خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۳_۱۴۰۲

آزمون سیزدهم حضوری

دفترچه شماره ۱

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۱/۱۶

حسابان و ریاضیات پایه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	هندسه
کل حسابان یازدهم حسابان (۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۵۱ کل ریاضی دهم ریاضی (۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۷۰	کل آمار و احتمال صفحهٔ ۱ تا ۱۲۷ ریاضی دهم ریاضی (۱): فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله (تا ابتدای الگو و دنباله) + فصل ششم: شمارش، بدون شمردن + فصل هفتم: آمار و احتمال صفحهٔ ۱ تا ۱۳ و ۱۱۸ تا ۱۷۰	کل هندسهٔ یازدهم هندسه (۲) صفحهٔ ۹ تا ۷۷ کل هندسهٔ دهم هندسه (۱) صفحهٔ ۹ تا ۶۹

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان و ریاضی پایه: حسابان (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۵۱، **ریاضی (۱):** صفحه‌های ۱ تا ۱۷۰

۱- فرض کنید a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با جملات مثبت و $b_n = na_n$ باشد، به طوری که جملهٔ چهارم دنبالهٔ b_n برابر جملهٔ پانزدهم دنبالهٔ a_n و $a_1b_1 = 4$ باشد. واسطهٔ هندسی بین a_{47} و b_7 کدام است؟

۱) ۸۴
۲) ۱۴۰
۳) ۷۰
۴) ۹۱

۲- صفرهای تابع $f(x) = 2mx^2 + (4+m)x - m + 4$ و نقطهٔ تلاقی تابع با محور عرض‌ها، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{1}{2}$ هستند. حاصل‌ضرب مقادیر مختلف m چه عددی است؟ $(m > 0)$

۱) $\frac{256}{9}$
۲) $\frac{16}{3}$
۳) $\frac{3}{16}$
۴) $\frac{9}{256}$

۳- α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 - ax - b = 0$ هستند، به طوری‌که $3\beta^2 + 2\alpha^2 - \beta = 7$. مجموع توان‌های سوم ریشه‌ها، چه عددی است؟

۱) ۶
۲) ۱۱
۳) ۹
۴) ۴

۴- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1+\sqrt[3]{x^{-1}}) = 6x\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{4}$

۵- اگر α ریشهٔ بزرگ‌تر و β ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $\sqrt{2x+6} = 4|x| - 3$ باشند، حاصل $8\beta^2 + 11\beta - \alpha$ کدام است؟ $(\beta < 0 , \alpha > 0)$

۱) -4
۲) -1
۳) -3
۴) -2

۶- جواب نامعادلهٔ $|x|x^2 - 1| < k|x|$ فقط ۴ عدد طبیعی را شامل می‌شود. k کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

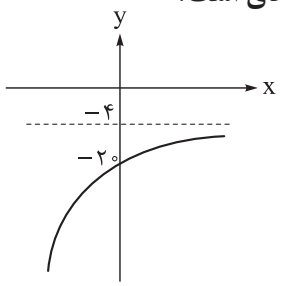
۷- خط d به معادلهٔ $y = 2x + 4$ محور xها را در نقطهٔ A قطع می‌کند. نقطهٔ M با کدام عرض روی محور yها انتخاب شود تا فاصلهٔ آن از A، $5\sqrt{2}$ برابر فاصلهٔ آن از خط d باشد؟

۱) ۶ یا $\frac{26}{9}$
۲) ۶ یا $\frac{24}{9}$
۳) ۴ یا $\frac{26}{9}$
۴) ۴ یا $\frac{24}{9}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸- نمودار تابع $f(x) = a - ۲^{ax-b}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $\log_{|a|} ab$ چه عددی است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) ۴

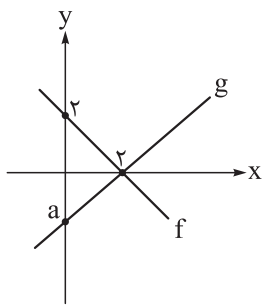
۹- اگر $x > ۱$، حداقل مقدار $A = \log_۹ x + ۲\log_{x^۲} ۳$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) $\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$　　۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰- عنصری هر ۲۰ دقیقه، $\frac{۱}{۹}$ جرم خود را از دست می‌دهد؛ بعد از گذشت چند دقیقه فقط $\frac{۱}{۲۴}$ از جرم اولیهٔ آن باقی می‌ماند؟ $(\log_۴ ۳ = ۰/۷۸)$

۱) ۷۶۰　　۲) ۶۴۰　　۳) ۷۸۰　　۴) ۷۹۰

۱۱- نمودار توابع f و g به صورت روبه‌رو است. به ازای کدام مقدار a تابع $y = \frac{x(f(x) - ۲g(x))}{۲f(x) + g(x)}$، همانی است؟



۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{-۳}{۴}$
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{-۲}{۳}$

۱۲- تابع خطی $f(x) = ax + b$ مفروض است. اگر نمودار تابع $\frac{f}{fof}$ بر نمودار وارون خود منطبق باشد، مقدار $f^{-۱}(-a)$ کدام است؟

۱) $-b$　　۲) b　　۳) $\frac{۱}{b}$　　۴) $\frac{-۱}{b}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

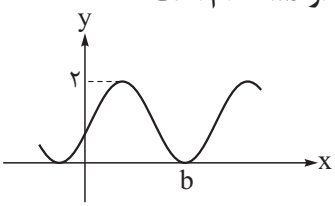
۱۳- فرض کنید $f(x)=a+\sqrt{2a-3-x}$ باشد. اگر معادلهٔ $f^{-1}of(x)=fof^{-1}(x)$ دقیقاً یک ریشه داشته باشد، مقدار $f^{-1}(6)$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -9 ۳) -4 ۴) -6

۱۴- اگر $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{3}{2}$، مقدار $\cos 4x$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{-7}{9}$

۱۵- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-\sin(\frac{3\pi}{4}+x)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۶- مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2}$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

۱۷- اگر b عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{a+\cos x}}{\sin 2x}=b$، مقدار $ab\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

۱۸- تابع $f(x)=[x]-x+a\cos(\frac{\pi[x]}{2})$ در بازهٔ $(1,4)$ پیوسته است؛ مقدار a کدام است؟

۱) $a=1$ ۲) $a=-1$ ۳) $a=\pm 1$ ۴) a یافت نمی‌شود.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آمار و احتمال: صفحه‌های ۱ تا ۱۲۷، **ریاضی (۱):** صفحه‌های ۱ تا ۱۳ و ۱۱۸ تا ۱۷۰

۱۹- ارزش کدام گزاره، درست است؟

۱) مربع هر عدد حقیقی، عددی مثبت است.
۲) مجموع سه عددی متوالی بر عدد ۳ بخش‌پذیر است.
۳) حافظ، بهترین شاعر دنیاست.
۴) تهران، اصفهان و شیراز شهرهای زیبایی هستند.

۲۰- در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۱}{x} > ۰/۱\}$، اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن کم‌تر از ۵ نیست؟

۱) ۲۰۸ ۲) ۳۱۲ ۳) ۴۱۶ ۴) ۶۲۴

۲۱- چه‌قدر احتمال دارد گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$، یک گزاره با ارزش درست باشد؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۲۲- هفت نفر با نام‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_۷$ می‌خواهند در یک رقابت به‌ترتیب تیراندازی کنند. چه‌قدر احتمال دارد بین $A_۱$ و $A_۲$ دقیقاً دو نفر تیراندازی کنند؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۲۱}$ ۳) $\frac{۵}{۲۱}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۲۳- اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid (m \geq -n) \wedge (۲^m \leq n)\}$، $B_i = (۳-i, ۲i+۵]$ و $i \in \{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ و n، احتمال آن که مجموع طول پاره‌خط‌های نمودار $A_n \times B_i$ بیشتر از ۲۰۰ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۸ ۳) ۰/۳۱ ۴) ۰/۳۴

۲۴- برای دو پیشامد A و B اگر $P(A-B)+P(B)=P(A' \cup B')=۰/۷۹$ و $P(B \cap A')=P(B)(۱-P(A))$ باشد، آن‌گاه $P(A' \mid B)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ یا ۰/۵ ۲) ۰/۵ یا ۰/۸ ۳) ۰/۳ یا ۰/۷ ۴) ۰/۵ یا ۰/۷

۲۵- مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d,e\}$ را به چند طریق می‌توان به سه مجموعه افراز کرد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۲۶- اگر انحراف معیار تعدادی دادهٔ آماری برابر ۱/۵ باشد و همهٔ داده‌ها را سه برابر کنیم و سپس از هر کدام ۱ واحد کم کنیم، واریانس داده‌های جدید برابر کدام گزینه می‌شود؟

۱) ۴/۵ ۲) ۶/۷۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۲۰/۲۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۷- نمودار جعبه‌ای ۲۳ دادهٔ آماری را رسم کرده‌ایم. A_1, A_2, A_3, A_4 به‌ترتیب چهار دسته شامل داده‌های سمت چپ جعبه، داده‌های درون جعبه، داده‌های سمت راست جعبه و داده‌های روی جعبه هستند. برای این چهار دسته نمودار دایره‌ای رسم کرده‌ایم. θ_2 تقریباً چند درجه است؟

۱) ۱۸۸ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۷۲ ۴) ۱۶۴

۲۸- از یک جامعه، نمونهٔ ۱۱ و ۹ و ۸ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ گرفته شده است. اگر انحراف معیار جامعه، نصف انحراف معیار نمونه باشد، بازهٔ اطمینان بالای ۹۵ درصد برای میانگین این جامعه کدام است؟ ($\sqrt{20} \simeq 4/5$)

۱) $(6/25 , 7/75)$ ۲) $(6 , 8)$ ۳) $(5/5 , 8/5)$ ۴) $(5 , 9)$

هندسه (۲): صفحه‌های ۹ تا ۷۷، **هندسه (۱):** صفحه‌های ۹ تا ۶۹

۲۹- پاره‌خط $AB = 2$ را در صفحه در نظر می‌گیریم. چند نقطه به فاصلهٔ $\sqrt{2}$ از A وجود دارد که فاصلهٔ آن از B برابر با $2\sqrt{2}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰- در مثلث ABC طول میانهٔ AM با ضلع AB برابر است، کدام گزاره صحیح است؟

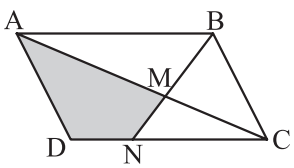
۱) اگر $\hat{B} = 30^\circ$، آن‌گاه $AC < AB$.

۲) اگر $\hat{C} = 60^\circ$، آن‌گاه $BC > AB$.

۳) اگر $\hat{B} = 60^\circ$، آن‌گاه $BC = 2AB$.

۴) اگر $\hat{C} = 30^\circ$، آن‌گاه $AC > 2AB$.

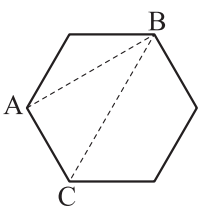
۳۱- در متوازی‌الاضلاع رسم‌شده، اگر مساحت دو مثلث AMB و CMN به ترتیب ۹ و ۴ باشد، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۳

۳) ۱۲ ۴) ۱۱

۳۲- در شکل زیر، اگر مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{3}$ باشد، طول ضلع شش‌ضلعی منتظم کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲

۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

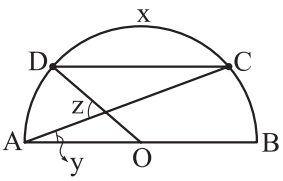
۳۳- طول بزرگ‌ترین ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه a و اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ آن ۳۰° است. حجم شکل حاصل از دوران این مثلث، حول کوچک‌ترین ضلع آن، چند برابر $\pi a^۳$ است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$　　۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$　　۳) $\frac{۱}{۱۶}$　　۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$

۳۴- مساحت مقطع یک استوانهٔ قائم با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد، دو برابر مساحت مقطع صفحه‌ای است که عمود بر ارتفاع، آن را قطع می‌کند. نسبت مساحت جانبی به مساحت کل استوانه کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\pi+۱}$　　۲) $\frac{\pi}{\pi+۲}$　　۳) $\frac{\pi}{۴}$　　۴) $\frac{۲}{\pi}$

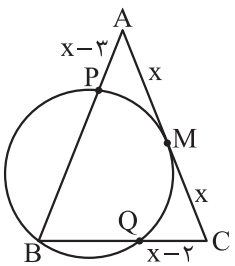
۳۵- در شکل زیر، O وسط قطر نیم‌دایره و CD با AB موازی است. اگر اندازهٔ کمان CD برابر با x باشد، کدام گزینه حتماً درست است؟



۱) $x = y + z$　　۲) $۲z = x + y$

۳) $z = x - ۲y$　　۴) $x + y + z = ۱۸۰^\circ$

۳۶- مطابق شکل، مثلث ABC متساوی‌الساقین $(AB = AC)$ و دایرهٔ گذرنده از B در وسط AC بر آن مماس است. حاصل $\frac{BP}{BQ}$ کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۱/۶

۳) ۱/۷

۴) ۱/۸

۳۷- نقطهٔ A'، تصویر A در بازتاب نسبت به خط d است. اگر $AA' = ۶$ و O نقطه‌ای روی خط d باشد به طوری که $OA = ۵$، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ A از خط OA' کدام است؟

۱) ۳/۶　　۲) ۴　　۳) ۴/۴　　۴) ۴/۸

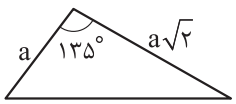
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸- نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,۴)$ قرار دارد. در تجانس به مرکز A و نسبت $-\frac{۱}{۲}$ دایرهٔ C به دایرهٔ $C'(O',R')$ تبدیل می‌شود و در یک دوران پادساعتگرد به مرکز O و زاویهٔ ۶۰°، دایرهٔ C' به دایرهٔ $C''(O'',R')$ تبدیل می‌شود. طول مماس‌مشترک داخلی دو دایرهٔ C' و C'' کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

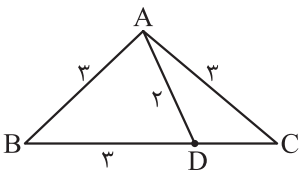
۳۹- شعاع دایرهٔ محیطی مثلث رسم‌شده، چند برابر a است؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲/۵}$

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۴۰- با توجه به شکل، نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث ADC کدام است؟



۱) ۲/۸ ۲) ۳

۳) ۳/۲ ۴) ۳/۴

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛
فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.
هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.
برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی ۱۴۰۳_۱۴۰۲

آزمون سیزدهم حضوری

دفترچه شماره ۲

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۱/۱۶

فیزیک	شیمی
کل فیزیک یازدهم فیزیک (۲) صفحهٔ ۱ تا ۱۳۰ کل فیزیک دهم فیزیک (۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۴۹	کل شیمی یازدهم شیمی (۲) صفحهٔ ۱ تا ۱۲۱ کل شیمی دهم شیمی (۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۲۲

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال ۸۰ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه	

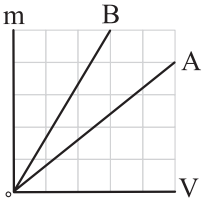
اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

فیزیک پایه: فیزیک (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۳۰، **فیزیک (۱):** صفحه‌های ۱ تا ۱۴۹

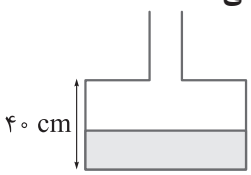
۴۱- نمودار جرم برحسب حجم دو مایع A و B به شکل زیر است. جرم یکسانی از این دو مایع را مخلوط می‌کنیم. چگالی مخلوط حاصل چند برابر چگالی مایع A است؟ (حجم دو مایع در اثر مخلوط‌شدن تغییر نمی‌یابد.)



۱) $\frac{۲۹}{۱۸}$
۲) $\frac{۱۸}{۲۹}$
۳) $\frac{۳۷}{۵۰}$
۴) $\frac{۵۰}{۳۷}$

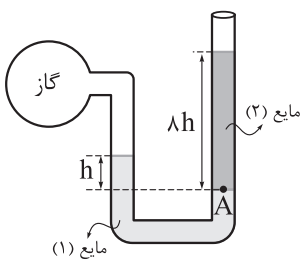
۴۲- مساحت مقطع قسمت پهن و قسمت باریک ظرف شکل زیر، به ترتیب $۵۰\,cm^۲$ و $۲۵\,cm^۲$ است و درون آن $۱\,kg$ آب ریخته‌ایم. اگر به این ظرف $۱/۶\,kg$ روغن اضافه شود، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال تغییر می‌کند؟

$(g = ۱۰\,N/kg \text{ و } \rho_{\text{روغن}} = ۰/۸\rho_{\text{آب}} = ۰/۸\,g/cm^۳)$



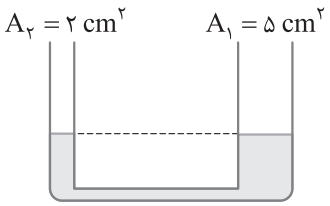
۱) ۲/۴
۲) ۳/۲
۳) ۳/۶
۴) ۴/۸

۴۳- در شکل زیر، چگالی مایع (۱)، ۴ برابر چگالی مایع (۲) است. اگر فشار گاز محبوس در مخزن، ۲۰ درصد بیشتر از فشار هوا باشد، فشار پیمانه‌ای نقطهٔ A چند برابر فشار هوا است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۴- مساحت مقطع شاخه‌های سمت راست و چپ لولهٔ U شکل زیر، به ترتیب $۵\,cm^۲$ و $۲\,cm^۲$ است. در لوله مقداری جیوه به حال تعادل قرار دارد. اگر در شاخهٔ سمت راست $۱۷۰\,g$ آب بریزیم، اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ (چگالی جیوه $۱۳/۶\,g/cm^۳$ است.)

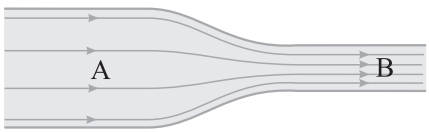


۱) ۵
۲) ۲/۵
۳) ۲
۴) ۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵- در لولهٔ افقی شکل زیر که از دو بخش A و B تشکیل شده، جریان لایه‌ای و پایای آب برقرار است. اگر قطر مقطع بخش A، ۲ برابر قطر مقطع بخش B باشد، کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ تندی آب (v) و فشار آن (P) در دو بخش A و B درست است؟



الف) $v_B = ۲v_A$

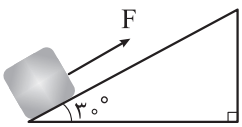
ب) $v_B = ۴v_A$

پ) $P_B > P_A$

ت) $P_A > P_B$

۱) الف و پ　　۲) الف و ت　　۳) ب و پ　　۴) ب و ت

۴۶- در شکل زیر، به جسم ساکنی به جرم ۲kg، نیروی ثابت $F = ۲۰N$، موازی با سطح شیب‌دار وارد می‌شود و جسم را تا بالای سطح شیب‌دار جابه‌جا می‌کند. اگر کار انجام‌شده توسط نیروی F برابر با ۷۲J باشد، تندی جسم در بالای سطح شیب‌دار به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و اصطکاک و مقاومت هوا، ناچیز است.)



