end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع y خطی است، داریم:

$$\Rightarrow ۲m+\frac{n}{۴}=۴m+\frac{n}{۲}\Rightarrow ۲m=-\frac{n}{۴}\Rightarrow \frac{n}{m}=-۸$$

۸- گزینه ۳

میدانید

اگر k عددی صحیح باشد، داریم:

$$[x+k]=[x]+k$$
$$g(x)=x+\big[x+[-x]\big]=x+[x]+[-x]$$
$$g(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Z}\\ x-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Z}\\ x+۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$g(-x)=\begin{cases}-x & x\in\mathbb{Z}\\ -x-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow -g(-x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Z}\\ x+۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=-g(-x)$$

۹- گزینه ۳

با توجه به اینکه y همانی است، بنابراین داریم:

$$y=\frac{b+g(x)}{۴x}=x\Rightarrow g(x)=۴x^۲-b$$

طول نقاط نصف: $y=(۲x)^۲-۱۲(۲x)+۵=۴x^۲-۲۴x+۵$

رأس سهمی $x=۳$ است و همچنین رأس سهمی $g(x)$ به صورت $x=۰$ است، پس باید نمودار به دست آمده را ۳ واحد به سمت چپ انتقال دهیم در واقع $a=۳$ است.

$$\begin{aligned}g(x)=۴x^۲-b&=۴(x+۳)^۲-۲۴(x+۳)+۵\\&=۴x^۲+۲۴x+۳۶-۲۴x-۷۲+۵\\&=۴x^۲-۳۱\end{aligned}$$
$$\Rightarrow b=۳۱$$
$$\Rightarrow a+b=۳۴$$

۱۰- گزینه ۱

$$f(x)=۲+\sqrt{۳-x}\qquad \begin{matrix}\text{دامنه}: x\le ۳\\ \text{برد}: y\ge ۲\end{matrix}$$

قرینه نسبت به $y=x$: $x=۲+\sqrt{۳-y}\quad x\ge ۲$

$$\Rightarrow\ y=۳-(x-۲)^۲\quad x\ge ۲$$

یک واحد به سمت چپ: $g(x)=۳-(x+۱-۲)^۲\quad x\ge ۱$

$$g(x)=-x^۲+۲x+۲\qquad x\ge ۱$$
$$\begin{aligned}D_{fog}&=\{x\in D_g: g(x)\in D_f\}\\&=\{x\ge ۱:\ -x^۲+۲x+۲\le ۳\}\\&=\{x\ge ۱: x^۲-۲x+۱\ge ۰\}\\&=[۱,+\infty)\end{aligned}$$

۱۱- گزینه ۲

دو واحد به سمت چپ: $y = ۲ - \sqrt{x + ۲ - ۱} = ۲ - \sqrt{x + ۱}$

یک واحد به سمت پایین: $y = ۲ - \sqrt{x + ۱} - ۱ = ۱ - \sqrt{x + ۱}$

برد تابع $f^{-۱}og^{-۱}$ همان دامنهٔ تابع gof است.

$$\begin{aligned} D_{gof} &= \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \geq ۱ :\ ۲ - \sqrt{x - ۱} \geq -۱\} \\ &= \{x \geq ۱ :\ \sqrt{x - ۱} \leq ۳\} \\ &= \{x \geq ۱ :\ x \leq ۱۰\} \\ &= [۱,۱۰] \end{aligned}$$

۱۲- گزینه ۳

وارون تابع خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y = \tfrac{۱}{۲}f^{-۱}(۳x) &\xrightarrow{\text{وارون}} x = \tfrac{۱}{۲}f^{-۱}(۳y) \\ &\Rightarrow\ f^{-۱}(۳y) = ۲x \\ &\Rightarrow\ ۳y = f(۲x) \Rightarrow y = \tfrac{۱}{۳}f(۲x) \end{aligned}$$

برای تبدیل $f(x)$ به $\frac{۱}{۳}f(۲x)$ یک انقباض افقی و یک انقباض عمودی لازم است.

۱۳- گزینه ۴

مختصات نقاط را در ضابطهٔ توابع، جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲ = ۲ - ۳f(-\frac{\alpha}{۴}) \\ \beta = ۳f(\frac{-\alpha}{۲} + ۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-\frac{\alpha}{۴}) = ۰ \\ f(\frac{-\alpha}{۲} + ۱) = \frac{\beta}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\alpha}{۴} = -\frac{\alpha}{۲} + ۱ \\ \frac{\beta}{۳} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۴ \\ \beta = ۰ \end{cases}$$

۱۴- گزینه ۴

کافی است سهمی f بر سهمی جدید منطبق باشد، در واقع نقاط متناظر از هر دو تابع را در نظر می‌گیریم:

$$S_f = (۲,-۱) \Rightarrow f(۲) = g(۲) = -۱$$

$$g(۲) = a + ۴f(b - \tfrac{۲}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-۱-a}{۴} = -۱ \\ b - ۱ = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۳\ ,\ b = ۳\quad \Rightarrow a + b = ۶$$

۱۵- گزینه ۲

$y = |x - ۱|$

قرینه نسبت به مبدأ مختصات: $y = -|-x - ۱| = -|x + ۱|$

انتقال k واحد به سمت بالا: $y = k - |x + ۱|$

$A(-۱,k)\quad ,\quad c(۱,۰)$

$$B: \begin{cases} y = k - x - ۱ \\ y = x - ۱ \end{cases} \Rightarrow B(\tfrac{k}{۲}, -۱ + \tfrac{k}{۲})$$

$S = AB.BC$

$$= \sqrt{(\frac{k}{۲}+۱)^۲+(\frac{k}{۲}+۱)^۲}.\sqrt{(\frac{k}{۲}-۱)^۲+(\frac{k}{۲}-۱)^۲}$$
$$\Rightarrow ۲|\frac{k}{۲}+۱|.|\frac{k}{۲}-۱| = ۱۶$$
$$\Rightarrow \frac{k^۲}{۴}-۱ = ۸ \Rightarrow k = ۶$$

۱۶- گزینه ۱

بار اول:

$$\text{۳ واحد راست} \xrightarrow{x\to x+۳} y = \sqrt{x-۳-۳} = \sqrt{x-۶}$$
$$\text{وارون} \Rightarrow x = \sqrt{y-۶} \Rightarrow y = x^۲+۶, x \geq ۰$$

بار دوم:

$$\text{وارون} \Rightarrow x = \sqrt{y-۳} \Rightarrow y = x^۲+۳ \quad , \quad x \geq ۰$$
$$\text{۱ واحد چپ} \xrightarrow{x\to x+۱} y = (x+۱)^۲+۳ \quad x \geq ۰$$

حال محل تقاطع دو تابع را حساب می‌کنیم:

$$\text{تقاطع}: \; x^۲+۶ = (x+۱)^۲+۳$$
$$\Rightarrow x^۲+۶ = x^۲+۲x+۴ \overset{x>۰}{\Longrightarrow} x = ۱$$

