



آزمون مرحله (دهم) آلفا دفترچه شماره (۱)

۱۴۰۴ - ۱۴۰۵

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۴/۱۲/۲۰

دوازدهم ریاضی

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سوال	مواد امتحانی	ردیف
۱۳۶	۷۰	۱	۷۰	ریاضیات	۱

نکات مهم پیش از شروع آزمون:

- از پاسخ دادن به سوالات بدون مطالعه کامل صورت سؤال خودداری کنید.
- زمان را مدیریت کنید.
- لطفاً پس از پایان آزمون پاسخنامه را بررسی نمایید.

هرگونه کپی برداری، بازنشر یا چاپ این فایل بدون کسب اجازه کتبی از ناشر ممنوع بوده و پیگرد قانونی دارد.

۱. اگر تابع $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x + n$ در بازه $[-2, -1]$ نزولی اکید باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m > \frac{15}{4}$ (۲) $m > \frac{15}{2}$ (۳) $m > 3$ (۴) $m < -3$

۲. تابع با ضابطه $y = \frac{mx+1}{2x-m-3}$ در بازه $(2, +\infty)$ نزولی اکید است. حدود m کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -2] \cup (0, 1]$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $(-\infty, -2)$ (۴) $(-\infty, -2) \cup (-1, 1]$

۳. اگر $y = \frac{ax+1}{x^2+b}$ با دامنه \mathbb{R} در نقطه $A(-1, 1)$ دارای نقطه عطف باشد، مجموع طول نقاط بحرانی تابع f کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) 1 (۴) صفر

۴. f تابعی است که در \mathbb{R} مشتق پذیر و همواره منفی است. اگر تابع $g(x) = xf(x)$ در \mathbb{R} صعودی باشد، کدام گزینه می تواند درست باشد؟

- (۱) $f'(-2) = 1$ (۲) $f'(0) = 3$ (۳) $f'(1) = -3$ (۴) $f'(-3) = -1$

۵. اگر نقطه بحرانی تابع $f(x) = x + \frac{a}{x} + 1$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 6

محل محاسبات:

۶. مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = x^2 |x-1|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{4}{27}$ (۳) $\frac{1}{27}$ (۴) $\frac{4}{9}$

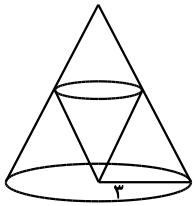
۷. مقدار m کدام باشد تا شیب خطی که نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + m$ را به هم وصل می‌کند، برابر ۲- باشد؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) هیچ مقدار m (۴) هر مقدار m

۸. به‌ازای چند مقدار صحیح و منفی k ، نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (2k-1)x^2$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۹. مطابق شکل، درون مخروطی با شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶، مخروط دیگری محاط شده است. بیشترین حجم این مخروط محاط‌شده کدام است؟



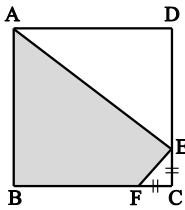
- (۱) 2π (۲) $\frac{4\pi}{3}$ (۳) $\frac{8\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{3}$

۱۰. اگر مستطیل محصور بین خط $y = -2x + 6$ و محورهای مختصات در ناحیه اول را حول محور دوران دهیم، بیشترین حجم شکل حاصل از دوران می‌باشد.

- (۱) محور x ها - 8π (۲) محور x ها - 16π (۳) محور y ها - 8π (۴) محور y ها - 16π

محل محاسبات:

۱۱. مربع ABCD به ضلع ۲ واحد و $EC = FC$ است. بیشترین مساحت چهار ضلعی ABFE چند واحد مربع است؟



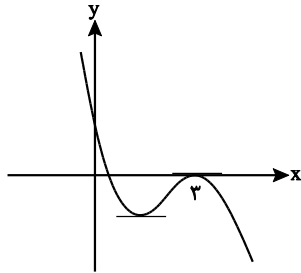
۲ (۱)

$\frac{12}{5}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۴)

۱۲. به ازای چند مقدار طبیعی n نمودار تابع $f(x) = (x-m)^2(n-x)$ به صورت زیر است؟



۲ (۱)

۱ (۲)

۳ (۳)

هیچ مقدار (۴)

۱۳. اگر کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 3x + m$ برابر $\frac{9}{4}$ باشد، آن گاه معادله محور تقارن سهمی $y = 2x^2 - (3m-1)x + 4$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴. جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = (2a+3)x^2 + (5b-6)x + 3c+1$ به صورت زیر است. اگر b عددی طبیعی باشد، مقدار

x		a	
P(x)		+	-

۲/۴ (۴)

۲ (۳)

۱/۸ (۲)

کدام است $\frac{a}{c}$ ؟

۱/۵ (۱)

محل محاسبات:

۱۵. اگر $\alpha = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-1}$ و $\beta = \sqrt[4]{2\sqrt{3}+1}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

(۱) $4\sqrt{3} + \sqrt{11}$ (۲) $4\sqrt{3} - \sqrt{11}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{11}$

۱۶. از بین ۷۲ دانش آموز یک کلاس، ۴۵ نفر به ورزش فوتبال و ۳۹ نفر به ورزش والیبال علاقه مند هستند. اگر ۵۱ نفر حداقل به یکی از این دو ورزش علاقه مند باشند، چند نفر فقط به فوتبال علاقه مند هستند؟

(۱) ۳۳ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۲۷

۱۷. اگر a, b, c سه جمله متوالی و متمایز از یک دنباله حسابی باشند و سه عدد $\frac{1}{2b}, \frac{1}{a}$ و $\frac{1}{2c}$ از راست به چپ سه جمله

نخست از یک دنباله هندسی باشند، مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله هندسی کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) -1 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۸. اگر θ در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan \theta - \cot \theta$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{17}}{4}$ (۲) $-\frac{\sqrt{17}}{12}$ (۳) $-\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{17}}{6}$

۱۹. اگر f تابعی خطی باشد و رابطه $f(2x+2) = f(3x+4) + 3f(x-1)$ برقرار باشد و $f(2) = -1$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -3 (۳) صفر (۴) ۲

۲۰. برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; 0 \leq x \leq 2 \\ |x+1| & ; -2 \leq x < 0 \end{cases}$ به صورت $[a, b]$ می باشد، حاصل $f(b) - f(a)$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -2

محل محاسبات:

۲۱. آماره کدام گزینه است؟

- (۱) مقدار آن با پارامتر برابر نیست.
- (۲) یک مشخصه عددی است که توصیف کننده‌ی جنبه‌های خاص از جامعه است.
- (۳) فقط در صورتی که کل داده‌های جامعه در اختیار باشد، قابل محاسبه است.
- (۴) مربوط به نمونه است و از یک نمونه به یک نمونه دیگر قابل تغییر است.

۲۲. کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر احتمالی نیست؟

- (۱) در کارخانه‌ای از هر ۲۰۰ محصول تولیدی، ۷ قلم برای بررسی انتخاب شوند.
 - (۲) برای بررسی وضعیت دهان و دندان دانش‌آموزان شهر تهران از مدارس مناطق ۱۳ و ۱۴ بررسی به عمل آید.
 - (۳) برای استعدادیابی ورزشی در یک مدرسه، از ۲۵ نفر اول ثبت‌نام کننده مصاحبه به عمل آید.
 - (۴) برای بررسی تعداد خانوار در ناحیه‌ای، چند تا از بلوک‌ها را انتخاب کرده و در هر بلوک از چند خانوار تعدادشان را می‌پرسیم.
۲۳. در یک نمونه‌گیری سامانمند از بین ۶۱۶ نفر، نفرات «بیست و هشتم» و «صد و چهلیم» انتخاب شده‌اند. تعداد اعضای نمونه

کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۱۵۴ (۲) ۷۷ (۳) ۲۲ (۴) ۳۳

۲۴. از جامعه‌ای با واریانس ۱۶، نمونه‌هایی به اندازه‌ی ۶۲۵ انتخاب می‌کنیم. انحراف معیار میانگین نمونه‌ها چقدر است؟

(۱) ۰/۶۴ (۲) ۰/۳۲ (۳) ۰/۱۶ (۴) ۰/۰۸

۲۵. جامعه‌ای با واریانس ۱۰ مفروض است. نمونه‌ای به صورت $\{۳, ۴, ۶, ۷\}$ انتخاب می‌کنیم. بازه‌ی اطمینان بالای ۹۵ درصد برای

میانگین جامعه چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۵

محل محاسبات:

۲۶. در جامعه‌ای به صورت $\{۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳\}$ ، در نمونه‌های ۳ تایی و ۲ تایی آن، چند مقدار مختلف برای برآورد میانگین جامعه وجود دارد؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۲۷. اگر در جامعه‌ای احتمال انتخاب نمونه $\{۷, ۹, ۱۱\}$ از بین نمونه‌های ۳ تایی برابر $۰/۱$ باشد، احتمال انتخاب نمونه $\{۵, ۷, ۹, ۱۱\}$

از بین نمونه‌های ۴ تایی کدام است؟

- ۰/۱ (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴)

۲۸. از بین اعداد $۱, ۳, ۵, \dots, ۲n + ۷$ ، پنج عدد $۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, ۱۳$ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. برآورد نقطه‌ای n به کمک میانگین

کدام است؟

- ۷ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۲۹. اگر حد بالا و پایین بازه اطمینان بالای ۹۵ درصد برای میانگین جامعه برابر ۱۸ و ۱۰ باشند و اندازه نمونه تصادفی برابر ۸۱

باشد، در آن صورت نسبت مجموع داده‌های نمونه به واریانس جامعه کدام است؟

- ۳ (۱) ۳/۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴)

۳۰. در جامعه‌ای به صورت $\{۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳\}$ ، احتمال آنکه نمونه‌ی ۲ تایی برای میانگین جامعه، برآوردی با خطای ۱ داشته باشد،

چقدر است؟

- ۰/۳ (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۵ (۴)

محل محاسبات:

۳۱. در چند مورد زیر با معلومات داده شده، شکل هندسی قابل رسم نیست؟

الف) طول قطر مستطیل ۴ و طول ضلع $\sqrt{5}$

ب) دو قطر متوازی الاضلاع ۱۸ و ۲۰ و طول یک ضلع برابر ۱۹

ج) دو ضلع مثلث ABC ، $AB = 8$ و $AC = 10$ و ارتفاع $AH = 6$

د) دو ضلع مثلث ABC ، $AB = 8$ و $AC = 12$ و زاویه $\hat{C} = 60^\circ$

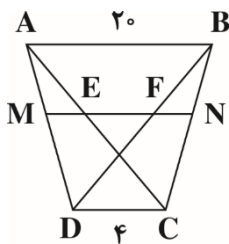
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۲. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، طول وتر $BC = 16$ و $\hat{B} = 60^\circ$ است. میانه BM را رسم می‌کنیم، از رأس C بر

امتداد میانه BM عمود می‌کنیم و H می‌نامیم. حاصل $\frac{S_{\triangle MHC}}{S_{\triangle ABC}}$ کدام است؟

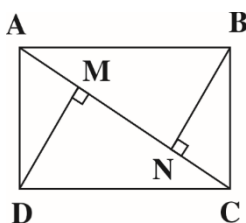
- (۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{3}{14}$ (۳) $\frac{5}{7}$ (۴) $\frac{5}{14}$

۳۳. در شکل زیر $AB \parallel MN \parallel DC$ است. اگر $\frac{AM}{AD} = \frac{2}{8}$ باشد، آنگاه حاصل $2ME + FN + 2EN + FM$ کدام است؟



- (۱) ۴۲ (۲) ۳۹ (۳) ۴۸ (۴) ۳۶

۳۴. در شکل زیر، $ABCD$ مستطیل است. اگر $AM = 4$ و $MN = 8$ ، حاصل $S_{\triangle BNC} + S_{ABCD}$ کدام است؟



- (۱) $54\sqrt{3}$ (۲) $63\sqrt{3}$ (۳) $72\sqrt{3}$ (۴) $81\sqrt{3}$

محل محاسبات:

۳۵. در متوازی الاضلاع ABCD داریم $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{2}$ و $\hat{A} = 120^\circ$. نیمسازهای زوایای داخلی را رسم می‌کنیم تا چهارضلعی MNPQ با مساحت $16\sqrt{3}$ به دست آید. سپس وسط اضلاع چهارضلعی MNPQ را به هم وصل می‌کنیم تا چهارضلعی

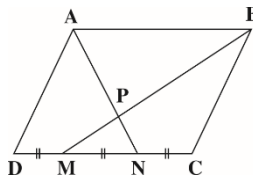
$M'N'P'Q'$ ایجاد شود. حاصل $\frac{S_{ABCD}}{S_{M'N'P'Q'}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{40}{3}$ (۲) $\frac{40}{9}$ (۳) $\frac{20}{3}$ (۴) $\frac{20}{9}$

۳۶. در مثلث ABC، دو میانه به طول‌های $3\sqrt{5}$ و ۶ بر هم عمودند. طول میانه سوم این مثلث کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۳۷. در متوازی الاضلاع زیر، ضلع CD به سه قسمت یکسان تقسیم شده است. حاصل $\frac{S_{\triangle APB} - S_{PNCB}}{S_{APMD} - S_{\triangle MNP}}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۸. مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای، واسطه حسابی بین تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی آن است. کمترین مساحت

ممکن برای این چند ضلعی کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۹. در یک چهار وجهی منتظم، از وسط هر یال آن صفحه‌ای موازی وجه مقابل می‌گذرانیم تا چهار هرم کوچکتر، از چهار وجهی

مفروض جدا کند. اگر حجم چهاروجهی اولیه ۲۰ باشد، حجم جسم باقیمانده کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۵ (۳) ۱۰ (۴) $\frac{7}{5}$

۴۰. کدام گزینه در فضا همواره درست است؟

(۱) از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، بیشمار صفحه عمود بر آن صفحه می‌توان عبور داد.

(۲) از هر سه نقطه متمایز تنها یک صفحه عبور می‌کند.

(۳) دو نقطه A و B روی خط d و دو نقطه M و N روی خط d' قرار دارند اگر d و d' متناظر باشند، آنگاه دو خط AM و BN الزاماً متناظرند.

(۴) از دو خط موازی و متمایز d و d'، ممکن است بیش از یک صفحه عبور کند.

محل محاسبات:

۴۱. اگر $\hat{B} = 60^\circ$ ، $\hat{C} = 75^\circ$ و $BC = 6$ باشد، آنگاه مساحت دایره‌ی محیطی مثلث ABC کدام است؟

- (۱) 6π (۲) 9π (۳) 18π (۴) 12π

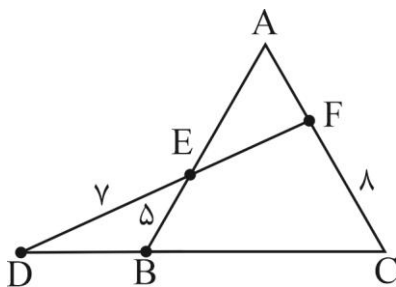
۴۲. در مثلث ABC ، AM میانه وارد بر ضلع BC و ME و MF به ترتیب نیمسازهای زوایای $\hat{A}MC$ و $\hat{A}MB$ و D محل برخورد EF و میانه AM است. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\frac{EF}{MD} = 2$ (۲) $EF \parallel BC$ (۳) $\frac{AB}{AF} - \frac{BM}{AM} = 1$ (۴) $\frac{MC}{DE} - \frac{AE}{EC} = 1$

۴۳. در لوزی $ABCD$ ، نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. اگر طول قطر بزرگ ۲ برابر طول قطر کوچک باشد، نسبت $\frac{AM}{MC}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2/6}$ (۲) $\sqrt{2/4}$ (۳) $\sqrt{2/8}$ (۴) $\sqrt{2/2}$

۴۴. در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین ($AB = AC$) است. اندازه EF کدام است؟

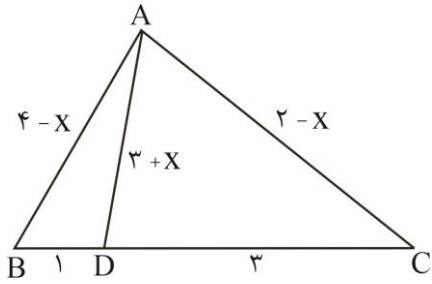


- (۱) $4/2$ (۲) $4/3$ (۳) $4/1$ (۴) $4/4$

۴۵. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با قطرهای $AC = 7$ و $BD = 9$ ، اندازه‌ی یکی از اضلاع $2\sqrt{10}$ است. اندازه‌ی ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) $4/5$ (۲) 5 (۳) $5/5$ (۴) 6

محل محاسبات:



۴۶. با توجه به شکل مقابل، مقدار $\frac{AD}{AC}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
- (۲) $\frac{1}{8}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

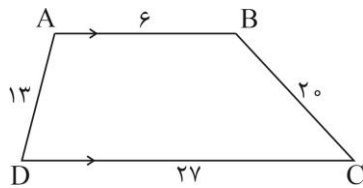
۴۷. در مثلث ABC داریم $BC = 12$ ، $AC = 7$ و $\hat{A} = 2\hat{C}$. اگر AD نیمساز زاویه A باشد، در این صورت طول نیمساز AD کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{25}$
- (۲) $\frac{5}{6}$
- (۳) $\frac{5}{4}$
- (۴) $\frac{5}{75}$

۴۸. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول وتر $3\sqrt{10}$ و طول نیمساز زاویه قائمه این مثلث برابر ۴ است. اگر نسبت اضلاع قائمه‌ی این مثلث برابر ۲ باشد، مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۸
- (۲) ۱۲
- (۳) ۲۴
- (۴) ۳۶

۴۹. در ذوزنقه‌ی زیر، مساحت مثلث BCD کدام است؟



- (۱) $\frac{148}{5}$
- (۲) ۱۶۲
- (۳) ۱۸۹
- (۴) $\frac{175}{5}$

۵۰. میانه‌های مثلث ABC برابر ۱۲، ۱۶ و ۲۰ است. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۲۴
- (۲) ۱۴۴
- (۳) ۱۲۸
- (۴) ۱۴۸

محل محاسبات:

۵۱. نقاط $A(4, 4, 2)$ ، $B(4, -6, -3)$ مفروض هستند. اگر $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ باشد، M' قرینه نقطه M نسبت به صفحه xOz و M''

قرینه نقطه M نسبت به محور x ها باشد، مقدار $|M'M''|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۵۲. اگر نقاط $A(n, 3, 2)$ ، $B(-1, m, -13)$ و $C(4, 1, -3)$ روی یک خط راست باشند، حاصل $m+n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{7}{2}$

۵۳. اگر زاویه بین دو بردار هم‌اندازه \vec{a} و \vec{b} برابر 120° باشد، زاویه بین بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $2\vec{a}+4\vec{b}$ کدام است؟

- (۱) 30° (۲) 150° (۳) 60° (۴) 120°

۵۴. اگر $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ و زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر 60° باشد، آنگاه اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{a}-\vec{b}$ چند برابر

اندازه بردار \vec{b} است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۵۵. اگر $|\vec{a}|=3$ ، $|\vec{b}|=1$ و $\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$ باشند، در این صورت حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

محل محاسبات:

۵۶. اگر x, y, z اعداد حقیقی باشند به طوری که $2x + 3y + 3z = 10$ ، آنگاه کم‌ترین مقدار $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$ کدام است؟

- ۳/۵ (۱) ۴/۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶/۵ (۴)

۵۷. اگر $|\vec{a}|=8, |\vec{b}|=10, |\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})|=48$ باشند و زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} منفرجه باشد، حاصل $|\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})| + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ کدام است؟

- ۴۸ (۱) ۲۴ (۲) ۹۶ (۳) ۱۲۰ (۴)

۵۸. اگر \vec{i}, \vec{j} و \vec{k} بردارهای یک‌محورهای مختصات باشند، با توجه به عبارت زیر حاصل $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ کدام است؟

$$\vec{k} \times (\vec{j} + \vec{i}) - (3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}))\vec{k} + (\vec{i} \times (\vec{k} \times \vec{i})) \times \vec{j} = a\vec{i} - b\vec{j} + c\vec{k}$$

- ۳ (۱) -۱ (۲) ۷ (۳) -۵ (۴)

۵۹. اگر نقاط $A(-9, -1, 2), B(-1, 1, 0), C(1, 2, 1), D(0, 1, m)$ در یک صفحه باشند، آنگاه m کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)

۶۰. سه بردار $\vec{a} = (m, -5, 1), \vec{b} = (4, 1, n)$ و $\vec{c} = (2, h, -7)$ مفروض‌اند. اگر $\vec{a} \perp \vec{b}$ و $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ باشد، حجم متوازی السطوح بنا

شده بر این سه بردار کدام است؟

- ۱۸۹ (۱) ۵۴ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۶۲ (۴)

محل محاسبات:

۶۱. با اعمال جایگشت اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از مربع لاتین A به ترتیب با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ در مربع لاتین B حاصل شده است. اگر در مربع لاتین A درایه‌های $a_{۳۳} = ۱$ و $a_{۳۴} = ۳$ و در مربع لاتین B درایه‌های $b_{۱۲} = ۴$ و $b_{۳۱} = ۲$ باشند، در این صورت مجموع درایه‌های $a_{۲۲}$ و $a_{۱۴}$ در مربع لاتین A چقدر از مجموع درایه‌های $b_{۴۱}$ و $b_{۳۳}$ در مربع لاتین B بیشتر است؟ (درایه a_{ij} یعنی عددی که در سطر iام و ستون jام از مربع A قرار دارد).