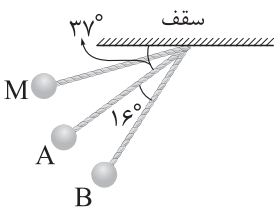
۱) ۳　　۲) ۶

۳) $۳\sqrt{۲}$　　۴) $۶\sqrt{۳}$

۴۷- یک پمپ با توان مصرفی ۱kW، در هر دقیقه، ۶۰۰kg آب را از چاهی به عمق ۵m، تا ارتفاع ۱ متری از سطح زمین بالا آورده و آن را با تندی $۴m/s$ پرتاب می‌کند. بازده این پمپ چند درصد است؟ ($g = ۱۰ N/kg$)

۱) ۵۸　　۲) ۶۶　　۳) ۶۸　　۴) ۷۶

۴۸- در شکل زیر، آونگی به طول ۱/۵ m از نقطهٔ M رها می‌شود. اگر اختلاف تندی گلولهٔ آونگ در دو نقطهٔ A و B برابر با $۱ m/s$ باشد، تندی گلوله در نقطهٔ A چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰ N/kg$، $\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$ و اتلاف انرژی مکانیکی ناچیز است.)



۱) ۲/۵

۲) ۳/۵

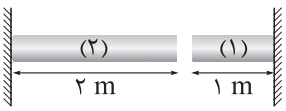
۳) ۴/۵

۴) ۵/۵

محل انجام محاسبات

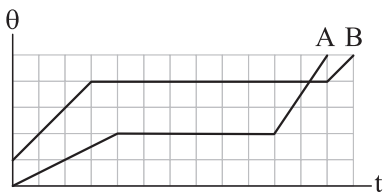
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹- در شکل زیر، دو میلهٔ فلزی (۱) و (۲) در دمای $۲۰^\circ C$ روبه‌روی یکدیگر قرار دارند. اگر در این دما فاصلهٔ بین دو میله $۰/۲\,cm$ باشد، در چه دمایی برحسب درجهٔ فارنهایت دو میله به هم می‌رسند؟ (ضریب انبساط طولی میله‌های (۱) و (۲) به ترتیب $\alpha_۱ = ۱۰^{-۵}\,\frac{۱}{K}$ و $\alpha_۲ = ۲\times ۱۰^{-۵}\,\frac{۱}{K}$ است.)



۱) ۴۰　　۲) ۶۰
۳) ۱۰۸　　۴) ۱۴۰

۵۰- نمودار دما برحسب زمان برای دو جسم جامد A و B که با آهنگ ثابت و یکسانی گرما دریافت می‌کنند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ گرمای نهان ویژهٔ ذوب دو جسم (L_F) و ظرفیت گرمایی آن‌ها در حالت جامد (C) الزاماً درست است؟



الف) $(L_F)_A = \frac{۳}{۲}(L_F)_B$
ب) $(L_F)_A = \frac{۲}{۳}(L_F)_B$
پ) $C_A = ۲C_B$
ت) $C_B = ۲C_A$

۱) الف و ت　　۲) ب و پ　　۳) پ　　۴) ت

۵۱- درون ظرفی مسی به جرم m، یک قطعه یخ به جرم m و دمای $۰^\circ C$ قرار دارد. اگر به مجموعه گرما دهیم، تا لحظه‌ای که آب شروع به جوشیدن می‌کند، چند درصد از گرما به ظرف داده شده است؟ ($c_{\text{مس}} = ۵c_{\text{آب}} = ۴/۲\,\frac{J}{g.K}$، $L_F = ۳۳۶\,J/g$، فشار هوای محیط $۱atm$ و تبخیر سطحی ناچیز است.)

۱) ۱۰　　۲) ۱۵　　۳) ۲۰　　۴) ۲۵

۵۲- جسم‌های A، B و C با دماهای $\theta_A = ۱۰^\circ C$، $\theta_B = ۹۰^\circ C$ و $\theta_C = ۳۰^\circ C$ را در تماس با هم قرار می‌دهیم تا به تعادل گرمایی برسند. اگر اندازهٔ گرمایی که جسم‌های A و B تا رسیدن به تعادل با مجموعه مبادله می‌کنند، به ترتیب $۷۵۰\,J$ و $۲۵۰\,J$ و ظرفیت گرمایی جسم C در SI برابر ۱۰۰ باشد، دمای تعادل چند درجهٔ سلسیوس است؟ (از تبادل گرما با محیط صرف نظر کنید.)

۱) ۲۰　　۲) ۲۵　　۳) ۳۵　　۴) ۴۰

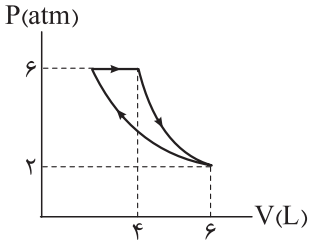
۵۳- جرم هوای موجود در اتاقی به طول $۶m$، عرض $۴m$ و ارتفاع $۳m$ در فشار $۱bar$ و دمای $۱۷^\circ C$ چند کیلوگرم است؟ ($R = ۸\,\frac{J}{mol.K}$، جرم مولی متوسط گازهای موجود در هوا $۲۹\,g/mol$ است.)

۱) ۹۰　　۲) ۴۵　　۳) ۹　　۴) ۴/۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴- نمودار فشار برحسب حجم مقدار معینی گاز آرمانی در طی یک چرخهٔ ترمودینامیکی، که از سه فرایند هم‌دما، هم‌فشار و بی‌دررو تشکیل شده، به شکل زیر است. اگر کاری که گاز بر روی محیط انجام می‌دهد، در فرایند بی‌دررو برابر $۱۸۰۰\,J$ باشد، گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در فرایند هم‌فشار چند ژول است؟

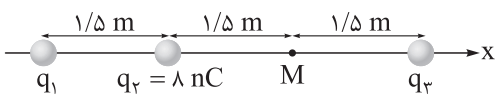


۱) ۳۰۰
۲) ۱۲۰۰
۳) ۱۸۰۰
۴) ۳۰۰۰

۵۵- توان خروجی یک ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی، $۶۰\,kW$ و بازده آن ۳۰ درصد است. اگر این ماشین در هر دقیقه ۲۰۰۰ چرخه را بپیماید، جرم بنزین مصرفی آن در هر چرخه چند گرم است؟ (گرمای حاصل از سوختن بنزین $۵۰\,kJ/g$ است.)

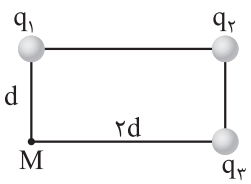
۱) ۰/۱۲
۲) ۱/۲
۳) ۰/۴
۴) ۴

۵۶- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x قرار دارند و نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از آن‌ها برابر صفر است. اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\,\frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$



۱) $۳۰۲\vec{i}$
۲) $-۳۰۲\vec{i}$
۳) $۳۳۸\vec{i}$
۴) $-۳۳۸\vec{i}$

۵۷- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ در سه رأس مستطیل قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M (رأس چهارم مستطیل) برابر صفر باشد، $\frac{q_۲}{q_۱}$ برابر با کدام گزینه است؟

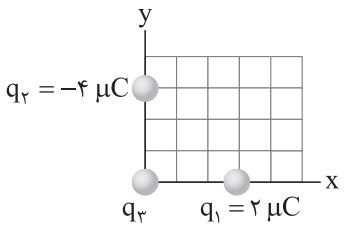


۱) ۵
۲) -۵
۳) $۵\sqrt{۵}$
۴) $-۵\sqrt{۵}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در صفحهٔ مختصات قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ در SI برابر $\vec{F} = ۱۲\vec{i} - ۱۸\vec{j}$ باشد، اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ چند نیوتون است؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) $۳\sqrt{۲}$

۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۵}$

۴) $۶\sqrt{۵}$

۵۹- در یک میدان الکتریکی، ذره‌ای به بار الکتریکی $-۵۰\ \mu C$ از نقطهٔ A با پتانسیل الکتریکی ۱۰۰ V، به نقطهٔ B با پتانسیل الکتریکی -۳۰۰ V جابه‌جا می‌شود. کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی در طی این جابه‌جایی چند میلی‌ژول است؟

۱) ۱۰　　۲) ۲۰　　۳) -۱۰　　۴) -۲۰

۶۰- بار الکتریکی یک کرهٔ فلزی به قطر ۲۰ cm، برابر $۱۲\ \mu C$ است. چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI کدام است؟ $(\pi = ۳)$

۱) $۱۰^{-۴}$　　۲) $۱۰^{-۵}$

۳) $۲/۵\times۱۰^{-۴}$　　۴) $۲/۵\times۱۰^{-۵}$

۶۱- فاصلهٔ بین صفحه‌های خازنی ۵ mm، مساحت هر یک از صفحه‌های آن $۴۰\ cm^۲$ و بین صفحه‌های آن هوا است. فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن چند میلی‌متر و چگونه تغییر کند تا ظرفیت آن $۴/۸\ pF$ افزایش یابد؟ $(\varepsilon_۰ = ۹\times۱۰^{-۱۲} \frac{C^۲}{N.m^۲})$

۱) ۳، افزایش یابد.　　۲) ۲، افزایش یابد.

۳) ۳، کاهش یابد.　　۴) ۲، کاهش یابد.

۶۲- اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی در طی دو مرحلهٔ متوالی ابتدا ۲۰ V و سپس ۱۰ V افزایش یابد، انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن در هر مرحله $۳۰۰\ \mu J$ تغییر می‌کند. ظرفیت این خازن چند میکروفاراد است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۱۰　　۴) ۲۰

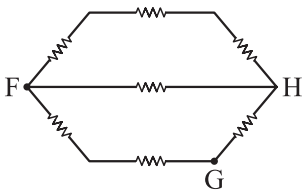
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳- مقاومت الکتریکی یک قطعه سیم فلزی در دمای $۲۰^\circ C$ برابر R است. سیم را از دستگاهی عبور می‌دهیم تا سطح مقطع آن ۲۰ درصد کاهش یابد. پس از عبور سیم از دستگاه، دمای آن را به چند درجهٔ سلسیوس برسانیم تا مقاومتش برابر با $۲R$ شود؟ $(\alpha_{\text{فلز}} = ۴\times۱۰^{-۳}K^{-۱})$

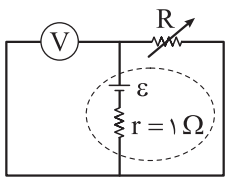
۱) ۱۳۰　　۲) ۱۱۰　　۳) ۹۰　　۴) ۷۰

۶۴- در شکل زیر، مقاومت‌ها مشابه‌اند. اگر مقاومت الکتریکی معادل بین دو نقطهٔ F و H برابر ۱۸Ω باشد، مقاومت الکتریکی معادل بین دو نقطهٔ F و G برابر چند اهم است؟



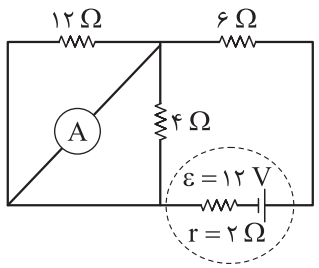
۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۳۰
۴) ۲۸

۶۵- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت الکتریکی رئوستا $۲/۵\Omega$ افزایش یابد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، از $۱۲V$ به $۱۳V$ می‌رسد. در این مدار، نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد چند ولت است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

۶۶- اگر در مدار شکل زیر، جای آمپرسنج آرمانی و منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی را عوض کنیم، مقداری که آمپرسنج نشان می‌دهد، چند آمپر و چگونه تغییر می‌کند؟

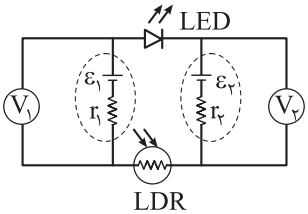


۱) ۱، افزایش می‌یابد.
۲) ۱، کاهش می‌یابد.
۳) ۰/۵، افزایش می‌یابد.
۴) ۰/۵، کاهش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

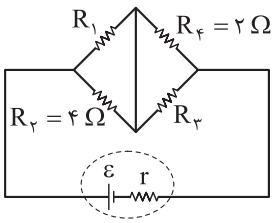
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷- در مدار شکل زیر، LED در حال گسیل نور است. اگر شدت نور تابیده به LDR را افزایش دهیم، مقدارهایی که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟ (نور گسیلی از LED به LDR نمی‌تابد.)



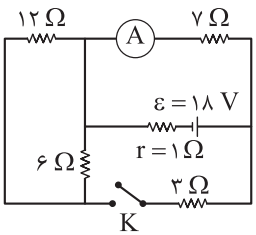
۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۲) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۳) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۴) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۶۸- در مدار شکل زیر، اگر جریان الکتریکی عبوری از مقاومت‌های R_2 و R_4 یکسان باشد، توان مصرفی مقاومت R_1 چند برابر توان مصرفی مقاومت R_3 است؟



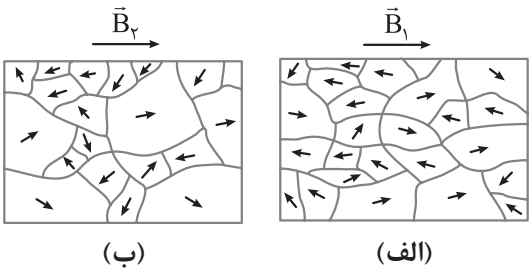
۱) ۱　　۲) ۲
۳) ۴　　۴) $\frac{1}{4}$

۶۹- در مدار شکل زیر، با بستن کلید K مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۱/۷۵، افزایش می‌یابد.
۲) ۱/۷۵، کاهش می‌یابد.
۳) ۰/۲۵، افزایش می‌یابد.
۴) ۰/۲۵، کاهش می‌یابد.

۷۰- جهت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی در یک ماده، در حضور میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$، به شکل‌های (الف) و (ب) است. کدام مورد، به ترتیب، دربارهٔ نوع این مادهٔ مغناطیسی و مقایسهٔ بزرگی میدان‌های مغناطیسی درست است؟

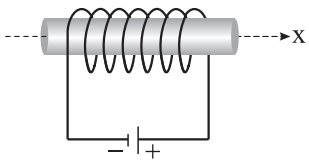


۱) پارامغناطیسی، $B_1 > B_2$
۲) پارامغناطیسی، $B_2 > B_1$
۳) فرومغناطیسی، $B_1 > B_2$
۴) فرومغناطیسی، $B_2 > B_1$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

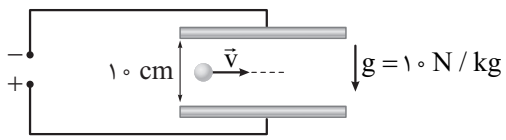
۷۱- در شکل زیر، محور سیملولهٔ آرمانی منطبق بر محور x و جریان الکتریکی عبوری از آن برابر ۴A است. اگر تعداد حلقه‌های سیملوله در هر سانتی‌متر از طول سیملوله برابر ۸ باشد، میدان مغناطیسی در داخل سیملوله و دور از لبه‌های آن، برحسب گاوس کدام است؟ $(\mu_{\circ} = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷}\ \frac{T.m}{A})$



۱) $۴۰\vec{i}$　　۲) $۴\vec{i}$

۳) $-۴۰\vec{i}$　　۴) $-۴\vec{i}$

۷۲- مطابق شکل زیر، ذره‌ای به جرم ۴g / ۰ و بار الکتریکی ۱۰μC با سرعتی به بزرگی $۵ \times ۱۰^{۳}\ m/s$ در امتداد افق، وارد فضای بین دو صفحهٔ رسانای افقی که اختلاف پتانسیل الکتریکی آن‌ها ۲۰V است، می‌شود. بین این دو صفحه، میدان مغناطیسی یکنواختی به اندازهٔ چند تسلا و در چه جهتی ایجاد شود تا ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد؟



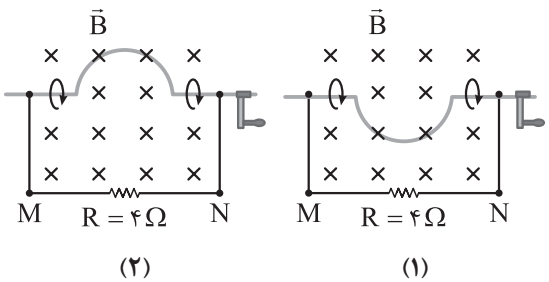
۱) ⊗ ،۰/۰۴

۲) ⊙ ،۰/۰۴

۳) ⊗ ،۰/۱۲

۴) ⊙ ،۰/۱۲

۷۳- در شکل (۱)، میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابتی به بزرگی ۰/۰۸ T بر صفحه عمود و شعاع نیم‌حلقهٔ رسانا ۱۰cm است. وضعیت نیم‌حلقه در مدت ۲s / ۰، پس از نیم‌دور چرخش یکنواخت در جهت نشان داده شده، از شکل (۱) به شکل (۲) تبدیل می‌شود. در این بازهٔ زمانی، جریان متوسط القایی عبوری از مقاومت R چند میلی‌آمپر و در چه جهتی است؟



۱) π، از M به N

۲) π، از N به M

۳) $\frac{\pi}{۲}$، از M به N

۴) $\frac{\pi}{۲}$، از N به M

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴- با استفاده از سیمی مسی به قطر مقطع $1mm$ حلقه‌ای به شعاع $25cm$ ساخته شده است. در مدتی که شار مغناطیسی عبوری از حلقه $0/8Wb$ تغییر می‌کند، تعداد الکترون‌های شارش‌یافته در آن برابر کدام است؟ ($e = 1/6\times10^{-19}C$ و مقاومت ویژهٔ مس $2\times10^{-8}\Omega.m$ است.)

۱) $1/25\times10^{16}$　　۲) $1/25\times10^{20}$　　۳) 5×10^{16}　　۴) 5×10^{20}

۷۵- معادلهٔ جریان ـ زمان عبوری از یک القاگر با ضریب القاوری $2mH$ در SI به صورت $I = 0/2\sin(100\pi t)$ است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، برای اولین بار انرژی ذخیره‌شده در القاگر برابر با $30\mu J$ می‌شود؟

۱) $\frac{1}{200}$　　۲) $\frac{1}{300}$　　۳) $\frac{1}{400}$　　۴) $\frac{1}{600}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی پایه: شیمی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۲، **شیمی (۲):** صفحه های ۱ تا ۱۲۱

۷۶- کدام مطلب درست است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

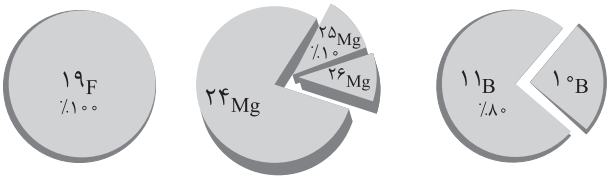
۱) نام شیمیایی ترکیب‌های PCl_5، CS_2 و Cr_2O_3 به ترتیب فسفر پنتاکلرید، کربن دی‌سولفید و دی‌کروم تری‌اکسید است.

۲) در دما و فشار یکسان، حجم ۲ / ۴ گرم گاز اتن، بیشتر از حجم ۴ گرم گاز متان است.

۳) در دما و فشار اتاق برای یک گاز معین، همواره نسبت شمار مولکول‌ها به شمار مول‌های گاز مقدار ثابتی است.