۱۷- گزینه ۲

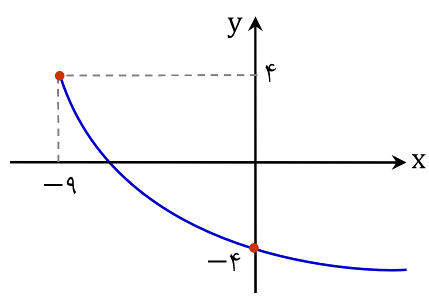
$$\text{قرینه نسبت به } y = x: x = \frac{۲y}{y+a} \Rightarrow y = \frac{-ax}{x-۲}$$
$$\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}: y = -\frac{-a(-x)}{-x-۲} = \frac{ax}{x+۲}$$
$$\text{تقاطع}: \frac{ax}{x+۲} = \frac{۲x}{x+a} \overset{x\neq ۰}{\Longrightarrow} ax+a^۲ = ۲x+۴$$

از طرفی $y = ۱$ است، پس $\frac{۲x}{x+a} = ۱$ و در نتیجه $x = a$ است.

$$\begin{cases} ax+a^۲ = ۲x+۴ \\ x = a \end{cases} \Rightarrow ۲a^۲ = ۲a+۴ \Rightarrow \; a = -۱ , ۲$$

۱۸- گزینه ۴

ابتدا نمودار $y = -۲f(\frac{x}{۳})$ را رسم می‌کنیم.



اگر نمودار جدید بخواهد، محورها را قطع نکند، باید آن را بیش از ۹ واحد به سمت راست و بیش از ۴ واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

$$\Rightarrow b > ۹ , a < -۴$$

پاسخ سوالات هندسه

۱۹- گزینه ۲

از بین این پنج تکه چوب به $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ طریق می‌توان سه تکه انتخاب کرد، اما طبق نامساوی مثلث باید مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد، پس اگر ۲ و ۳ طول دو ضلع کوچک باشند، ۵ و ۶ نمی‌توانند طول ضلع بزرگ باشند و همچنین اگر ۲ و ۴ طول دو ضلع کوچک باشند، ۶ نمی‌تواند طول ضلع بزرگ باشد پس به $۱۰ - ۳ = ۷$ حالت می‌توانیم سه تکه انتخاب کنیم که اضلاع یک مثلث باشند.

۲۰- گزینه ۲

با توجه به رابطه داده شده می‌توان نوشت:

$AQ = \frac{NQ}{۲} = \frac{NC}{۳}$

$\Rightarrow AQ = x, NQ = ۲x, NC = ۳x$

$\overset{\Delta}{BQC}: ON || BC \Rightarrow \frac{ON}{BC} = \frac{QN}{QC} = \frac{۲x}{۵x} = \frac{۲}{۵}$

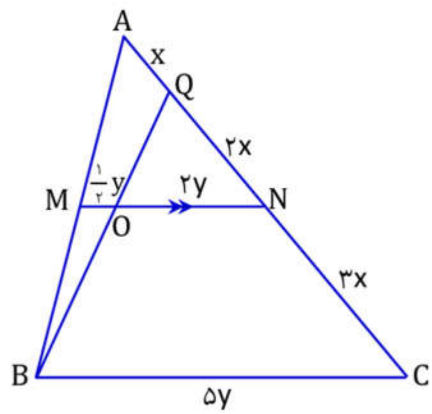
$\Rightarrow ON = ۲y\,, BC = ۵y$

$\overset{\Delta}{ABC}: MN || BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{۳x}{۶x} = \frac{۳}{۶}$

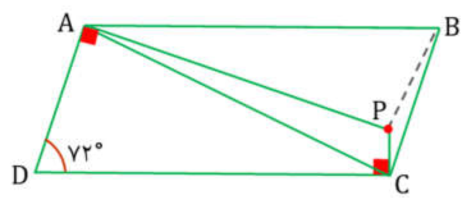
$\Rightarrow MN = \frac{BC}{۲} = ۲/۵y$

$MO = MN - ON = ۰/۵y$

$\frac{MO}{ON} = \frac{\frac{۱}{۲}y}{۲y} = \frac{۱}{۴}$



۲۱- گزینه ۲



$\overset{\Delta}{ACD}: AD < CD \Rightarrow A\hat{C}D < D\hat{A}C$

و چون:

$D\hat{A}C = B\hat{C}A$ بنابراین، $A\hat{C}D < B\hat{C}A$

از طرفی می‌دانیم AC زاویه $\hat{C}$ را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده، پس $B\hat{C}A = ۳A\hat{C}D$ است و چون $\hat{C} = ۱۸۰° - ۷۲° = ۱۰۸°$، پس $B\hat{C}A = ۸۱°$. از طرفی داریم:

$AD||BC$، پس امتداد AP بر BC نیز عمود است. به همین شکل $AB||CD$، پس امتداد CP بر AB نیز عمود است. لذا AP و CP در مثلث ABC قسمتی از ارتفاع هستند. چون ارتفاع‌ها همرس‌اند، و تمام زاویه‌های مثلث ABC تند هستند. امتداد BP نیز در این مثلث ارتفاع است.

BP را امتداد می‌دهیم، داریم:

$C\hat{B}P = ۹۰° - B\hat{C}A = ۹°$

۲۲- گزینه ۲

$AB||CE\,,\,AE||BC$

$\Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $ABCE \Rightarrow CE = AB = ۳\ \ (۱)$

$AB||DF\,,\,BF||AD$

$\Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $ABFD \Rightarrow DF = AB = ۳\ \ (۲)$

$DC = ۸ \cdot : (۱),(۲) \Rightarrow EF = ۲$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BCF}: EE'||BF \Rightarrow \frac{BE'}{CE'} = \frac{EF}{CE} = \frac{۲}{۳} \\ \overset{\Delta}{ADE}: FF'||AE \Rightarrow \frac{AF'}{DF'} = \frac{EF}{DF} = \frac{۲}{۳} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AF'}{DF'} = \frac{BE'}{CE'} = \frac{۲}{۳} \xRightarrow{\text{عکس تالس در ذوزنقه}} E'F'||AB||CD$$

$E'F'||ED, E'E||F'D \Rightarrow$

متوازی‌الاضلاع $E'EDF' \Rightarrow E'F' = ED = EF + FD = ۵$

۲۳- گزینه ۳

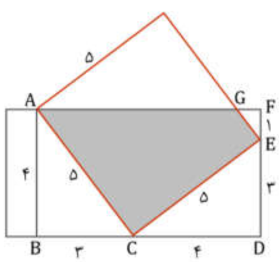
$$\left.\begin{array}{l} MD = \frac{AD}{۲} = \quad \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{DE}{MD} = \frac{۱}{۲} \\ M\hat{D}E = M\hat{D}A \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض زض}} \overset{\Delta}{AMD} \sim \overset{\Delta}{MED}$$

$\frac{ME}{AM} =$ نسبت تشابه $= \frac{۱}{۲} \Rightarrow ME = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ = ۵$

۲۴- گزینه ۳

عمود AB برابر ضلع FD می‌باشد و در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه ABC مثلث ۵ – ۴ – ۳ می‌باشد. از طرفی $A\hat{C}B = ۹۰^\circ - D\hat{C}E$ پس $A\hat{C}B = C\hat{E}D$ و در نتیجه چون $AC = CE = ۵$ است، به حالت وتر و یک زاویه حاده $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{CDE}$ می‌باشد.