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۶۲. در مربع لاتین زیر، کمترین مقدار $a + b + c$ چقدر است؟

a			
	۱	۲	
		۳	b
	c		۴

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۳. دو مربع لاتین A و B از مرتبه ۴، متعامدند. اگر در مربع A درایه‌های $a_{۱۱} = ۴$ ، $a_{۲۱} = ۱$ ، $a_{۲۲} = ۲$ ، $a_{۲۳} = ۳$ و در مربع B درایه‌های $b_{۳۴} = ۴$ ، $b_{۲۲} = ۴$ ، $b_{۱۴} = ۱$ و $b_{۴۱} = ۲$ باشند، در این صورت مجموع درایه‌های $a_{۱۲}$ ، $a_{۲۳}$ ، $b_{۲۳}$ و $b_{۳۱}$ کدام است؟ (درایه a_{ij} یعنی عددی که در سطر iام و ستون jام از مربع A قرار دارد).

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶

۶۴. به چند طریق می‌توان در یک مربع لاتین مرتبه ۴، دو درایه که دارای اعداد متمایز هستند را انتخاب کرد؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۹۶ (۳) ۷۲ (۴) ۱۲۰

۶۵. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = ۱۲$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $۲ \leq x_1 \leq ۶$ و $۱ \leq x_2 \leq ۴$ باشد؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

محل محاسبات:

۶۶. در چند جایگشت از حروف کلمه NAVID هیچ یک از حروف D، N و V در جای اصلی خود قرار ندارند؟

- ۶۲ (۱) ۶۴ (۲) ۶۶ (۳) ۶۸ (۴)

۶۷. چند تابع پوشا مانند f از $A = \{a, b, c, d, e\}$ به $B = \{1, 2, 3\}$ می توان تعریف کرد که $f(a) = f(b)$ باشد؟

- ۳۲ (۱) ۳۶ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴)

۶۸. چند تابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ می توان نوشت که هم پوشا و هم یک به یک

باشد و فقط سه عضو به عضو هم شماره خود متناظر شود؟

- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

۶۹. از بازه $(0, 6)$ ، حداقل چند عدد حقیقی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم جزء صحیح حداقل ۸ تا از آن ها با هم برابر باشد؟

- ۴۴ (۱) ۴۳ (۲) ۴۹ (۳) ۵۰ (۴)

۷۰. در مجموعه $\{100, 101, \dots, 300\}$ چند عدد a وجود دارد که به ازای آن ها معادله $ax + 35y = 1$ جواب داشته باشد؟

- ۱۳۷ (۱) ۱۳۸ (۲) ۱۳۹ (۳) ۱۴۰ (۴)

محل محاسبات:



آزمون مرحله (دهم) آلفا دفترچه شماره (۲)

۱۴۰۴ - ۱۴۰۵

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۴/۱۲/۲۰

دوازدهم ریاضی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	فیزیک	۲۰	۷۱	۹۰	۳۰
۲	شیمی	۳۰	۹۱	۱۲۰	۳۰

نکات مهم پیش از شروع آزمون:

- از پاسخ دادن به سوالات بدون مطالعه کامل صورت سؤال خودداری کنید.
- زمان را مدیریت کنید.
- لطفاً پس از پایان آزمون پاسخنامه را بررسی نمایید.

هرگونه کپی برداری، بازنشر یا چاپ این فایل بدون کسب اجازه کتبی از ناشر ممنوع بوده و پیگرد قانونی دارد.

۷۱. کدام گزینه درباره ساختار هسته اتم درست است؟

- (۱) پروتون‌ها تنها به دلیل نیروی گرانشی در هسته کنار هم می‌مانند.
- (۲) تعداد نوترون‌ها همیشه با تعداد پروتون‌ها برابر است.
- (۳) نیروی هسته‌ای به بار نوکلئون‌ها بستگی دارد.
- (۴) ویژگی‌های هسته را تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن تعیین می‌کند.

۷۲. درباره ایزوتوپ‌های یک عنصر، کدام گزینه درست است؟

- (۱) عدد جرمی برابر دارند.
- (۲) خواص شیمیایی متفاوت دارند.
- (۳) عدد اتمی برابر دارند.
- (۴) تعداد نوترون‌های برابر دارند.

۷۳. کدام عبارت‌های زیر در مورد پرتوزایی طبیعی، نادرست است؟

- الف: در واپاشی‌ای که در آشکارساز دود صورت می‌گیرد، عدد اتمی و عدد نوترونی هر کدام دو واحد کاهش می‌یابند.
 ب: در واپاشی بتای منفی، عدد اتمی هسته دختر، یک واحد کمتر از عدد اتمی هسته مادر است.
 ج: در واپاشی بتای مثبت، یک پروتون هسته مادر به نوترون و پوزیترون تبدیل می‌شود.
 د: وقتی یک هسته برانگیخته با گسیل پرتوی گاما به هسته پایدار تبدیل می‌شود، با ورقه سربی به ضخامت 0.1 mm می‌توان جلوی نفوذ این پرتو را گرفت.

- (۱) الف - ت (۲) الف - ج (۳) ب - ج (۴) ب - د

۷۴. دو ماده پرتوزای A و B با تعداد هسته‌های اولیه یکسان، به ترتیب دارای نیمه‌عمر ۳ ساعت و ۶ ساعت هستند. پس از ۱۲ ساعت، نسبت هسته‌های فعال باقی‌مانده A به B چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۵. کدام دو عنصر را می‌توان به روش‌های شیمیایی جدا کرد؟

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (A) ${}_{25}^{59}\text{X}$ | (B) ${}_{25}^{61}\text{X}$ | (C) ${}_{26}^{61}\text{Y}$ |
| (۱) A و B | (۲) A و C | (۳) B و C |
- (۴) گزینه ۲ و ۳

محل محاسبات:

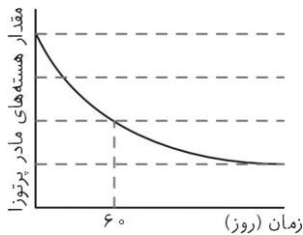
۷۶. سرب ${}_{82}^{207}\text{Pb}$ هسته دختر پایداری است که می تواند از واپاشی α یا β^- حاصل شود. اختلاف تعداد نوترون های هسته مادر هر یک از این واکنش ها کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۷۷. نپتونیم ${}_{93}^{237}\text{Np}$ ایزوتوپی است که در راکتورهای هسته ای تولید شده و این هسته ناپایدار است و با گسیل یک ذره β و تعدادی ذره α به هسته دختر ${}_{88}^A\text{Ra}$ تبدیل می شود. به ترتیب از راست به چپ تعداد هسته های α گسیل شده و عدد جرمی Ra کدام است؟

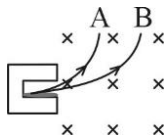
- ۲۲۴-۲ (۱) ۲۲۵-۲ (۲) ۲۲۴-۳ (۳) ۲۲۵-۳ (۴)

۷۸. شکل زیر نمودار هسته های مادر پرتوزای ماده ای بر حسب زمان است. پس از چند روز ۹۳/۷۵ درصد از این ماده واپاشی می شود؟



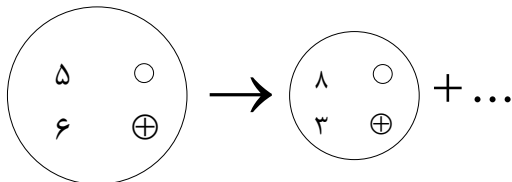
- ۹۰ (۱)
۱۲۰ (۲)
۱۸۰ (۳)
۲۴۰ (۴)

۷۹. شکل زیر پوزیترون و α گسیل شده از یک ماده پرتوزا را نشان می دهد. عدد جرمی این ماده به دلیل گسیل پرتو تغییر می کند و پرتوی A مربوط به پرتوی گسیلی است.



- (۱) α - B پوزیترون - B (۲)
(۳) α - A پوزیترون - A (۴)

۸۰. شکل روبه رو واپاشی کربن ناپایداری را نشان می دهد. در این فرایند کدام پرتوها گسیل می شود؟

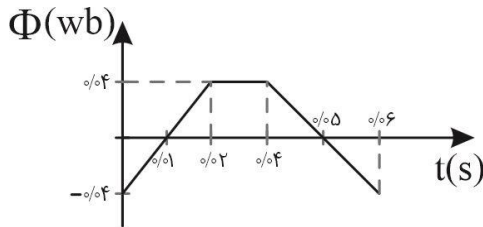


- (۱) $2\beta^-$
(۲) $3\beta^-$
(۳) $2\beta^+$
(۴) $3\beta^+$

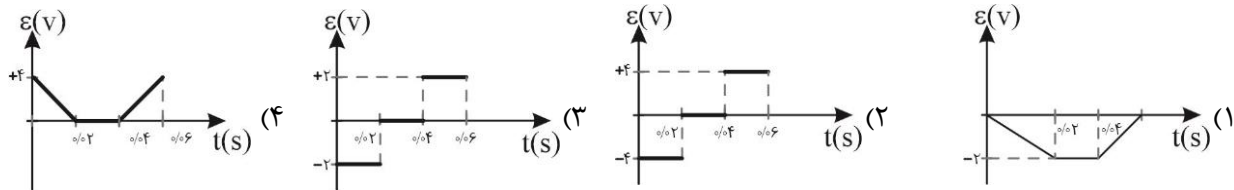
محل محاسبات:

۸۱. حلقه‌ای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دارد. اگر مساحت حلقه دو برابر و زاویه بین سطح حلقه با میدان از 90° به 60° تغییر کند، شار مغناطیسی عبوری از حلقه چند برابر حالت اول می‌شود؟

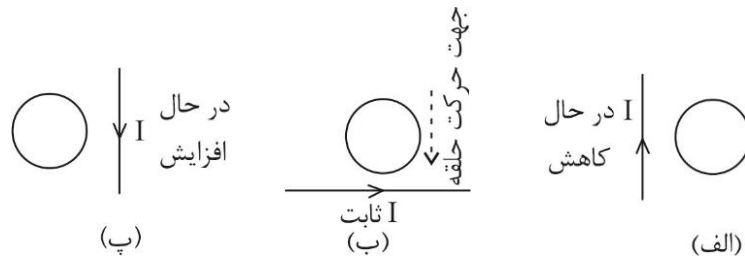
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$



۸۲. نمودار شار مغناطیسی - گذرنده از یک حلقه بسته بر حسب زمان در شکل مقابل نشان داده شده است. نمودار نیروی محرکه القایی در این مدت به صورت کدام گزینه است؟

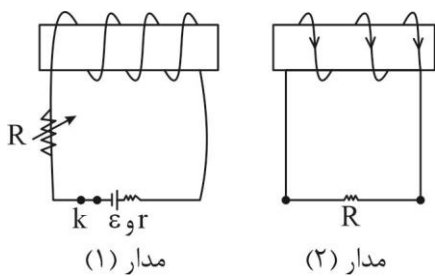


۸۳. در شکل‌های زیر، جهت جریان القایی کدام حلقه‌ها مشابه یکدیگر است؟



- (۱) الف - ب (۲) ب - پ (۳) الف - ب (۴) الف - ب - پ

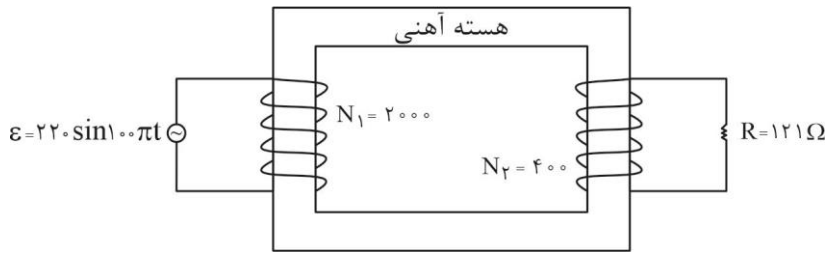
۸۴. با توجه به جهت جریان القایی در مدار شکل روبه‌رو، کدام گزینه به درستی بیان شده است؟



- (۱) کلید K در حال باز شدن است.
 (۲) مقاومت رئوستای R در حال کاهش است.
 (۳) کلید K در حال بسته شدن است.
 (۴) مدار (۲) در حال نزدیک شدن به مدار (۱) است.

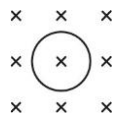
محل محاسبات:

۸۵. در مدار شکل زیر، بیشینه توان مصرفی مقاومت $R = 121 \Omega$ چند واحد SI است؟



- ۱۶ (۱)
- ۱۶۰ (۲)
- ۴۰ (۳)
- ۴۰۰ (۴)

۸۶. مطابق شکل یک حلقه به شعاع 4 cm و مقاومت 7Ω درون میدان مغناطیسی درون سوی 40 G قرار گرفته است. اگر در مدت زمان Δt میدان مغناطیسی به 30 G برون سو برسد، الکتروسیته شارش شده در حلقه چند میکروکولن است؟



$\frac{24}{7}$ (۴)

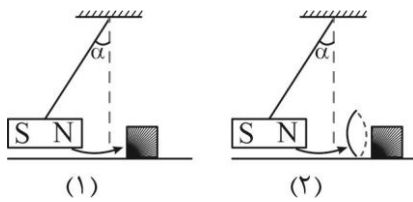
۲۴ (۳)

$\frac{48}{7}$ (۲)

$(\pi = 3)$

۴۸ (۱)

۸۷. در همه شکل‌های زیر، آهن‌ربای رهاشده به یک جعبه پلاستیکی واقع بر سطح دارای اصطکاکی برخورد کند، اما در شکل



۲ در مسیر حرکت آهن‌ربا یک حلقه آهنی قرار دارد. اگر جابه‌جایی جعبه پس از

برخورد در دو آزمایش به ترتیب x_1 و x_2 باشند. کدام گزینه در مورد x_1 و x_2

درست است؟

$x_1 > x_2$ (۲)

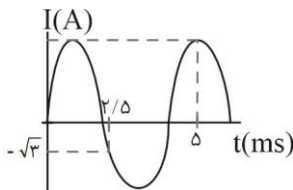
$x_1 = x_2$ (۱)

(۴) اظهار نظر قطعی نمی‌توان کرد.

$x_1 < x_2$ (۳)

۸۸. نمودار جریان-زمان یک مولد جریان متناوب به صورت روبه‌رو است. بیشینه جریان این مولد

چند آمپر است؟



۲ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)

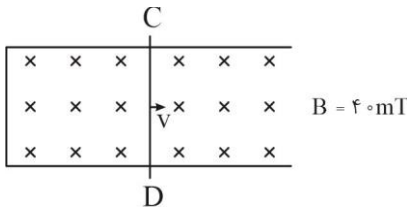
$\sqrt{6}$ (۳)

محل محاسبات:

۸۹. معادله شار گذرنده از یک حلقه با مقاومت 2Ω بر حسب زمان، در SI به صورت $\phi = t^2 + 5t - 10$ است. اندازه جریان متوسط القایی در دو ثانیه سوم در این حلقه چند آمپر است؟

- ۴/۵ (۱) ۶ (۲) ۷/۵ (۳) ۹ (۴)

۹۰. در شکل زیر با حرکت میله CD، مساحت سطح حلقه با آهنگ 0.02 در SI تغییر می کند. اندازه نیروی محرکه القایی در قاب در SI و جهت جریان در میله CD کدام است؟



- (۱) 4×10^{-4} - از C به D
 (۲) 4×10^{-4} - از D به C
 (۳) 8×10^{-4} - از C به D
 (۴) 8×10^{-4} - از D به C

محل محاسبات:

۹۱. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) نفت خام، گاز طبیعی، زغال سنگ و معادن مس و آهن از جمله منابع شیمیایی ارزشمندی هستند که به طور یکسان در جهان توزیع شده‌اند.

(۲) خام فروشی منابع به این معنی است که، بسیاری از کشورها منابع طبیعی خود را، بدون فراوری و به همان صورتی که از طبیعت به دست می‌آید، به فروش می‌رسانند

(۳) با پالایش نفت خام و تبدیل آن به فرآورده‌های پتروشیمیایی، مانند آمونیاک، سولفوریک اسید، متانول و بنزین، می‌توان فرآورده را به قیمت بالاتری از نفت خام، فروخت.

(۴) خالص‌سازی مواد یکی از فناوری‌های پیشرفته، گران، پرکاربرد و در عین حال کار آفرین به شمار می‌رود و روی قیمت تمام شده مواد نقش تعیین کننده چشمگیری دارد.

۹۲. کدام گزینه درباره شکل داده شده که نشان دهنده روند کلی افزایش بهره‌وری، با استفاده از فناوری‌های شیمیایی مطرح شده، نادرست است؟



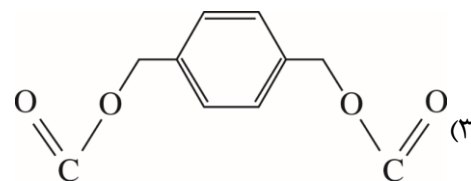
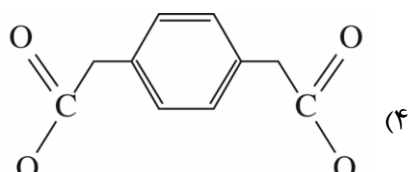
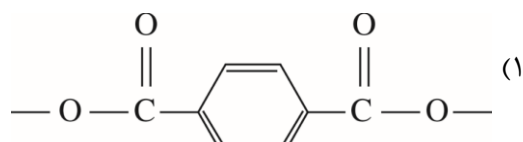
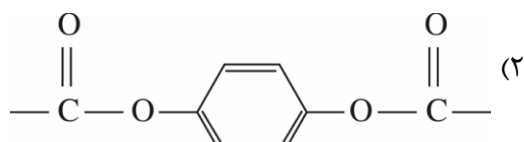
(۱) در قسمت A می‌توان به انرژی، آب، فناوری شیمیایی و نیروی انسانی اشاره کرد.