۴) $CuCl_2$ یک ترکیب غیرآلی است و در ساختار آن، مانند SCl_2 یون‌های کلرید وجود دارد.

۷۷- با توجه به شکل‌های زیر که ایزوتوپ‌های ۳ عنصر فلوئور، منیزیم و بور را در یک نمونهٔ طبیعی نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ (عدد جرمی را معادل جرم اتمی در نظر بگیرید.)



جرم اتمی میانگین : ۲۴ / ۳۲ amu

- **ایزوتوپ فلوئور ـ ۲۰ به یقین ساختگی است.**
- **جرم اتمی میانگین بور، برابر ۱۰ / ۸ amu است.**
- **جرم مولی BF_3 برابر ۶۷ / ۸ گرم بر مول است.**
- **درصد فراوانی سبک‌ترین ایزوتوپ منیزیم، برابر ۷۹ درصد است.**

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک

۷۸- کدام موارد زیر نادرست است؟

الف) انرژی لایه‌ها و تفاوت انرژی میان لایه‌ها در یک اتم، یک کمیت کوانتومی است.

ب) تفاوت طول موج دو نوار رنگی مجاور در طیف نشری خطی اتم هیدروژن، با افزایش طول موج این نوارهای رنگی، کاهش می‌یابد.

پ) در یک اتم، لایه‌های الکترونی که عدد کوانتومی اصلی کوچک‌تر یا مساوی ۳ دارند، نمی‌توانند زیرلایه‌ای با عدد کوانتومی فرعی برابر ۳ داشته باشند.

ت) مطابق قاعدهٔ آفبا، زیرلایه‌ای که پس از زیرلایهٔ ۶s و قبل از زیرلایهٔ ۶p الکترون می‌گیرد، نمی‌تواند $n+l$ برابر ۷ داشته باشد.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت

۳) الف ـ ب ـ ت ۴) پ ـ ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۷۹- با توجه به جدول زیر، چند مورد از مطالب داده‌شده به یقین درست است؟

عنصر	A	D	E	M
نسبت شمار الکترون‌های دارای $n=3$ به $n=4$ در اتم	۸	۳	۱۳	۷

- عنصر A به یقین به دستهٔ s جدول تناوبی تعلق دارد.
- شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم عنصرهای D و E برابر است.
- نسبت شمار الکترون‌های دارای $l=0$ به $l=2$ در اتم E برابر ۱/۴ است.
- مجموع $n+l$ الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایهٔ یون M^{3+} برابر ۲۵ است.
- شعاع اتمی عنصر A بزرگ‌تر از شعاع عنصر D است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸۰- پس از موازنهٔ معادلهٔ واکنش‌های زیر کدام مطلب درست است؟

a) $C_4H_8(g)+NO(g)\rightarrow CO_2(g)+N_2(g)+H_2O(l)$

b) $TiO_2(s)+BrF_3(l)\rightarrow TiF_4(s)+Br_2(l)+O_2(g)$

c) $Sn(s)+HNO_3(aq)\rightarrow SnO_2(s)+NO(g)+H_2O(l)$

۱) بزرگ‌ترین ضریب استوکیومتری، متعلق به یکی از مواد شرکت‌کننده در واکنش (a) است.
۲) مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها، در معادله‌های (a) و (c) برابر است.
۳) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در یکی از معادله‌هایی که هر سه حالت فیزیکی مواد را دارد، برابر ۲۰ است.
۴) در واکنش (b) ضریب استوکیومتری هیچ دو ماده‌ای با یکدیگر برابر نیست.

۸۱- در تبدیل فلزی از دورهٔ چهارم جدول تناوبی به یون پایدار M^{2+}، مجموع $n+l$ الکترون‌های ظرفیت فلز M، ۹ واحد کاهش می‌یابد. اگر تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در این یون برابر ۷ باشد، کدام مطلب به یقین درست است؟

۱) تفاوت عدد اتمی عنصر M با عدد اتمی گاز نجیب هم‌دورهٔ خود برابر ۷ است.
۲) نسبت عدد جرمی به بار الکتریکی این یون برابر ۳۲ است.
۳) در بیرونی‌ترین لایهٔ الکترونی اتم عنصر M، یک الکترون وجود دارد.
۴) اتم عنصر M دارای ۷ زیرلایهٔ الکترونی است که از الکترون پر شده است.

۸۲- برای مصرف ۱۶۰ لیتر گاز اوزون در واکنش زیر، به چند گرم آمونیاک نیاز است و در این واکنش چند گرم فراوردهٔ جامد تولید می‌شود؟ (چگالی گاز اکسیژن در شرایط آزمایش ۱/۴۲ گرم بر لیتر است.) $(H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

(موازنهٔ معادلهٔ واکنش کامل شود.) $2NH_3(g)+aO_3(g)\rightarrow bNH_4NO_3(s)+4O_2(g)+cH_2O(g)$

۱) ۱۴۲،۴۰ / ۲۳ ۲) ۹۴،۴۰ / ۲۳
۳) ۱۴۲،۶۰ / ۳۵ ۴) ۹۴،۶۰ / ۳۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۳- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ فرایند هابر، درست است؟

- روشی صنعتی برای تولید آمونیاک از واکنش گازهای نیتروژن و هیدروژن است.
- با استفاده از کاتالیزگر آهن، سرعت و دمای لازم برای انجام واکنش افزایش می‌یابد.
- واکنش آن برگشت‌ناپذیر است و در دما و فشار اتاق به کندی انجام می‌شود.
- در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری فراوردهٔ آن در آب بیشتر از انحلال‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها است.
- حالت فیزیکی فراوردهٔ آن در دما و فشار اتاق، مایع است که می‌تواند به طور مستقیم به خاک تزریق شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۴- ۰/۰۰۴ مول نمک XSO_4 را در ۴ لیتر آب‌مقطر حل می‌کنیم تا محلولی با چگالی یک گرم بر میلی‌لیتر و غلظت ۱۶۰ppm از این نمک تهیه شود. جرم مولی فسفات فلز X (با بار الکتریکی مشابه در XSO_4)، چند گرم بر مول است؟ $(O=16, P=31, S=32 : g.mol^{-1})$

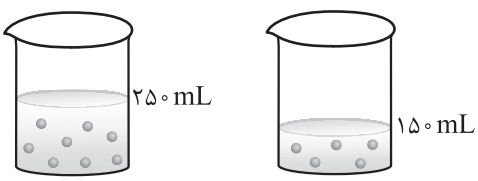
۱) ۳۱۵ ۲) ۳۵۸ ۳) ۲۶۲ ۴) ۳۸۲

۸۵- چه تعداد از موارد زیر امکان‌پذیر است؟

- یک مولکول اتم‌های H و F داشته باشد، اما توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی نداشته باشد.
- یک ماده دارای مولکول‌های ناقطبی باشد، اما نقطهٔ جوش بیشتری نسبت به آب داشته باشد.
- یک ترکیب مولکولی قطبی، جاذبهٔ بین مولکولی قوی‌تری از یک ترکیب یونی داشته باشد.
- یک هیدروکربن بتواند به هر نسبت در آب حل شود.
- یک ترکیب یونی، فاقد اتم فلزی باشد.

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۸۶- شکل داده‌شده دو محلول با حل‌شونده‌های متفاوت را در آب نشان می‌دهد. هر ذرهٔ نشان داده شده در شکل، هم‌ارز با ۰/۰۵ مول و چگالی محلول‌های (I) و (II) به ترتیب ۱/۶ و ۱/۲ گرم بر میلی‌لیتر است. اگر درصد جرمی حل‌شوندهٔ دو محلول برابر باشد، جرم مولی حل‌شوندهٔ محلول (II) چند برابر جرم مولی حل‌شوندهٔ محلول (I) است؟



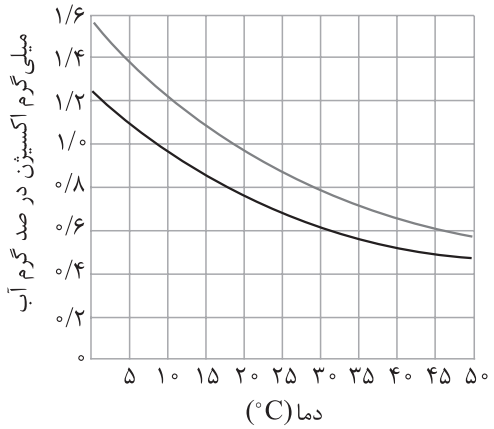
محلول (I) محلول (II)

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۸۴
۳) ۱/۱۹ ۴) ۱/۴۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۷- شکل مقابل، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن را در آب آشامیدنی و آب دریا نشان می‌دهد. اگر گاز اکسیژن آزادشده از افزایش دمای ۲ تُن آب از دمای $18^\circ C$ به $45^\circ C$ بتواند ۰/۱۲۵ مول گاز متان را به طور کامل بسوزاند، نوع این آب کدام است و شمار مولکول‌های اکسیژن حل‌شده در ۳۰۰ گرم از این آب که نسبت به گاز O_2 سیر شده است، در دمای اتاق به تقریب کدام است؟ $(O = 16 g.mol^{-1})$



۱) آشامیدنی ـ 5×10^{19}
۲) دریا ـ 5×10^{19}
۳) دریا ـ 5×10^{22}
۴) آشامیدنی ـ 5×10^{22}

۸۸- کدام مطلب درست است؟

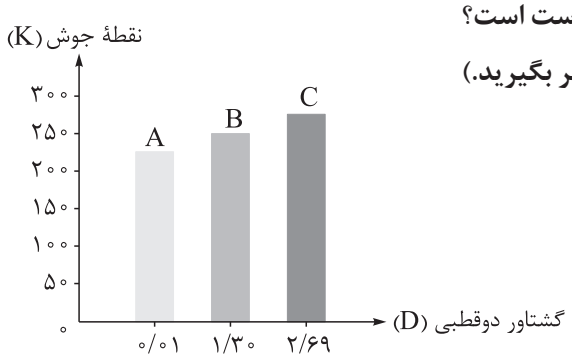
۱) ترکیب‌های آلی فرّار به دلیل داشتن نقطهٔ جوش پایین‌تر از آب، به راحتی در تصفیهٔ آب به روش تقطیر، از آب جدا می‌شوند.

۲) آب تصفیه‌شده به روش اسمز معکوس برخلاف روش تقطیر، نیاز به کلرزنی ندارد.

۳) اگر دو طرف یک غشای نیمه‌تراوا آب‌مقطر و شیر وجود داشته باشد، با گذشت زمان حجم شیر افزایش می‌یابد.

۴) آلاینده‌های موجود در آب تصفیه‌شده به روش صافی کربن، کم‌تر از آب تصفیه‌شده به روش اسمز معکوس است.

۸۹- با توجه به نمودار روبه‌رو، چند مورد از مطالب زیر به یقین درست است؟



(جرم مولی هر سه مادهٔ آلی A، B و C را با یکدیگر برابر در نظر بگیرید.)

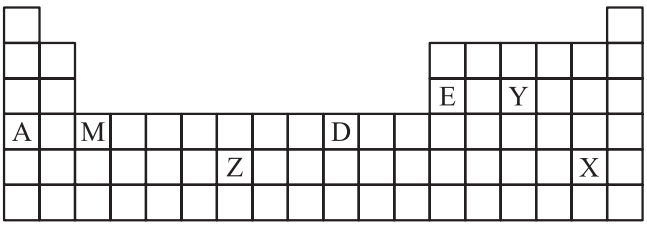
- **در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری مادهٔ A در هگزان از دو مادهٔ دیگر بیشتر است.**
- **اگر C یک آلدهید دوکربنه باشد، A می‌تواند آلکانی راست‌زنجیر با ۱۸ اتم هیدروژن باشد.**
- **حالت فیزیکی هیچ کدام از مواد A، B و C در دمای اتاق مایع نیست.**
- **بین مولکول‌های B نمی‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل شود.**

۱) چهار
۲) سه
۳) دو
۴) یک

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۰- با توجه به شکل زیر که جایگاه چند عنصر را در جدول تناوبی نشان می‌دهد، کدام موارد داده‌شده درست است؟



الف) مجموع شمار الکترون‌های دارای عددهای کوانتومی $l = ۲$ و $l = ۰$ در اتم عنصر D دو برابر مجموع شمار این الکترون‌ها در اتم عنصر A است.

ب) اتم‌های M و E با از دست دادن سه الکترون به کاتیون پایدار $+۳$ تبدیل می‌شوند و به آرایش الکترونی گاز نجیب می‌رسند.

پ) ترکیبی با فرمول $YX_۳$ یک مادهٔ مولکولی است که نسبت شمار جفت‌الکترون پیوندی به ناپیوندی در آن برابر ۳ / ۰ است.

ت) Z نخستین عنصر ساخت بشر است و تفاوت عدد اتمی دو عنصر هم‌گروه آن برابر ۵۱ است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

۹۱- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) شیوهٔ اتصال اتم(های) کربن در ترکیب‌های هیدروژن سیانید، اتان و اتن به اتم‌های جانبی متفاوت است.

۲) در مدل گلوله ـ میلهٔ پروپین، تفاوت اتصال کربن مرکزی به اتم‌های کربن جانبی از طریق تعداد میله‌ها قابل مشاهده است.

۳) در مدل فضاپرکن هیدروژن سیانید، اندازهٔ اتم مرکزی از اتم‌های جانبی بزرگ‌تر است.

۴) در ساختار ۲، ۳ـ دی‌متیل هگزان، ۴ اتم کربن وجود دارند که هر کدام به سه کربن دیگر متصل هستند.

۹۲- براساس واکنش‌های زیر، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

الف) $Fe_۲O_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow A(aq) + H_۲O(l)$

ب) $FeCl_۲(aq) + NaOH(aq) \rightarrow D(?) + NaCl(aq)$

پ) $Fe(s) + HCl(aq) \rightarrow M(aq) + H_۲(g)$

- **A و M فرمول یکسانی دارند.**
- **حالت فیزیکی مادهٔ D جامد است.**
- **از واکنش مادهٔ A با سدیم هیدروکسید کافی، رسوب قرمز مایل به قهوه‌ای ایجاد می‌شود.**
- **واکنش فلز مس با مادهٔ D در شرایط مناسب، پیشرفت خودبه‌خودی دارد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۳- در واکنش زیر، با مصرف کامل ۴ / ۶ گرم مس (I) سولفید با خلوص ۵۰٪، ۱ / ۶ لیتر گاز با چگالی ۱ / ۱۵ گرم بر لیتر به دست آمده است. بازده درصدی واکنش کدام است؟ $(N = ۱۴ , O = ۱۶ , S = ۳۲ , Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱})$

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $Cu_۲S(s) + HNO_۳(aq) \rightarrow Cu(NO_۳)_۲(aq) + CuSO_۴(aq) + NO_۲(g) + H_۲O(l)$

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

محل انجام محاسبات

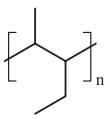
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۴- ۷ گرم از یک هیدروکربن که هر مولکول آن دارای ۱۵ اتم است، در شرایط STP با ۱۶/۸ لیتر گاز اکسیژن به طور کامل واکنش می‌دهد. کدام مطلب دربارهٔ این هیدروکربن نادرست است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) $\frac{۲}{۳}$ شمار کل پیوندهای آن از نوع $C-H$ است.

۲) می‌تواند دارای ۵ پیوند $C-C$ باشد.

۳) تفاوت جرم مولی آن با بنزن با جرم ۸ مول گاز هیدروژن برابر است.

۴) اگر ترکیب مورد نظر امکان واکنش با برم مایع را داشته باشد، از آن می‌توان پلیمری با ساختار  تهیه کرد.

۹۵- اگر آنتالپی سوختن کامل گاز اتان در دمای اتاق برابر با ۱۵۶۰- کیلوژول بر مول و آنتالپی پیوندهای $C=O$، $O=O$ و $C\equiv O$ به ترتیب برابر با ۷۹۹، ۴۹۵ و ۱۰۷۲ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی واکنش سوختن ناقص ۱ مول گاز اتان به طوری که فراورده‌های آن، $CO(g)$ و $H_2O(l)$ باشند، چند کیلوژول است؟

۱) -۱۰۰۳ ۲) -۲۱۱۷

۳) -۱۰۳۰ ۴) -۲۷۱۱

۹۶- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **علت پخته‌شدن بهتر تخم مرغ در آب نسبت به روغن زیتون به ازای تغییر دمای یکسان و به ازای جرم مساوی از آب و روغن، بیشتربودن گرمای ویژهٔ آب نسبت به روغن زیتون است.**
- **وقتی یک لیوان شیر گرم می‌نوشیم، گرمای مبادله‌شده به واسطهٔ اختلاف دمای شیر گرم با بدن، بیشتر از گرمای آزادشده در اثر گوارش و سوخت‌وساز شیر $37^\circ C$ در بدن است.**
- **برای مقایسهٔ پایداری الماس و گرافیت می‌توان از مقایسهٔ گرمای سوختن یک مول از آن‌ها استفاده کرد.**
- **از بین فرایندهای «تصعید کربن دی‌اکسید جامد، تجزیهٔ N_2O_4 به NO_2، انحلال کلسیم کلرید در آب و سوختن متان»، ۳ فرایند، گرماده بوده و علامت ΔH آن‌ها منفی است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۷- اگر تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرفی در واکنش زیر، ۴/۶ گرم باشد، با انجام کامل واکنش، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود و اگر مخلوط فراورده‌ها به شرایط STP برسند، حجم گاز به‌دست‌آمده چند لیتر خواهد بود؟

$(H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

$4NH_3(g)+5O_2(g)\rightarrow 4NO(g)+6H_2O(g) \quad \Delta H=-906kJ$

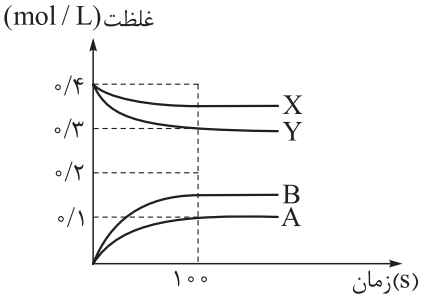
۱) ۲۷/۸ ، ۴/۴۸ ۲) ۲۷/۸ ، ۱۱/۲

۳) ۴۵/۳ ، ۴/۴۸ ۴) ۴۵/۳ ، ۱۱/۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۸- براساس نمودار مقابل که مربوط به تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) سرعت کلی واکنش برابر با $۵\times۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}.s^{-۱}$ است.

ب) با افزایش دمای واکنش، در $t = ۵۰s$، $[A]$ می‌تواند $۰/۰۴\ mol.L^{-۱}$ باشد.

پ) با استفاده از کاتالیزگر می‌توان به ازای همین مقدار واکنش‌دهنده، غلظت مادهٔ B را به $۰/۲\ mol.L^{-۱}$ رساند.

ت) مجموع ضریب استوکیومتری فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها، با یکدیگر برابر نیست.