و طبق اجزای متناظر $ED = BC = ۳$



همچنین داریم $C\hat{E}D = E\hat{G}F$ پس $\overset{\Delta}{EFG} \overset{\text{زز}}{\sim} \overset{\Delta}{CDE}$ و با توجه به نسبت اجزای متناظر:

$$\frac{EF}{CD} = \frac{GF}{ED} \Rightarrow GF = \frac{۳}{۴}$$

با استفاده از این اطلاعات مساحت قسمت رنگی را حساب کنید.

$$S_{ACEG} = S_{ABDF} - S_{ABC} - S_{CDE} - S_{EFG}$$
$$= ۲۸ - ۶ - ۶ - \frac{۳}{۸} = \frac{۱۲۵}{۸}$$

۲۵- گزینه ۱

اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه دترمینان A به صورت $ad - bc$ است. برای کمینه کردن دترمینان باید بخش ad را کمینه و بخش bc را بیشینه کنیم. چون تمامی درایه‌ها نامنفی است کمینهٔ ad برابر صفر و بیشینه bc در حالی رخ می‌دهد که c و b بزرگ‌ترین مقادیر ممکن یعنی ۲ و ۴ باشند پس کمترین مقدار دترمینان A برابر -۸ است درنتیجه:

$$|۴A^{-۱}| = ۴^۲ \times \frac{۱}{|A|} = -۲$$

۲۶- گزینه ۲

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} & xy+yz+zx & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۱ \quad \text{و} \quad xy+yx+zy = ۰$$

$$(x+y+z)^{۲} = x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+۲(xy+zx+zy)$$

$$= ۱+۲\times ۰ = ۱ \Rightarrow x+y+z = \pm ۱$$

$$\xRightarrow{x+y+x>۰} x+y+z = ۱$$

از طرفی می‌دانیم:

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz$$
$$= (x+y+z)(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-(xy+xz+yz))$$

پس:

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳} = \left(\underbrace{x+y+z}_{۱}\right)\left(\underbrace{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}_{۱}-\left(\underbrace{xy+xz+yz}_{۰}\right)\right)+۳\underbrace{xyz}_{۶} = ۷$$

۲۷- گزینه ۳

$$AB = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a\alpha+b\beta \\ c\alpha+d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\alpha+b\beta = \alpha \Rightarrow (۱-a)\alpha = b\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{۱-a} \\ c\alpha+d\beta = \beta \Rightarrow \beta(۱-d) = c\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{۱-d}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{۱-a} = \frac{۱-d}{c} \Rightarrow bc = ۱-(a+d)+ad$$

$$\Rightarrow ad-bc = \underbrace{(a+d)}_{۱۴۰۳}-۱ = ۱۴۰۲$$

۲۸- گزینه ۲

رابطهٔ داده شده را به صورت زیر مرتب کرده و به روش دسته‌بندی تجزیه می‌کنیم:

$$A^{۳}-۲A^{۲}+۲A-۴I = I \rightarrow (A^{۲}+۲I)(A-۲I) = I$$
$$\Rightarrow (A^{۲}+۲I)^{-۱} = A-۲I$$
$$\Rightarrow \alpha = ۱, \beta = -۲ \Rightarrow \alpha+\beta = -۱$$

۲۹- گزینه ۴

$$|A^{۳}+I| = |(A+I)(A^{۲}-A+I)| = |A+I||A^{۲}-A+I| = ۳$$

$$\xRightarrow{|A+I|=۲} |A^{۲}-A+I| = \frac{۳}{۲}$$

$$(A-I)^{۳} = \bar{۰} \Rightarrow A^{۳}-۳A^{۲}+۳A-I = \bar{۰}$$

$$\Rightarrow A^{۳}+۲I = ۳A^{۲}-۳A+۳I$$

$$\Rightarrow |A^{۳}+۲I| = |۳(A^{۲}-A+I)|$$

$$= ۳^{۳}|A^{۲}-A+I| = ۳^{۳}(\frac{۳}{۲}) = \frac{۸۱}{۲}$$

پاسخنامه درس گسسته

۳۰- گزینه ۴

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$$

حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ می باشد.

پس لازم است مضرب ۸ بودن حاصل عبارت بررسی گردد.

در حالتی که n فرد باشد هر دو مقدار $n-1, n+1$ زوج هستند و یکی از آن ها مضرب ۴ نیز هست.پس به ازای تمام nهای فرد حاصل $n^3 - n$ مضرب ۲۴ خواهد بود .

برای nهای زوج چون هر دو مقدار $n-1$, $n+1$ فرد خواهند بود، به ناچار خود n بایستی مضرب ۸ باشد.

در میان ۹۰۰ عدد سه رقمی ۴۵۰ تا فرد و ۱۱۲ تا مضرب ۸ هستند.

$100 \le 8k < 1000 \Rightarrow 13 \le k < 125 \rightarrow$ ۱۱۲مقدار

پس در کل ۵۶۲ مقدار شرایط مساله را تامین می نماید.

۳۱- گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l}\left[a, \overbrace{(a,b)}^{d}\right] = |a| \\ \left(a, \underbrace{(a,d)}_{d}\right) = d\end{array}\right\} \Rightarrow [a,(a,b)] \times (a,(a,d)) = |a|d = |a|(a,b)$$

۳۲- گزینه ۲

می دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $8k+1$ نوشته می شود پس:

$$a^{100} + b^{100} + c^{100} = 8k+1+8k'+1+\underbrace{(2k'')^{100}}_{8q} = 8(k+k'+q)+2 \Rightarrow r = 2$$

۳۳- گزینه ۳

$$2^{32} - 1 = \left(2^{16}+1\right)\left(2^{8}+1\right)\left(2^{4}+1\right)\left(2^{2}+1\right)\left(2^{1}+1\right)\left(2^{1}-1\right)$$

با توجه به مطالب کتاب درسی تمام عددهای 2^1+1 تا $2^{16}+1$ عددهایی اول هستند و $2^{32}-1$حاصل ضرب ۵ عدد اول متمایز می باشد. پس دارای ۳۲ مقسوم علیه طبیعی است که دو تا از آن ها ۳ و ۵ هستند.