(۲) به کارگیری فناوری و تبدیل مواد خام به مواد فرآوری شده، سبب رشد و بهره‌وری اقتصاد یک کشور می‌شود.

(۳) فناوری، همواره فقط با ساخت یک وسیله همراه بوده که توسط دانشمندان و مهندسان طراحی می‌شود.

(۴) طی این فرایند، شیمیدان‌ها به دنبال روش آسان‌تر و باصرفه‌تر برای تولید فرآورده هدف (B) با استفاده از مواد اولیه هستند.

۹۳. ساختار دی‌استر تهیه شده از واکنش یک مول ترفتالیک اسید و دو مول متانول در کدام گزینه به درستی آمده است؟



محل محاسبات:

۹۴. چند مورد از کاربردهای مواد اشاره شده درست است؟

- گاز اتان: سوخت
- اتانول: ضد عفونی کننده
- اتانویک اسید: سرکه
- کلرواتان: افشانه بی حس کننده موضعی
- پلی اتن: سازنده اصلی برخی لوازم پلاستیکی
- اتیل استات: حلال چسب

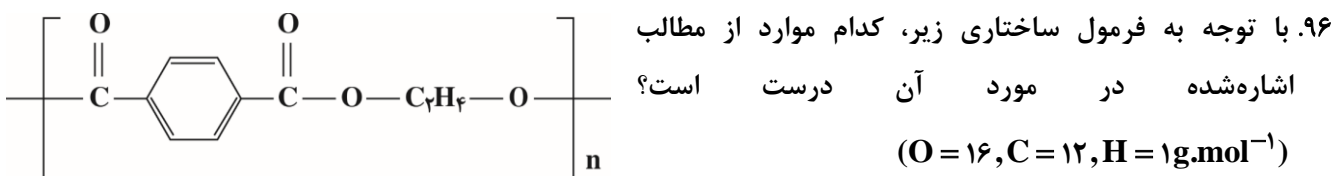
(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۹۵. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) شیمی سبز به دنبال طراحی واکنش‌هایی با کمترین آسیب به محیط‌زیست و بیشترین بازده است.
- (۲) زیست تخریب‌ناپذیری و استفاده بی‌رویه و بیش از حد پلاستیک‌ها در صنایع گوناگون، موجب اجتناب‌ناپذیر بودن بازیافت آن‌ها شده است.

(۳) متانول مایعی بی‌رنگ، بسیار سمی و ساده‌ترین عضو خانواده الکل‌ها است که می‌توان آن را از چوب تهیه کرد.

(۴) یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه‌تر است که شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فرآورده تبدیل شود.



(آ) مونومرهای سازنده آن در نفت خام یافت می‌شوند.

(ب) همه بطری‌های آب از این ماده ساخته می‌شوند.

(پ) حدود ۳۳/۳۳ درصد جرمی آن را اتم‌های اکسیژن تشکیل می‌دهد.

(ت) تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی و تعداد اتم هیدروژن در یک مول از آن، با هم برابر است.

(۱) آ - ب (۲) پ - ت (۳) آ - پ (۴) ب - ت

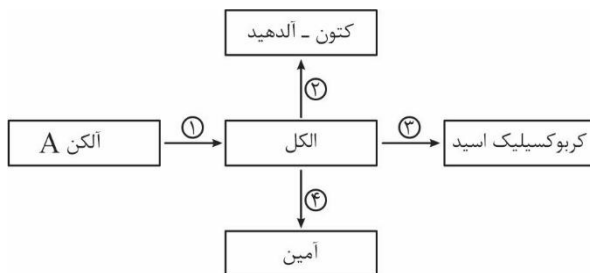
۹۷. در روش تهیه غیرمستقیم متانول از گاز متان و بخار آب به ازای مصرف ۱۷۹/۲ لیتر بخار آب در شرایطی که حجم مولی

گازها ۲۲/۴ لیتر است با درصد خلوص ۵۰ درصد، چند مول هیدروژن اضافی تولید می‌شود؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل محاسبات:

۹۸. اگر آلکن A، اتن باشد، مجموع تعداد اتم‌های هیدروژن مواد به دست آمده از واکنش‌های ۳ و ۴ کدام است؟



- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۹۹. در واکنش تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید در حضور محلول اکسندۀ غلیظ پتاسیم پرمنگنات، به ازای مصرف ۲۵۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۴ مولار اکسندۀ، چند گرم اسید دو عاملی تولید می‌شود؟ (بازده واکنش ۸۰ درصد می‌باشد)

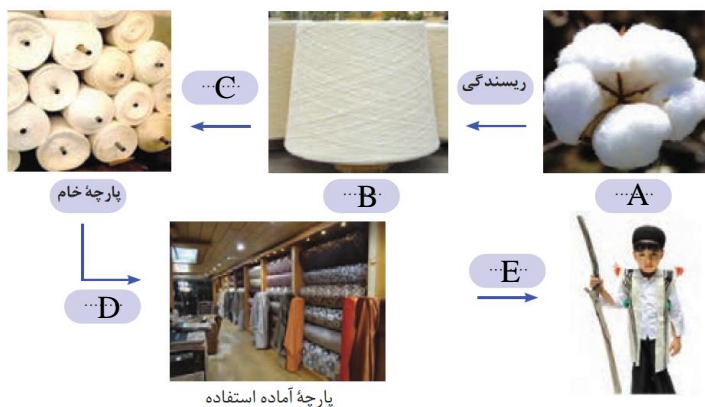


- ۱) ۳/۳۲ ۲) ۶/۶۴ ۳) ۱۳/۲۸ ۴) ۲۶/۵۶

۱۰۰. کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) تفاوت مجموع عدد اکسایش کربن در نفتالن و پارازایلن، برابر ۲ است.
- ۲) گاز اتن را در حضور اکسندۀ محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات می‌توان به اتیلن گلیکول تبدیل کرد.
- ۳) با اینکه تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید دشوار است اما با افزایش دما می‌توان بازده واکنش را به حد مطلوب رساند.
- ۴) هرچه نوع و شمار گروه‌های عاملی در مولکول هدف بیشتر باشد، ساخت آن دشوارتر بوده و به دانش پیشرفته‌تر و فناوری کارآمدتری نیاز است.

۱۰۱. موارد A، B، C، D و E مشخص شده در شکل در کدام گزینه به ترتیب از راست به چپ به درستی آمده است؟



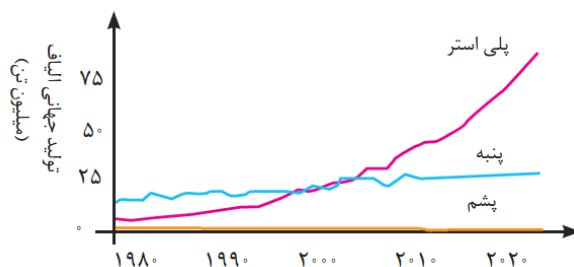
- ۱) الیاف - نخ - بافندگی - فراوری - دوزندگی
- ۲) بافندگی - الیاف - نخ - فراوری - دوزندگی
- ۳) الیاف - نخ - بافندگی - دوزندگی - فراوری
- ۴) بافندگی - نخ - الیاف - دوزندگی - فراوری

محل محاسبات:

۱۰۲. کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) امروزه پوشاک به شرایط آب و هوایی، فرهنگ، آداب و رسوم و باورها در هر جامعه بستگی دارد.
- ۲) با رشد جمعیت جهان، مصرف پوشاک به میزان اندکی افزایش یافت، به طوری که روش های سنتی تولید پوشاک، پاسخگوی نیازهای جامعه بود.
- ۳) میزان نسبی تولید الیاف ساختگی از الیاف طبیعی در جهان حال حاضر، بیشتر است.
- ۴) پوشاک افزون بر پوشش بدن و محافظت بدن از عوامل محیطی، در تمدن بشری نقش بزرگی داشته است.

۱۰۳. کدام گزینه درباره نمودار داده شده درست است؟



- ۱) طی ۴۰ سال اخیر همواره میزان تولید الیاف پشمی از تولید الیاف پنبه کمتر بوده است.
- ۲) شیب صعودی میزان تولید الیاف پنبه ای از الیاف پلی استری بیشتر است.
- ۳) طی سال های ۱۹۸۰ تا ۲۰۰۰ میلادی مجموع تولید الیاف نخی از الیاف ساختگی کمتر است.
- ۴) در چند دهه اخیر الیاف ساختگی به طور کامل جایگزین الیاف طبیعی شده است.

۱۰۴. کدام گزینه درست است؟

- ۱) انسولین برخلاف سلولز، نوعی کوچک مولکول است.
- ۲) از واکنش بین مواد به دست آمده از طلای سیاه در شرکت های پتروشیمی، الیاف ساختگی تولید می شود.
- ۳) آمارها نشان می دهد که بخش بسیار کوچکی از لباس های تولیدی در جهان، از پنبه تهیه می شود.
- ۴) واژه پلیمر از واژه آلمانی Polys به معنای (بسیار) و meros به معنای (پاره) گرفته شده است.

۱۰۵. کدام گزینه جاهای خالی متن زیر را به درستی تکمیل می کند؟

«مولکول های واحد سازنده مولکول های نشاسته و سلولز است، اما به دلیل تفاوت مولکول های آن ها،

دارای خواص متفاوتی هستند. اما در هر دو مولکول به طور مشابه، اتصال حلقه ها به صورت پل های می باشد»

۲) گلوکز - ساختار - O - C - O

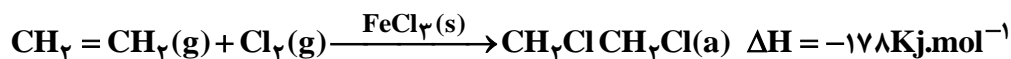
۱) گلوکز - ساختار - C - O - C

۴) ساکاروز - اتم ها - O - C - O

۳) ساکاروز - اتم ها - C - O - C

محل محاسبات:

۱۰۶. با توجه به معادله واکنش داده شده زیر کدام موارد درست است؟



(آ) حالت فیزیکی قسمت مشخص شده a، همانند هر دو واکنش دهنده به صورت گاز است.

(ب) انجام این واکنش، موجب از بین رفتن رنگ زرد گاز کلر می شود.

(پ) تعداد الکترون های پیوندی فرآورده تولید شده از تعداد الکترون های ناپیوندی آن بیشتر است.

(ت) از واکنش ۴۲ گرم گاز اتن با مقدار کافی از گاز کلر، ۱۴۸/۵ گرم فرآورده ۱، ۱- دی کلرو اتان تشکیل می شود.

(۱) آ - ب - ت (۲) آ - ب - پ (۳) آ - پ - ت (۴) ب - پ - ت

۱۰۷. اطلاعات ارائه شده در جدول زیر مربوط به واکنش پلیمر شدن اتن در شرایط گوناگون که منجر به تولید پلی اتن هایی با

جرم مولی میانگین متفاوت شده است درباره آن کدام گزینه نادرست است؟

جرم مولی میانگین پلیمر (گرم)	شمار مول های کاتالیزگر محتوی آلومینیم (شماره ۲)	شمار مول های کاتالیزگر محتوی تیتانیوم (شماره ۱)
۲۷۲۰۰۰	۱۲	۱
۲۹۲۰۰۰	۶	۱
۲۹۸۰۰۰	۳	۱
۲۸۴۰۰۰	۱	۱
۱۶۰۰۰۰	۰/۶۳	۱
۴۰۰۰۰	۰/۵۳	۱
۲۱۰۰۰	۰/۵۰	۱
۳۱۰۰۰	۰/۲۰	۱

(۱) جرم مولی میانگین به مقدار کاتالیزگرهای واکنش بستگی دارد.

(۲) این واکنش دارای دو کاتالیزگر فلزی از دوره های ۳ و ۴ جدول دوره های عنصرها است.

(۳) در نسبت مولی کاتالیزگر فلزی با عدد اتمی بزرگ تر به فلز با عدد اتمی کوچک تر برابر ۳، پلی اتن با بیشترین جرم مولی تولید می شود.

(۴) در نسبت مولی کاتالیزگرهای $\frac{1 \text{ mol } \text{Al}}{1 \text{ mol } \text{Ti}}$ به طور دقیق جرم مولی پلی اتن برابر ۲۸۵۰۰۰ گرم نیست.

۱۰۸. مونومر سازنده پلیمر با ساختار داده شده کدام است؟



(۱) ۴ - اتیل - ۲ - متیل - ۳ - هگزن

(۲) ۳ - اتیل - ۵ - متیل - ۳ - هگزن

(۳) ۴ - اتیل - ۲ - متیل - ۲ - هگزن

(۴) ۳ - اتیل - ۵ - متیل - ۲ - هگزن

محل محاسبات:

۱۰۹. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در مولکول مونومر سازنده پلیمر پتو، هر سه نوع پیوند یگانه، دو گانه و سه گانه وجود دارد.
 - (۲) واحدهای تکرار شونده پلی استیرن، آروماتیک هستند.
 - (۳) مولکولهای مونومر سازنده سرنگ و ظروف یک بار مصرف هر دو هیدروکربن هستند.
 - (۴) نسبت الکترونهای ناپیوندی تترافلوئورو اتن به وینیل کلرید، برابر ۳ است.
۱۱۰. کدام موارد از مطالب زیر درست است؟ ($O=16, C=12, H=1 \text{ g.mol}^{-1}$)

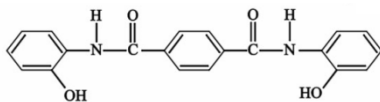
- (آ) ترکیب موجود در بادام (C_7H_6O) توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با آب را دارد.
- (ب) جرم مولی بنزویک اسید بیش از دو برابر ساده ترین عضو خانواده استرها است.

(پ) گروه عاملی موجود در گشنیز و ویتامین A مشابه بوده و هر دو دارای گروه عاملی هیدروکسید هستند.

(ت) از آبکافت ترکیب استری موجود در آناناس، الکلی به دست می آید که قادر به تشکیل محلول آبی سیر شده از آن نیستیم.

- (۱) آ - پ (۲) ب - ت (۳) آ - ب (۴) پ - ت

۱۱۱. با توجه به ساختار مولکول داده شده، کدام موارد از مطالب زیر، درباره آن نادرست است؟



(آ) گروههای عاملی موجود در کلسترول و کولار را در ساختار خود داشته و از دو بخش مشابه تشکیل شده است.

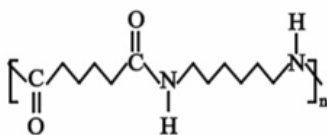
(ب) مجموع عدد اکسایش اتمهای کربن موجود در حلقه های آن، برابر با مجموع عدد اکسایش اتمهای کربن در ماده جامد سفیدرنگی است که به عنوان ضدبید مورد استفاده قرار می گیرد.

(پ) برای آبکافت یک مول از این مولکول، نیاز به یک مول آب است و یکی از فرآورده های حاصل را می توان از واکنش اکسایش پارازیلن نیز به دست آورد.

(ت) برای تولید یک مول از آن، نیاز به یک مول ترفتالیک اسید و دو مول از ترکیبی آروماتیک با فرمول مولکولی C_6H_7NO است.

- (۱) آ - ب - پ (۲) ب - ت (۳) آ - پ - ت (۴) فقط پ

۱۱۲. با توجه به ساختار پلیمر زیر که مربوط به «نایلون - ۶۶» است. کدام گزینه درباره



آن درست است؟ ($C=12, O=16, N=14, H=1 \text{ g.mol}^{-1}$)

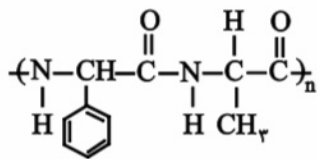
(۱) نوعی پلی آمید بوده و توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

(۲) تفاوت جرم مولی واحدهای سازنده آن بیشتر از تفاوت جرم مولی واحدهای سازنده بطری آب است.

(۳) فرمول واحد تکرار شونده این پلیمر را می توان به صورت $C_{12}H_{10}N_2O_2$ نشان داد.

(۴) با تولید پلی آمیدی با ۲۵۰ واحد تکرار شونده از آن، به تقریب، 6×10^3 گرم آب نیز تولید می شود.

محل محاسبات:

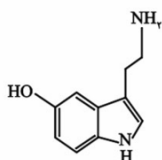


۱۱۳. در مورد ساختار داده شده کدام مورد درست است؟

- (۱) عدد اکسایش کربن متصل به حلقه بنزنی برابر با +۱ است.
- (۲) از مونومرهای یکسان تشکیل شده است.
- (۳) به همراه تولید یک مول از این پلیمر دو مول آب تولید می‌شود.
- (۴) اختلاف جرم یک مول از مونومرهای سازنده آن ۷۳ گرم است.

۱۱۴. سرتونین نام هورمونی است که به هورمون شادی معروف است. با توجه به ساختار آن، کدام گزینه

درست است؟ ($\text{O}=16, \text{N}=14, \text{C}=12, \text{H}=1: \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) دارای گروه‌های عاملی آمینی و آمیدی و هیدروکسیل است و شمار اتم‌های هیدروژن آن از مجموع شمار بقیه اتم‌ها بیشتر است.

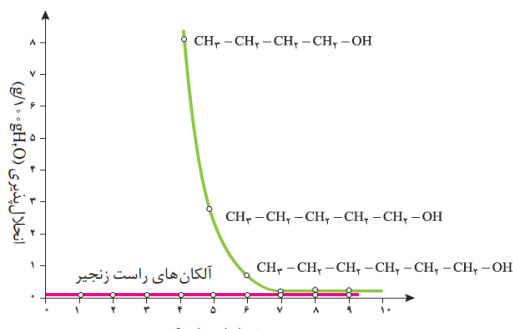
(۲) با جایگزین کردن اتم‌های کربن به جای اتم‌های نیتروژن آن، کاهش جرم ترکیب، معادل عدد اتمی فلزی در گروه فلزات قلیایی خاکی می‌باشد که دارای کمترین واکنش‌پذیری است.

(۳) تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی آن برابر با تعداد گروه‌های C-H موجود در قسمت حلقوی ساختار است و توانایی شرکت واکنش تولید پلی‌آمیدها را ندارد.

(۴) یک مول این ترکیب با مصرف $10^23 \times 16/48$ اتم هیدروژن به ترکیبی سیر شده تبدیل می‌شود.

۱۱۵. با توجه به نمودار زیر که انحلال‌پذیری الکل‌ها در آب، در مقایسه با آلکان‌های راست زنجیر در آب را نشان می‌دهد، کدام

گزینه در مورد آن نادرست است؟



(۱) نیروی بین مولکولی غالب در الکل‌های چهار و پنج کربنه، از نوع پیوند هیدروژنی بوده و محلول در آب محسوب می‌شوند.

(۲) آلکان‌ها همانند تمام هیدروکربن‌ها، گشتاور دو قطبی نزدیک به صفر داشته و موادی ناقطبی محسوب می‌شوند.