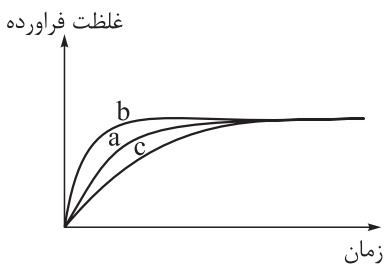
۱) الف ـ ب
۲) ب ـ پ
۳) پ ـ ت
۴) الف ـ ت

۹۹- براساس واکنش موازنه‌نشدهٔ: $H_۲O_۲(aq) \rightarrow H_۲O(l) + O_۲(g)$ و جدول داده‌شده، سرعت کلی واکنش چند مول بر دقیقه است و اگر حجم محلول در طول انجام فرایند ثابت و چگالی آن نیز یک گرم بر میلی‌لیتر باشد، سرعت مصرف آب اکسیژنه در ۲۰ دقیقهٔ اول، چند مول بر لیتر بر دقیقه است؟

جرم مواد درون ظرف (گرم)	۲۰۰۰	۱۹۹۰/۴	۱۹۸۳/۲	۱۹۷۸/۴	۱۹۷۵/۲	۱۹۷۵/۲
زمان (دقیقه)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰

۱) $۳۸۷/۵\times۱۰^{-۴}$ و $۲۶/۲۵\times۱۰^{-۳}$
۲) $۱۹۳/۷۵\times۱۰^{-۴}$ و $۲۶/۲۵\times۱۰^{-۳}$
۳) $۳۸۷/۵\times۱۰^{-۴}$ و $۵۲/۵\times۱۰^{-۳}$
۴) $۱۹۳/۷۵\times۱۰^{-۴}$ و $۵۲/۵\times۱۰^{-۳}$

۱۰۰- نمودارهای غلظت ـ زمان مقابل، مربوط به تولید یک فراوردهٔ خاص در یک واکنش برگشت‌ناپذیر است. چه تعداد از عبارت‌های زیر در رابطه با آن درست است؟



- اگر در اثر حضور یک ماده در واکنش، نمودار a به نمودار c تبدیل شود، نقش آن ماده می‌تواند شبیه به نقش لیکوپن در بدن انسان باشد.
- تبدیل نمودار a به b می‌تواند بر اثر استفاده از کاتالیزگر یا افزایش دما باشد.
- اگر به جای محلول ۱ مولار واکنش‌دهنده به حجم ۱ لیتر، از محلول ۲ مولار آن با حجم ۰/۵ لیتر و مقدار کافی از سایر واکنش‌دهنده‌ها استفاده شود، نمودار a به نمودار c تبدیل می‌شود.
- برای تبدیل نمودار a به b می‌توان به جای ۱ لیتر محلول واکنش‌دهنده با غلظت ۲ مولار، از ۰/۵ لیتر محلول واکنش‌دهنده با غلظت ۴ مولار استفاده کرد.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱- کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف) شمار اتم‌های کربن در مونومر سازندهٔ پلی‌سیانو اتن و پلی‌پروپن برابر است.

ب) اگر عدد n در واکنش پلیمری‌شدن استیرن برابر ۲۰۰۰ باشد، یک مولکول پلی‌استیرن دارای ۴۰۰۰ اتم کربن است.

پ) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی وینیل‌کلرید سه برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی سیانو اتن است.

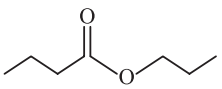
ت) پلیمر به‌کاررفته برای تهیهٔ کیسهٔ خون، همانند پلیمر به‌کاررفته در تهیهٔ نخ دندان و پتو از سه نوع عنصر تشکیل شده است.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت

۳) ب ـ ت ۴) ب ـ پ

۱۰۲- کدام گزینه نادرست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

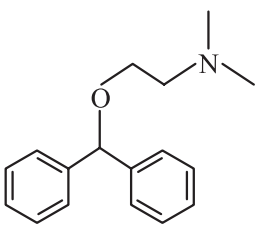
۱) استری که از واکنش یک الکل دارای دو اتم کربن و یک اسید تک‌عاملی با بخش ناقطبی ۵کربنی تولید می‌شود، هگزیل اتانوات نام دارد.

۲) بیشتر از ۱۰ درصد جرم ترکیب  را هیدروژن تشکیل داده است.

۳) اتیل بوتانوات مادهٔ موجود در آناناس است که در حضور آب کافی و کاتالیزگر، الکلی را تولید می‌کند که از واکنش اتن با آب نیز قابل تهیه است.

۴) $HO-C_2H_4-COOH$ می‌تواند به تنهایی در شرایط مناسب یک پلی‌استر تولید کند.

۱۰۳- دیفن هیدرامین یک آنتی‌هیستامین است که عمدتاً برای درمان آلرژی استفاده می‌شود. با توجه به ساختار آن، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$



- **در ساختار آن، اختلاف تعداد اتم‌های هیدروژن و کربن برابر ۴ است.**
- **دارای یک گروه عاملی اتری و یک گروه عاملی آمیدی است.**
- **دارای ۱۱ اتم کربن است که تنها به یک هیدروژن متصل هستند.**
- **اگر یکی از گروه‌های CH_3 آن با گروه جایگزین شود، جرم مولی آن ۱۴ گرم بر مول افزایش می‌یابد.**

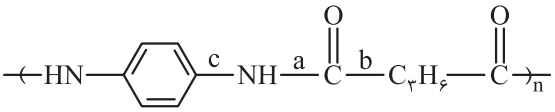
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴- یک پلی‌آمید دارای ساختار مقابل است:

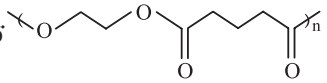


کدام موارد از مطالب زیر در رابطه با آن درست است؟

الف) هر دو مونومر سازندهٔ آن، آروماتیک هستند.

ب) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در دی‌اسید سازندهٔ آن برابر ۲/۲۵ است.

پ) در حضور رطوبت و انجام آبکافت، یکی از پیوندهای b یا c شکسته می‌شوند.

ت) از واکنش دی اسید سازندهٔ آن با اتیلن گلیکول، یک پلیمر با ساختار  **تولید می‌شود.**

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ت

۱۰۵- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **نشاسته در محیط گرم و مرطوب به سرعت به گلوکز تبدیل می‌شود.**
- **مواد زیست‌تخریب‌پذیر مانند نایلون‌ها و پلی‌لاکتیک اسید، توسط جانداران ذره‌بینی به مولکول‌های ساده و کوچک تبدیل می‌شوند.**
- **الیاف پلی‌آمیدی و پلی‌استری در حضور آب و مواد شوینده به مونومرهای سازندهٔ خود تبدیل می‌شوند که باعث ایجاد بوی بد و نافذ می‌شود.**
- **برای تولید پلی‌اتن، علاوه بر گرما و فشار، می‌توان از کاتالیزگری که دارای فلزهای تیتانیم و آلومینیم است، استفاده کرد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛

فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.

هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۲ - ۱۴۰۳

دفترچه
پاسخ
آزمون سیزدهم
حضوری

علوم ریاضی و فنی

ویژهٔ
کنکوری‌های
۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۱/۱۶

آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدرضا حسینی‌فرد - محمدطاهر شعاعی - کیوان صارمی - حمید گلزاری
فیزیک	محمد باغبان - علیرضا جباری - محمدرضا زارع - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی - محمدجواد سورچی - نوید شاهی - علیرضا عبداللهی - علیرضا علینقی - حامد نبی‌منصور
شیمی	مهدی براتی - محمدعلی توسلی‌فر - یاسر عبداللهی - مرضیه قاسمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی ـ محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	عاطفه خان‌محمدی	امیرحسین ابومحبوب	ماهان فنی‌فر - هتاو مرادی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب	ماهان فنی‌فر - ابوالفضل ناصری - مریم نظری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	زهرا جالینوسی	امیرحسین ابومحبوب	علیرضا کاظمی بقا - ابوالفضل ناصری - مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	حمید فدائی‌فرد	محمد باغبان - علیرضا جباری - محمدجواد سورچی	علیرضا جباری	مهدی بابائی - احسان محمدی - امیر محمودی انزابی - عرشیا مرزبان
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	حمید ذبحی	محمد مرادی - فاطمه صیقلی	یاسر راش - احسان رحیمی - هومن زندی - وحید فارسیان

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضی پایه: حسابان (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۵۱، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۷۰

تست و پاسخ ۱

فرض کنید a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با جملات مثبت و $b_n = na_n$ باشد، به طوری که جملهٔ چهارم دنبالهٔ b_n برابر جملهٔ پانزدهم دنبالهٔ a_n و $a_1b_1 = 4$ باشد. واسطهٔ هندسی بین a_{47} و b_7 کدام است؟

$\pm\sqrt{b_7 a_{47}} = ?$

$a_n > 0$

۱) ۸۴
۲) ۱۴۰
۳) ۷۰
۴) ۹۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی را به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ در نظر بگیرید و رابطه‌ها را به دست آورید.

درس نامه

- دنبالهٔ حسابی

ویژگی	توضیح فارسی	مثال
دنبالهٔ حسابی	هر جمله با عدد ثابت (d یا قدرنسبت) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید.	$-1, 5, 11, 17, ..$ (+۶ +۶ +۶) $a_1 = -1, d = 6$
$a_n = a_1 + (n-1)d$	جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی	$a_n = -1 + (n-1)6 = 6n - 7$
$a_n - a_m = (n-m)d$	اختلاف جملهٔ nام و mام، $(n-m)$ برابر قدرنسبت است.	$a_{15} - a_7 = 8d$
$\underbrace{a,b,c}_{\text{دنبالهٔ حسابی}} \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$	اگر سه عدد متوالی تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، عدد وسط میانگین دو عدد کناری (واسطهٔ حسابی) است.	$\underbrace{-15, x, 20}_{\text{حسابی}} \Rightarrow x = \frac{-15+20}{2} = \frac{5}{2}$
$a, \underbrace{\square, ..., \square}_{\text{n واسطهٔ حسابی}}, b$ $d = \frac{b-a}{n+1}$	اگر بین دو عدد a و b بخواهیم n واسطهٔ حسابی درج کنیم، d از رابطهٔ داده‌شده به دست می‌آید.	$-11, \underbrace{\square, \square, \square}_{\text{درج ۳ واسطهٔ حسابی}}, 29$ $d = \frac{29-(-11)}{3+1} = \frac{40}{4} = 10$
$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$	S_n برابر با مجموع n جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ حسابی است.	$-1, 5, 11, ...$ $S_{100} = \frac{100}{2}(-2 + 99 \times 6)$
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	فرمول دوم S_n که برابر است با: $S_n = \frac{\text{تعداد}}{2}$ (جملهٔ آخر + جملهٔ اول)	$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

دنبالهٔ هندسی

ویژگی	توضیح فارسی	مثال
دنبالهٔ هندسی	هر جمله در عدد ثابت (q یا قدرنسبت) ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید.	$\times\frac{1}{2}\ \times\frac{1}{2}$ $3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\dots$
$a_n = a_1 q^{n-1}$	جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی	$a_n = 3\times(\frac{1}{2})^{n-1}$
$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$	نسبت دو جمله در دنبالهٔ هندسی برابر با q به توان اختلاف اندیس‌ها است.	$\frac{a_{15}}{a_7} = q^8$
$\underbrace{a,b,c}_{\text{دنبالهٔ هندسی}} \Rightarrow b^2 = ac$	اگر سه عدد متوالی تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، مربع وسطی برابر ضرب دو جملهٔ کناری است. (واسطهٔ هندسی)	$3,x,12 \Rightarrow x^2 = 3\times 12$ $\Rightarrow x = \pm 6$
$a,\underbrace{\square,\square,\dots,\square}_{n\text{ واسطهٔ هندسی}},b$ $q^{n+1} = \frac{b}{a}$	اگر بین دو عدد a و b بخواهیم n واسطهٔ هندسی قرار دهیم، q از رابطهٔ داده‌شده به دست می‌آید.	$10,\underbrace{\square,\square,\square}_{\text{درج ۳ واسطهٔ هندسی}},1000$ $q^4 = \frac{1000}{10} = 100 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{100} = \pm\sqrt{10}$
$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی	$3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\dots \Rightarrow S_{10} = \frac{3(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با جملات مثبت است؛ پس آن را به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم: برای دنبالهٔ b_n نیز داریم:

$$b_n = na_n = a_1 n + (n-1)nd = dn^2 + (a_1 - d)n$$

گام سوم: جملهٔ چهارم دنبالهٔ b_n برابر با جملهٔ پانزدهم دنبالهٔ a_n است و $a_1 b_1 = 4$ است. داریم:

$$\begin{cases} b_4 = a_{15} \\ a_1 b_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16d + 4(a_1 - d) = a_1 + 14d \\ a_1(d + a_1 - d) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 - 2d = 0 \\ a_1^2 = 4 \xrightarrow[\text{حسابی مثبت هستند}]{\text{جملات دنبالهٔ}} a_1 = 2\ ,\ d = 3 \end{cases} \quad (*)$$

گام چهارم: مقدار a_{47} و b_7 را پیدا می‌کنیم:

$$a_{47} = a_1 + 46d \overset{(*)}{=\!=} 2 + 46\times 3 = 140$$

$$b_7 = 49d + 7(a_1 - d) = 49\times 3 + 7(2-3) = 140$$

گام پنجم: واسطهٔ هندسی بین a_{47} و b_7 برابر است با:

$$\text{واسطهٔ هندسی} = \pm\sqrt{a_{47}.b_7} = \pm 140$$

با توجه به گزینه‌ها، واسطهٔ هندسی برابر با ۱۴۰ است.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۲

صفرهای تابع $f(x)=۲mx^۲+(۴+m)x-m+۴$ و نقطهٔ تلاقی تابع با محور عرض‌ها، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{۱}{۲}$ هستند. حاصل‌ضرب مقادیر مختلف m چه عددی است؟ $(m>۰)$

۱) $\frac{۲۵۶}{۹}$
۲) $\frac{۱۶}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۱۶}$
۴) $\frac{۹}{۲۵۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره اختلاف صفرهای تابع، طول قاعدهٔ مثلث و عرض از مبدأ تابع، ارتفاع مثلث است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** صفرهای تابع f را می‌یابیم:

$$f(x)=۲mx^۲+(۴+m)x-m+۴=۰\Rightarrow(x+۱)(۲mx+۴-m)=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-۱\\x_۲=\frac{m-۴}{۲m}\end{cases}$$

اختلاف صفرهای تابع، طول قاعدهٔ مثلث را می‌دهند.

گام دوم: محل تلاقی تابع f با محور عرض‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x=۰\Rightarrow y=۴-m$$

مقدار y به‌دست‌آمده، ارتفاع مثلث را می‌دهد.

گام سوم: مساحت مثلث تشکیل‌شده را به دست می‌آوریم:

$$S=\frac{۱}{۲}|x_۱-x_۲||y|=\frac{۱}{۲}\left|-۱-\frac{m-۴}{۲m}\right||۴-m|=\frac{۱}{۲}$$

$$\left|\frac{(-۳m+۴)(۴-m)}{۲m}\right|=۱\Rightarrow\left|-۱۲m+۳m^۲+۱۶-۴m\right|=|۲m|$$

$$\Rightarrow\left|۳m^۲-۱۶m+۱۶\right|=|۲m|\xrightarrow{m>۰}\left|۳m^۲-۱۶m+۱۶\right|=۲m$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳m^۲-۱۶m+۱۶=۲m\\یا\\۳m^۲-۱۶m+۱۶=-۲m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳m^۲-۱۸m+۱۶=۰\Rightarrow\Delta=(۱۸)^۲-۱۲\times۱۶=۱۳۲>۰\\\Rightarrow P_۱=\frac{c}{a}=\frac{۱۶}{۳}>۰,S_۱=\frac{-b}{a}=\frac{۱۸}{۳}>۰\text{. پس ریشه‌ها مثبت هستند.}\\۳m^۲-۱۴m+۱۶=۰\Rightarrow(m-۲)(۳m-۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\m=\frac{۸}{۳}\end{cases}\Rightarrow P_۲=۲\times\frac{۸}{۳}=\frac{۱۶}{۳}\end{cases}$$

گام چهارم: پس حاصل‌ضرب مقادیر مختلف m برابر با $P_۱\times P_۲=(\frac{۱۶}{۳})^۲=\frac{۲۵۶}{۹}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۳

α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲-ax-b=۰$ هستند، به طوری که $۳\beta^۲+۲\alpha^۲-\beta=۷$. مجموع توان‌های سوم ریشه‌ها، چه عددی است؟

۱) ۶
۲) ۱۱
۳) ۹
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

۱) در هر معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ با ریشه‌های α و β، اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها، P باشد روابط زیر برقرار است:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

نتایج:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$$

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$$

۲) اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشد، آنگاه α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ هستند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از معادلهٔ داده‌شده، داریم:

$$ax^2-ax-b=0\Rightarrow x^2-x=\frac{b}{a}\xrightarrow[\text{معادله هستند.}]{\alpha,\beta\text{ ریشه‌های}}\begin{cases}\alpha^2-\alpha=\frac{b}{a} & (*)\\ \beta^2-\beta=\frac{b}{a} & (**)\end{cases}$$

گام دوم: از طرفی جمع و ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-B}{A}=\frac{-(-a)}{a}=1$$

$$P=\alpha\beta=\frac{C}{A}=\frac{-b}{a}$$

گام سوم: رابطهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$3\beta^2+2\alpha^2-\beta=7\Rightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)+\beta^2-\beta=7\Rightarrow$$

$$2(S^2-2P)+\underbrace{\beta^2-\beta}_{(**)}=7\Rightarrow 2(1+\frac{2b}{a})+\frac{b}{a}=7\Rightarrow 2+\frac{4b}{a}+\frac{b}{a}=7\Rightarrow\frac{5b}{a}=5\Rightarrow\frac{b}{a}=1$$

گام چهارم: باتوجه به گام اول، معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت زیر می‌شود:

$$x^2-x=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow\begin{cases}S=1\\ P=-1\end{cases}$$

گام پنجم: مجموع توان‌های سوم ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS=1-3\times(-1)\times 1=4$$

تست و پاسخ ۴

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $6x\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1+\sqrt[3]{x^{-1}})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره طرفین معادله را در $\sqrt[3]{x}$ ضرب کنید تا بتوانید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنید.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه ●● اتحادهای جبری

نام اتحاد	فرمول
مربع دوجمله‌ای	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$
مزدوج	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
جمله‌مشترک	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
چاق و لاغر	۱) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
	۲) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو طرف معادله را در عبارت $\sqrt[3]{x}$ ضرب می‌کنیم تا در سمت چپ معادله، اتحاد چاق و لاغر، به دست بیاید:

$$(\sqrt[3]{x}-1+\sqrt[3]{x^{-1}})(\sqrt[3]{x}+1)=6x\sqrt[3]{x^2}\xrightarrow{\times\sqrt[3]{x}}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}=6x\underbrace{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt[3]{x}}_{x}\Rightarrow x+1=6x^2$$

گام دوم: حالا در معادلهٔ به‌دست‌آمده، از فرمول مجموع ریشه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$6x^2-x-1=0\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{1}{6}$$

تست و پاسخ ۵

اگر α ریشهٔ بزرگ‌تر و β ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $\sqrt{2x+6}=4|x|-3$ باشند، حاصل $8\beta^2+11\beta-\alpha$ کدام است؟ $(\beta<0<\alpha)$

۱) -4 ۲) -1 ۳) -3 ۴) -2

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره معادله را یک بار به ازای $x>0$ و یک بار به ازای $x<0$ حل کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** قبل از حل معادله، محدوده‌ای را که x در آن می‌تواند باشد، به دست می‌آوریم:

۱) زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$2x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -3$$

۲) حاصل رادیکال، نامنفی است؛ پس:

$$4|x|-3\geq 0\Rightarrow |x|\geq\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{3}{4}\\ \text{یا}\\ x\leq-\frac{3}{4}\end{cases}$$

پس با اشتراک (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم که $x\in[-3,\frac{-3}{4}]\cup[\frac{3}{4},+\infty)$ است.