۳۴- گزینه ۳

$$\left(n^4, 480\right) = 96 \Rightarrow \left(n^4, 2^5 \times 3 \times 5\right) = 2^5 \times 3$$

از تساوی آخر نتیجه می‌شود عدد n مضرب ۵ نیست. مضرب ۳ است و حداقل دارای ۲ تا عامل ۲ است. (مضرب ۴ است)

$$d = \left(n^3, 210^{10}\right) = \left(n^3, 2^{10} \times 3^{10} \times 5^{10} \times 7^{10}\right)$$

در این صورت با توجه به موارد ذکر شده داریم.

$$d = 2^x \times 3^y \times 5^z \times 7^t$$

که در آن x می تواند یکی از مقادیر ۶ یا ۹ یا ۱۰ باشد. (سه حالت)

Y می تواند ۳ یا ۶ یا ۹ یا ۱۰ باشد. (چهار حالت)

z به طور حتم صفر است. (یک حالت)

t می تواند ۰ یا ۳ یا ۶ یا ۹ یا ۱۰ باشد. (۵ حالت)

پس در کل ۶۰ حالت برای عدد d موجود است.

۳۵- گزینه ۲

$$\left[8a^2-8\,,\,a^3+1\right]=\left[8(a-1)(a+1),(a+1)(a^2-a+1)\right]$$

$$=(a+1)\left[8(a-1)\,,\,(a^2-a+1)\right]$$
$$=(a+1)\times 8(a-1)\times(a^2-a+1)=8(a-1)(a^3+1)$$

دقت کنید که a^2-a+1 همواره فرد است و نسبت به ۸ اول است هم چنین از a برابر $(a-1)$ یک واحد بیش‌تر است ونسبت به $(a-1)$ هم اول است. پس نسبت به $8(a-1)$ اول است پس:

$$\left[8(a-1),(a^2-a+1)\right]=8(a-1)\times(a^2-a+1)$$

۳۶- گزینه ۴

خارج قسمت تقسیم عدد a بر b همیشه $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ می‌باشد. پس

$$\left\lfloor \frac{1000}{b} \right\rfloor=23 \Rightarrow 23\le\frac{1000}{b}<24 \Rightarrow \frac{1000}{24}<b\le\frac{1000}{23} \Rightarrow b=42 \text{ یا } 43$$

که مقدار $b=42$ باقی‌مانده‌ی بزرگ تری تولید می‌نماید.

$$1000=42(23)+34$$

۳۷- گزینه ۱

$$\begin{cases} a=7q+4 \\ a=11q'+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11a=77q+44 \\ 7a=77q'+35 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 4a=77t+9=77(t+1)-68 \Rightarrow a=77k-17$$
$$\Rightarrow 3a=77k'-51 \Rightarrow 3a=77(k'-1)+26$$

۳۸- گزینه ۳

$$5a+11b=47q+21 \Rightarrow 50a+110b=47(10q)+210$$
$$3a+16b=47(10q-a-2b+4)+22$$

۳۹- گزینه ۱

$$\binom{200}{100}=\frac{200!}{100!\times100!}$$

توان عدد ۳ در تجزیه‌ی $200!$ (صورت کسر) برابر است با:

$$\left\lfloor\frac{200}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{200}{9}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{200}{27}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{200}{81}\right\rfloor=66+22+7+2=97$$

توان عدد ۳ در تجزیه‌ی $100!$ برابر است با: $33+11+3+1=48$

پس در $100!\times100!$(مخرج کسر) توان ۳ برابر $48\times2=96$ می باشد.

پس حاصل عبارت نهایی فقط یک عامل ۳ در تجزیه‌ی خود دارد.

۴۰- گزینه ۳

فرم کلی مجموعه C بنابه قضیه تقسیم به شکل‌های زیر است:

$$C = \{x \in Z | x = ۷k, x = ۷k + ۱, x = ۷k + ۳, x = ۷k + ۴, x = ۷k + ۵\}$$

در گزینهٔ «۱» داریم:

$$۱۷ = ۷(۲) + ۳ \Rightarrow ۱۷ \in C$$
$$۱۰۰ = ۷(۱۴) + ۲ \Rightarrow ۱۰۰ \in B$$

در گزینهٔ «۲» داریم:

$$-۵ = ۷(-۱) + ۲ \Rightarrow -۵ \in B$$
$$۱ = ۷(۰) + ۱ \Rightarrow ۱ \in C$$

در گزینهٔ «۳» داریم:

$$-۱۷ = ۷(-۳) + ۴ \Rightarrow -۱۷ \in C$$
$$۱۱ = ۷(۱) + ۴ \Rightarrow ۱۱ \in C$$

پس ۱۷− و ۱۱ هر دو عضو یک افراز هستند.

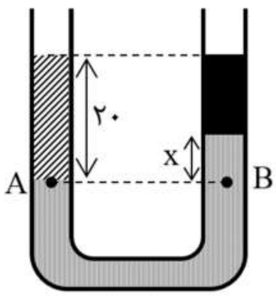
در گزینهٔ «۴» داریم:

$$۰ = ۷(۰) + ۰ \Rightarrow ۰ \in C$$
$$۲۰ = ۷(۲) + ۶ \Rightarrow ۲۰ \in A$$

پاسخنامه درس فیزیک

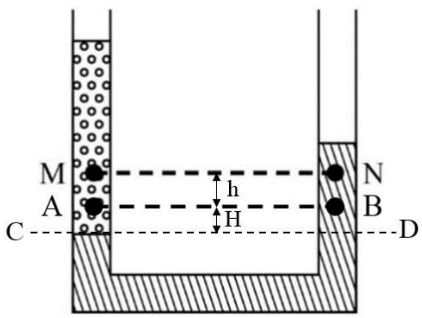
۴۱ (دیارکجوری)- گزینه ۲

شکل ظرف پس از اضافه کردن مایع سوم به صورت زیر است. اگر در این حالت اختلاف ارتفاع آب در دو شاخه را x بنامیم، داریم:



$$x \times ۱ + (۲۰ - x) \times ۰/۵ \Rightarrow x = ۱۲\,cm$$

۴۲ (دیارکجوری)- گزینه ۳



گزینه (۱) درست است؛ زیرا چگالی ρ' کمتر از ρ است؛ و اگر از مرز مشترک (خط‌چین CD) به یک اندازه در دو مایع ρ و ρ' بالا برویم، کاهش فشار در شاخه سمت راست (چگالی ρ) بیشتر است.

گزینه (۲) درست است؛ زیرا با همان استدلال بالا، هم $P_A > P_B$ است و هم $P_M > P_N$ است. بنابراین $P_A + P_M > P_B + P_N$.

گزینه (۳) نادرست است؛ زیرا فاصله $\overline{AM}$ با فاصله $\overline{BN}$ برابر است، ولی $\rho' < \rho$ است و این یعنی بین A و M اختلاف فشار کمتری نسبت به دو نقطه B و N داریم.