(۳) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آن‌ها، نقطه جوش و انحلال‌پذیری آن‌ها در آب کاهش می‌یابد.

(۴) با افزایش تعداد اتم‌های کربن در الکل‌ها، ویژگی آب‌گریزی و چربی‌دوستی آن‌ها افزایش می‌یابد.

محل محاسبات:

۱۱۶. کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- (آ) پلیمرهای سبز، دوستدار محیط زیست بوده و اگر در طبیعت رها شوند، از چند ماه به مولکول‌های ساده مانند آب و کربن‌دی‌اکسید تبدیل می‌شوند.
- (ب) انسجام لباس‌های تهیه شده از پلی‌استرها و پلی‌آمیدها به‌طور حتم، ماندگاری بیشتری از لباس تهیه شده از هیدروکربن‌های سیرنشده دارند.
- (پ) پلی‌مرهای طبیعی زیست تخریب پذیر در طبیعت توسط جانداران ذره‌بینی به مولکول‌های درشت تبدیل می‌شوند.
- (ت) پلاستیک‌های ساخته شده از پلی‌لاکتیک اسید، امکان تبدیل شدن به کود را دارند و ردپای کوچک تری در محیط زیست بر جای می‌گذارند.

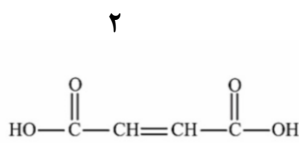
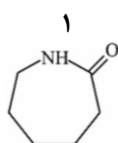
(۴) پ - ت

(۳) ب - پ

(۲) آ - ب

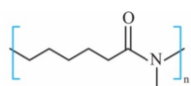
(۱) آ - ت

۱۱۷. با توجه به ترکیب‌های مقابل کدام گزینه درست است؟



(۱) ترکیب (۱) بر اثر آبکافت به $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$ و CH_3NH_2 تبدیل می‌شود.

(۲) از واکنش اتیلن گلیکول با ترکیب (۲) پلیمری با فرمول شیمیایی $[\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-\text{C}(=\text{O})-\text{CH}=\text{CH}-\text{C}(=\text{O})-\text{O}]_n$ تشکیل می‌شود.



(۳) ترکیب (۱) پس از آبکافت می‌تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت کرده و پلیمری با فرمول شیمیایی $[\text{NH}-\text{C}(=\text{O})-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{C}(=\text{O})-\text{NH}-\text{C}(=\text{O})-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{C}(=\text{O})-\text{NH}]_n$ به دست می‌آید.

(۴) از واکنش ۱۰۰۰ مولکول ترکیب (۲) و ۱۰۰۰ مولکول اتیلن گلیکول ۹۹۹ مولکول آب به دست می‌آید.

محل محاسبات:

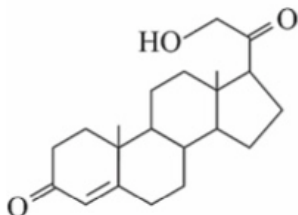
۱۱۸. درباره ترکیبی با فرمول «پیوند - خط» نشان داده شده در شکل مقابل، کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟

(آ) در صورتی که استیک اسید با آن واکنش دهد، فرآورده آلی با گروه عاملی استری تشکیل می‌شود.

(ب) تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌های آن نصف این تعداد در ساختار ویتامین C با فرمول مولکولی $C_6H_8O_6$ است.

(پ) فرمول مولکولی آن $C_{21}H_{28}O_3$ بوده و دارای دو گروه عاملی کتونی است.

(ت) به ازای سوختن کامل هر مول از این ترکیب ۴۴۸ لیتر گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP تولید می‌شود.



- (۱) ب - پ (۲) آ - ب (۳) آ - ب - پ (۴) ب - ت

۱۱۹. مخلوطی از ترکیب‌های C_7H_6 و $HO-C_6H_4-O-C_6H_4-COOH$ را در مقدار کافی اکسیژن و در مدت ۳۰ دقیقه به‌طور کامل می‌سوزانیم، اگر مجموع کربن دی‌اکسید و آب تولیدی به ترتیب برابر ۱۹۰/۴ لیتر و ۹۹ گرم باشد، سرعت مصرف گاز اتان به تقریب چند $mol.min^{-1}$ است؟ (شرایط واکنش را STP در نظر بگیرید.)

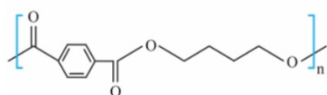
$$(H=1, O=16: g.mol^{-1})$$

- (۱) $2/5 \times 10^{-2}$ (۲) $2/25 \times 10^{-3}$ (۳) $3/33 \times 10^{-2}$ (۴) $3/66 \times 10^{-2}$

۱۲۰. ۲۶۴ گرم از پلی‌استر داده شده را آبکافت می‌کنیم و اسید حاصل از این واکنش را با مقدار کافی از آمین $[H_2N-C_6H_4-NH_2]$ واکنش می‌دهیم. چند گرم پلی‌آمید در این واکنش تولید می‌شود؟ (فرض کنید که پلیمرهای تولید و استناده شده، دارای

تعداد واحد تکرار شونده یکسان هستند.)

$$(C=12, H=1, O=16, N=14: g.mol^{-1})$$



- (۱) ۲۸۵/۶ (۲) ۲۵۶/۶ (۳) ۲۳۴ (۴) ۱۸۴/۵

محل محاسبات:



آزمون مرحله (دهم) آلفا

رشته ریاضی دوازدهم

نام درس	مسئول درس	ناظر علمی - ویراستار	طراحان سوال
هندسه	آرش عمید	ناظر علمی: آرش عمید ویراستار: رضا خطیری	احسان خیرالهی
گسسته	آرش عمید	ناظر علمی: آرش عمید ویراستار: رضا خطیری	احسان خیرالهی
حسابان	معین کرمی محمد رضا میرجلیلی	ناظر علمی: محمد رضا میرجلیلی ویراستاران: مینا نظری - یاسمین میرزایی	امیرحسین آجرلو - عباس اشرفی - ندا داوربناه مسعود درویشی - فاطمه کیانی - ندا فرهختی مهدی مرادی - محمد رضا میرجلیلی
فیزیک	رضا خالو امیرعلی میری نیما نوروزی	ناظرین علمی: رضا خالو امیرعلی میری ویراستار: ارشیا شکوری	وحید کرابی امیرعلی میری
شیمی	مهدی جبرئیلی	ناظرین علمی: مهدی جبرئیلی - یاسین سلیمی بنی	مهدی جبرئیلی - یاسین سلیمی بنی

مدیر واحد آزمون
هانیه توکلیان نیاسری - محمد محمدیان
گروه فنی و تولید

تایپیست	هاجر زارع - مژگان حسن زاده
صفحه بندی	مهتا محمدی
رسام	مهتا محمدی

$$y'' = \frac{(-2ax - 2)(x^2 + b)^2 - 2(2x)(x^2 + b)(-ax^2 - 2x + ab)}{(x^2 + b)^4} = \frac{(x^2 + b)[(-2ax - 2)(x^2 + b) - 4x(-ax^2 - 2x + ab)]}{(x^2 + b)^4}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{(-2ax - 2)(x^2 + b) - 4x(-ax^2 - 2x + ab)}{(x^2 + b)^3}$$

$$\xrightarrow{y''(-1)=0} (2a - 2)(1 + b) + 4(-a + 2 + ab) = 0$$

$$\Rightarrow 2a + 2ab - 2 - 2b - 4a + 4 + 4ab = 0 \Rightarrow -2a - 2b + 6ab + 2 = 0 \xrightarrow{\div (-2)} a + b - 3ab - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{(*)} -b + b - 3(-b)(b) - 1 = 0 \Rightarrow 3b^2 = 1 \xrightarrow{\substack{\text{دامنه } \mathbb{R} \text{ است} \\ b > 0 \text{ پس}}} b = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$y = \frac{-x + 1}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \text{مجموع طول نقاط بحرانی} = +2$$

۴. پاسخ: گزینه ۴

تابع g در \mathbb{R} صعودی و مشتق پذیر است؛ یعنی:

$$\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) \geq 0$$

$$g(x) = xf(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + xf'(x) \geq 0$$

حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{«۱» } f'(-2) = 1 \Rightarrow g'(-2) = f(-2) - 2f'(-2) = f(-2) - 2 \geq 0 \Rightarrow f(-2) \geq 2 \quad \times$$

$$\text{«۲» } f(0) = 3 \Rightarrow g'(0) = f(0) + 0 \cdot f'(0) = f(0) \geq 0 \quad \times$$

$$\text{«۳» } f'(1) = -3 \Rightarrow g'(1) = f(1) + 1 \cdot f'(1) = f(1) - 3 \geq 0 \Rightarrow f(1) \geq 3 \quad \times$$

$$\text{«۴» } f'(-3) = -1 \Rightarrow g'(-3) = f(-3) - 3f'(-3) = f(-3) + 3 \geq 0 \Rightarrow f(-3) \geq -3 \quad \checkmark$$

۵. پاسخ: گزینه ۱

چون نقطه $A(a, b)$ نقطه بحرانی تابع f است، پس:

(۱) در تابع صدق می‌کند:

$$f(a) = b \Rightarrow a + \frac{a}{a} + 1 = b \Rightarrow a + 2 = b \quad (*)$$

(۲) مشتق تابع f در $x = a$ برابر صفر است.

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \xrightarrow{f'(a)=0} 1 - \frac{a}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\xrightarrow{(*)} b = a + 2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow a + b = 1 + 3 = 4$$

۶. پاسخ: گزینه ۲

ضابطه تابع را به صورت قطعه‌ای می‌نویسیم، از آن مشتق می‌گیریم و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

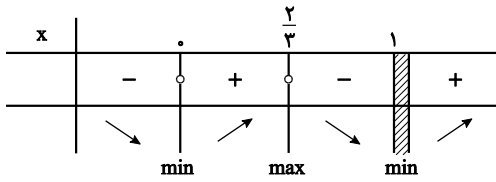
$$f(x) = x^2 |x - 1| = \begin{cases} x^2(x - 1) & ; x \geq 1 \\ -x^2(x - 1) & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & ; x > 1 \\ -3x^2 + 2x & ; x < 1 \end{cases}$$

هر ضابطه را مساوی صفر می‌گذاریم و با توجه به شرطها، ریشه‌های آنها را در صورت وجود می‌یابیم.

$$3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

همچنین نقاطی از دامنه که مشتق در آن‌ها تعریف نشده را مشخص می‌کنیم:

تابع در $x=1$ مشتق ناپذیر است. $\Rightarrow f'_-(1) = -1, f'_+(1) = 1$



مقدار ماکزیمم نسبی تابع را می‌یابیم:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left|\frac{2}{3} - 1\right| = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

۷. پاسخ: گزینه ۴

مختصات نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع را می‌یابیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0) = m \\ x=-2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 + m = 4 + m \end{cases}$$

شیب خط گذرنده از دو نقطه برابر است با:

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(m+4) - m}{-2 - 0} = -2$$

شیب این خط مستقل از m همواره -2 است.

۸. پاسخ: گزینه ۴

$$y = kx^3 + (2k-1)x^2$$

$$y' = 3kx^2 + 2(2k-1)x \Rightarrow y'' = 6kx + 4k - 2 = 0 \xrightarrow{\text{طول نقطه عطف}} x_1 = \frac{2-4k}{6k} = \frac{1-2k}{3k}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} k > 0 \text{ یا } k < \frac{1}{2} \xrightarrow{x_1 < 0 \text{ در ناحیه سوم سوم باشد}} \frac{1-2k}{3k} < 0$$

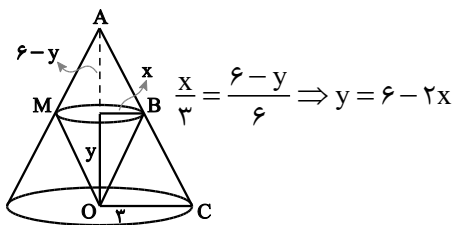
با جایگذاری x_1 در تابع، عرض نقطه عطف تابع را می‌یابیم:

$$y = x^2(kx + 2k - 1) \xrightarrow{x_1 = \frac{1-2k}{3k}} y_1 = \left(\frac{1-2k}{3k}\right)^2 \left(k \times \frac{1-2k}{3k} + 2k - 1\right)$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه سوم سوم } y_1 < 0} \frac{(1-2k)^2 \geq 0}{3} \rightarrow \frac{1-2k}{3} + 2k - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-2k+6k-3}{3} < 0 \Rightarrow 4k-2 < 0 \Rightarrow k < \frac{1}{2} \xrightarrow{(1) \cap (2)} k < 0$$

۹. پاسخ: گزینه ۳

با استفاده از قضیه تالس در مثلث‌های AMB و AOC داریم:



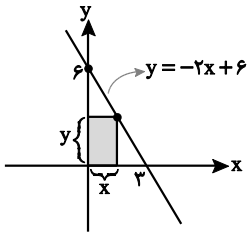
از طرفی حجم مخروط محاط شده برابر $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ است، پس:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 (6-2x) = \frac{\pi}{3}(6x^2 - 2x^3) \Rightarrow V'(x) = \frac{\pi}{3}(12x - 6x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \times \\ x=2 \quad \checkmark \end{cases}$$

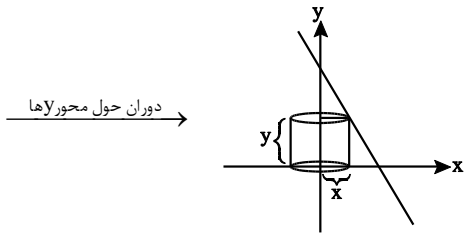
$$x=2 \Rightarrow V(2) = \frac{\pi}{3}(6(2)^2 - 2(2)^3) = \frac{8\pi}{3}$$

۱۰. پاسخ: گزینه ۲

خط $y = -2x + 6$ و مستطیل مورد نظر را رسم می‌کنیم:



مستطیل حاصل را یکبار حول محور x ها و یکبار حول محور y ها دوران می‌دهیم.



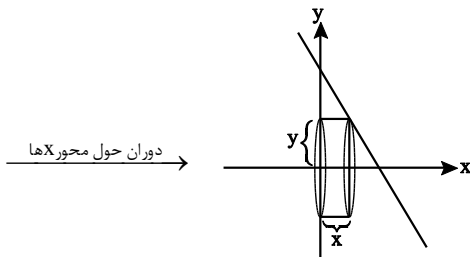
$$V = \pi x^2 \times y = \pi x^2 (-2x + 6) \quad (1)$$

$$V(x) = \pi(-2x^3 + 6x^2) \Rightarrow V'(x) = 0$$

$$V'(x) = \pi(-6x^2 + 12x) = 6\pi x(-x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2 \xrightarrow{x > 0} x = 2 \checkmark$$

$$\xrightarrow{(1)} V = \pi(4)(2) = 8\pi$$



$$V = \pi y^2 \times x = \pi(-2x + 6)^2 \times x \quad (2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \pi \times 2(-2x + 6) \times (-2) \times x + 1 \times \pi(-2x + 6)^2 = 0$$

$$V'(x) = \pi(-2x + 6)(-4x - 2x + 6) = 0$$

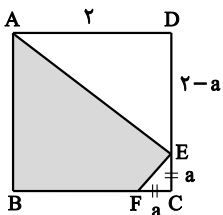
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	3	1	3
V'	+	-	+
	↙	↘	↙
	max		

$$x = 1 \xrightarrow{(2)} V = \pi(4)^2 \times 1 = 16\pi$$

۱۱. پاسخ: گزینه ۳

قرار می‌دهیم:



$$FC = EC = a \Rightarrow DE = 2 - a$$

بنابراین مساحت چهارضلعی ABFE برابر است با:

$$S = a^2 - (S_{\triangle ADE} + S_{\triangle EFC}) \Rightarrow$$

$$S(a) = 4 - \frac{1}{2} \times 2(2 - a) - \frac{1}{2} a^2 = 4 - 2 + a - \frac{1}{2} a^2 = -\frac{1}{2} a^2 + a + 2$$

برای پیدا کردن بیشترین مقدار S ، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع S را به دست می‌آوریم:

$$S'(a) = -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

a	1
S'	+ -
	↙ ↘
	max

پس $a = 1$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع S است؛ بنابراین:

$$S_{\max} = -\frac{1}{2}(1^2) + 1 + 2 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

۱۲. پاسخ: گزینه ۱

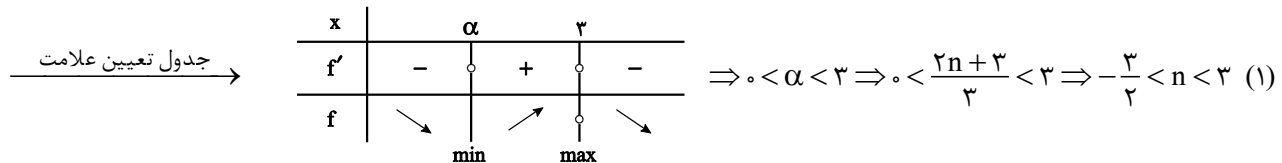
با توجه به نمودار تابع f مشخص است که $x = 3$ ریشه مضاعف تابع است؛ پس:

$$(x - m)^2 = (x - 3)^2 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow f(x) = (x - 3)^2 (n - x)$$

از طرفی تابع f یک نقطه بحرانی از نوع مینیمم نسبی به طول $0 < x = \alpha < 3$ دارد و عرض از مبدأ $f(0) > 0$ است؛ پس:

$$f'(x) = 2(x - 3)(n - x) + (-1)(x - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = (x - 3)((2(n - x) + (-1)(x - 3)))$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x - 3)(2n + 3 - 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{2n + 3}{3} = \alpha \end{cases}$$



$$f(0) > 0 \Rightarrow (-3)^2 (n) > 0 \Rightarrow 9n > 0 \Rightarrow n > 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 0 < n < 3 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{1, 2\}$$

۱۳. پاسخ: گزینه ۲

در معادله سهمی اگر ضریب x^2 مثبت باشد، آن گاه سهمی دارای کمترین مقدار بوده و آن کمترین مقدار برابر عرض رأس سهمی است؛ پس:

$$\begin{cases} m > 0 \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{9}{4} \times 4a \rightarrow \Delta + 9a = 0 \Rightarrow ((-3)^2 - 4m^2) + 9m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9 - 4m^2 + 9m = 0 \xrightarrow{\Delta = 81 + 144} m = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \times (-4)} = \frac{9 \pm 15}{-8} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{4} \quad \times \\ m = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m > 0} m = 3 \xrightarrow{\text{جای گذاری در تابع دوم}} y = 2x^2 - 8x + 4 \xrightarrow{\text{معادله محور تقارن}} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \times 2} = 2$$

۱۴. پاسخ: گزینه ۲

جدول تعیین علامت داده شده مربوط به عبارت درجه اول است، پس:

$$2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow P(x) = (\Delta b - 6)x + 3c + 1$$

چون علامت اولین خانه سمت راست جدول منفی است، نتیجه می گیریم که ضریب x منفی بوده است، پس:

$$\Delta b - 6 < 0 \Rightarrow \Delta b < 6 \Rightarrow b < \frac{6}{\Delta} \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} b = 1$$

$$P(x) = -x + 3c + 1 = 0 \Rightarrow x = 3c + 1$$

پس ریشه معادله $P(x) = 0$ برابر با $3c + 1$ است، که طبق جدول باید با a برابر باشد:

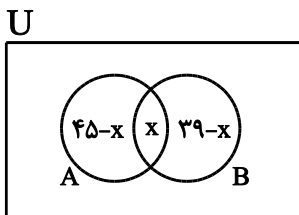
$$a = 3c + 1 \Rightarrow \frac{-3}{2} = 3c + 1 \Rightarrow 3c = -\frac{5}{2} \Rightarrow c = \frac{-5}{6} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{-5}{6}} = \frac{9}{5} = 1/8$$

۱۵. پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned}
 & (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 \\
 & \stackrel{\text{فرض}}{=} (\sqrt[4]{2\sqrt{3}-1})^4 + (\sqrt[4]{2\sqrt{3}+1})^4 + (\sqrt[4]{2\sqrt{3}+1} \times \sqrt[4]{2\sqrt{3}-1})^2 = 2\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)})^2 \\
 & = 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1}}{\sqrt{1}} = 4\sqrt{3} + \sqrt{11}
 \end{aligned}$$

۱۶. پاسخ: گزینه ۲

علاقه‌مندان به ورزش فوتبال را با A و علاقه‌مندان به ورزش والیبال را با حرف B نمایش می‌دهیم. اگر X نفر به هر دو ورزش علاقه‌مند باشند، آنگاه با توجه به اطلاعات داده‌شده، می‌توانیم نمودار ون زیر را رسم می‌کنیم:



طبق فرض سؤال داریم:

$$n(A \cup B) = 51 \Rightarrow 45 - x + x + 39 - x = 51 \Rightarrow x = 45 + 39 - 51 = 33$$

پس تعداد افرادی که فقط به فوتبال علاقه‌مند هستند برابر است با:

$$n = 45 - x = 45 - 33 = 12$$

۱۷. پاسخ: گزینه ۴

سه جمله نخست از یک دنباله هندسی به صورت $\frac{1}{3c}$ ، $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{2b}$ هستند، پس:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2b} \times \frac{1}{2c} \Rightarrow a^2 = 4bc \quad (*)$$

از طرفی a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی هستند، پس:

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a+c \xrightarrow{\times 2c} 4bc = 2ac + 2c^2 \xrightarrow{\text{طبق } (*)} a^2 - 2ac - 2c^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\div c^2} \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{c}\right) - 2 = 0 \xrightarrow{\frac{a}{c}=t} t^2 - 2t - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=12} t = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \frac{a}{c} = 1 \pm \sqrt{3}$$

قدرنسبت این دنباله هندسی برابر است با:

$$r = \frac{a^3}{a^2} = \frac{1}{2c} = \frac{a}{2c} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{3})$$

مجموع این دو قدرنسبت برابر است با:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۸. پاسخ: گزینه ۱

اولاً چون θ در ناحیه دوم مثلثاتی است، پس $\sin \theta > 0 > \cos \theta$ ، بنابراین داریم:

$$\tan \theta - \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\sin \theta \cos \theta} (\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{3 \sin \theta \cos \theta}$$

بنابراین کافی است $(\sin \theta - \cos \theta)$ و $(\sin \theta \cos \theta)$ را بیابیم. برای یافتن $\sin \theta \cos \theta$ کافی است تساوی $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{توان } 2} \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{1} + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} (*)$$

برای یافتن $\sin \theta - \cos \theta$ ، داریم:

$$A = \sin \theta - \cos \theta > 0 \xrightarrow{\text{توان } 2} A^2 = \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{1} - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\xrightarrow{(*)} A^2 = 1 - 2\left(-\frac{4}{9}\right) = 1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9} \xrightarrow{A > 0} A = \frac{\sqrt{17}}{3} \Rightarrow \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{3} (**)$$

حال حاصل $\tan \theta - \cot \theta$ را می‌یابیم:

$$\tan \theta - \cot \theta = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{3 \sin \theta \cos \theta} \xrightarrow{(**), (*)} \frac{\frac{\sqrt{17}}{3}}{3 \times \left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{3}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

۱۹. پاسخ: گزینه ۲

$$f \text{ خطی} \Rightarrow f(x) = ax + b \Rightarrow f(2) = -1 \Rightarrow -1 = 2a + b \quad (1)$$

$$3f(x-1) + 4 = f(3x+2) \Rightarrow 3(a(x-1) + b) + 4 = a(3x+2) + b \Rightarrow 3(ax - a + b) + 4 = 3ax + 2a + b$$

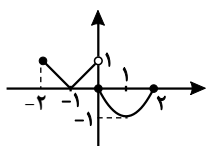
$$\Rightarrow 3ax - 3a + 3b + 4 = 3ax + 2a + b \Rightarrow -3a + 3b + 4 = 2a + b \Rightarrow 5a - 2b = 4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} 2a + b = -1 \\ 5a - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 5a - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow 9a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{9} \Rightarrow b = -\frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{9}x - \frac{13}{9} \Rightarrow f(-7) = \frac{-14}{9} - \frac{13}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

۲۰. پاسخ: گزینه ۱

نمودارهای تابع‌های $y = |x+1|$, $y = x^2 - 2x$ در بازه‌های داده‌شده به صورت زیر است:



با توجه به شکل برد تابع به صورت $R = [-1, 1]$ است و در نتیجه $a = -1$ و $b = 1$ بوده و داریم:

$$f(1) - f(-1) = -1 - 0 = -1$$

۲۱. پاسخ: گزینه ۴

آماره یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌های خاص از یک نمونه است و در صورتی که امکان آمارگیری از کل جامعه وجود نداشته باشد از نمونه استفاده کرده و آماره را برای تخمین پارامتر محاسبه می‌کنیم. آماره مربوط به نمونه است و از یک نمونه به نمونه‌ی دیگر قابل تغییر است.

۲۲. پاسخ: گزینه ۳

در روش نمونه‌گیری احتمالی وضعیت به گونه‌ای است که هر یک از افراد یا اشیاء جامعه‌ی مورد مطالعه، احتمالی مشخص برای انتخاب شدن در نمونه دارند. در گزینه ۳ فقط ۲۵ نفر اول ثبت‌نام کننده احتمال انتخاب شدن را دارند.

۲۳. پاسخ: گزینه ۴

اگر فاصله‌ی نمونه‌گیری را k در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} (1) k \mid 616 \\ k \\ (2) 140 \equiv 28 \Rightarrow k \mid 140 - 28 \Rightarrow k \mid 112 \end{cases} \Rightarrow k \mid (112, 616) = 56$$

بنابراین $k \in \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$. اگر تعداد اعضای نمونه برابر n باشد، $n = \frac{616}{k}$ می‌باشد: داریم:

$$n \in \{11, 22, 44, 77, 88, 154, 308, 616\}$$

۲۴. پاسخ: گزینه ۳

$$\sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{625}} = \frac{4}{25} = 0.16$$

۲۵. پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} n = 4 \\ \bar{x} = \frac{3+4+6+7}{4} = 5 \Rightarrow [\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}] = [5 - \sqrt{10}, 5 + \sqrt{10}] \\ \sigma^2 = 10 \Rightarrow \sigma = \sqrt{10} \end{cases}$$

می‌دانیم $\sqrt{10} \approx 3.15$ ، پس بازه به صورت $[1/15, 8/15]$ است که شامل اعداد صحیح ۲ و ۳ و ... و ۸ است.

۲۶. پاسخ: گزینه ۳

نمونه ۲ تایی	{۵, ۷}	{۵, ۹}	{۵, ۱۱}, {۷, ۹}	{۵, ۱۳}, {۷, ۱۱}	{۷, ۱۳}, {۹, ۱۱}	{۹, ۱۳}	{۱۱, ۱۳}
\bar{x}	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

نمونه ۳ تایی	{۵, ۷, ۹}	{۵, ۷, ۱۱}	{۵, ۷, ۱۳}, {۵, ۹, ۱۱}	{۵, ۹, ۱۳}, {۷, ۹, ۱۱}	{۵, ۱۱, ۱۳}, {۷, ۹, ۱۳}	{۷, ۱۱, ۱۳}	{۹, ۱۱, ۱۳}
\bar{x}	۷	$\frac{23}{3}$	$\frac{25}{3}$	۹	$\frac{29}{3}$	$\frac{31}{3}$	۱۱

از جداول مشخص است که ۱۱ مقدار مختلف برای \bar{x} در این نمونه‌ها وجود دارد.

۲۷. پاسخ: گزینه ۲

از احتمال $\frac{1}{10}$ در می‌یابیم که تعداد کل نمونه‌های ۳ تایی برابر ۱۰ تا است. داریم:

$$\binom{n}{3} = 10 \Rightarrow n = 5$$

بنابراین این جامعه دارای ۵ عضو است. تعداد کل نمونه‌های ۴ تایی برابر ۵ $\binom{5}{4} = 5$ تا است. پس احتمال انتخاب هر نمونه ۴

تایی در این جامعه برابر $\frac{1}{5} = 0.2$ است.

۲۸. پاسخ: گزینه ۲

ابتدا میانگین اعداد ۱، ۳، ۵، ...، $2n + 7$ را محاسبه می‌کنیم. از آن جایی که این اعداد تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، کافی است از اعداد اول و آخر آن میانگین بگیریم. داریم:

$$(\mu) \text{ میانگین جامعه} = \frac{1 + 2n + 7}{2} = n + 4$$

اکنون میانگین نمونه را به دست می‌آوریم:

$$(\bar{x}) \text{ میانگین نمونه} = \frac{7 + 11 + 15 + 19 + 13}{5} = 13 \Rightarrow n + 4 = 13 \Rightarrow n = 9$$

۲۹. پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 10 \\ \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 18 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = 14, \frac{4\sigma}{\sqrt{81}} = 8 \Rightarrow \sigma = 18$$

$$\frac{\text{مجموع داده‌های نمونه}}{\text{واریانس جامعه}} = \frac{n \times \bar{x}}{\sigma^2} = \frac{81 \times 14}{18 \times 18} = \frac{7}{2} = 3.5$$

۳۰. پاسخ: گزینه ۲

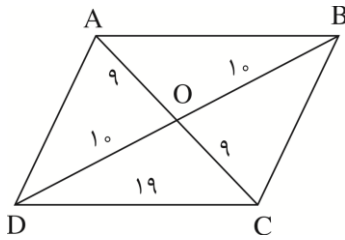
میانگین جامعه $\mu = 9$ است.

$$|\mu - \bar{x}| = 1 \Rightarrow |9 - \bar{x}| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 8 \\ \bar{x} = 10 \end{cases}$$

بنابراین نمونه‌های دوتایی باید دارای میانگین ۸ یا ۱۰ باشند که عبارتند از $\{5, 11\}$ ، $\{7, 9\}$ ، $\{7, 13\}$ و $\{9, 11\}$. تعداد کل

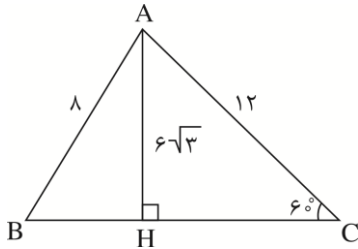
نمونه‌های دوتایی برابر است با $\binom{5}{2} = 10$ تا. پس احتمال مطلوب برابر $\frac{4}{10} = 0.4$ است.

۳۱. پاسخ: گزینه ۳



در مورد «الف» فقط یک مستطیل قابل رسم است.

در مورد «ب» متوازی الاضلاع قابل رسم نیست زیرا در مثل $\triangle ODC$ ، مجموع طول دو ضلع کوچکتر از ضلع بزرگتر، بیشتر نیست.



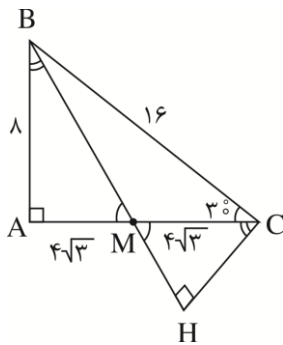
در مورد «ج» دو مثلث قابل رسم است زیرا ارتفاع AH از دو ضلع مجاور AB و AC کوچکتر است.

در مورد «د» مثلث قابل رسم نیست زیرا $AH > AB$ می باشد.

۳۲. پاسخ: گزینه ۲

بدیهی است که $\hat{C} = 3^\circ$. پس $AB = 8$ و $AC = 8\sqrt{3}$.

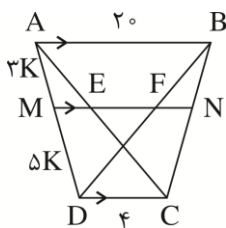
دو مثلث $\triangle MHC$ و $\triangle ABM$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{MC}{BM}$ می باشد.



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{\triangle MHC}}{S_{\triangle ABM}} = \left(\frac{MC}{BM}\right)^2 = \frac{48}{112} = \frac{3}{7} \\ \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{S_{\triangle MHC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{14}$$

۳۳. پاسخ: گزینه ۱

ابتدا طول MN را به دست می آوریم. می دانیم:

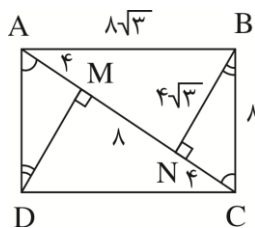


$$MN = \frac{AM \times CD + MD \times AB}{AM + MD} = \frac{12K + 10 \cdot K}{8K} = 14$$

از تعمیم تالس در مثلث‌های $\triangle BCD$ و $\triangle ACD$ درمی یابیم که $FN = ME$ داریم:

$$2ME + FN + 2EN + FM = 2(ME + EN) + (FN + FM) = 2MN + MN = 3MN = 42$$

۳۴. پاسخ: گزینه ۳



می‌دانیم دو مثلث $\triangle AMD$ و $\triangle BNC$ همنهشت هستند، بنابراین $NC = AM = 4$. در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ داریم:

$$\begin{cases} BN^2 = AN \times NC = 12 \times 4 \Rightarrow BN = 4\sqrt{3} \\ BC^2 = NC \times AC = 4 \times 16 \Rightarrow BC = 8 \\ AB^2 = AN \times AC = 12 \times 16 \Rightarrow AB = 8\sqrt{3} \end{cases}$$

$$S_{\triangle BNC} + S_{ABCD} = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3}\right) + (8 \times 8\sqrt{3}) = 72\sqrt{3}$$

۳۵. پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم $AB = 5k$ و $BC = 2k$. برخورد نیمسازهای داخلی هر متوازی الاضلاع یک مستطیل می‌سازد که ابعاد این مستطیل $(MNPQ)$ به صورت زیر می‌باشد.

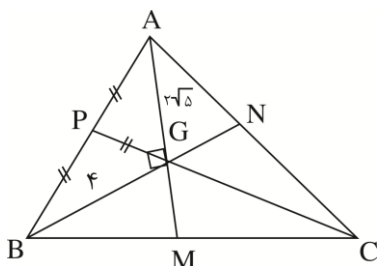
$$\begin{cases} \text{طول مستطیل} = (5k - 2k) \cdot \sin \frac{120^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}k \\ \text{عرض مستطیل} = (5k - 2k) \cdot \cos \frac{120^\circ}{2} = \frac{3}{2}k \end{cases} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{9\sqrt{3}}{4}k^2 = 16\sqrt{3} \Rightarrow k = \frac{8}{3}$$

از طرفی در صورتی که اوساط اضلاع مستطیل را به هم وصل کنیم، یک لوزی $(M'N'P'Q')$ تولید می‌شود که مساحت آن نصف مساحت مستطیل است. پس $S_{M'N'P'Q'} = 8\sqrt{3}$. در متوازی الاضلاع زوایای مجاور یکدیگرند، پس $\hat{B} = 60^\circ$. داریم:

$$S_{ABCD} = AB \times BC \times \sin 60^\circ = \frac{40}{3} \times \frac{16}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{320}{9}\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{M'N'P'Q'}} = \frac{\frac{320}{9}\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{40}{9}$$

۳۶. پاسخ: گزینه ۱



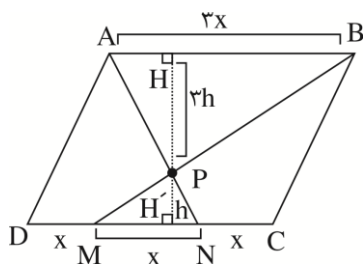
محل هم‌رسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

$$AG = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}, \quad BN = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{20 + 16} = 6$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس $PG = 3$. از طرفی $CG = 2PG = 6$ و $CP = 9$.

۳۷. پاسخ: گزینه ۲



دو مثلث $\triangle APB$ و $\triangle MNP$ به نسبت ۳ متشابه‌اند بنابراین $PH = 3PH'$ داریم:

$$S_{ABCD} = 3x \times 4h = 12xh$$

$$S_{\triangle MNP} = \frac{xh}{2}, S_{\triangle APB} = \frac{9}{2}xh$$

$$S_{PBCN} = S_{APMD} = S_{\triangle BMC} - S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2}(4h \times 2x) - \frac{1}{2}(xh) = \frac{7}{2}xh$$

$$\frac{S_{\triangle APB} - S_{PNCB}}{S_{APMD} - S_{\triangle MNP}} = \frac{\frac{9}{2}xh - \frac{7}{2}xh}{\frac{7}{2}xh - \frac{1}{2}xh} = \frac{xh}{3xh} = \frac{1}{3}$$

۳۸. پاسخ: گزینه ۲

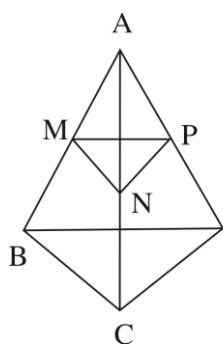
اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی این چندضلعی باشند، با توجه به صورت سؤال $S = \frac{b+i}{2}$ است. داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow \frac{b-i}{2} = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow i = 2$$

کمترین مقدار مساحت ممکن در صورتی رخ می‌دهد که تعداد نقاط مرزی کمترین تعداد ممکن یعنی $b = 3$ باشد. داریم:

$$S_{\min} = \frac{3}{2} + 2 - 1 = \frac{5}{2}$$

۳۹. پاسخ: گزینه ۳



اگر صفحه‌ای موازی با قاعده یک هرم آن را قطع کند، آنگاه نسبت حجم هرم ایجاد شده به حجم هرم اولیه، مساوی توان سوم نسبت پال‌های این هرم (نسبت تشابه k) است. داریم:

$$\frac{AM}{AB} = k = \frac{1}{2}$$

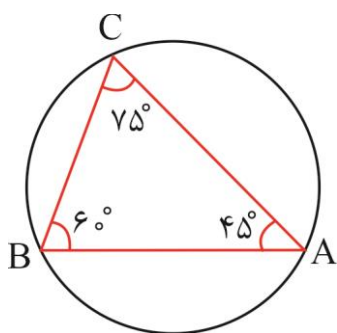
$$\frac{\text{حجم هرم AMNP}}{\text{حجم کل هرم}} = k^3 = \frac{1}{8}$$

پس حجم هر هرم جدا شده $\frac{1}{8}$ حجم کل هرم است. با توجه به چهار قسمت جدا شده نصف حجم کل هرم از آن جدا می‌شود و حجم جسم باقیمانده برابر نصف کل هرم است. پس حجم جسم باقیمانده برابر 10 می‌باشد.

۴۰. پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۱: در صورتی که خط بر صفحه عمود باشد از آن خط بیشمار صفحه عمود بر صفحه اول عبور می کند ولی اگر خط بر صفحه عمود نباشد از آن فقط یک صفحه عمود بر صفحه اول عبور می کند.
 گزینه ۲: اگر سه نقطه روی یک خط باشند، آنگاه از این سه نقطه بیشمار صفحه می گذرد.
 گزینه ۴: از دو خط متمایز و موازی در فضا، یک و فقط یک صفحه می گذرد.