گام دوم: معادله را در دو حالت $x<0$ و $x\geq 0$ حل می‌کنیم:

$$(I)\ x\geq 0:\sqrt{2x+6}=4x-3\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}2x+6=16x^2-24x+9\Rightarrow$$

$$16x^2-26x+3=0\Rightarrow\Delta=(-26)^2-12\times16=484\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{26+\sqrt{484}}{32}=\frac{26+22}{32}=\frac{3}{2}\\ x_2=\frac{26-\sqrt{484}}{32}=\frac{26-22}{32}=\frac{1}{8}\end{cases}$$

با توجه به محدودهٔ x، $x_1=\frac{3}{2}$ قابل قبول است و همان مقدار α است.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

$$(II)\ x<0:\sqrt{2x+6}=-4x-3 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 2x+6=16x^2+24x+9 \Rightarrow 16x^2+22x+3=0$$

از آن‌جایی که در این معادله، $S=\frac{-22}{16}$ و $P=\frac{3}{16}$ است، دو ریشهٔ منفی دارد و مقدار β را می‌دهد. البته دقت کنید که یکی از ریشه‌ها، در بازهٔ $[-3,-\frac{3}{4}]$ که در گام اول به دست آوردیم، قرار نمی‌گیرد. (خودتان می‌توانید ریشه‌ها را به دست آورید.)

با توجه به این‌که حاصل $8\beta^2+11\beta-\alpha$ خواسته شده، لازم نیست که مقدار β را به دست آوریم. از معادلهٔ به‌دست‌آمده داریم:

$$16x^2+22x=-3 \Rightarrow 2(8x^2+11x)=-3 \xrightarrow[\text{است.}]{\beta\text{ ریشهٔ معادله}} 8\beta^2+11\beta=-\frac{3}{2}$$

گام سوم: حالا حاصل مقدار خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$8\beta^2+11\beta-\alpha=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3$$

تست و پاسخ ۶

جواب نامعادلهٔ $|x|\,|x^2-1|<k|x|$ فقط ۴ عدد طبیعی را شامل می‌شود. k کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: دو طرف نامعادله را بررسی می‌کنیم:

با توجه به گزینه‌ها، k مثبت است.

$$x\underbrace{|x^2-1|}_{(+)}<k\underbrace{|x|}_{(+)}$$

از آن‌جایی که k مثبت است، در نامعادلهٔ داده‌شده نتیجه می‌گیریم که $x<0$ صدق می‌کند، پس $x<0$ قطعاً جواب نامعادله است.

گام دوم: از آن‌جایی که نامعادله، فقط شامل ۴ عدد طبیعی است و $x<0$ نیز جواب نامعادله است، برای $x>0$، نامعادله فقط شامل اعداد طبیعی ۴,۳,۲,۱ است و نباید بقیهٔ اعداد طبیعی در آن صدق کنند. پس با برداشتن قدرمطلق در سمت راست نامعادله داریم:

$$x>0:|x^2-1|<kx \xrightarrow{x\neq 0} |x^2-1|<k \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1:k>0 \\ x=2:k>3 \\ x=3:k>8 \\ x=4:k>15 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k>15$$

$$\left.\begin{array}{l} k>15 \\ x=5:k>24 \Rightarrow k \text{ نباید بیشتر از ۲۴ باشد} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{به‌دست‌آمده برای } k]{\text{اشتراک محدوده‌های}} 15<k\leq 24$$

در غیر این صورت $x=5$ نیز شامل جواب نامعادله می‌شود.

پس با توجه به گزینه‌ها، $k=20$ می‌تواند باشد.

تست و پاسخ ۷

خط d به معادلهٔ $y=2x+4$ محور xها را در نقطهٔ A قطع می‌کند. نقطهٔ M با کدام عرض روی محور yها انتخاب شود تا فاصلهٔ آن از A، $5\sqrt{2}$ برابر فاصلهٔ آن از خط d باشد؟

۱) ۶ یا $\frac{26}{9}$ ۲) ۶ یا $\frac{24}{9}$

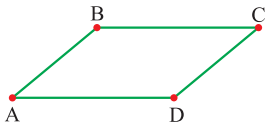
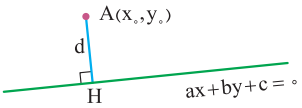
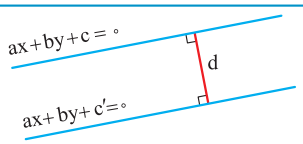
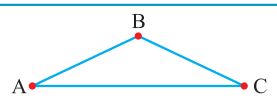
۳) ۴ یا $\frac{26}{9}$ ۴) ۴ یا $\frac{24}{9}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه ●● فرمول‌های هندسهٔ تحلیلی

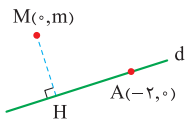
فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
وسط پاره‌خط A و B	$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$ وسط AB
رابطهٔ بین رأس‌های متوازی‌الاضلاع	 $\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$
فاصلهٔ نقطه از خط	 $d=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
فاصلهٔ دو خط موازی	 $d=\frac{\lvert c-c'\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
مساحت مثلث از روی مختصات سه نقطه ($\lvert\ \rvert$، علامت دترمینان است.)	 $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_A&x_B&x_C\\y_A&y_B&y_C\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_B&x_C\\y_B&y_C\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_A&x_C\\y_A&y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_A&x_B\\y_A&y_B\end{vmatrix}\right)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا مختصات نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$y=0\Rightarrow 0=2x+4\Rightarrow x=-2\Rightarrow A(-2,0)$$

گام دوم: نقطهٔ M روی محور y ها قرار دارد؛ پس مختصات آن را به صورت $(0,m)$ در نظر می‌گیریم.

گام سوم: فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ A، $5\sqrt{2}$ برابر فاصلهٔ نقطهٔ M تا خط d است. پس:



$$d: 2x-y+4=0$$

$$AM=5\sqrt{2}\,MH\Rightarrow\sqrt{m^2+4}=5\sqrt{2}\frac{\lvert 0-m+4\rvert}{\sqrt{1+4}}\Rightarrow\sqrt{m^2+4}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\lvert 4-m\rvert$$

طرفین معادلهٔ به‌دست‌آمده را به توان ۲ می‌رسانیم:

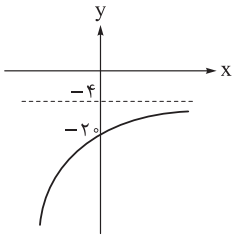
$$m^2+4=\frac{25\times 2}{5}(16-8m+m^2)\Rightarrow m^2+4=10(16-8m+m^2)\Rightarrow$$

$$m^2+4=160-80m+10m^2\Rightarrow 9m^2-80m+156=0\Rightarrow(m-6)(9m-26)=0\Rightarrow m=6\ \text{یا}\ m=\frac{26}{9}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۸

نمودار تابع $f(x) = a - ۲^{ax-b}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $\log_{|a|} ab$ چه عددی است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

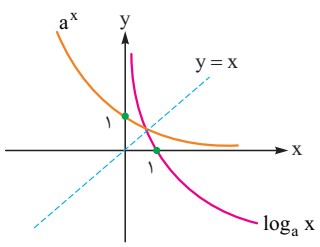
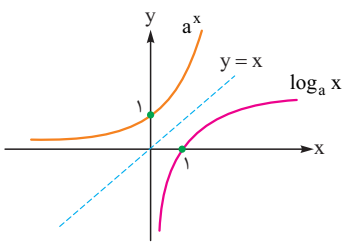
۳) ۲

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره از $f(۰) = -۲۰$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -۴$ استفاده کنید.

درس نامه نمودار تابع نمایی $y = a^x$ و وارون آن $(y = \log_a x)$

$۰ < a < ۱$	$a > ۱$
	

نکته نمودار وارون آن، نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، متقارن هستند، همان‌طور که در شکل‌های بالا می‌بینید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از نمودار داده‌شده، می‌فهمیم که $f(۰) = -۲۰$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -۴$ است.

داریم:

$$f(۰) = -۲۰ \Rightarrow f(۰) = a - ۲^{۰-b} = a - ۲^{-b} = -۲۰ \quad (*)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (a - ۲^{ax-b}) = -۴$$

چون $x \to +\infty$، پس باید ضریب $x^۲$، منفی باشد تا حاصل حد جواب داشته باشد $(a < ۰)$. وقتی $x \to +\infty$، $۲^{ax-b} \to ۰$ می‌شود؛ پس: $a = -۴$

گام دوم: مقدار $a = -۴$ را در $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار b به دست آید:

$$-۴ - ۲^{-b} = -۲۰ \Rightarrow ۲^{-b} = ۱۶ \Rightarrow -b = ۴ \Rightarrow b = -۴$$

گام سوم: مقدار $\log_{|a|} ab$ را محاسبه می‌کنیم:

$$ab = ۱۶ \Rightarrow \log_{|a|} ab = \log_{|-۴|} ۱۶ = \log_۴ ۴^۲ = ۲$$

تست و پاسخ ۹

اگر $x > ۱$، حداقل مقدار $A = \log_۹ x + ۲\log_{x^۲} ۳$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره عبارت A را ساده کنید و بعد از رابطهٔ $a + b \geq ۲\sqrt{ab}$، $(a, b > ۰)$ استفاده کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا A را ساده می‌کنیم:

$$A=\log_{۹} x+۲\log_{x^۲} ۳=\log_{۳^۲} x+\frac{۲}{۲}\log_x ۳=\frac{۱}{۲}\log_۳ x+\log_x ۳$$

گام دوم: از تغییر متغیر $t=\log_۳^x$ استفاده می‌کنیم. از آن‌جایی که $x>۱$، هر دو مقدار $\log_۳^x$ و $\log_x^۳$، مثبت هستند و رابطهٔ $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$ را داریم، پس:

$$A=\frac{t}{۲}+\frac{۱}{t}$$

گام سوم:

نکته برای دو مقدار مثبت a,b رابطهٔ $a+b\geq ۲\sqrt{ab}$ همواره برقرار است.

پس داریم:

$$A=\underbrace{\frac{t}{۲}}_{a}+\underbrace{\frac{۱}{t}}_{b}\geq ۲\sqrt{\frac{t}{۲}\times\frac{۱}{t}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر با $\sqrt{۲}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۰

عنصری هر ۲۰ دقیقه، $\frac{۱}{۹}$ جرم خود را از دست می‌دهد؛ بعد از گذشت چند دقیقه فقط $\frac{۱}{۲۴}$ از جرم اولیهٔ آن باقی می‌ماند؟ $(\log_۴ ۳=۰/۷۸)$

۱) ۷۶۰ ۲) ۶۴۰ ۳) ۷۸۰ ۴) ۷۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره درست است که از کاربردهای لگاریتم کم‌تر سؤال در کنکور مطرح شده است، اما سابقهٔ سؤال‌آمدن دارد. اگر به دنبال درصدهای بالاتر در کنکور هستید، به آن نیز بپردازید.

درس‌نامه ●● الگوهای رشد یا زوال

فرض کنید مقدار اولیه $A_۰$ باشد، اگر پس از گذشت هر t سال:

الف) r درصد افزایش یابد، مقدار آن پس از n سال برابر $A_۰(۱+\frac{r}{۱۰۰})^{\frac{n}{t}}$ می‌شود.

ب) r درصد کاهش یابد، مقدار آن پس از n سال برابر $A_۰(۱-\frac{r}{۱۰۰})^{\frac{n}{t}}$ می‌شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** عنصر هر ۲۰ دقیقه، $\frac{۱}{۹}$ جرم خود را از دست می‌دهد. پس $۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$ جرم آن باقی می‌ماند.

اگر فرض کنیم جرم اولیهٔ عنصر، $A_۰$ باشد، بعد از گذشت t دقیقه، جرم باقی‌ماندهٔ آن، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$A=A_۰(\frac{۸}{۹})^{\frac{t}{۲۰}}$$

گام دوم: بعد از t دقیقه، فقط $\frac{۱}{۲۴}$ از جرم اولیهٔ عنصر باقی می‌ماند، پس:

$$\frac{۱}{۲۴}A_۰=A_۰(\frac{۸}{۹})^{\frac{t}{۲۰}}\Rightarrow\frac{۱}{۲۴}=(\frac{۸}{۹})^{\frac{t}{۲۰}}\xrightarrow{\log_۴}-\log_۴ ۲۴=\frac{t}{۲۰}\log_۴\frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow-(\log_۴ ۳+\log_۴ ۸)=\frac{t}{۲۰}(\log_۴ ۸-\log_۴ ۹)\Rightarrow-(\log_۴ ۳+\log_{۲^۲} ۲^۳)=\frac{t}{۲۰}(\log_{۲^۲} ۲^۳-\log_۴ ۳^۲)\Rightarrow$$

$$-(\log_۴ ۳+\frac{۳}{۲})=\frac{t}{۲۰}(\frac{۳}{۲}-۲\log_۴ ۳)$$

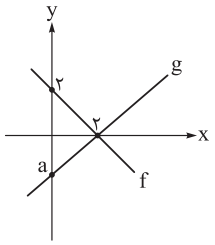
گام سوم: در معادلهٔ به‌دست‌آمده، $\log_۴ ۳=۰/۷۸$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار t به دست آید:

$$-(۰/۷۸+۱/۵)=\frac{t}{۲۰}(۱/۵-۲\times۰/۷۸)\Rightarrow t=\frac{-۲/۲۸\times۲۰}{-۰/۰۶}=۷۶۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۱

نمودار توابع f و g به صورت روبه‌رو است. به ازای کدام مقدار a تابع $y=\frac{x(f(x)-2g(x))}{2f(x)+g(x)}$، همانی است؟

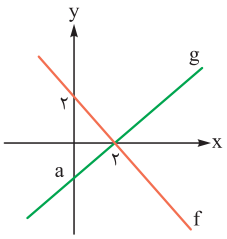


$y=x$

۱) $-\frac{4}{3}$
۲) $\frac{-3}{4}$
۳) $-\frac{3}{2}$
۴) $\frac{-2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** باتوجه به نمودار داده‌شده، ابتدا معادلهٔ خطوط f و g را پیدا می‌کنیم:



$$f(x)=-x+2=-(x-2)$$
$$g(x)=\frac{-a}{2}x+a=-\frac{a}{2}(x-2),\ (a<0)$$

نکته دقت کنید که مقدار a منفی است و شیب خط g مثبت است؛ پس ضریب x باید $\frac{-a}{2}$ باشد.

گام دوم: حالا تابع y را تشکیل می‌دهیم:

$$y=\frac{x\big(f(x)-2g(x)\big)}{2f(x)+g(x)}=\frac{x\Big(-(x-2)-2(\frac{-a}{2})(x-2)\Big)}{-2(x-2)-\frac{a}{2}(x-2)}=\frac{(x-2)(-x+ax)}{(x-2)(-2-\frac{a}{2})}=\frac{(a-1)x}{-2-\frac{a}{2}}$$

گام سوم: تابع داده شده همانی است، پس رابطهٔ $y=x$ برقرار است. بنابراین ضریب x باید برابر با ۱ باشد:

$$\frac{a-1}{-2-\frac{a}{2}}=1\Rightarrow a-1=-2-\frac{a}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}a=-1\Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

تست و پاسخ ۱۲

تابع خطی $f(x)=ax+b$ مفروض است. اگر نمودار تابع $\frac{f}{fof}$ بر نمودار وارون خود منطبق باشد، مقدار $f^{-1}(-a)$ کدام است؟

۱) $-b$
۲) b
۳) $\frac{1}{b}$
۴) $\frac{-1}{b}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا $\frac{f}{fof}$ را تشکیل دهید.

درس نامه **تابع هموگرافیک** $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq0, c\neq0)$ **در یک نگاه:**

۱) $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ (برای وارون جای d و a را عوض کرده و آن‌ها را قرینه می‌کنیم.)

۲) اگر $c=0$، تابع هموگرافیک نبوده و تبدیل به تابع خطی می‌شود.

۳) اگر $ad-bc=0$ باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع تبدیل به تابع ثابت می‌گردد.

۴) اگر در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ داشته باشیم: $a+d=0$، آن‌گاه $f^{-1}(x)=f(x)$.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا تابع $\frac{f}{fof}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y=\frac{f(x)}{f\big(f(x)\big)}=\frac{ax+b}{a(ax+b)+b}=\frac{\overbrace{a}^{A}x+\overbrace{b}^{B}}{\underbrace{a^2}_{C}x+\underbrace{(ab+b)}_{D}}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: تابع y، یک تابع هموگرافیک است. نمودار این تابع زمانی بر نمودار وارون خود منطبق است که شرط زیر برقرار باشد:

$$A + D = 0 \Rightarrow a + ab + b = 0 \Rightarrow a + b = -ab \ (*)$$

گام سوم: وارن تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \xrightarrow{\text{جای } y, x \text{ را عوض می‌کنیم}} f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

گام چهارم: حالا مقدار $f^{-1}(-a)$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(a) = \frac{-a-b}{a} \overset{(*)}{=\!=} -\frac{(-ab)}{a} = b$$

تست و پاسخ ۱۳

فرض کنید $f(x) = a + \sqrt{2a-3-x}$ باشد. اگر معادلهٔ $f^{-1}of(x) = fof^{-1}(x)$ دقیقاً یک ریشه داشته باشد، مقدار $f^{-1}(6)$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -9 ۳) -4 ۴) -6

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره سؤال مهم مشابه سؤال‌های کنکور که نشان می‌دهد برای حل سؤال‌های تابع وارون نباید فقط به عددگذاری اکتفا کنید. در این سؤال اول باید بازهٔ مناسب را پیدا کنید.

درس‌نامه ●● نکات تابع وارون f

۱) اگر f در بازه‌ای یک‌به‌یک باشد، در این بازه وارون‌پذیر است.

۲) $D_{f^{-1}} = R_f$ (دامنهٔ تابع وارون برابر برد تابع است) و $R_{f^{-1}} = D_f$.

۳) برای پیداکردن ضابطهٔ f^{-1}، x را برحسب y پیدا کرده و جای y و x را عوض می‌کنیم.

۴) اگر $(a,b) \in f$، آن‌گاه $(b,a) \in f^{-1}$. به زبان دیگر اگر $f(a) = b$، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$.

از این نکته برای رد گزینه نیز می‌توانیم استفاده کنیم. اگر نقطهٔ (a,b) روی تابع باشد، (b,a) باید روی f^{-1} باشد.

۵) برای پیداکردن $f^{-1}(a)$ کافی است معادلهٔ $f(x) = a$ را حل کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که معادلهٔ $f^{-1}of(x) = fof^{-1}(x)$ فقط یک ریشه دارد، نتیجه می‌گیریم که به ازای ریشهٔ معادله، D_f با R_f برابر است؛ زیرا:

$$\left.\begin{aligned} D_{f^{-1}of} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \in D_f \mid f(x) \in R_f\} \\ D_{fof^{-1}} &= \{x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_f\} = \{x \in R_f \mid f^{-1}(x) \in D_f\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

x ریشهٔ معادله و $x \in D_f, x \in R_f$ است.