گزینه (۴) درست است؛ زیرا:

$$\left.\begin{aligned}|P_A - P_B| &= |\rho - \rho'|gH \\ |P_M - P_N| &= |\rho - \rho'|g(H+h)\end{aligned}\right\} \Rightarrow |P_A - P_B| < |P_M - P_N|$$

۴۳ (علیدوست)- گزینه ۲

مساحت شاخه سمت راست، ۴ برابر شاخه سمت چپ است. پس اگر سطح مایع در شاخه راست $۸\,cm$ پایین بیاید، در شاخه سمت چپ $۳۲\,cm$ بالا می‌رود و ختلاف سطح مایع با چگالی $\rho = ۶/۸\frac{g}{cm^۳}$ در دو شاخه $۴۰\,cm$ کاهش می‌یابد. یعنی فشار پیمانه‌ای مخزن به اندازه $۴۰\,cm$ از مایعی با چگالی $۶/۸\frac{g}{cm^۳}$ کاهش یافته است که معادل $۲۰\,cm$ جیوه با چگالی $۱۳/۶\frac{g}{cm^۳}$ است.

۴۴ (محمدپور)- گزینه ۴

نیروی وارد بر یکای سطح در کف ظرف، همان فشار در کف ظرف است (تعریف فشار است). با توجه به این که جنس مایع و ارتفاع آن در دو ظرف یکسان است، پس فشار در کف ظرف‌ها برابر است.

۴۵ (دیارکجوری)- گزینه ۱

اگر مساحت کف ظرف را $A_۱$ و سطح مقطع لوله را $A_۲$ فرض کنیم، داریم:

$$\Delta F = \rho g(\Delta h)A_۱$$

$$۶۰ = ۱۰^۳ \times ۱۰ \times \Delta h \times ۵۰۰ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow \Delta h = ۰/۱۲\ m$$

$$V = \Delta h.A_۲ = ۰/۱۲ \times ۴۰ \times ۱۰^{-۴} = ۴۸ \times ۱۰^{-۵} m^۳ \Rightarrow M = ۴۸ \times ۱۰^{-۵} m^۳ \times ۱۰^۳ \frac{kg}{m^۳} = ۰/۴۸ kg$$

۴۶ (حیدری)- گزینه ۲

با اضافه‌کردن مایع جدید و فرو رفتن بقیه حجم مکعب در آن، یک نیروی ارشمیدس دیگر نیز به جسم وارد می‌شود که جهت آن هم رو به بالا است. بنابراین چون مجموع دو نیروی ارشمیدس باید برابر وزن جسم شود، نیروی ارشمیدس اولیه کمتر شده و حجم جسم داخل مایع اول کاهش می‌یابد.

۴۷ (محمدپور)- گزینه ۲

حاصلضرب آهنگ شارش خروجی از روزنه (Av) در مدت زمان، باید برابر حجم مایع خارج‌شده (V_{out}) باشد. پس:

$$Av.\Delta t = V_{out} \Rightarrow \frac{\pi}{۴}D^۲ \times ۲ \times \Delta t = ۰/۲ \times \frac{\pi}{۴}(۱۰D)^۲ \Rightarrow \Delta t = ۱۰ s$$

۴۸ (علیدوست)- گزینه ۱

آهنگ شارش آب در لوله‌ها برابر $\frac{۱۴۴ \times ۱۰^۳\ cm^۳}{۳۰۰\ s} = ۴۸۰ \frac{cm^۳}{s}$ است.

تندی حرکت آب در قسمت باریک را $v_۲$ بنامیم، داریم: $۴۸۰ = A_۲ v_۲ = (۳ \times ۴^۲) \times v_۲ \Rightarrow v_۲ = ۱۰ \frac{cm}{s}$

بنابراین یک ذره طول قسمت باریک در لوله را طی مدت $\frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰ s$ می‌پیماید، و این یعنی قسمت پهن را در مدت $۵۰ s$ طی می‌کند. اکنون اگر تندی حرکت آب در قسمت پهن را $v_۱$ بنامیم، داریم: $v_۱ = \frac{۸۰ cm}{۵۰ s} = ۱/۶ \frac{cm}{s}$ و از آن‌جا:

$$۴۸۰ = A_۱ v_۱ = (۳ \times r_۱^۲) \times ۱/۶ \Rightarrow r_۱ = ۱۰\ cm$$

۴۹ (علیدوست)- گزینه ۴

ابتدا رابطه خطی بین دماهای دو دماسنج را به‌دست می‌آوریم:

$$x - ۴۰ = \frac{۱۶۰}{۱۰۰}(\theta - ۰) \Rightarrow x = ۱/۶\theta + ۴۰$$

$$x = ۲\theta + ۱۲ \Rightarrow ۲\theta + ۱۲ = ۱/۶\theta + ۴۰ \Rightarrow ۰/۴\theta = ۲۸ \Rightarrow \theta = ۷۰^\circ C$$

۵۰ (حیدری)- گزینه ۳

$$\Delta\ell_A+\Delta\ell_B=10^{-2}m \Rightarrow 2\times3\times10^{-5}\Delta\theta+4\times10^{-5}\Delta\theta=10^{-2}m$$

$$\Rightarrow \Delta\theta=10^{\circ}C \Rightarrow \Delta F=\frac{9}{5}\times10=18^{\circ}F$$

۵۱ (دیارکجوری)- گزینه ۴

مایع دماسنجی باید گرمای ویژه پایینی داشته باشد تا هم سریع‌تر با جسم مورد نظر هم‌دما شود و هم برای رسیدن به دمای تعادل، دمای جسم مورد نظر را کمتر تغییر دهد. از طرفی خوب است مایع دماسنجی ضریب انبساط حجمی بالایی داشته باشد تا با افزایش دما، در لوله دماسنج مقدار قابل توجهی بالا برود.

۵۲ (دیارکجوری)- گزینه ۲

فرض کنید V_1 حجم اولیه جیوه موجود در ظرف است. برای این که حجم فضای خالی ثابت بماند، باید تغییر حجم ظرف و تغییر حجم جیوه با هم برابر باشد:

$$\Delta V_{Hg}=\Delta V_{glass} \Rightarrow V_1\times1/8\times10^{-4}\times\Delta T=40\times3\times9\times10^{-6}\times\Delta T \Rightarrow V_1=6\ cm^3$$

۵۳ (علیدوست)- گزینه ۳

فرض کنید ظرفیت گرمایی گوی C و گرمای ویژه آب c_w است. برای حالت اول داریم:

$$(I):\quad C(40-64)-mc_w(40-\theta)=0 \Rightarrow \frac{C}{mc_w}=\frac{40-\theta}{24}$$

و پس از اضافه کردن $3m$ گرم آب $\frac{\theta}{2}{}^{\circ}C$ به مجموعه و رسیدن به دمای تعادل $20^{\circ}C$، داریم:

$$(II):\quad C(20-40)+mc_w(20-40)+3mc_w(20-\frac{\theta}{2})=0$$

$$mc_w(20-40)+3mc_w(20-\frac{\theta}{2})=20C \Rightarrow -20+3(20-\frac{\theta}{2})=20\frac{C}{mc_w}$$