۴۱. پاسخ: گزینه ۳

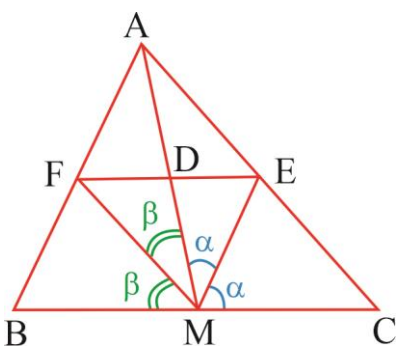


واضح است که $\hat{A} = 45^\circ$ از قضیه سینوسها داریم:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = 18\pi$$

۴۲. پاسخ: گزینه ۴



$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

پس $\angle EMF = 90^\circ$ و مثلث EMF قائم الزاویه است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{نیمساز ME} \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AM}{MC} = \frac{AE}{EC} \\ \text{نیمساز MF} \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AM}{MB} = \frac{AF}{FB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$$

بنابراین طبق عکس تالس $EF \parallel BC$ است.

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{MC} = \frac{AD}{AM} \\ EF \parallel BC \Rightarrow \frac{DF}{MB} = \frac{AD}{AM} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DE}{MC} = \frac{DF}{MB} \xrightarrow{MB = MC} DE = DF$$

پس MD میانه ی وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه است و $EF = 2MD$

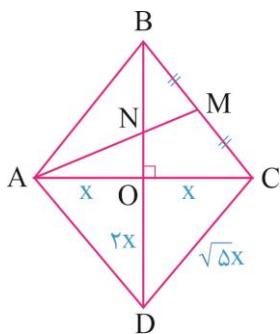
از قضیه ی تالس و نیمسازها داریم:

$$\frac{BF}{AF} = \frac{BM}{AM} \xrightarrow{BF = AB - AF} \frac{BM}{AM} = \frac{AB}{AF} - 1 \Rightarrow \frac{AB}{AF} - \frac{BM}{AM} = 1$$

$$\frac{MC}{DE} = \frac{AC}{AE} \xrightarrow{AC = AE + EC} \frac{MC}{DE} = \frac{EC}{AE} + 1 \Rightarrow \frac{MC}{DE} - \frac{EC}{AE} = 1$$

۴۳. پاسخ: گزینه ۱

با توجه به صورت سؤال $\frac{BD}{AC} = 2$. پس $AC = 2x$ و $BD = 4x$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. با استفاده از قضیه‌ی میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



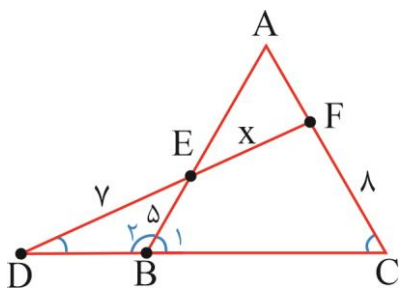
$$AC^2 + AB^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 4x^2 + 5x^2 = 2AM^2 + \frac{5}{2}x^2$$

$$\Rightarrow 2AM^2 = \frac{13}{2}x^2 \Rightarrow AM^2 = \frac{13}{4}x^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{13}}{2}x$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{13}{5}} = \sqrt{2/6}$$

۴۴. پاسخ: گزینه ۱

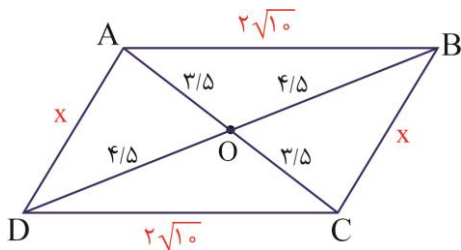
مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C} = \hat{B}_1$ و $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ ، بنابراین $\sin \hat{B}_1 = \sin \hat{B}_2 = \sin \hat{C}$. طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در هر دو مثلث BDE و CDF داریم:



$$\left. \begin{aligned} \triangle BDE &= \frac{\delta}{\sin \hat{D}} = \frac{\gamma}{\sin \hat{B}_2} \Rightarrow \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\sin \hat{D}}{\sin \hat{B}_2} \\ \triangle CDF &= \frac{\lambda}{\sin \hat{D}} = \frac{\gamma+x}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\lambda}{\gamma+x} = \frac{\sin \hat{D}}{\sin \hat{C}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma+x} \Rightarrow x = 4/2$$

۴۵. پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل یکدیگرند. پس $\cos \hat{A} = -\cos \hat{D}$ و از قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle ADC$ داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADC: 49 = x^2 + 40 - 4\sqrt{10} \cdot x \cos \hat{D} \\ \triangle ABD: 11 = x^2 + 40 - 4\sqrt{10} \cdot x \cos \hat{A} \\ \qquad \qquad \qquad -\cos \hat{D} \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} 130 = 2x^2 + 80 \rightarrow x = 5$$

روش دوم: می‌توان در مثلث ABC از قضیه استوارت استفاده کرد.

۴۶. پاسخ: گزینه ۱

طبق قضیه‌ی استوارت در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times CD \times BC$$

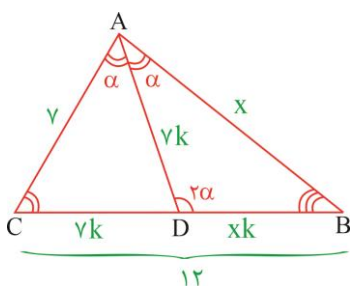
$$\Rightarrow 3(4-x)^2 + (2-x)^2 = 4(x+3)^2 + 1 \times 3 \times 4$$

$$\Rightarrow 48 - 24x + 3x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 12 \Rightarrow 4 = 52x \Rightarrow x = \frac{1}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{x+3}{2-x} = \frac{\frac{1}{13}+3}{2-\frac{1}{13}} = \frac{\frac{40}{13}}{\frac{25}{13}} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5} = 1.6$$

۴۷. پاسخ: گزینه ۱

از قضیه‌ی نیمسازها می‌دانیم در $\triangle ABC$ اگر $AB = x$ و $BD = xk$ را در نظر بگیریم، پس $AC = 7$ و $CD = 7k$. مثلث ACD متساوی‌الساقین است، بنابراین $AD = 7k$ از $BC = 12$ داریم:



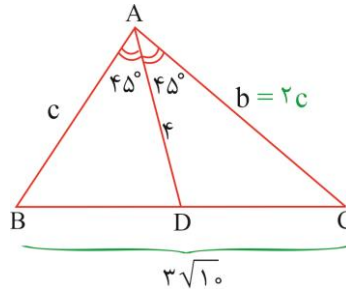
$$7k + xk = 12 \Rightarrow k = \frac{12}{x+7} \quad (1)$$

$$\text{قضیه‌ی نیمسازها: } AD^2 = AC \cdot AB - CD \cdot BD \Rightarrow 49k^2 = 7x - 7xk^2$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{x}{7+x} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{144}{(x+7)^2} = \frac{x}{x+7} \Rightarrow x^2 + 7x - 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -16 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} k = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow AD = vk = \frac{21}{4} = 5.25$$

۴۸. پاسخ: گزینه ۱



اگر AD نیمساز زاویه‌ی قائمه باشد، داریم:

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2bc}{b+c} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2}(b+c) = bc \quad (1)$$

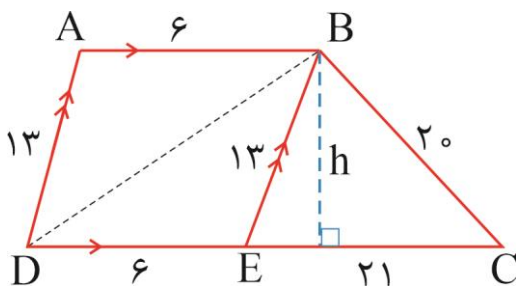
اگر $\frac{b}{c} = 2$ باشد، داریم:

$$2\sqrt{2}(2c + c) = 2c^2 \Rightarrow c = 3\sqrt{2} \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc}{2} = \frac{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})}{2} = 18$$

۴۹. پاسخ: گزینه ۲

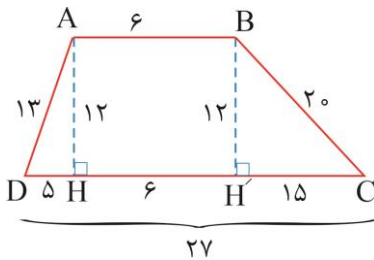
از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا CD را در نقطه E قطع کند. ABED متوازی‌الاضلاع است، پس BE = 13. طبقه قضیه‌ی هرون در مثلث EBC داریم:



$$P = \frac{13 + 20 + 21}{2} = 27 \Rightarrow S_{\triangle BCE} = \sqrt{27 \times 6 \times 7 \times 14} = 126 = \frac{h \times 21}{2} \Rightarrow h = 12$$

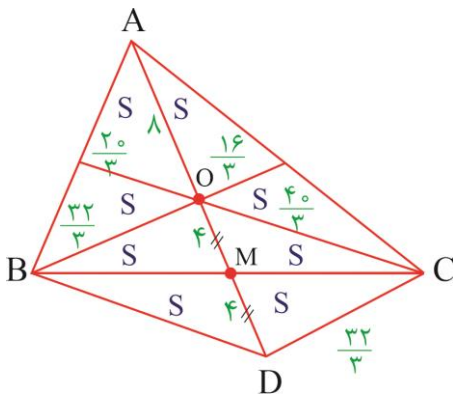
$$S_{\triangle BCD} = \frac{h \times cd}{2} = \frac{12 \times 27}{2} = 162$$

روش تستی: از گزینه‌ها ارتفاع وارد بر ضلع CD را به دست آورده و اندازه‌ی اضلاع را در ذوزنقه چک کنید. از گزینه ۲، $h = 12$ را به دست می‌آوریم.



۵۰. پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم نقطه هم‌رسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. OM را از طرف M به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه D به دست آید. در چهارضلعی OBDC قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند بنابراین OBDC متوازی‌الاضلاع است و $OB = CD = \frac{32}{3}$. از طرفی می‌دانیم با رسم میانه‌های یک مثلث به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می‌شود. MC میانه وارد بر ضلع OD در مثلث OCD است، پس $S_{\triangle OMC} = S_{\triangle CMD}$. طبقه قضیه‌ی هرون مساحت مثلث OCD را به دست می‌آوریم:



$$P = \frac{8 + \frac{40}{3} + \frac{32}{3}}{2} = 16 \Rightarrow S_{\triangle ODC} = \sqrt{16 \times 8 \times \frac{16}{3} \times \frac{8}{3}} = \frac{128}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ODC} = 128$$

نکته: در حالت کلی برای مثلثی با میانه‌های m_a ، m_b و m_c داریم:

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)(m_a + m_c - m_b)(m_b + m_c - m_a)}$$

۵۱. پاسخ: گزینه ۱

$$\overline{AM} = \frac{2}{5} \overline{AB} \Rightarrow 5\overline{AM} = 2\overline{AB} \Rightarrow \frac{M-A}{B-A} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5M - 5A = 2B - 2A \Rightarrow 5M = 2B + 2A \Rightarrow M = \frac{2B+2A}{5} = (4, -2, -1)$$

$M'(4, 2, -1)$ قرینه نقطه M نسبت به صفحه xOz و $M''(4, 2, 1)$ قرینه نقطه M نسبت به محور x ها می باشد. بنابراین $|M'M''| = 2$ است.

۵۲. پاسخ: گزینه ۲

اگر سه نقطه A, B, C بر روی یک خط راست باشند، نتیجه می گیریم بردار \vec{AC} با بردار \vec{BC} موازی است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{AC} = (4-n, -2, -5) \\ \vec{BC} = (5, 1-m, 10) \end{array} \right. \xrightarrow{\vec{AC} \parallel \vec{BC}} \frac{4-n}{5} = \frac{-2}{1-m} = \frac{-5}{10} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{13}{2} \\ m = -3 \end{cases}$$

بنابراین $m+n = \frac{7}{2}$ می باشد.

۵۳. پاسخ: گزینه ۴

از آنجایی که $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ و $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ است، داریم:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 3|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 12|\vec{a}|^2 \Rightarrow |2\vec{a} + 3\vec{b}| = 2\sqrt{3}|\vec{a}|$$

اکنون زاویه بین این دو بردار را از طریق ضرب داخلی دو بردار به دست می آوریم.

$$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |2\vec{a} + 3\vec{b}||\vec{a} - \vec{b}|\cos \theta$$

$$\Rightarrow 2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = (2\sqrt{3}|\vec{a}|)(\sqrt{3}|\vec{a}|)\cos \theta$$

$$\quad \quad \quad -|\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow -3|\vec{a}|^2 = 6|\vec{a}|^2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

۵۴. پاسخ: گزینه ۱

فرض می کنیم $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ داریم:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 4|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ} = \sqrt{4|\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{b}|^2} = \sqrt{3}|\vec{b}|$$

اگر \vec{d}' اندازه تصویر قائم بردار \vec{c} بر امتداد بردار \vec{d} باشد، داریم:

$$|\vec{d}'| = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{3|\vec{b}|^2}{\sqrt{3}|\vec{b}|} = \sqrt{3}|\vec{b}|$$

۵۵. پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{b} - \vec{c}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 4|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 4\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\Rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 3|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = -6$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = -3$$

۵۶. پاسخ: گزینه ۳

 فرض می‌کنیم $\vec{a}(x-1, y+2, z-1)$ و $\vec{b}(2, 3, 3)$ باشند، طبق نامساوی کوشی - شوارتز ترازتر داریم:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |2x - 2 + 3y + 6 + 3z - 3| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} \times \sqrt{22}$$

$$\Rightarrow \frac{|2x + 3y + 3z + 1|}{\sqrt{22}} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{\sqrt{22}} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \geq \frac{11}{2}$$

۵۷. پاسخ: گزینه ۳

 اگر زاویه بین بردارهای \vec{a} و \vec{b} را θ در نظر بگیریم، داریم:

$$|\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})| = \left| \begin{matrix} \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{0} \end{matrix} \right| = |\vec{a} \times \vec{b}| = 48$$

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 48 \Rightarrow 48 = 8 \cdot \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = 0.6$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 0.64 \xrightarrow{90^\circ < \theta < 180^\circ} \cos \theta = -0.8$$

$$|\vec{2b} \times (\vec{b} - \vec{a})| + \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{2b} \times \vec{b} - \vec{2b} \times \vec{a}| + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{0} + \vec{2a} \times \vec{b}| + |\vec{a}|^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 2(48) + 64 - 64 = 96$$

۵۸. پاسخ: گزینه ۲

$$\vec{k} \times (\vec{j} + \vec{i}) - (\vec{3j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k})) \vec{k} + (\vec{i} \times (\vec{k} \times \vec{i})) \times \vec{j}$$

$$= \vec{k} \times \vec{j} + \vec{2k} \times \vec{i} + \vec{3k} + \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} + \vec{2j} + \vec{3k} - \vec{i} = -\vec{2i} + \vec{2j} + \vec{3k}$$

 بنابراین $a = -2, b = -2, c = 3$ است و $a + b + c = -1$

۵۹. پاسخ: گزینه ۴

 چهار نقطه A, B, C, D در یک صفحه‌اند، اگر و تنها اگر $\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0$. با توجه به مختصات نقاط

$$\vec{AC} = (1, 3, -1) \text{ و } \vec{AB} = (8, 2, -2), \vec{AD} = (9, 2, m-2) \text{ داریم}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4, -12, 4)$$

$$\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0 \Rightarrow 36 - 24 + 4m - 8 = 0 \Rightarrow m = 1$$

۶۰. پاسخ: گزینه ۴

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 4m - 5 + n = 0 \Rightarrow 4m + n = 5 \quad (۱)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ m & -5 & 1 \\ 4 & 1 & n \end{vmatrix} = (-5n - 1, 4 - mn, m + 20)$$

$$\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} \parallel (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \frac{2}{-5n - 1} = \frac{h}{4 - mn} = \frac{-7}{m + 20} \quad (۳)$$

$$\Rightarrow 2(m + 20) = -7(-5n - 1) \Rightarrow 2m - 35n = -33 \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) در می‌یابیم که $n = m = 1$ و از (۳) نتیجه می‌گیریم $h = -1$. پس $\vec{c} = (2, -1, -7)$ و $\vec{a} \times \vec{b} = (-6, 3, 21)$ داریم:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = |-12 - 3 - 147| = 162$$

۶۱. پاسخ: گزینه ۱

با توجه به جایگشت اعمال شده، مربع‌های لاتین A و B را کامل می‌کنیم. این مربع به صورت زیر می‌باشند.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

در این صورت مقدار مطلوب برابر $4 - 2 = 2 = (b_{33} + b_{41}) - (a_{22} + a_{14})$ می‌باشد.

۶۲. پاسخ: گزینه ۳

این مربع 4×4 را به سه صورت زیر می‌توان به مربعی لاتین تبدیل کرد.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

حاصل $a + b + c$ سه مقدار ۸، ۶ و ۴ می‌تواند باشد.

۶۳. پاسخ: گزینه ۳

با توجه به متعامد بودن این دو مربع لاتین و مشخص بودن بعضی از درایه‌های آنها، فقط به صورت زیر می‌توان این دو مربع را تکمیل کرد.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

بنابراین $a_{12} + a_{23} + b_{23} + b_{31} = 9$ می‌باشد.

۶۴. پاسخ: گزینه ۲

در مربع لاتین 4×4 ، اعداد ۱ تا ۴ هر کدام چهار بار نوشته می‌شوند. ابتدا از این چهار عدد متمایز، دو تا را انتخاب می‌کنیم. از آنجایی که هر عدد چهار بار در مربع لاتین تکرار شده است از هر کدام یکی را انتخاب می‌کنیم.

$$\text{مقدار مطلوب} = \binom{4}{2} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 96$$

۶۵. پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2 \leq x_1 \leq 6 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$$

دو مجموعه A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. داریم:

$$A = \{x_1 \geq 5 \text{ جواب های معادله که}\}, B = \{x_2 \geq 4 \text{ جواب های معادله که}\}$$

$$n(A' \cap B') = n(S) - n(A \cup B) = n(S) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

$$= \binom{11}{2} - \binom{6}{2} - \binom{7}{2} + 1 = 20$$

۶۶. پاسخ: گزینه ۲

سه مجموعه A، B و C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A = \{\text{حرف N در جای اصلی خود}\}, B = \{\text{حرف D در جای اصلی خود}\}, C = \{\text{حرف V در جای اصلی خود}\}$$

$$n(S) = 5!$$

$$n(A) = n(B) = n(C) = 4!$$

$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 3!$$

$$n(A \cap B \cap C) = 2!$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow n(A' \cap B' \cap C') = n(S) - n(A \cup B \cup C) = 5! - 3 \times 4! + 3 \times 3! - 2! = 64$$

۶۷. پاسخ: گزینه ۲

یکی از حالت‌های تابع f به صورت زیر می‌باشد.

$$f = \{(a, y_1), (b, y_1), (c, y_2), (d, y_3), (e, y_4)\}$$

در واقع کفایت a و b را یک بسته در نظر بگیریم و تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۳ عضوی را به دست آوریم.

$$3^4 - 3 \times 2^4 + 3 \times 1^4 - 0^4 = 36$$

۶۸. پاسخ: گزینه ۱

برای انتخاب ۳ عضوی که به عضو هم شماره خود متناظر می‌شوند، $\binom{5}{3} = 10$ حالت وجود دارد. تعداد هریک از آن‌ها به صورت زیر می‌باشد.