گام دوم: برد و دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = a + \sqrt{2a-3-x}$$

دامنه: $2a-3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2a-3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2a-3]$

برد: $\sqrt{2a-3-x} \geq 0 \Rightarrow a + \sqrt{2a-3-x} \geq a \Rightarrow R_f = [a, +\infty)$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: از آن‌جایی که در معادلهٔ داده‌شده، به ازای ریشهٔ معادله، D_f با R_f برابر است و این معادله فقط یک ریشه دارد، در نتیجه، نقاط مرزی با هم برابر می‌شوند:

$$۲a-۳=a \Rightarrow a=۳$$

پس $f(x)=۳+\sqrt{۳-x}$ می‌شود.

گام چهارم: حالا مقدار $f^{-۱}(-۶)$ را مطابق مورد ۵ درس‌نامه پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}(۶)=t \Rightarrow ۶=f(t)=۳+\sqrt{۳-t} \Rightarrow ۳=\sqrt{۳-t} \Rightarrow ۹=۳-t \Rightarrow t=-۶$$

پس $f^{-۱}(۶)=-۶$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۴

اگر $\frac{۱}{\sin^۲ x}-\frac{۱}{\cos^۲ x}=\frac{۳}{۲}$، مقدار $\cos ۴x$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{-۷}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره مسلط‌بودن به اتحادهای مثلثاتی، در حل معادله‌های مثلثاتی مهم است. حتماً بر روی اتحادهای مثلثاتی زیاد تمرین حل کنید.

درس‌نامه ●● فرمول‌های دو برابر کمان

۱) $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$

۲)
$$\left.\begin{array}{l}\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha\\ \cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}\\ \cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha \Rightarrow \sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}\\ \cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{فرمول‌های توان‌شکن (طلایی)}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** در معادلهٔ داده‌شده، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\sin^۲ x}-\frac{۱}{\cos^۲ x}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{(\sin x\cos x)^۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{\cos ۲x}{(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{\cos ۲x}{\sin^۲ ۲x}=\frac{۳}{۸} \Rightarrow \cos ۲x=\frac{۳}{۸}\sin^۲ ۲x$$

گام دوم: حالا از اتحاد $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ استفاده می‌کنیم و به جای $\sin^۲ ۲x$، جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\cos ۲x=\frac{۳}{۸}(۱-\cos^۲ ۲x) \Rightarrow ۸\cos ۲x=۳-۳\cos^۲ ۲x \Rightarrow$$

$$۳\underbrace{\cos^۲ ۲x}_{t^۲}+۸\underbrace{\cos ۲x}_{t}-۳=۰ \Rightarrow ۳t^۲+۸t-۳=۰ \Rightarrow \Delta=۶۴+۳۶=۱۰۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\cos ۲x=\frac{-۸+۱۰}{۶}=\frac{۱}{۳} \\ t=\cos ۲x=\frac{-۸-۱۰}{۶}=-۳ \end{cases}$$

غ‌ق‌ق چون $-۱\le \cos <۱$ است.

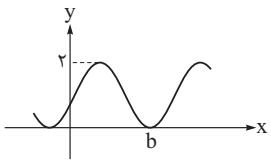
گام سوم: حالا مقدار $\cos ۴x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\cos ۴x=۲\cos^۲ ۲x-۱=۲(\frac{۱}{۳})^۲-۱=\frac{۲}{۹}-۱=\frac{-۷}{۹}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۵

بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-\sin(\frac{۳\pi}{۴}+x)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



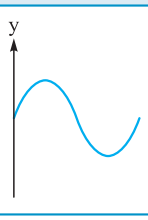
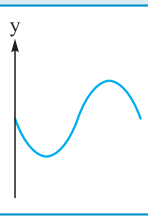
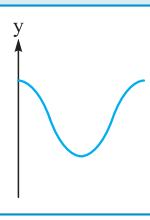
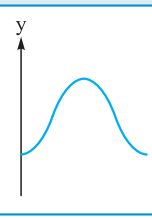
۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۵\pi}{۴}$
۳) $\frac{۷\pi}{۲}$
۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع به فرم $y=a\sin(bx)+c$ یا $y=a\cos(bx)+c$

گام	چی‌کار می‌کنیم؟	توضیح
۱	ساده‌کردن	اگر ضابطه ساده می‌شد، حتماً ساده می‌کنیم، مثلاً جای $۴\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$ می‌نویسیم $۴\cos x$.
۲	دورهٔ تناوب	اگر از روی شکل دورهٔ تناوب معلوم بود، $\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا b به دست آید.
۳	max و min	اگر مقدار min و max روی نمودار معلوم بود، از معادلات $max=\lvert a\rvert+c$ و $min=-\lvert a\rvert+c$، مقدار $\lvert a\rvert$ و c را حساب می‌کنیم.
۴	نقطهٔ کمکی	اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جایگذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد.
۵	علامت a و b	برای تعیین علامت a و b از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

پیداکردن علامت a و b در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$

	نمودار سینوسی		نمودار کسینوسی	
شکل نمودار در سمت راست محور y ها				
شبیه به ...	صعودی یا مثل $\sin x$	نزولی یا مثل $-\sin x$	نزولی یا مثل $\cos x$	صعودی یا مثل $-\cos x$
علامت a و b	هم‌علامت‌اند $(ab>۰)$	ناهم علامت‌اند $(ab<۰)$	$a>۰$	$a<۰$

پاسخ تشریحی **گام اول:** حداکثر مقدار تابع برابر با ۲ است؛ پس داریم:

$$-۱\le\sin(\frac{۳\pi}{۴}+x)\le۱\Rightarrow-۱\le-\sin(\frac{۳\pi}{۴}+x)\le۱\Rightarrow a-۱\le a-\sin(\frac{۳\pi}{۴}+x)\le\underbrace{a+۱}_{max}\Rightarrow a+۱=۲\Rightarrow a=۱$$

پس: $f(x)=۱-\sin(\frac{۳\pi}{۴}+x)$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: نقطهٔ b، نقطهٔ مینیمم تابع f روی محور xها است و اولین نقطهٔ مثبت است که حداقل مقدار تابع در آن رخ می‌دهد؛ پس داریم:

$$f(x)=0 \Rightarrow \sin(\frac{3\pi}{4}+x)=1 \Rightarrow \frac{3\pi}{4}+x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{b>0} k=1 \Rightarrow b=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

گام سوم: حاصل ab برابر با $\frac{7\pi}{4}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۶

مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2}$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره در به‌دست آوردن حد توابع در یک نقطه، ابتدا مقدار x را در تابع جایگذاری کنید تا متوجه شوید حد از کدام نوع است. مثلاً در این سؤال با جای‌گذاری $x=1$ در تابع، حاصل حد به صورت $\frac{0}{0}$ می‌شود که باید رفع ابهام شود. سپس سعی کنید به روش‌های مختلف اتحادها، عامل صفرکننده را از صورت و مخرج حذف کنید و سپس حاصل حد را به‌دست آورید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** به ازای $x\to 1$، حاصل حد $\frac{0}{0}$ است؛ پس باید رفع ابهام کنیم. از اتحادها استفاده می‌کنیم. اول مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1)(\sqrt{\sqrt{x}+3}+2)}{(\sqrt{\sqrt{x}+3}-2)(\sqrt{\sqrt{x}+3}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1)\times 4}{(\sqrt{x}+3-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1)}{(\sqrt{x}-1)}$$

گام دوم: حالا برای ساده‌کردن صورت کسر، آن را در عبارت چاق ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1)(\sqrt[3]{(\sqrt[3]{x}-2)^2}-\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{(\sqrt[3]{x}-2)^2}-\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-2}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4(\sqrt[3]{x}-2+1)}{3(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{3}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)}$$

گام سوم: دوباره صورت را در عبارت چاق و مخرج را در عبارت مزدوج آن ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4}{3}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\frac{x-1}{x-1}=\frac{8}{9}$$

تست و پاسخ ۱۷

اگر b عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{a+\cos x}}{\sin 2x}=b$، مقدار $ab\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشاوره مشابه این تیپ سؤال‌ها در کنکور بسیار تکرارپذیر است. روی رفع ابهام حدهای $\frac{0}{0}$ مسلط باشید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** به ازای $x=\pi$، مخرج عبارت داده‌شده صفر می‌شود و از آن‌جایی که حاصل حد، عدد حقیقی b است، به ازای $x=\pi$، صورت نیز باید صفر باشد:

$$\sqrt{a+\cos\pi}=0 \Rightarrow a=1$$

گام دوم: حد را بازنویسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}|\cos\frac{x}{2}|}{2\sin x\cos x}\overset{x\to\pi^+ \text{ با توجه به } (\cos\frac{x}{2}) \text{ تعیین علامت}}{=}\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin x(-1)}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\times 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

گام سوم: مقدار $ab\sqrt{2}=1\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

تست و پاسخ ۱۸

تابع $f(x)=[x]-x+a\cos(\frac{\pi[x]}{2})$ در بازهٔ $(1,4)$ پیوسته است؛ مقدار a کدام است؟

۱) $a=1$ ۲) $a=-1$ ۳) $a=\pm 1$ ۴) a یافت نمی‌شود.

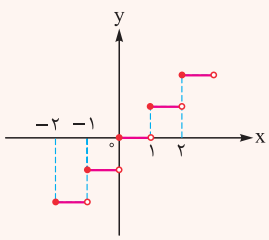
پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره از پیوستگی حتماً یک سؤال در کنکور می‌آید که با بررسی تیپ‌های سال‌های قبل، می‌توانید بر روی آن مسلط شوید.

خودت حل کنی بهتره پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بازهٔ داده شده، بررسی کنید.

درس‌نامه ●● بررسی پیوستگی تابع‌های براکتی

نمودار تابع $y=[x]$ به صورت مقابل است:



این تابع در نقاط صحیح (x صحیح) ناپیوسته و در نقاط دیگر پیوسته است.

نکات

۱) تابع‌های $y=[ax+b]$ در نقاطی که داخل براکت عددی صحیح شود، ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است. برای پیداکردن نقاطی که $ax+b$ صحیح می‌شود، $ax+b=k$ ($k\in\mathbb{Z}$ که) قرار می‌دهیم:

به جای k اعداد صحیح قرار می‌دهیم. $\Rightarrow ax+b=k\Rightarrow x=\frac{k-b}{a}$

۲) تابع‌های $y=[\sqrt{ax+b}]$ در نقاطی که داخل براکت عددی صحیح شود، ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است.

۳) تابع‌های $y=[ax^2]$ ($a>0$ که) و $y=[\sin x]$ و $y=[\cos x]$ در نقاطی که داخل براکت صحیح شود، ناپیوسته هستند، اما اگر این نقطه یک نقطهٔ min تابع درون براکت باشد، تابع در آن نقطه پیوسته است.

مثلاً درست است که درون براکت در تابع $y=[x^2]$ به ازای $x=0$ صحیح می‌شود ولی چون این نقطه یک نقطهٔ min تابع $y=x^2$ است، تابع $y=[x^2]$ در آن نقطه پیوسته می‌شود یا تابع $y=[\sin x]$ در $x=\frac{3\pi}{2}$ پیوسته است، چون تابع $y=\sin x$ در این نقطه min دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع جزء صحیح در نقاط صحیح، ناپیوسته است. پس برای اینکه تابع f در بازهٔ $(۱,۴)$ پیوسته باشد، باید در نقاط صحیح، پیوسته باشد. باید پیوستگی تابع f را در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ (اعداد صحیح در بازهٔ $(۱,۴)$) بررسی کنیم.

گام دوم: ابتدا پیوستگی را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=[x]-x+a\cos(\pi\frac{[x]}{۲})$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۲-۲+a\cos\frac{۲\pi}{۲}=-a\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱-۲+a\cos\frac{\pi}{۲}=-۱\end{cases} \xrightarrow{\text{در } x=۲ \text{ پیوسته است.}} a=۱$$

گام سوم: پیوستگی را در نقطهٔ $x=۳$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)=۳-۳+a\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰\\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲-۳+a\cos\frac{۲\pi}{۲}=-۱-a\end{cases} \xrightarrow{\text{در } x=۳ \text{ پیوسته است.}} -a-۱=۰\Rightarrow a=-۱$$

گام چهارم: باید مقداری که در گام دوم و سوم به دست می‌آید، یکسان باشد (که نیست!) پس مقداری برای a یافت نمی‌شود که به ازای آن، تابع f در بازهٔ داده‌شده، پیوسته باشد.

آمار و احتمال: صفحه‌های ۱ تا ۱۲۷، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۳ و ۱۱۸ تا ۱۷۰

تست و پاسخ ۱۹

ارزش کدام گزاره، درست است؟

۱) مربع هر عدد حقیقی، عددی مثبت است.
۲) مجموع سه عددی متوالی بر عدد ۳ بخش‌پذیر است.
۳) حافظ، بهترین شاعر دنیاست.
۴) تهران، اصفهان و شیراز شهرهای زیبایی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه **گزاره:** جمله‌ای خبری است که درحال حاضر یا آینده، ارزشی به وضوح درست یا نادرست داشته باشد.

نکات ۱) جمله‌های خبری که ارزش آن‌ها به وضوح مشخص نیست، گزاره نیستند.
۲) جمله‌های امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.

پاسخ تشریحی هر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

۱) ارزش گزارهٔ «مربع هر عدد حقیقی، عددی مثبت است.» نادرست است چون $x=۰$ عددی حقیقی است و $x^۲=۰$ عددی مثبت نیست.

۲) ارزش گزارهٔ «مجموع سه عدد متوالی بر عدد ۳ بخش‌پذیر است» درست است. سه عدد a، $a+۱$ و $a+۲$ متوالی هستند داریم:

مجموع سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. $\Rightarrow$ مجموع سه عدد $=a+a+۱+a+۲=۳a+۳=۳(a+۱)$

۳) بهترین شاعر از نظر آدم‌ها متفاوت است، پس گزاره نیست.

۴) طبق درس‌نامه این گزینه هم اصلاً گزاره نیست.

تست و پاسخ ۲۰

در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{N}\mid \frac{۱}{x}>۰/۱\}$، اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن کم‌تر از ۵ نیست؟

۱) ۲۰۸ ۲) ۳۱۲ ۳) ۴۱۶ ۴) ۶۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه ۱) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: ۲^n
۲) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی که شامل k عضو خاص از آن باشند، برابر است با: ۲^{n-k}
۳) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی که فاقد t عضو خاص از آن باشند، برابر است با: ۲^{n-t}
۴) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی که شامل k عضو خاص و فاقد t عضو خاص از آن باشند، برابر است با: ۲^{n-k-t}

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا اعضای A را مشخص می‌کنیم. اعضای A اعداد طبیعی مثل x هستند که $\frac{1}{x} > 0/1$ است:

$$\frac{1}{x} > 0/1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{10} \xrightarrow{\text{معکوس}} x < 10 \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x = 1,2,3\ldots,9$$

پس:

$$A = \{1,2,3,\ldots,9\}$$

گام دوم: زیرمجموعه‌هایی از A را می‌خواهیم که اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن‌ها کم‌تر از ۵ نیست. برحسب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو حالت‌بندی می‌کنیم:

حالت اول: اگر کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۶ باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی از A را می‌خواهیم که شامل ۱ و ۶ باشند (چون بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضوهای آن هستند) و فاقد ۹,۸,۷ *(خوب ببین اگه ۷ یا ۸ یا ۹ توی زیرمجموعه باشه، دیگه بزرگ‌ترین عضو ۶ نیست.)*، یعنی زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعهٔ ۹عضوی که شامل ۲ عضو خاص و فاقد ۳ عضو خاص هستند که برابر $2^{9-2-3} = 2^4 = 16$ تا می‌شود.

این‌جوری هم ببین: کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۶ است، پس هر کدام از اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ دو حالت دارند که در این زیرمجموعه باشند یا نباشند که طبق اصل ضرب برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

↙ ۵ باشد یا نه ↘ ۴ باشد یا نه ↘ ۳ باشد یا نه ↓ عضو ۲ در زیرمجموعه باشد یا نباشد.

حالت دوم: کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۷ باشد که مشابه بالا داریم:

$$\{1,\ldots,7\} \xrightarrow{\text{هرکدام از اعداد ۲ تا ۶ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

۶ باشد یا نه ↙ ۵ باشد یا نه ↙ ۴ باشد یا نه ↙ ۳ باشد یا نه ↓ ۲ باشد یا نه

حالت سوم: کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۸ باشد:

$$\{1,\ldots,8\} \xrightarrow{\text{هرکدام از اعداد ۲ تا ۷ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6 = 64$$

حالت چهارم: کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۹ باشد:

$$\{1,\ldots,9\} \xrightarrow{\text{هرکدام از اعداد ۲ تا ۸ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^7 = 128$$

حالت پنجم: کوچک‌ترین عضو ۲ و بزرگ‌ترین عضو ۷ باشد:

$$\{2,\ldots,7\} \xrightarrow{\text{هرکدام از اعداد ۳ تا ۶ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2 = 2^4 = 16$$

حالت ششم: کوچک‌ترین عضو ۲ و بزرگ‌ترین عضو ۸ باشد:

$$\{2,\ldots,8\} \xrightarrow{\text{هرکدام از اعداد ۳ تا ۷ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5 = 32$$

حالت هفتم: کوچک‌ترین عضو ۲ و بزرگ‌ترین عضو ۹ باشد:

$$\{2,\ldots,9\} \xrightarrow{\text{هرکدام از اعداد ۳ تا ۸ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6 = 64$$

حالت هشتم: کوچک‌ترین عضو ۳ و بزرگ‌ترین عضو ۸ باشد:

$$\{3,\ldots,8\} \xrightarrow{\text{هر کدام از اعداد ۴ تا ۷ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2 = 2^4 = 16$$

حالت نهم: کوچک‌ترین عضو ۳ و بزرگ‌ترین عضو ۹ باشد:

$$\{3,\ldots,9\} \xrightarrow{\text{هرکدام از اعداد ۴ تا ۸ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5 = 32$$

حالت دهم: کوچک‌ترین عضو ۴ و بزرگ‌ترین عضو ۹ باشد:

$$\{4,\ldots,9\} \xrightarrow{\text{هر کدام از اعداد ۵ تا ۸ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.}} 2\times2\times2\times2 = 2^4 = 16$$

گام سوم: بنابراین طبق اصل جمع جواب برابر است با:

$$16+32+64+128+16+32+64+16+32+16 = 416$$

تست و پاسخ ۲۱

چه‌قدر احتمال دارد گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$، یک گزاره با ارزش درست باشد؟

۱) $\frac{13}{16}$ ۲) $\frac{11}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{7}{16}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره در کنکورهای چند سال اخیر، بسیاری از سؤالات نظریهٔ اعداد، گراف، جبرگزاره‌ها و ... با احتمال ترکیب شده‌اند، پس لازم است نگاه ویژه‌ای به سؤالات ترکیب شده با احتمال داشته باشیم.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه ●● جبرگزاره‌ها

۱) **نقیض یک گزاره:** نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

P	$\sim P$
د	ن
ن	د

نکات

۱) اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

۲) ارزش نقیضِ نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است:

$$\sim(\sim p)\equiv p$$

۲) **ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره:** اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p یا q» و می‌نویسیم «$p\vee q$».

اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p و q» و می‌نویسیم «$p\wedge q$».

نکته ارزش $p\vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزارهٔ p یا q درست باشد و ارزش $p\wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

۳) **ترکیب شرطی دو گزاره:** به گزارهٔ $p\Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q» می‌خوانیم. ارزش یک گزارهٔ شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکات

۱) در ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$، به p «مقدم» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.

۲) گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ را به دو صورت زیر نیز می‌خوانیم:

p شرط کافی است برای q

q شرط لازم است برای p

۳) اگر $p\Rightarrow q$ یک گزارهٔ شرطی باشد:

به $q\Rightarrow p$ عکس گزارهٔ شرطی می‌گوییم؛

به $\sim q\Rightarrow\sim p$ عکس نقیض یک گزارهٔ شرطی می‌گوییم (که با $p\Rightarrow q$ هم‌ارزش است، یعنی $p\Rightarrow q\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$)؛

و به $\sim(p\Rightarrow q)$ نقیض عکس یک گزارهٔ شرطی می‌گوییم.

۴) انتفای مقدم: در گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، **گزاره به انتفای مقدم درست است:**

$$p\equiv F\xrightarrow{\text{در این صورت}}p\Rightarrow q\equiv T$$

۵) درست‌بودن (صحت) تالی: در گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p\Rightarrow q$ همواره درست است:

$$q\equiv T\xrightarrow{\text{در این صورت}}p\Rightarrow q\equiv T$$

۴) **ترکیب دو شرطی:** اگر دو گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی «$\wedge$» به هم مرتبط کنیم، ترکیب دو شرطی $p\Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت «p اگر و تنها اگر q» یا «p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکات

۱) ارزش $p\Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند:

۲) نقیض $p\Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv p\Leftrightarrow\sim q\qquad\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳) ترکیب دو شرطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دو شرطی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست است:

$p \Leftrightarrow p \equiv T \qquad p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$

هم‌ارزی‌های منطقی:

۱) جابه‌جایی: $p \vee q \equiv q \vee p \quad , \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$

۲) شرکت‌پذیری: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad , \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

۳) توزیع‌پذیری: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad , \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۴) دمورگان: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad , \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۵) جذب: $p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad , \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

پاسخ تشریحی روش اول: **گام اول**: جدول ارزش گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$ را رسم می‌کنیم:

p	q	r	s	$p \vee q$	$r \vee s$	$(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T

گام دوم: همان‌طور که می‌بینید، گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$، ۱۶ حالت دارد که در ۱۳ حالت ارزش آن درست است، پس احتمال این‌که این گزاره درست باشد، برابر $\frac{13}{16}$ می‌شود.

روش دوم: **گام اول**: می‌دانیم جدول ارزش n گزاره، 2^n حالت (سطر) دارد، حالا در این‌جا چهار گزارهٔ p، q، r و s را داریم پس جدول ارزش آن‌ها $2^4 = 16$ حالت دارد.

گام دوم: از اصل متمم کمک می‌گیریم. تعداد حالاتی را می‌شماریم که گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$ نادرست باشد. این گزاره در حالتی نادرست می‌شود که $p \vee q$ درست و $r \vee s$ نادرست باشد.

گام سوم: $p \vee q$ در ۳ حالت $((p \equiv T, q \equiv T))$ یا $(p \equiv T, q \equiv F)$ یا $(p \equiv F, q \equiv T)$ درست و $r \vee s$ در ۱ حالت $(s \equiv F, r \equiv F)$ نادرست است، پس گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$ در $3 \times 1 = 3$ حالت نادرست می‌شود، بنابراین طبق اصل متمم ارزش این گزاره در $13 = 3 - 16$ حالت درست می‌شود که احتمال آن برابر است با: $\frac{13}{16}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۲۲

هفت نفر با نام‌های A_1، A_2، ... و A_7 می‌خواهند در یک رقابت به‌ترتیب تیراندازی کنند. چه‌قدر احتمال دارد بین A_1 و A_2 دقیقاً دو نفر تیراندازی کنند؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{4}{21}$ ۳) $\frac{5}{21}$ ۴) $\frac{2}{7}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه ۱) تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$

۲) اگر تعداد جایگشت‌های n شیء را بخواهیم به طوری که k شیء از آن‌ها کنار هم باشند، کافی است آن k شیء را درون یک بسته و هر شیء دیگر را نیز درون یک بسته قرار دهیم و سپس جایگشت بسته‌ها را بشماریم. دقت کنید که باید جایگشت اشیاء درون هر بسته را نیز بشماریم.

۳) تعداد حالت‌های انتخاب k شیء از بین n شیء متمایز به طوری که جایگشت اشیای انتخاب‌شده مهم نباشد، برابر است با:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد کل جایگشت‌های ۷ نفر برابر است با $7!$، پس $n(S)=7!$ می‌شود.

گام دوم: برای شمارش تعداد حالات مطلوب، اول ۲ نفر از ۵ نفر A_3، A_4، A_5، A_6 و A_7 را به $\binom{5}{2}=10$ حالت انتخاب می‌کنیم. (مثلاً A_3 و A_4) این دو نفر را بین A_1 و A_2 قرار می‌دهیم.

گام سوم: حالا این ۴ نفر را درون یک بسته و هر کدام از مابقی افراد دیگر را درون یک بستهٔ دیگر قرار می‌دهیم:

$$(A_1\ A_3\ A_4\ A_2)\ (A_5)\ (A_6)\ (A_7)$$

گام چهارم: این چهار بسته $4!$ جایگشت دارند. به علاوه خود A_3 و A_4 هم $2!$ جایگشت و A_1 و A_2 هم $2!$ جایگشت دارند *(مواستون باشه که A_1 تا A_4، $4!$ جایگشت ندارند، پون A_3 و A_4 باید بین A_1 و A_2 باشن)*، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=\binom{5}{2}\times 4!\times 2!\times 2!$$

گام پنجم: بنابراین احتمال این‌که دو نفر بین A_1 و A_2 باشند برابر است با:

$$\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{2}\times 4!\times 2!\times 2!}{7!}=\frac{10\times 1\times 2\times 2}{7\times 6\times 5}=\frac{4}{21}$$

تست و پاسخ ۲۳

اگر $A_n=\{m\in\mathbb{Z}\mid (m\geq -n)\wedge(2^m\leq n)\}$، $B_i=(3-i,2i+5]$ و $i\in\{1,2,3,...,10\}$ و n، احتمال آن‌که مجموع طول پاره‌خط‌های نمودار $A_n\times B_i$ بیشتر از ۲۰۰ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۸ ۳) ۰/۳۱ ۴) ۰/۳۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

گام اول: ابتدا دقت کنید که:

$$B_1=(3-1,2\times 1+5]=(2,7] \xrightarrow{\text{طول}} 5$$
$$B_2=(3-2,2\times 2+5]=(1,9] \xrightarrow{\text{طول}} 8$$
$$B_3=(3-3,2\times 3+5]=(0,11] \xrightarrow{\text{طول}} 11$$
$$B_4=(3-4,2\times 4+5]=(-1,13] \xrightarrow{\text{طول}} 14$$
$$B_5=(3-5,2\times 5+5]=(-2,15] \xrightarrow{\text{طول}} 17$$
$$B_6=(3-6,2\times 6+5]=(-3,17] \xrightarrow{\text{طول}} 20$$
$$B_7=(3-7,2\times 7+5]=(-4,19] \xrightarrow{\text{طول}} 23$$
$$B_8=(3-8,2\times 8+5]=(-5,21] \xrightarrow{\text{طول}} 26$$
$$B_9=(3-9,2\times 9+5]=(-6,23] \xrightarrow{\text{طول}} 29$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$B_{10} = (3-10, 2\times10+5] = (-7, 25] \xrightarrow{\text{طول}} 32$

$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid (m \geq -1) \wedge \underbrace{(2^m \leq 1)}_{m\leq 0}\} = \{-1, 0\}$

$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid (m \geq -2) \wedge \underbrace{(2^m \leq 2)}_{m\leq 1}\} = \{-2, -1, 0, 1\}$

$A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid (m \geq -3) \wedge \underbrace{(2^m \leq 3)}_{m\leq 1}\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid (m \geq -4) \wedge \underbrace{(2^m \leq 4)}_{m\leq 2}\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$A_5 = \{-5, -4, ..., 2\}$

$A_6 = \{-6, -5, ..., 2\}$

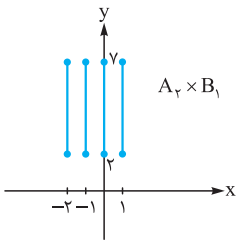
$A_7 = \{-7, -6, ..., 2\}$

$A_8 = \{-8, -7, ..., 3\}$

$A_9 = \{-9, -8, ..., 3\}$

$A_{10} = \{-10, -9, ..., 3\}$

گام دوم: حالا دقت کنید اگر طول بازهٔ B_i برابر k و تعداد اعضای مجموعهٔ A_n برابر t باشد، جمع طول پاره‌خط‌های نمودار $A_n \times B_i$ برابر kt می‌شود، برای مثال:



$\xrightarrow{\text{چهار پاره‌خط به طول ۵}} 4\times5 = 20$

گام سوم: حالا جمع طول پاره‌خط‌های نمودار $A_n \times B_i$ را با $f(A_n \times B_i)$ نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(A_1 \times B_1) = 2\times5 = 10 \\ f(A_2 \times B_1) = 4\times5 = 20 \\ \vdots \\ f(A_{10} \times B_1) = 14\times5 = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(A_1 \times B_2) = 2\times8 = 16 \\ f(A_2 \times B_2) = 4\times8 = 32 \\ \vdots \\ f(A_{10} \times B_2) = 14\times8 = 112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(A_1 \times B_3) = 2\times11 = 22 \\ f(A_2 \times B_3) = 4\times11 = 44 \\ \vdots \\ f(A_{10} \times B_3) = 14\times11 = 154 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(A_1 \times B_4) = 2\times14 = 28 \\ f(A_2 \times B_4) = 4\times14 = 56 \\ \vdots \\ f(A_{10} \times B_4) = 14\times14 = 196 \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$\begin{cases} f(A_1 \times B_5) = 2 \times 17 = 34 \\ f(A_2 \times B_5) = 4 \times 17 = 68 \\ \vdots \\ f(A_8 \times B_5) = 12 \times 17 = 204 \quad \checkmark \\ f(A_9 \times B_5) = 13 \times 17 = 221 \quad \checkmark \\ f(A_{10} \times B_5) = 14 \times 17 = 238 \quad \checkmark \end{cases}$$

به طور مشابه از $A_8 \times B_6$ تا $A_{10} \times B_6$ (یعنی ۳تا دیگه)

از $A_6 \times B_7$ تا $A_{10} \times B_7$ (یعنی ۵تا دیگه)

از $A_5 \times B_8$ تا $A_{10} \times B_8$ (یعنی ۶تا دیگه)

از $A_4 \times B_9$ تا $A_{10} \times B_9$ (یعنی ۷تا دیگه)

و از $A_4 \times B_{10}$ تا $A_{10} \times B_{10}$ (یعنی ۷تا دیگه) داریم، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $3+3+5+6+7+7=31$

بنابراین جواب برابر $\frac{31}{100} = 0/31$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۴

برای دو پیشامد A و B اگر $P(A'\cup B') = 0/79$ و $P(A-B)+P(B) = P(B)(1-P(A))$ باشد، آن‌گاه $P(A'|B)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ یا ۰/۵ ۲) ۰/۵ یا ۰/۸ ۳) ۰/۳ یا ۰/۷ ۴) ۰/۵ یا ۰/۷

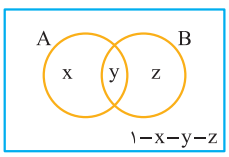
پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره بهترین راه، استفاده از نمودار ون است.

درس نامه قوانین احتمال

$$P(S) = 1$$
$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$P(A'\cap B') = 1 - P(A\cup B)$$
$$P(A'\cup B') = 1 - P(A\cap B)$$
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا یک نمودار ون رسم می‌کنیم و احتمال رخدادن هر قسمت را درون ناحیهٔ آن می‌نویسیم:



گام دوم: حالا داریم:

$$P(A-B)+P(B) = P(A'\cup B') = 0/79 \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{P(A-B)}_{x} + \underbrace{P(B)}_{y+z} = 0/79 \\ P(A'\cup B') = 0/79 \Rightarrow \underbrace{1-P(A\cap B)}_{y} = 0/79 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0/79 \\ 1-y = 0/79 \Rightarrow y = 0/21 \end{cases}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پس:

$$x+\underbrace{y}_{\circ/۲۱}+z=\circ/۷۹\Rightarrow x+z=\circ/۵۸\Rightarrow x=\circ/۵۸-z$$

گام سوم: سراغ تساوی دوم می‌رویم:

$$P(\underbrace{B\cap A'}_{B-A})=P(B)\big(۱-P(A)\big)\Rightarrow \underbrace{P(B-A)}_{z}=\underbrace{P(B)}_{y+z}\big(۱-\underbrace{P(A)}_{x+y}\big)$$

$$\Rightarrow z=(\underbrace{y}_{\circ/۲۱}+z)(۱-(x+\underbrace{y}_{\circ/۲۱}))\Rightarrow z=(\circ/۲۱+z)\big(۱-(x+\circ/۲۱)\big)$$

با جای‌گذاری $z-\circ/۵۸$ به جای x داریم:

$$z=(\circ/۲۱+z)\big(۱-(\circ/۵۸-z+\circ/۲۱)\big)\Rightarrow z=(\circ/۲۱+z)(\circ/۲۱+z)$$

$$z=\circ/\circ۴۴۱+\circ/۴۲z+z^۲$$

$$\Rightarrow z^۲-\circ/۵۸z+\circ/\circ۴۴۱=\circ\xrightarrow{\Delta=\circ/۱۶}\begin{cases}z=\dfrac{\circ/۵۸+\circ/۴}{۲}=\circ/۴۹\Rightarrow x=\circ/\circ۹\\ z=\dfrac{\circ/۵۸-\circ/۴}{۲}=\circ/\circ۹\Rightarrow x=\circ/۴۹\end{cases}$$

گام چهارم:

بنابراین:

$$P(A'|B)=\frac{P(\overbrace{A'\cap B}^{B-A})}{P(B)}=\frac{z}{y+z}=\begin{cases}\dfrac{\circ/۴۹}{\circ/۲۱+\circ/۴۹}=\dfrac{\circ/۴۹}{\circ/۷\circ}=\circ/۷\\ \text{یا}\\ \dfrac{\circ/\circ۹}{\circ/۲۱+\circ/\circ۹}=\dfrac{\circ/\circ۹}{\circ/۳\circ}=\circ/۳\end{cases}$$

تست و پاسخ ۲۵

مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ را به چند طریق می‌توان به سه مجموعه افراز کرد؟

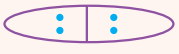
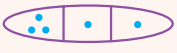
۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

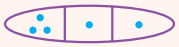
درس‌نامه روش پیداکردن تعداد افرازها

فرض کنید ۴ نفر را می‌خواهیم به دو گروه دو نفرهٔ A و B تقسیم کنیم. ابتدا به $\binom{۴}{۲}=۶$ حالت ۲ نفر از ۴ نفر را برای گروه A انتخاب می‌کنیم و دو نفر باقی‌مانده به گروه B می‌روند این ۶ حالت به صورت مقابل‌اند: (۴ نفر را با a,b,c,d نمایش می‌دهیم. واضح است که جایگشت افراد درون یک گروه اهمیتی ندارد!)

$$\underset{ab\ cd}{A\ B}\ /\ \underset{cd\ ab}{A\ B}\ /\ \underset{ac\ bd}{A\ B}\ /\ \underset{bd\ ac}{A\ B}/\ \underset{ad\ bc}{A\ B}\ /\ \underset{bc\ ad}{A\ B}$$

حالا فرض کنید می‌خواهیم این ۴ نفر را در دو گروه بدون اسم تقسیم‌بندی کنیم. در این‌جا برای مثال، دو حالت $\underset{ab\ cd}{A\ B}$ / $\underset{cd\ ab}{A\ B}$ دیگر یکسان می‌شوند چون اسم گروه‌ها دیگر اهمیتی ندارد و این کار را به ۳ حالت می‌توانیم انجام دهیم. به این کار افراز می‌گوییم، افراز یعنی تقسیم‌کردن تعدادی آدم، شیء یا ... در چند گروه به طوری که گروه‌ها اشتراک ندارند. ما برای راحتی کار افرازها را با نمایش می‌دهیم. برای مثال  یعنی افراز ۴ نفر در دو گروه دونفره یا  یعنی افراز ۵ نفر در یک گروه ۳نفره، و دو گروه یک‌نفره.

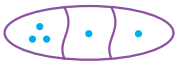
حالا تعداد افرازها را چطوری بشماریم؟

ابتدا به روش معمولی شروع به انتخاب کنید، برای مثال فرض کنید می‌خواهیم تعداد افرازها به صورت  را بشماریم که ابتدا $\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۳}$ می‌شود، حالا مثل جایگشت با تکرار، حاصل را بر گروه‌های با تعداد عضو یکسان تقسیم می‌کنیم، پس جواب $\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!}$ (۲! ← دو گروه یک‌نفره) می‌شود. یا به عنوان مثال آخر تعداد افرازها به صورت برابر با $\frac{\binom{۹}{۳}\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!\,۳!}$ می‌شود.