با جایگذاری $\frac{C}{mc_w}$ از معادله (I) خواهیم داشت:

$$-20+3(20-\frac{\theta}{2})=20\times\frac{40-\theta}{24} \Rightarrow 40-\frac{3\theta}{2}=\frac{5}{6}(40-\theta) \Rightarrow \theta=10^{\circ}C$$

۵۴ (دیارکجوری)- گزینه ۳

فرض کنید M جرم اولیه آب در ظرف، و m جرم نهایی یخ در ظرف باشد. در این‌صورت $(M-m)$ گرم از آب دچار تبخیر سطحی شده است (دقت کنید که در حین رخ دادن تبخیر سطحی آب در این محیط، دمای آب تغییر نمی‌کند). گرمایی که صرف تبخیر سطحی این مقدار آب شده است، از بقیه آب گرفته شده و باعث یخ زدن آن‌ها شده است. پس داریم:

$$(M-m)L_V=mL_F \Rightarrow ML_V=m(L_F+L_V) \Rightarrow \frac{m}{M}=\frac{L_V}{L_F+L_V}$$

۵۵ (حیدری)- گزینه ۴

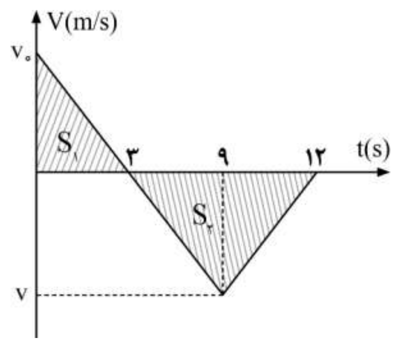
چون نمودار سرعت زمان است، تغییر جهت حرکت در نقاط تقاطع نمودار با محور زمان رخ می‌دهد و با توجه به سهمی بودن شکل نمودار و تقارن ریشه‌ها نسبت به رأس سهمی، ریشه دوم $t = ۱۱s$ است.

۵۶ (حیدری)- گزینه ۲

$$\frac{v_۰}{v} = \frac{۳}{۹-۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow v = ۲v_۰$$

$$S_۱ = \frac{۳ \times v_۰}{۲}$$

$$S_۲ = \frac{۹ \times v}{۲} = \frac{۹ \times ۲v_۰}{۲} = ۹v_۰$$

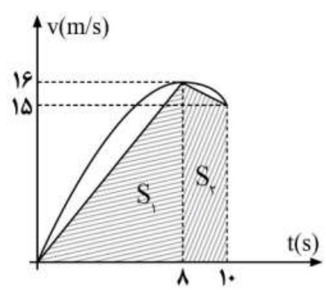


$$\Delta x = v_{av}.\Delta t \Rightarrow S_۲ - S_۱ = ۶/۲۵ \times ۱۲ \Rightarrow ۹v_۰ - ۱/۵v_۰ = ۷۵ \Rightarrow v_۰ = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$a_{av_{۰\to۶}} = a_{av_{۰\to۹}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۲۰-۱۰}{۹} = -\frac{۱۰}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

۵۷ (علیدوست، دیارکجوری)- گزینه ۳

نمودار سرعت ـ زمان این حرکت، یک سهمی محدب است که رأس آن در لحظه $t = ۸s$ قرار دارد. تغییرات سرعت، مساحت زیر نمودار $a-t$ است؛ که از $t = ۰$ تا $t = ۸s$ برابر $۱۶\frac{m}{s}$ و از $t = ۸s$ تا $t = ۱۰s$ برابر $-۱\frac{m}{s}$ است. پس نمودار سرعت ـ زمان، مانند شکل زیر است:



در این نمودار دو نکته مشهود است. اول این که علامت سرعت تغییر نمی‌کند؛ این یعنی جهت حرکت متحرک تغییر نمی‌کند و بنابراین $s_{av} = v_{av}$ است. دوم این که نمودار محدب است، پس مساحت زیر آن حتماً از مساحت قسمت هاشورخورده بیشتر است. مساحت قسمت هاشورخورده عبارت است از:

$$S_۱ + S_۲ = \frac{۸ \times ۱۶}{۲} + \frac{۱۶+۱۵}{۲} \times ۲ = ۶۴ + ۳۱ = ۹۵m$$

بنابراین جابه‌جایی متحرک در این ۱۰ ثانیه حتماً از ۹۵ متر بیشتر است. یعنی: $s_{av} = v_{av} > ۹/۵\frac{m}{s}$

۵۸ (حیدری)- گزینه ۳

در حالت اول داریم:

$$\left.\begin{array}{l} v_A = \dfrac{\Delta x_A}{\Delta t} \\ v_B = \dfrac{\Delta x_B}{\Delta t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{۱۲۰ - ۱۰}{۱۳۰ - ۹۰} = \frac{۱۲۰}{۴۰} = ۳$$

اکنون اگر دو متحرک با همین تندی‌ها در خلاف جهت هم حرکت کنند، فاصله ۸۰ متری بین خود را به نسبت ۳ به ۱ طی می‌کنند تا به هم برسند. یعنی متحرک A به‌اندازه ۶۰ متر در جهت مثبت محور و متحرک B به اندازه ۲۰ متر در جهت منفی محور جابه‌جا می‌شوند و در مکان ۷۰ متر به هم می‌رسند.

۵۹ (محمدپور)- گزینه ۱

اگر $\ell_۱$ و $\ell_۲$ طول قطارها و $d_۰$ فاصله اولیه جلوی آن‌ها از هم باشد، مدت زمانی که از این لحظه طول می‌کشد تا قطارها به‌طور کامل از کنار هم عبور کنند، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta t = \frac{\ell_۱ + \ell_۲ + d_۰}{|v_۱| + |v_۲|} = \frac{۱۰۰ + ۲۰۰ + ۸۰۰}{۳۰ + ۲۰} = ۲۲s$$

$$x_{B_۲} = ۷۰۰ - ۲۰ \times ۲۲۰ = ۲۶۰m$$

۶۰ (دیارکجوری)- گزینه ۴

با مرتب کردن معادله به صورت $x = ۴t^۲ - ۲۸t + ۴۰$ و تطبیق آن با معادله $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$ معلوم می‌شود که حرکت جسم با شتاب ثابت ۸ انجام شده است. پس شتاب متوسط در تمام بازه‌ها ۸ است. برای سرعت متوسط داریم:

$$v_{av_{۰\to۱۰}} = \frac{x_{۱۰} - x_۰}{۱۰ - ۰} = \frac{۱۶۰ - ۴۰}{۱۰} = ۱۲$$

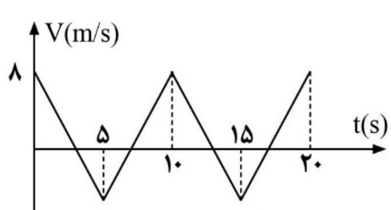
۶۱ (دیارکجوری)- گزینه ۴

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط هر بازه، برابر سرعت لحظه وسط بازه است. پس:

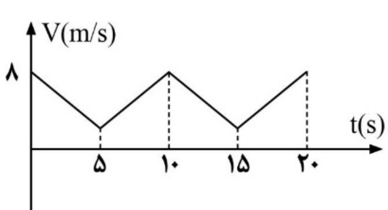
$$v_۳ = v_{av_{۰\to۶}} = \frac{x_۶ - x_۰}{۶} = \frac{-۱۸ - ۲۴}{۶} = -۷\frac{m}{s}$$

۶۲ (علیدوست)- گزینه ۲

از روی نمودار شتاب ـ زمان، فقط تغییرات سرعت برحسب زمان به‌دست می‌آید. بسته به این که سرعت اولیه متحرک چند باشد، نمودار سرعت ـ زمان می‌تواند محور زمان را قطع کند یا نکند:



با تغییر جهت



بدون تغییر جهت

با توجه به دو حالت نمودار:

الف درست است، زیرا شتاب متوسط حتماً صفر است، زیرا $v_0 = v_2$.