عضو دوم به هم شماره خود متناظر شود A_2 ، عضو اول به هم شماره خود متناظر شود A_1

$$n(A'_1 \cap A'_2) = n(S) - n(A_1 \cup A_2) = n(S) - n(A_1) - n(A_2) + n(A_1 \cap A_2)$$

$$= 2! - 1! - 1! + 1 = 1$$

بنابراین در کل $10 \times 1 = 10$ حالت برای آنکه فقط سه عضو به عضو هم شماره خود متناظر شود. وجود دارد.

۶۹. پاسخ: گزینه ۲

اگر x عددی از بازه $(0, 6)$ باشد، جزء صحیح آن به یکی از حالت‌های زیر است.

$$[x] = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5$$

هرکدام را یک لانه در نظر می‌گیریم. بنابراین در کل ۶ لانه وجود دارد. اگر هر عدد انتخابی از این بازه را یک کیبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه کیبوتری اگر بخواهیم مطمئن شویم لانه‌ای وجود دارد که حداقل دارای ۸ کیبوتر می‌باشد باید حداقل $43 = 6 \times 7 + 1$ کیبوتر را انتخاب کنیم.

۷۰. پاسخ: گزینه ۲

شرط جواب معادله همنهشتی این است که $(a, 35) | 1$. پس باید $(a, 35) = 1$ برقرار باشد. از آنجایی که $35 = 5 \times 7$ ، پس عدد a نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر است.

عدد بر ۷ بخش پذیر باشد B ، عدد بر ۵ بخش پذیر باشد A

$$n(S) = 300 - 100 + 1 = 201$$

$$n(A) = \left[\frac{300}{5} \right] - \left[\frac{99}{5} \right] = 60 - 19 = 41$$

$$n(B) = \left[\frac{300}{7} \right] - \left[\frac{99}{7} \right] = 42 - 14 = 28$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{300}{35} \right] - \left[\frac{99}{35} \right] = 8 - 2 = 6$$

$$n(A' \cap B') = n(S) - n(A \cup B) = 201 - 41 - 28 + 6 = 138$$

۷۱. پاسخ: گزینه ۴

به بررسی هر گزینه می‌پردازیم:

(۱) نادرست: علت در کنار هم ماندن پروتون‌های درون هسته، نیروی هسته‌ای است.

(۲) همانطور که می‌دانیم با افزایش تعداد پروتون‌های هسته، اگر هسته بخواهد پایدار بماند، باید تعداد نوترون‌های آن افزایش یابد و برای مثال در هسته‌های سنگین نسبت $\frac{N}{Z}$ تقریباً $\frac{1}{5}$ است.

(۳) نیروی هسته‌ای مستقل از بار الکتریکی است.

(فیزیک ۳ - ساختار هسته؛ سطح سؤال: آسان)

۷۲. پاسخ: گزینه ۳

نکته: ایزوتوپ‌های یک عنصر تعداد پروتون‌های یکسان (عدد اتمی یکسان) و تعداد نوترون‌های متفاوت دارند. همچنین خواص شیمیایی ایزوتوپ‌های یکسان است.

(فیزیک ۳ - ایزوتوپ؛ سطح سؤال: آسان)

۷۳. پاسخ: گزینه ۴

موارد (الف) و (ج) به درستی بیان شده‌اند.

مورد (ب) نادرست: طبق صورت واپاشی بتای منفی $({}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e^-)$ عدد اتمی هسته دختر یک واحد از عدد اتمی هسته مادر بیشتر است.

مورد (د) نادرست: پرتوی گاما ممکن است از ورقه سرب به ضخامت 100mm عبور کند.

(فیزیک ۳ - پرتوهای طبیعی؛ سطح سؤال: آسان)

۷۴. پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تعداد نیمه‌عمر هر کدام را می‌یابیم:

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} \begin{cases} n_A = \frac{12}{3} = 4 \\ n_B = \frac{12}{6} = 2 \end{cases}$$

حال به کمک رابطه $N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و با در نظر گرفتن جرم اولیه برابر برای داده‌ها داریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{n_A=4, n_B=2} \frac{N_A}{N_B} = \frac{2^{n_B}}{2^{n_A}} = \frac{2^2}{2^4} = \frac{1}{4}$$

(فیزیک ۳ - نیمه‌عمر؛ سطح سؤال: متوسط)

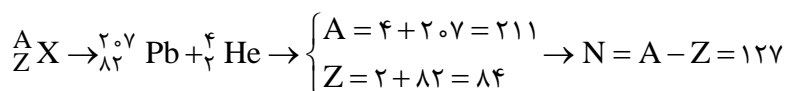
۷۵. پاسخ: گزینه ۴

A و B ایزوتوپ هستند و به روش شیمیایی نمی‌توان آن‌ها را از هم جدا کرد، اما می‌توان A، C و B را به روش شیمیایی از هم جدا کرد.

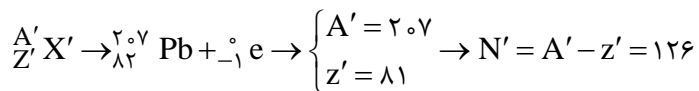
(فیزیک ۳ - ایزوتوپ؛ سطح سؤال: آسان)

۷۶. پاسخ: گزینه ۲

ابتدا هسته مادر، واپاشی آلفا را مشخص می‌کنیم:



حال هستهٔ مادر، واپاشی بتا منفی را مشخص می‌کنیم:



$$N - N' = 127 - 126 = 1$$

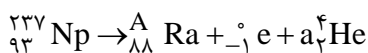
حال اختلاف تعداد نوترون‌ها را حساب می‌کنیم:

روش دیگر: با واپاشی آلفا، هستهٔ مادر و نوترون دو در واپاشی β^- هستهٔ مادر یک نوترون از دست می‌دهد. بنابراین اختلاف نوترون‌های دو هستهٔ مادر، یک نوترون است.

(فیزیک ۳ - واپاشی هسته: سطح سؤال: متوسط)

۷۷. پاسخ: گزینه ۴

واکنش واپاشی را می‌نویسیم:



در واکنش واپاشی باید بار پایسته بماند:

$$93 = 88 + (-1) + 2a \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3$$

حال با توجه به پایسته بودن عدد جرمی داریم:

$$237 = A + 0 + a \times 4 \xrightarrow{a=3} 237 = A + 12 \rightarrow A = 225$$

(فیزیک ۳ - واپاشی هسته: سطح سؤال: متوسط)

۷۸. پاسخ: گزینه ۴

$$T_{\frac{1}{2}} = 60 \text{ روز}$$

با توجه به نمودار در مدت ۶۰ روز تعداد هسته‌های مادر نصف شده است؛ در نتیجه:

برای آنکه ۹۳/۷۵ درصد از ماده‌ای واپاشی شود، باید $100 - 93/75 = 6/25$ درصد از ماده فعال باقی بماند.

$$\frac{N}{N_0} \times 100 = 6/25 \rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{1}{16}$$

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \frac{N_0}{16} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow n = 4$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{t}{n} \rightarrow 60 = \frac{t}{4} \rightarrow t = 240 \text{ روز}$$

(فیزیک ۳ - نیمه‌عمر: سطح سؤال: متوسط)

۷۹. پاسخ: گزینه ۲

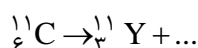
تنها ذرهٔ آلفا عدد جرمی را تغییر می‌دهد:

پوزیترون جرم اندکی دارد و در میدان مغناطیسی بیشتر منحرف می‌شود؛ پس ذرهٔ A پوزیترون است.

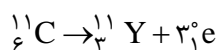
(فیزیک ۳ - واپاشی هسته: سطح سؤال: آسان)

۸۰. پاسخ: گزینه ۴

ابتدا فرآیند را می‌نویسیم:



برای پایستگی بار و نوکلئون‌ها باید ۳ پروتو بتا مثبت گسیل شده باشد:



(فیزیک ۳ - واپاشی هسته‌ای: سطح سؤال: آسان)

۸۱. پاسخ: گزینه ۴

شار مغناطیسی عبوری از حلقه بسته از رابطه $\phi = AB \cos \theta$ به دست می‌آید و همانطور که می‌دانیم، θ زاویه‌ای است که میدان مغناطیسی (B) با نیم خط فرضی عمود به مساحت حلقه می‌سازد؛ پس چون زاویه سطح حلقه با میدان داده شده است، می‌توان θ را به صورت زیر تعیین کرد:

$$\theta_1 = 0^\circ \Rightarrow \theta_2 = 90^\circ \text{ زاویه اولیه سطح حلقه با میدان}$$

$$\theta_2 = 3^\circ \Rightarrow \theta_1 = 6^\circ \text{ زاویه ثانویه سطح حلقه با میدان}$$

حال داریم:

$$\phi = AB \cos \theta \Rightarrow \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{A_2}{A_1} \times \frac{B_2}{B_1} \times \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} \frac{B}{A_2 = 2A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_2}{\phi_1} = 2 \times 1 \times \frac{\cos(3^\circ)}{\cos(6^\circ)} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(فیزیک ۲ - شار مغناطیسی؛ سطح سؤال: آسان)

۸۲. پاسخ: گزینه ۲

به کمک قانون القای الکترومغناطیسی فارادی برای حلقه بسته داریم:

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \begin{cases} \text{بازه } 0 \text{ تا } 0.2 \text{ ثانیه} \rightarrow \bar{\varepsilon} = -1 \times \frac{((0/0.4) - (-0/0.4))}{0.2} = -4V \\ \text{بازه } 0.3 \text{ تا } 0.4 \text{ ثانیه} \rightarrow \bar{\varepsilon} = 0 \\ \text{بازه } 0.4 \text{ تا } 0.6 \text{ ثانیه} \rightarrow \bar{\varepsilon} = -1 \times \frac{((-0/0.4) - (0/0.4))}{0.2} = +4V \end{cases}$$

(فیزیک ۲ - قانون القای الکترومغناطیسی فارادی؛ سطح سؤال: متوسط)

۸۳. پاسخ: گزینه ۳

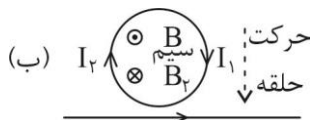
مطابق قانون لنز، جهت جریان القایی در حلقه بسته در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به وجودآورنده جریان القایی یعنی تغییر شار، مخالفت کند.

پس جهت جریان القایی در هر شکل را به صورت زیر و به کمک قاعده دست راست خواهیم یافت:

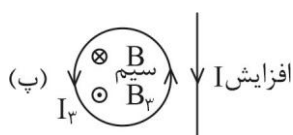
I_1 ساعتگرد $\Rightarrow B_1$ القایی حلقه درونسو $\Rightarrow B \otimes$ در حال کاهش $\Rightarrow I$ کاهش



I_2 ساعتگرد $\Rightarrow B_2$ القایی حلقه درونسو $\Rightarrow B \otimes$ در حال افزایش حرکت حلقه رو به پایین

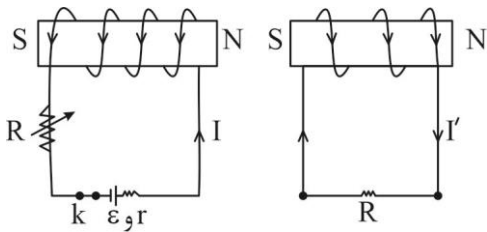


I_3 ساعتگرد $\Rightarrow B_3$ القایی حلقه برونسو $\Rightarrow B \otimes$ در حال افزایش $\Rightarrow I$ افزایش



(فیزیک ۲ - قانون لنز؛ سطح سؤال: آسان)

۸۴. پاسخ: گزینه ۱



با توجه به جهت جریان القایی در مدار راست (I')، همچنین جهت جریان عبوری از مدار چپ (I) و به کمک قاعده دست راست، قطب‌های S و N را در دو مدار به دست می‌آوریم:

مدار راست، قطب ناهمنام در مقابل مدار چپ ایجاد کرده است؛ پس تنها گزینه ۱ به درستی بیان شده است؛ زیرا وقتی کلید K در حال باز شدن

باشد، جریان (I) در حال کاهش شده و طبق قانون لنز مدار راست برای مخالفت با این کار قطب ناهمنام در مقابل مدار ایجاد خواهد کرد.

سایر گزینه‌ها به درستی بیان نشده است.

(فیزیک ۲ - قانون لنز؛ سطح سؤال: متوسط)

۸۵. پاسخ: گزینه ۱

ابتدا چون گفته شده بیشینه توان مصرفی مقاومت ($P = \frac{V_r^2}{R}$) پس باید بیشترین ولتاژ V_1 از طریق مبدل به V_r تبدیل شده باشد، پس:

$$\frac{V_r}{V_1} = \frac{N_r}{N_1} \Rightarrow \frac{V_r}{220} = \frac{400}{2000} \Rightarrow V_r = 44V$$

$$P = \frac{V_r^2}{R} = \frac{44^2}{121} = 16W$$

حال توان مصرفی مقاومت برابر است با:

(فیزیک ۲ - میدان جریان متناوب؛ سطح سؤال: آسان)

۸۶. پاسخ: گزینه ۱

الکتریسیته شارش شده در مدار حلقه به کمک رابطه $|\Delta q| = \frac{N}{R} |\Delta \phi|$ به دست می‌آید:

$$A = \pi r^2 = 3 \times 16 = 48 \text{ cm}^2 \rightarrow A = 48 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Delta B = 30 - (-40) = 70 \cdot G = 70 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$\Delta \phi = A \Delta B = 7 \times 48 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

$$|\Delta q| = \frac{1}{0.7} \times 7 \times 48 \times 10^{-7} = 48 \times 10^{-6} \text{ C} = 48 \mu\text{C}$$

(فیزیک ۲ - قانون القا فاراده؛ سطح سؤال: متوسط)

۸۷. پاسخ: گزینه ۲

هنگام عبور آهن‌ربا از حلقه طبق قانون لنز خلاف جهت حرکت آهن‌ربا به آن نیرو وارد می‌شود سرعت حرکت آهن‌ربا را کم می‌کند؛ پس در آزمایش (۲) آهن‌ربا با شدت کمتری برخورد می‌کند و جابه‌جایی جعبه کمتر می‌شود.

(فیزیک ۲ - قانون لنز؛ سطح سؤال: متوسط)

۸۸. پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\Delta t}{4} = \Delta \text{ms} \rightarrow T = 4 \text{ ms}$$

با توجه به نمودار:

حال به کمک نسبت $\frac{t}{T}$ متوجه می‌شویم در چه زمانی بر حسب T جریان $\sqrt{3}A$ می‌شود:

$$\frac{t}{T} = \frac{2/5}{4} = \frac{5}{8} \rightarrow \frac{5}{8} T$$

به کمک معادله جریان متناوب بر حسب زمان، جریان بیشینه را حساب می‌کنیم:

$$I = I_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \rightarrow -\sqrt{3} = I_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{5}{8}T\right)$$

$$\rightarrow -\sqrt{3} = I_{\max} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow -\sqrt{3} = I_{\max} \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow I_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} A$$

$$\rightarrow I_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} A$$

(فیزیک ۲ - جریان تناوب؛ سطح سؤال: دشوار)

۸۹. پاسخ: گزینه ۳

دو ثانیه سوم یعنی بازه زمانی بین $t = 4s$ و $t = 6s$. در این دو لحظه شار گذرنده از حلقه را به دست می‌آوریم:

$$t_1 = 4s \rightarrow \phi_1 = (4)^2 + 5(4) - 10 = 26 \text{ Wb}$$

$$t_2 = 6s \rightarrow \phi_2 = (6)^2 + 5(6) - 10 = 56 \text{ Wb}$$

نیروی محرکه القایی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$|\varepsilon|_{\text{av}} = N \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = 1 \times \frac{56 - 26}{2} \Rightarrow |\varepsilon|_{\text{av}} = 15 \text{ V}$$

$$I_{\text{av}} = \frac{\varepsilon_{\text{av}}}{R} \Rightarrow I_{\text{av}} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ A}$$

جریان القایی متوسط خواهد شد:

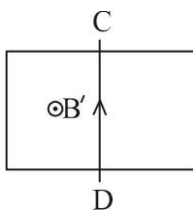
(فیزیک ۲ - قانون القا فاراده؛ سطح سؤال: آسان)

۹۰. پاسخ: گزینه ۴

اندازه نیرو محرکه به کمک تغییر سطح برابر است با:

$$|\varepsilon| = NB \frac{\Delta A}{\Delta t} = 1 \times 40 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-2} = 80 \times 10^{-5} = 8 \times 10^{-4} \text{ V}$$

با توجه به قانون لنز میدان القایی در مدار برون سو است حال به کمک قاعده دست راست جهت جریان القایی را مشخص می‌کنیم:



(فیزیک ۲ - قانون القا فاراده؛ سطح سؤال: متوسط)

۹۱. پاسخ: گزینه ۱

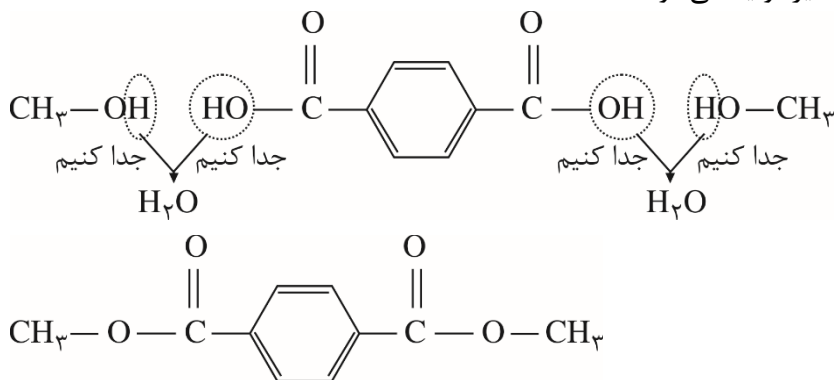
منابع شیمیایی به طور یکسان در جهان توزیع نشده‌اند.

۹۲. پاسخ: گزینه ۳

فناوری همواره با ساخت یا استفاده از یک وسیله همراه است.

۹۳. پاسخ: گزینه ۱

به همراه تولید یک مول دی‌استر، دو مول آب نیز تولید می‌شود.



۹۴. پاسخ: گزینه ۴

کاربرد همه مواد اشاره شده درست است و از شما دانش آموزان عزیز، تمنا داریم آن‌ها را به خوبی به خاطر بسپارید.

۹۵. پاسخ: گزینه ۴

یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه‌تر است که شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فرآورده‌های سودمند تبدیل شود.

۹۶. پاسخ: گزینه ۲

فرمول ساختاری داده شده مربوط به پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) بوده که از مونومرهای ترفتالیک اسید و اتیلن گلیکول تهیه می‌شود.

بررسی همه عبارت‌ها

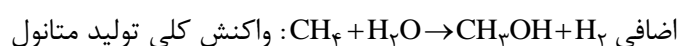
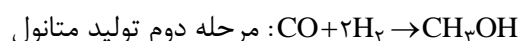
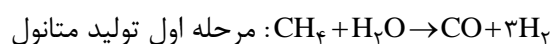
(آ) نادرست - مونومرهای سازنده آن در نفت خام یافت نمی‌شوند.