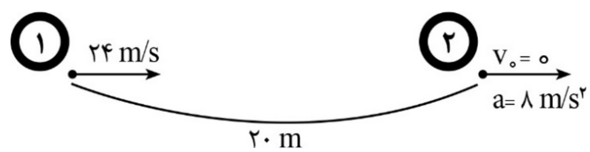
ب نادرست است، زیرا در صورت تغییر جهت حرکت، ۴ بار جهت حرکت تغییر کرده است. در واقع یا تغییر جهتی نداریم یا حتماً ۴ بار تغییر جهت داریم.

ج نادرست است، زیرا سرعت اولیه معلوم نیست و مساحت‌های بالا و پایین محور زمان لزوماً با هم برابر نیستند. پس سرعت متوسط الزاماً صفر نیست.

د درست است، زیرا با توجه به تقارن شیب‌ها، متحرک در هر صورت نیمی از زمان حرکت را تندشونده و نیمی کندشونده طی می‌کند.

۶۳ (حیدری)- گزینه ۴

اگر اتومبیل را با اندیس (۱) و موتورسوار را با اندیس (۲) نشان دهیم، با نوشتن معادلات مکان ـ زمان آن‌ها داریم:



$$x_1 = 24t$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\times 8\times t^2 + 20 = 4t^2 + 20$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 4t^2 + 20 = 24t \Rightarrow t^2 + 5 = 6t \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1s \\ t = 5s \end{cases}$$

اختلاف زمانی این دو سبقت ۴ ثانیه است. فاصله مکانی این دو سبقت را به‌راحتی از جابه‌جایی اتومبیل به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta t = 4s \Rightarrow \Delta x = 4\times 24 = 96\,m$$

۶۴ (حیدری)- گزینه ۱

ابتدا از طریق معادله مستقل از زمان، مسافت طی شده توسط هر متحرک را برحسب شتاب به‌دست می‌آوریم:

$$0 - 25^2 = 2a\,\Delta x_1 \Rightarrow |\Delta x_1| = \frac{625}{2|a|}$$

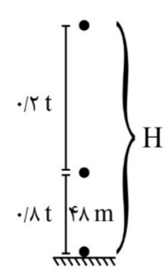
$$0 - 40^2 = 2a\,\Delta x_2 \Rightarrow |\Delta x_2| = \frac{1600}{2|a|}$$

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 445 \Rightarrow \frac{625}{2|a|} + \frac{1600}{2|a|} = 445 \Rightarrow |a| = 2.5\frac{m}{s^2}$$

۶۵ (محمدپور)- گزینه ۳

شتاب سطح سیاره را g فرض می‌کنیم (که البته برابر ۱۰ نیست!!).

$$\left.\begin{aligned} H - 48 &= \frac{1}{2}g(0.2t)^2 \\ H &= \frac{1}{2}g(t)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{H-48}{H} = \left(\frac{0.2t}{t}\right)^2 \Rightarrow \frac{H-48}{H} = \frac{4}{100} \Rightarrow H = 50\,m$$



پاسخنامه درس شیمی

۶۶- گزینه ۳

الف) نادرست: الکل‌ها ((ROH) گروه OH دارند ولی باز محسوب نمی شوند.

ب) نادرست: ۳۰ گرم استیک اسید معادل ۰/۵ مول است ولی این اسید، ضعیف است و نمی‌تواند ۰/۵ مول یون H^+ تولید کند.

پ) درست: با توجه به فرمول فرمیک اسید (HCOOH) نصف H آن خاصیت اسیدی دارند.

ت) نادرست: یکی از نقاط ضعف آرنیوس این بود که: در مورد میزان اسیدی بودن محلول ها نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۶۷- گزینه ۱

برای مقایسه رسانایی محلول ها باید غلظت یون های موجود در محلول ها را مقایسه کرد:

محلول $A: NaOH: ۰/۵\times ۲ = ۱M$

محلول $B: HF: ۲\times ۰/۱\times ۲ = ۰/۴\ M$

محلول $C: CaO: ۰/۵\times ۳ = ۱/۵\ M$

محلول $D: NH_۳: ۴\times ۰/۱\times ۲ = ۰/۸\ M$

در نتیجه رسانایی محلول ها به صورت زیر می‌باشد. $C > A > D > B$

۶۸- گزینه ۲

موارد اول و دوم و سوم درست بیان شده اند.

دلیل نادرستی عبارت آخر: شیب غلظت زمان $SO_۳$ قرینه $SO_۲$ است.

۶۹- گزینه ۳

pH آب برابر ۷ است . با تغییر ۲/۷ واحدی به $pH = ۴/۳$ تغییرمی کند.

$$\left[H^+\right] = ۱۰^{-۴/۳}$$

$$\left[H^+\right] = ۵\times ۱۰^{-۵} \qquad ۱۰L\times\frac{۵\times۱۰^{-۵}molH^+}{۱L}\times\frac{۱molN_۲O_۵}{۲molH^+}\times\frac{۱۰۸g}{۱mol}\times\frac{۱۰۰}{۵۴} = ۰/۰۵g$$

۷۰- گزینه ۱

موارد ذکر شده در صورت سوال نشان دهنده باز ضعیف است که در بین مواد ذکر شده فقط آمونیاک و متیل آمین باز ضعیف هستند.

۷۱- گزینه ۳

ابتدا مول H^+ موجود در محلول HA را محاسبه می کنیم.

$$Ka = \frac{\left[H^+\right]^۲}{M-\left[H^+\right]} \Rightarrow \left[H^+\right] = \sqrt{۱۰^{-۵}\times ۰/۴} = ۲\times ۱۰^{-۳}\ \frac{mol}{L}$$

$$mol\ HA: ۲\times ۱۰^{-۳}\times ۲ = ۴\times ۱۰^{-۳}$$

در ادامه مول آنیون موجود در محلول HCl را محاسبه می کنیم.

$$۲۰g\times\frac{۳۶/۵}{۱۰۰}\times\frac{۱molCl^-}{۳۶/۵gHCl} = ۰/۲mol\ Cl^-$$

در نهایت: $\frac{۴\times ۱۰^{-۳}}{۲\times ۱۰^{-۱}} = ۰/۰۲$

۷۲- گزینه ۲

$$ka=\frac{M\alpha^{۲}}{۱-\alpha}=\frac{۴\times ۱۰^{-۲}\times \frac{۱}{۱۶}}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۳}\times ۱۰^{-۲}=۳/۳\times ۱۰^{-۳}$$

۷۳- گزینه ۴

بررسی گزینه ها

۱) pH دو محلول برابر است

۲) رسانایی الکتریکی دو محلول برابر است.

۳) درجه یونش HA بزرگتر است.

۷۴- گزینه ۳

بررسی گزینه ها

۱) تغییرات H^{+} , OH^{-} با ورود اسید به یک نسبت رخ می دهد.

۲) با افزایش دما غلظت H^{+} آب افزایش می یابد در نتیجه pH کاهش می یابد.

۳) اگر غلظت OH^{-} ۰/۰۱ مقدار اولیه شود یعنی $\left[OH^{-}\right]=۱۰^{-۹}$ در نتیجه $\left[H^{+}\right]=۱۰^{-۵}$ می‌شود و $pH=۵$ می‌شود.

۴) اگر غلظت یک اسید خیلی ضعیف ۴ برابر رقیق شود درجه یونش ۲ واحد افزایش می یابد.

۷۵- گزینه ۱

فقط عبارت دوم نادرست هست.

بررسی عبارت ها

عبارت اول درست: $\frac{\alpha HA}{\alpha HB}=\sqrt{\frac{KHA}{KHB}}=\sqrt{\frac{۳/۲\times ۱۰^{-۵}}{۰/۸\times ۱۰^{-۵}}}=۲$

عبارت دوم نادرست: اسید HA نسبت به HB قوی تر است درنتیجه غلظت آنیون ها در ظرف HA از HB بیشتر است.

عبارت سوم درست: غلظت یون ها در ظرف HA بیشتر است درنتیجه میزان رسانایی آن نیز بیشتر است.

عبارت چهارم درست:

۷۶- گزینه ۳

موارد الف، ب و ت درست هستند.

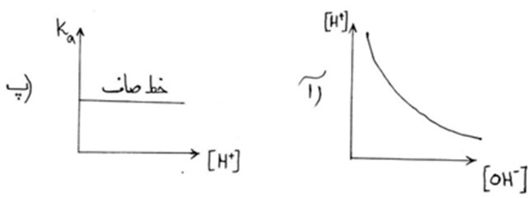
بررسی عبارت پ:

شوینده‌ها آلاینده ها و موادی نظیر وازلین را در آب پخش می کنند.

۷۷- گزینه ۱

نمودارهای ب و پ درست رسم شده اند.

شکل صحیح نمودارهای الف و ت به صورت روبرو است.



۷۸- گزینه ۱

بررسی گزینه ها

۱) درست: غلظت اسید در A بیشتر است و در اثر واکنش با منیزیم گاز $H_۲$ بیشتری تولید می‌کند.

۲) نادرست: رسانایی الکتریکی دو ظرف برابر است.

۳) نادرست: سرعت واکنش در دو ظرف برابر است.

۴) نادرست: مجموع غلظت گونه ها در ظرف A بیشتر است.

۷۹- گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l}[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}\\ \dfrac{[H^+]}{[OH^-]}=۴\times۱۰^{۸}\end{array}\right\}[H^+]=۲\times۱۰^{-۳}$$

$$Ka=\frac{[H^+]^۲}{M}=\frac{۴\times۱۰^{-۶}}{۰/۱}=۴\times۱۰^{-۵}\ \frac{mol}{L}$$

۸۰- گزینه ۱

غلظت مولکول‌های یونیده نشده در یک اسید قوی کمترین مقدار ممکن و غلظت یون‌های حاصل از یونش یک اسید قوی بیشترین مقدار ممکن است. پس گزینه‌ای درست است که در آن دو اسید قوی داشته باشیم.

۸۱- گزینه ۲

به ازای یونش هر BOH به تعداد B^+ و OH^- ایجاد می شود. ابتدا تعداد BOH های یونیده شده را محاسبه می کنیم:

تعداد BOH یونیده شده : $۲۰۰\times۳/۵\times۱۰^{-۲}=۷$

پس کل ذرات موجود در آب را محاسبه می کنیم:

$$\text{تعداد کل}=\underbrace{(۲۰۰-۷)}_{BOH}+\underbrace{۷}_{B^+}+\underbrace{۷}_{OH^-}=۲۰۷$$

۸۲- گزینه ۴

نادرستی عبارت (ب): برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک (CaO) اضافه می کنند.

نادرستی عبارت (پ): اغلب فلزها با اسیدها واکنش می دهند.

۸۳- گزینه ۲

در حالت تعادل سرعت واکنش رفت و برگشت برابر است، اما سرعت مواد موجود در واکنش می توانند متفاوت باشد.

۸۴- گزینه ۱

فرمول پاک کننده‌ی صابونی با زنجیر هیدروکربنی دارای یک پیوند دوگانه: $C_nH_{۲n-۳}O_۲Na$, $C_{۱۸}H_{۳۳}O_۲Na$

فرمول پاک کننده‌ی غیر صابونی با زنجیر الکیل: $C_nH_{۲n+۱}C_۶H_۴SO_۳Na$, $C_{۱۲}H_{۲۵}C_۶H_۴SO_۳Na$

۸۵- گزینه ۲

$$۲C_{۱۸}H_{۳۵}O_{۲}Na_{(aq)} + Ca^{۲+}{}_{(aq)} \rightarrow (C_{۱۸}H_{۳۵}O_{۲})_{۲}Ca_{(s)} + ۲Na^{+}{}_{(aq)}$$

$$۱۲۱/۲g(C_{۱۸}H_{۳۵}O_{۲})_{۲}Ca \times \frac{۱mol(C_{۱۸}H_{۳۵}O_{۲})_{۲}Ca}{۶۰۶g(C_{۱۸}H_{۳۵}O_{۲})_{۲}Ca} \times \frac{۲mol}{۱mol} \times \frac{۳۰۶}{۱mol} = ۱۲۲/۴g$$

$$\text{صابون} + \text{غیرصابون} = ۳۰۰g \Rightarrow \text{غیرصابون} = ۱۷۷/۶g$$

$$\%\ \text{غیرصابون} = \frac{۱۷۷/۶}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ۵۹/۲\%$$

$$۱۲۱/۲g\ \text{رسوب} \times \frac{۱mol\ \text{رسوب}}{۶۰۶g\ \text{رسوب}} \times \frac{۱molCa^{۲+}}{۱mol\ \text{رسوب}} \times \frac{۴۰gCa^{۲+}}{۱molCa^{۲+}} = ۸gCa^{۲+}$$

$$ppm\,Ca^{۲+} = \frac{۸g}{۱۰۰۰۰} \times ۱۰^{۶} = ۸۰۰\ ppm$$