(ب) نادرست - بیشتر بطری‌های آب از پلیمر پلی‌اتیلن ترفتالات ساخته می‌شود.

$$\frac{\text{جرم اتم‌های اکسیژن}}{\text{جرم کل پلیمر}} = \frac{64n}{192n} = \frac{64}{192} = \frac{1}{3} = \frac{33}{99} \text{ درصد} \quad \text{(پ) درست}$$

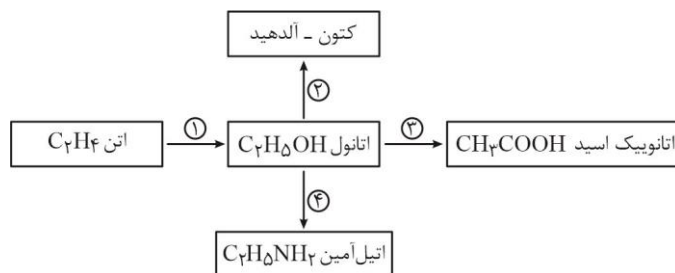
 (ت) درست - یک مول $(C_{10}H_8O_4)_n$ دارای ۸ مول جفت الکترون ناپیوندی و ۸ مول اتم است.

۹۷. پاسخ: گزینه ۴



$$\frac{179/6L H_2O}{1 \times 22/4} \times \frac{50}{100} = \frac{x \text{ mol } H_2}{1} \text{ اضافی} \Rightarrow 4 \text{ mol } H_2 \text{ اضافی}$$

۹۸. پاسخ: گزینه ۴



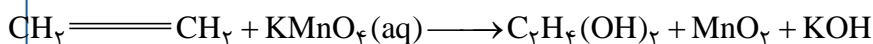
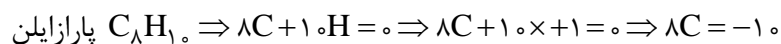
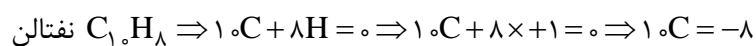
۹۹. پاسخ: گزینه ۱



$$\frac{80}{100} \times \frac{4 \text{ mol} \cdot L^{-1} \times \frac{1}{4} L}{4} = \frac{xg C_8H_6O_4}{1 \times 166} = 3/32 g C_8H_6O_4$$

۱۰۰. پاسخ: گزینه ۳

بررسی همه گزینه‌ها



مگنز (IV) اتیلن گلیکول محلول رقیق کاهنده
اکسید پتاسیم پرمنگنات (گاز اتن)
(اکسنده)

(۳) با افزایش دما گرچه شرایط انجام واکنش تأمین می‌شود، اما بازده همچنان مطلوب نیست.

(۴) هرچه ماده هدف پیچیده‌تر باشد به دانش پیشرفته‌تری نیاز است.

۱۰۱. پاسخ: گزینه ۱

۱۰۲. پاسخ: گزینه ۲

با رشد جهت جهان، مصرف پوشاک به میزان چشمگیری افزایش یافت.

۱۰۳. پاسخ: گزینه ۱

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۲) شیب صعودی: تولید الیاف پلی‌استری < تولید الیاف پنبه‌ای

(۳) طی سال‌های ۱۹۸۰ تا ۲۰۰۰ میلادی، میزان تولید الیاف نخی (پنبه) از میزان تولید الیاف ساختگی (پلی‌استری) بیشتر است.

(۴) به‌طور کامل الیاف ساختگی جایگزین الیاف طبیعی نشده است.

۱۰۴. پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌های نادرست:

- (۱) انسولین همانند سلولز، نوعی درشت مولکول است.
 (۳) آمارها نشان می‌دهد که حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود.
 (۴) پلیمر واژه‌ای یونانی است.

۱۰۵. پاسخ: گزینه ۱

۱۰۶. پاسخ: گزینه ۲

فقط عبارت (ت) نادرست است.

فرآورده این واکنش ۱، ۲-دی‌کلرو اتان نام دارد.

۱۰۷. پاسخ: گزینه ۳

در نسبت مولی کاتالیزگر $\frac{3 \text{ mol } \text{Al}}{1 \text{ mol } \text{Ti}}$ (عدد اتمی کوچک‌تر به عدد اتمی بزرگ‌تر) پل اتن با بیشترین جرم مولی به دست می‌آید.

۱۰۸. پاسخ: گزینه ۱

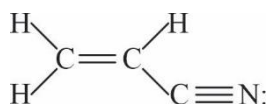
۴ - اتیل - ۲ - متیل - ۳ - هگزن



۱۰۹. پاسخ: گزینه ۴

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) مولکول سیانو اتن مونومر سازنده پلیمر پتو است.



(۲) واحدهای تکرارشونده پلی‌استیرن دارای حلقه بنزنی و آروماتیک است.

 (۳) پروپین (C_3H_6) و استیرن (C_8H_8) هر دو هیدروکربن هستند.

(۴)

$$\frac{\text{C}_2\text{F}_4}{\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2} \frac{\text{الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{12}{3} = 4$$

۱۱۰. پاسخ: گزینه ۲

 (آ) نادرست، بنزآلدئید ($\text{C}_7\text{H}_6\text{O}$) موجود در بادام، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با آب را ندارد.

(ب) درست: نسبت جرم مولی بنزوئیک اسید ($\text{C}_7\text{H}_6\text{O}_2 = 122 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) به جرم مولی متیل متانوات ($\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_2 = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)، بیش از ۲ برابر است.

(پ) نادرست: گروه عامل موجود در گشنیز و ویتامین A، الکل (هیدروکسیل) است.

(ت) درست: از آبکافت اتیل بوتانوات، می‌توان اتانول تولید کرد که به هر نسبتی در آب حل می‌شود و نمی‌توان از آن محلول سیر شده تهیه کرد.

۱۱۱. پاسخ: گزینه ۴

ساختار داده شده دارای دو گروه عاملی الکلی (هیدروکسیل) و دو گروه عاملی آمیدی است و از دو بخش مشابه تشکیل شده است.

(آ) درست است. کلاسترول و کولار به ترتیب دارای گروه عاملی هیدروکسیل و آمیدی هستند.

(ب) درست است. مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن سه حلقه آن برابر (-۸) که برابر با $10C = -8$ (نفثالن) است.

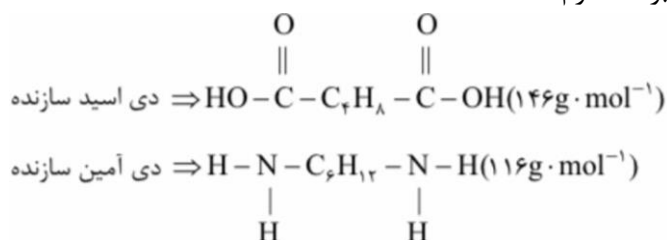
(پ) نادرست است. برای آبکافت یک مول از مولکول آن نیاز به دو مول آب است.

(ت) درست است

۱۱۲. پاسخ: گزینه ۱

(۱) درست است. نوعی پلی‌آمید بوده و به علت داشتن پیوندهای N-H در طول زنجیر خود، دارای نیروی بین مولکولی پیوند هیدروژنی است.

(۲) نادرست است. تفاوت جرم مولی مونومرهای سازنده آن برابر ۳۰ گرم است:



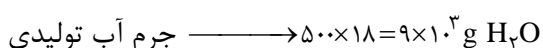
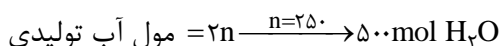
$\Rightarrow \text{C}_8\text{H}_6\text{O}_4$ (ترفتالیک اسید) دی اسید سازنده بطری آب (PET)

$\Rightarrow \text{C}_6\text{H}_6\text{O}_2$ (اتیلن گلیکول) دی الکل سازنده بطری آب (PET)

تفاوت جرم مولی واحدهای سازنده PET برابر ۱۰۴ گرم است.

(۳) نادرست است. فرمول شیمیایی این پلی‌آمید به صورت $\text{C}_{12}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{O}_2$ است.

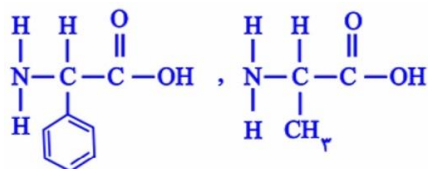
(۴) نادرست است. به ازای تولید هر مول پلی‌آمید با n واحد تکرارشونده به تقریب $2n$ مول آب تولید می‌شود:



۱۱۳. پاسخ: گزینه ۳

(۱) نادرست است. عدد اکسایش اتم کربن متصل به بنزن، برابر صفر است.

(۲) نادرست است. مونومرهای سازنده آن غیریکسان هستند.



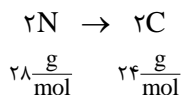
(۳) درست است.

(۴) نادرست است. اختلاف جرم مونومرها:



۱۱۴. پاسخ: گزینه ۴

سرتونین دارای فرمول مولکولی $C_{11}H_{17}N_2O$ می‌باشد.
 (۱) نادرست است. گروه عاملی آمیدی در آن وجود ندارد.
 (۲) نادرست است.



اختلاف جرم ۴g نیست بنابراین نمی‌تواند برابر با عدد اتمی Be ۴ باشد. با جایگزین کردن اتم C به جای N با توجه به ظرفیت ۴ کربن بایستی یک هیدروژن نیز به ساختار اضافه شود تا قاعده اوکتت (هشت تایی) رعایت شود. (دام زیرکانه طراحی) (۳) نادرست است. در ساختار سرتونین ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد که برابر با تعداد پیوندهای C-H در قسمت حلقوی ساختار است و در صورت استفاده از دو گروه آمینی، توانایی شرکت در واکنش پلی‌آمیدها را دارد.
 (۴) نادرست است. این ترکیب دارای ۴ مول پیوند C=C است که با 4 mol H_2 به ترکیب سیرشده تبدیل می‌شود.

$$\text{اتم H} = 48 / 16 \times 10^{23} = 3 \times 10^{23} \text{ اتم} \times 2 \text{ مولکول H}_2 = 24 / 0.8 \times 10^{23} = 3 \times 10^{23} \text{ اتم H}_2 \times 2 \text{ تعداد اتم H}$$

۱۱۵. پاسخ: گزینه ۳

با افزایش شمار اتم‌های کربن در الکل‌ها تفاوت انحلال‌پذیری دو الکل متوالی، همانند انحلال‌پذیری، کاهش می‌یابد. ولی به‌طور کلی با افزایش شمار اتم‌های کربن در الکل نقطه جوش آن‌ها افزایش می‌یابد، زیرا با افزایش جرم مولی الکل‌ها جاذبه بین مولکولی الکل‌ها بیشتر می‌شوند.

۱۱۶. پاسخ: گزینه ۱

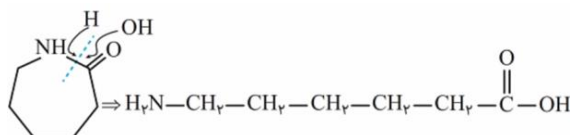
بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) به‌طور کلی واکنش آبکافت پلی‌استرها و پلی‌آمیدها کند است درحالی که پلی‌مرهای حاصل از هیدروکربن‌های سیر نشده، به انجام واکنش تمایل ندارند و از این رو پوشاک تهیه‌شده از این مواد در طبیعت تجزیه نمی‌شوند.
 (پ) پلیمرهای طبیعی زیست تخریب‌پذیر در طبیعت توسط جانداران ذره‌بینی به مولکول‌های ساده و کوچک مانند کربن‌دی‌اکسید و متان و آب تبدیل می‌شوند.

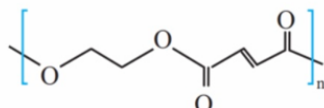
۱۱۷. پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌های درست و نادرست به قرار زیر هستند:

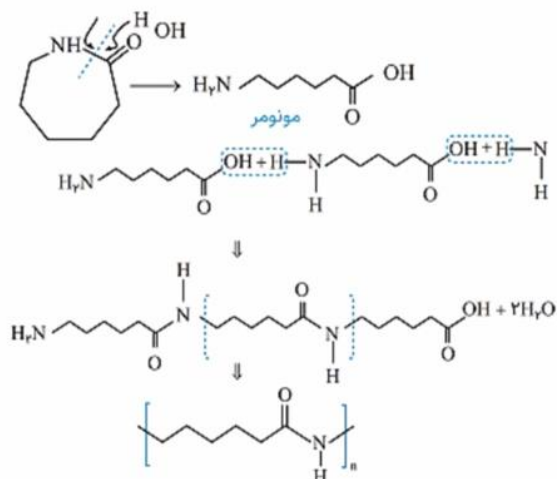
(۱) نادرست است. واکنش آبکافت ترکیب مورد نظر به صورت زیر است:



(۲) نادرست است. فقط یک پیوند دوگانه را فراموش کرده بود!



۳) درست است. به نحوه تشکیل پلیمر مورد نظر توجه نمایید.



۴) نادرست است. در ساختار فرآورده، شمار مولکول‌های آب خارج شده برابر است با:

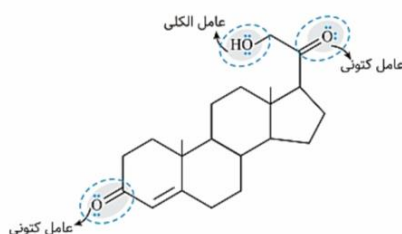
$$(2n-1)H_2O + \text{فرآورده استری} \rightarrow (\text{الکل دو عاملی}) + (\text{اسید دو عاملی}) + 1000$$

پس شمار مولکول‌های آب خارج شده برابر $1999 = 2(1000) - 1$ مولکول است.

۱۱۸. پاسخ: گزینه ۲

مواد درست و نادرست عبارتند از:

آ) درست است. در ساختار ترکیب مورد نظر یک گروه الکلی (OH) وجود دارد که در شرایط مناسب می‌تواند با یک کربوکسیلیک اسید مانند استیک اسید (CH_3COOH) واکنش داده و ترکیبی ایجاد کند که دارای گروه عاملی استری $(-C(=O)-O-)$ است.



ب) درست است. هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است. ترکیب مورد نظر ۳ اتم اکسیژن و ویتامین C ($C_6H_8O_6$) هم ۶ اتم اکسیژن دارد. بنابراین تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی ترکیب مورد نظر نصف این تعداد در ویتامین C است.

پ) نادرست است. فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر $C_{21}H_{30}O_3$ است.

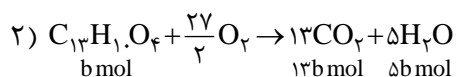
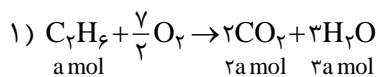
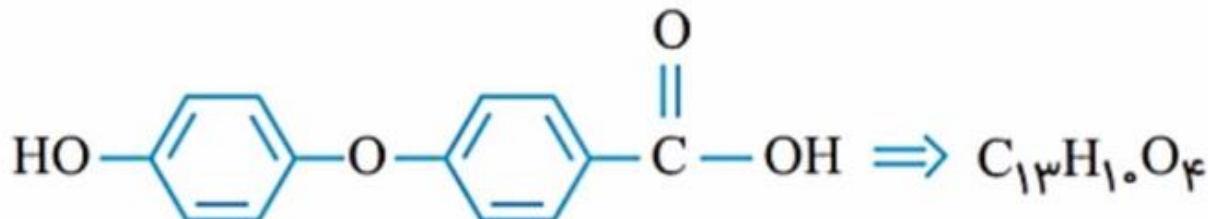
ت) نادرست است. با توجه به فرمول مولکولی این ترکیب ($C_{21}H_{30}O_3$) که دارای ۲۱ اتم کربن است، از سوختن کامل یک مول از آن، ۲۱ مول گاز CO_2 تولید می‌شود که حجم آن در شرایط STP برابر است با:

$$C_{21}H_{30}O_3 \xrightarrow{\text{سوختن}} 21CO_2$$

$$1 \text{ mol } C_{21}H_{30}O_3 \times \frac{21 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_{21}H_{30}O_3} \times \frac{22.4 \text{ L } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 470.4 \text{ L } CO_2$$

۱۱۹. پاسخ: گزینه ۳

فرض می‌کنیم a مول C_6H_6 و b مول از ترکیب دیگر داریم. واکنش سوختن کامل این دو ترکیب به صورت زیر است:



و با توجه به اینکه در مجموع ۱۹۰/۴ لیتر (در شرایط STP) گاز CO_2 و ۹۹ گرم آب تولید شده است، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (3a + 5b) \times 18 = 99 \\ (2a + 13b) \times 22/4 = 190/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 5b = 5/5 \\ 2a + 13b = 8/5 \end{cases}$$

اکنون یک دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم که به صورت زیر آن را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \times(-2) \{ 3a + 5b = 5/5 \\ \times(3) \{ 2a + 13b = 8/5 \end{cases}$$

جمع: $39b - 10b = 25/5 - 11$

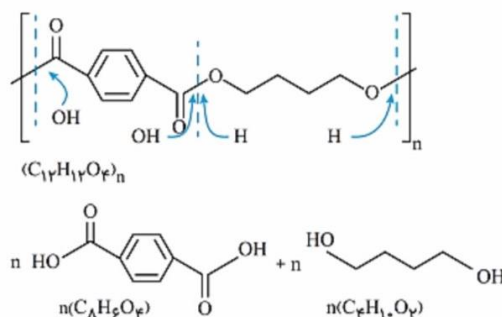
$29b = 14/5 \Rightarrow b = 0.48 \text{ mol} \Rightarrow a = 1 \text{ mol}$

با توجه به واکنش (۱) می‌توان نوشت:

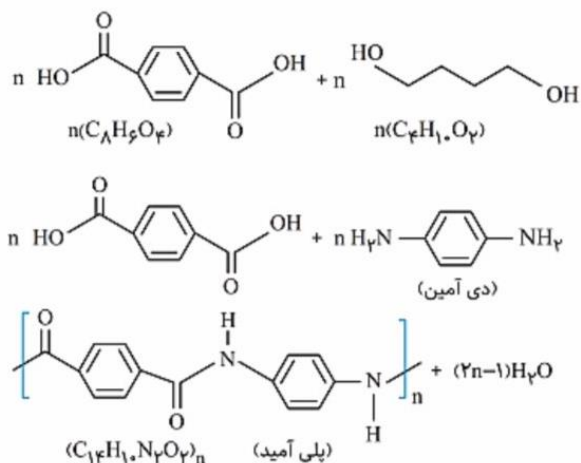
$$\bar{R}(C_6H_6) = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{a \text{ mol}}{30 \text{ min}} = \frac{1 \text{ mol}}{30 \text{ min}} = 3.33 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

۱۲۰. پاسخ: گزینه ۱

برای تعیین اسید و الکل سازنده پلی‌استر مورد نظر به صورت زیر عمل می‌کنیم:



دی اسید در واکنش با دی‌آمین موردنظر، پلی‌آمید تشکیل می‌دهد: دقت کنید در واقعیت در $(2n-1)$ مولکول آب ولی طبق کنکور سراسری $(2n)$ آب آزاد می‌کنیم



واکنش تبدیل پلی استر مورد نظر به پلی آمید را به صورت زیر می توان در نظر گرفت:

$$\left[\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{گرم (g)}} \right]_{\text{(پلی استر)}} = \left[\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{گرم (g)}} \right]_{\text{(پلی آمید)}} \Rightarrow \frac{264}{1 \times 220 \times n} = \frac{x}{1 \times 238 \times n} \Rightarrow x = 285 / 6 \text{g پلی آمید}$$