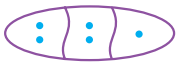
(۲! ← دو گروه ۳نفره، ۳! ← سه گروه یک‌نفره)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** مجموعهٔ A را به صورت‌های زیر می‌توان به سه مجموعه افراز کرد:



$$\frac{\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!}=\frac{10\times2\times1}{2}=10$$



$$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{2!}=\frac{10\times3\times1}{2}=15$$

گام دوم: بنابراین جواب برابر $10+15=25$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۶

اگر انحراف معیار تعدادی دادهٔ آماری برابر ۱/۵ باشد و همهٔ داده‌ها را سه برابر کنیم و سپس از هر کدام ۱ واحد کم کنیم، واریانس داده‌های جدید برابر کدام گزینه می‌شود؟

۱) ۴/۵
۲) ۶/۷۵
۳) ۱۳/۵
۴) ۲۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته اگر تمام داده‌ها را در a ضرب و با b جمع کنیم، تغییرات زیر ایجاد می‌شود:

	میانگین	میانه	دامنهٔ تغییرات	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
براساس داده‌های اولیه	$\bar{x}$	Q_2	R	σ	σ^2	$\frac{\sigma}{\bar{x}}$
براساس داده‌های جدید	$a\bar{x}+b$	aQ_2+b	$\lvert a\rvert R$	$\lvert a\rvert\sigma$	$a^2\sigma^2$	$\frac{a\sigma}{a\bar{x}+b}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** انحراف معیار داده‌ها برابر ۱/۵ است. پس واریانس داده‌های اولیه برابر است با:

$$\sigma_{\text{اولیه}}=1/5 \Rightarrow \sigma^2_{\text{اولیه}}=2/25$$

گام دوم: طبق نکتهٔ بالا، اگر داده‌ها را ۳ برابر کنیم، واریانس آن‌ها ۹ برابر می‌شود و کم‌کردن یک واحد تأثیری روی واریانس ندارد. پس واریانس جدید برابر است با:

$$\sigma^2_{\text{جدید}}=9\sigma^2_{\text{اولیه}}=9\times2/25=20/25$$

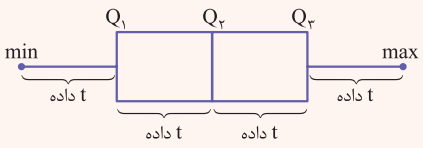
تست و پاسخ ۲۷

نمودار جعبه‌ای ۲۳ دادهٔ آماری را رسم کرده‌ایم. A_1, A_2, A_3, A_4 به‌ترتیب چهار دسته شامل داده‌های سمت چپ جعبه، داده‌های درون جعبه، داده‌های سمت راست جعبه و داده‌های روی جعبه هستند. برای این چهار دسته نمودار دایره‌ای رسم کرده‌ایم. θ_2 تقریباً چند درجه است؟

۱) ۱۸۸
۲) ۱۸۰
۳) ۱۷۲
۴) ۱۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه ۱) اگر n دادهٔ آماری متمایز داشته باشیم و $n=4t$ باشد، نمودار جعبه‌ای به شکل زیر است:

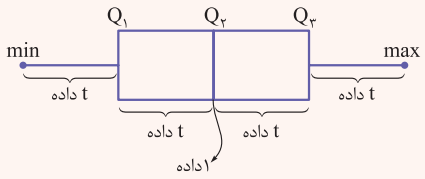


در این حالت، هیچ کدام از داده‌ها برابر هیچ‌کدام از چارک‌ها نیستند.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

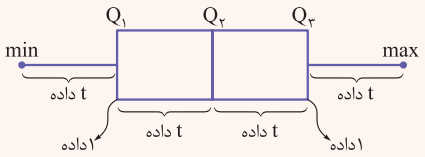
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

۲) $n = 4t + 1$ باشد، نمودار جعبه‌ای به شکل زیر است:



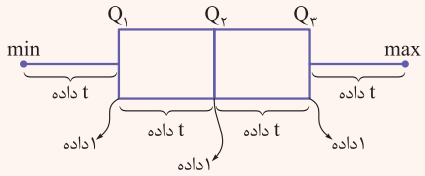
در این حالت، فقط چارک دوم (همان Q_2) برابر با یکی از داده‌ها است.

۳) $n = 4t + 2$ باشد، نمودار جعبه‌ای به شکل زیر است:



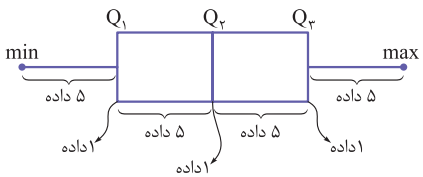
در این حالت فقط چارک اول و سوم (همان Q_1 و Q_3) برابر با داده‌ها هستند.

۴) $n = 4t + 3$ باشد، نمودار جعبه‌ای به شکل زیر است:



در این حالت هر سه چارک (Q_1, Q_2, Q_3) برابر با داده‌ها هستند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ۲۳ داده‌ٔ آماری داریم و از آن‌جایی که $4t + 3 = 4 \times 5 + 3 = 23$



است، نمودار جعبه‌ای این داده‌ها به شکل مقابل می‌شود:

گام دوم: حالا با توجه به نمودار جعبه‌ای رسم‌شده داریم:

$A_1 = 5$: داده‌های سمت چپ جعبه

$A_2 = 5 + 1 + 5 = 11$: داده‌های درون جعبه (دقت کنید Q_1 و Q_3 روی جعبه هستند نه درون آن.)

$A_3 = 5$: داده‌های سمت راست جعبه

$A_4 = 2$: داده‌های روی جعبه (فقط Q_1 و Q_3 روی جعبه هستند.)

نکته

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی دسته}}{\text{فراوانی کل}}$$

$$\text{زاویهٔ مرکزی} = \text{فراوانی نسبی} \times 360$$

گام سوم: جدول مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی این ۴ داده را رسم می‌کنیم و زاویهٔ مرکزی متناظر با هر دسته، در نمودار دایره‌ای را نیز محاسبه می‌کنیم:

دسته	A_1	A_2	A_3	A_4
فراوانی	۵	۱۱	۵	۲
فراوانی نسبی	$\frac{5}{23}$	$\frac{11}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{2}{23}$
زاویهٔ مرکزی	$\theta_1 \simeq 78/2$	$\theta_2 \simeq 172/1$	$\theta_3 \simeq 78/2$	$\theta_4 \simeq 31/3$

بنابراین θ_2 تقریباً برابر ۱۷۲ درجه است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۲۸

از یک جامعه، نمونهٔ ۱۱ و ۹ و ۸ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ گرفته شده است. اگر انحراف معیار جامعه، نصف انحراف معیار نمونه باشد، بازهٔ اطمینان بالای ۹۵ درصد برای میانگین این جامعه کدام است؟ ($\sqrt{۲۰} \simeq ۴/۵$)

۱) $(۶/۲۵ , ۷/۷۵)$ ۲) $(۶ , ۸)$ ۳) $(۵/۵ , ۸/۵)$ ۴) $(۵ , ۹)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه اگر از جامعه، نمونه‌ای به اندازهٔ n انتخاب کنیم به طوری که انحراف معیار جامعه برابر σ و میانگین اعضای نمونه برابر $\bar{x}$ باشد، در این صورت بازهٔ اطمینان بالای ۹۵٪ برای میانگین جامعه به شکل زیر می‌شود:

$$(\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}})$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** میانگین اعضای نمونه برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۴+۵+۵+۶+۷+۸+۸+۹+۱۱}{۹} = ۷$$

گام دوم: انحراف معیار اعضای نمونه و اعضای جامعه را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_{\text{نمونه}} = \sqrt{\frac{(۴-۷)^۲ + ۲(۵-۷)^۲ + (۶-۷)^۲ + (۷-۷)^۲ + ۲(۸-۷)^۲ + (۹-۷)^۲ + (۱۱-۷)^۲}{x}}$$

$$= \sqrt{۵} = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۲۰} = ۲/۲۵$$

طبق فرض سؤال، انحراف معیار جامعه، نصف انحراف معیار نمونه است، یعنی: $\frac{۱}{۲} \times ۲/۲۵$

گام سوم: طبق فرمول گفته‌شده در درس‌نامه داریم:

$$\text{بازهٔ اطمینان بالای ۹۵٪} = (\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}) = (۷ - \frac{۲/۲۵}{۳} , ۷ + \frac{۲/۲۵}{۳}) = (۶/۲۵ , ۷/۷۵)$$

هندسه (۲): صفحه‌های ۹ تا ۷۷، هندسه (۱): صفحه‌های ۹ تا ۶۹

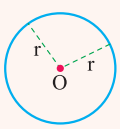
تست و پاسخ ۲۹

پاره‌خط $AB = ۲$ را در صفحه در نظر می‌گیریم. چند نقطه به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ از A وجود دارد که فاصلهٔ آن از B برابر با $۲\sqrt{۲}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

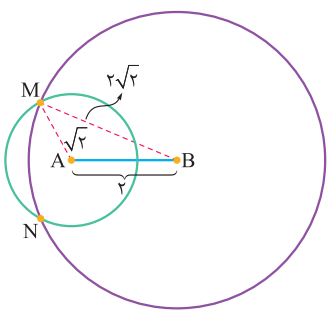
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه



نقاطی که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ r هستند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r قرار دارند.

پاسخ تشریحی با توجه به درس‌نامه، نقاطی که از A به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع $\sqrt{۲}$ و نقاطی که از B به فاصلهٔ $۲\sqrt{۲}$ هستند روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $۲\sqrt{۲}$ قرار دارند.



از آن‌جا که $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ داریم: $|۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲}| < ۲ < ۲\sqrt{۲} + \sqrt{۲}$

پس این دو دایره مانند شکل روبه‌رو در نقاط M و N مشترک‌اند که این دو نقطه به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ از A و $۲\sqrt{۲}$ از B قرار دارند.

یادآوری دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ زمانی متقاطع‌اند که $|R - R'| < OO' < R + R'$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۳۰

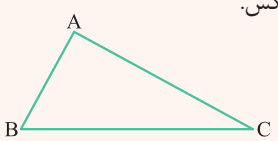
در مثلث ABC طول میانهٔ AM با ضلع AB برابر است، کدام گزاره صحیح است؟

۱) اگر $\hat{B}=30^\circ$، آن‌گاه $AC<AB$.
۲) اگر $\hat{C}=60^\circ$، آن‌گاه $BC>AB$.
۳) اگر $\hat{B}=60^\circ$، آن‌گاه $BC=2AB$.
۴) اگر $\hat{C}=30^\circ$، آن‌گاه $AC>2AB$.

پاسخ: گزینهٔ ۳

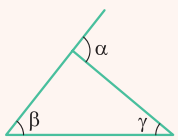
درس‌نامه

۱) در هر مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، همواره بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر است و برعکس.



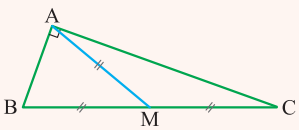
$$\hat{B}>\hat{C} \Leftrightarrow AC>AB$$

۲) در هر مثلث، هر زاویهٔ خارجی برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور است:



$$\alpha=\beta+\gamma$$

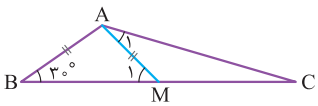
۳) در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است و برعکس یعنی اگر طول میانهٔ وارد بر یکی از اضلاع مثلثی نصف طول آن ضلع باشد، زاویهٔ روبه‌روی آن ضلع قائمه است.



$$\hat{A}=90^\circ \Leftrightarrow AM=\frac{1}{2}BC$$

پاسخ تشریحی با توجه به درس‌نامه گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم.

۱) نادرست است. طبق صورت سؤال $AB=AM$، پس مثلث ABM متساوی‌الساقین است و داریم:



$$\hat{B}=\hat{M}_1=30^\circ$$

از طرفی طبق قسمت (۲) درس‌نامه، $\hat{M}_1$ زاویهٔ خارجی برای $\overset{\triangle}{AMC}$ است؛ در نتیجه:

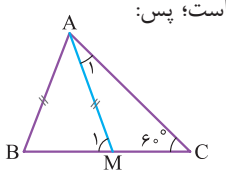
$$\hat{M}_1=\hat{A}_1+\hat{C} \Rightarrow \hat{C}<\hat{M}_1 \Rightarrow \hat{C}<30^\circ \Rightarrow \hat{C}<\hat{B}$$

بنابراین طبق قضیهٔ (۱) درس‌نامه، در مثلث ABC ضلع روبه‌روی زاویهٔ C (AB)، از ضلع روبه‌روی زاویهٔ B (AC) کوچک‌تر است:

$$AB<AC$$

۲) نادرست است.

طبق قضیهٔ (۲) درس‌نامه داریم: $\hat{M}_1=\hat{A}_1+60^\circ$. چون AB با AM برابر است و مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ متساوی‌الساقین است؛ پس:

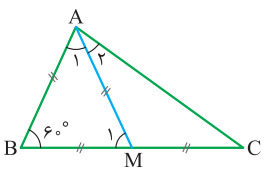


$$\hat{B}=\hat{M}_1=\hat{A}_1+60^\circ \xrightarrow{\overset{\triangle}{ABC}} \hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-((\hat{A}_1+60^\circ)+60^\circ)=60^\circ-\hat{A}_1$$

پس $\hat{A}$ کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث است و ضلع روبه‌روی آن کوچک‌ترین ضلع مثلث، یعنی:

$$BC<AB$$

۳) درست است. با توجه به شکل داریم:

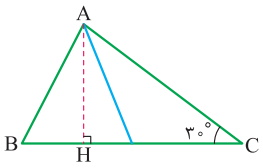


$$AB=AM \xrightarrow[\text{متساوی‌الساقین}]{\overset{\triangle}{ABM}} \hat{B}=\hat{M}_1=60^\circ \Rightarrow \hat{A}_1=60^\circ \Rightarrow \text{ABM متساوی‌الاضلاع است.}$$

$$\Rightarrow AB=AM=BM \xrightarrow{BM=\frac{BC}{2}} AB=\frac{BC}{2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴) نادرست است. در شکل زیر اگر ارتفاع AH را رسم کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم:



$$\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\xrightarrow{\hat{C}=۳۰^\circ}\frac{۱}{۲}=\frac{AH}{AC}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}AC \quad (۱)$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH می‌دانیم که وتر بزرگ‌ترین ضلع است:

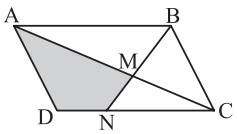
$$AH<AB \quad (۲)$$

پس:

$$(۱),(۲)\Rightarrow \frac{۱}{۲}AC<AB\Rightarrow AC<۲AB$$

تست و پاسخ ۳۱

در متوازی‌الاضلاع رسم‌شده، اگر مساحت دو مثلث AMB و CMN به ترتیب ۹ و ۴ باشد، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

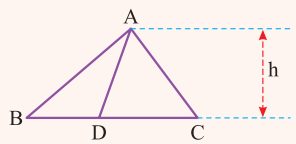
مشاوره با یک سؤال ترکیبی از نسبت مساحت مثلث‌های متشابه و نسبت مساحت مثلث‌های هم‌ارتفاع مواجهیم که از مدل‌های سؤال مورد علاقهٔ طراحان کنکور است.

خودت حل کنی بهتره دو مثلث AMB و CMN متشابه‌اند.

درس‌نامه

۱) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

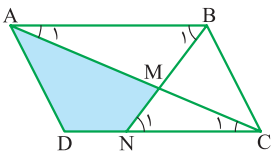
۲) اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابری باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع؛ است. مثلاً در شکل زیر داریم:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}\quad,\quad\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\frac{DC}{BC}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** مساحت دو مثلث ABM و MNC را در فرض سؤال داریم، کافی است از طریق نسبت تشابه ABM و MNC و نسبت مساحت مثلث‌های هم‌ارتفاع ABM و BMC، مساحت‌های BMC و ABCD را محاسبه کنیم تا مساحت ناحیهٔ رنگی مشخص شود.

گام دوم (محاسبهٔ نسبت تشابه): شکل صورت سؤال متوازی‌الاضلاع است، پس اضلاع روبه‌روی آن موازی‌اند، پس $AB\parallel NC$؛ بنابراین طبق قضیهٔ موازی و مورب می‌توانیم بنویسیم:



$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{C}_۱\\ \hat{B}_۱=\hat{N}_۱\end{cases}\xrightarrow{zz}\overset{\triangle}{AMB}\sim\overset{\triangle}{CMN}\Rightarrow\frac{AB}{NC}=\frac{AM}{MC}=\frac{BM}{MN}$$

از طرفی طبق مورد (۱) درس‌نامه، می‌دانیم نسبت مساحت‌های مثلث‌های متشابه مجذور نسبت تشابه است؛ پس:

$$\frac{AB}{NC}=\frac{AM}{MC}=\frac{BM}{MN}=\sqrt{\frac{S_{AMB}}{S_{MNC}}}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}$$

گام سوم (پیداکردن مثلث‌های هم‌ارتفاع): همان‌طور که در شکل بالا می‌بینیم، دو مثلث ABM و BMC در رأس B هم‌ارتفاع‌اند و نسبت قاعده‌های آن‌ها را هم در گام قبل به دست آوردیم؛ پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{BMC}}=\frac{AM}{MC}=\frac{۳}{۲}\quad(۱)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): می‌دانیم $S_{ABM}=۹$ و از رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{۹}{S_{BMC}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow S_{BMC}=۶\Rightarrow S_{ABC}=۹+۶=۱۵$$

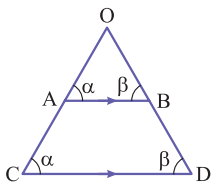
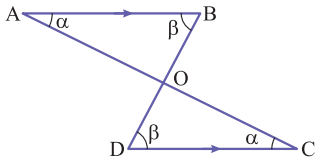
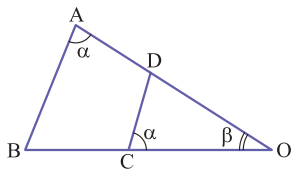
هر قطر در متوازی‌الاضلاع، آن را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند؛ پس:

$$S_{ADC}=S_{ABC}=۱۵$$

حالا می‌توانیم مساحت ناحیهٔ رنگی را به دست آوریم:

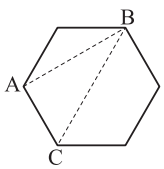
$$S_{AMND}=S_{ADC}-S_{MNC}=۱۵-۴=۱۱$$

نکته یک سری ساختار هندسی معروف داریم که وقتی آن‌ها را در شکلی می‌بینیم، باید در اولین گام تشابه را بنویسیم.
این ساختارها را در جدول زیر می‌بینید، در هر سه شکل، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند.

ساختار تالسی	ساختار پروانه‌ای	ساختار اشتراک در رأس
		

تست و پاسخ ۳۲

در شکل زیر، اگر مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{۳}$ باشد، طول ضلع شش‌ضلعی منتظم کدام است؟



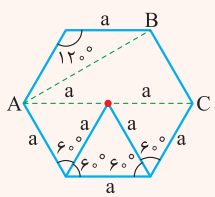
۱) ۳
۲) ۲
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

۱) زوایای داخلی هر شش‌ضلعی منتظم برابر ۱۲۰° هستند.

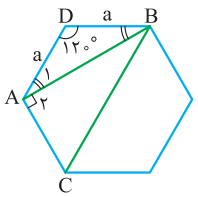
۲) اگر طول ضلع یک شش‌ضلعی منتظم برابر a باشد، آن‌گاه طول قطرهای کوچک و بزرگ این شش‌ضلعی برابر است با:



$$\text{قطر کوچک}=AB=a\sqrt{۳}$$

$$\text{قطر بزرگ}=AC=۲a$$

پاسخ تشریحی در شش‌ضلعی منتظم زیر، طول هر ضلع را a فرض می‌کنیم، مثلث ADB متساوی‌الساقین است و داریم:



$$\begin{cases}\hat{D}=۱۲۰^\circ\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}_۱=۳۰^\circ\\ \hat{A}=۱۲۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \hat{A}_۲=۹۰^\circ$$

پس ABC قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با:

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{۲}$$

از طرفی، طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌دانیم $AB=a\sqrt{۳}$؛ پس:

$$S_{ABC}=\frac{a\sqrt{۳}\times a}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۳۳

طول بزرگ‌ترین ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه a و اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ آن ۳۰° است. حجم شکل حاصل از دوران این مثلث، حول کوچک‌ترین ضلع آن، چند برابر πa^3 است؟

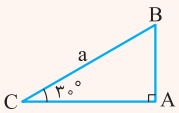
۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را برحسب a به دست آورید.

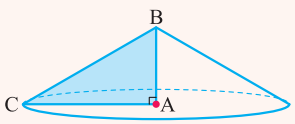
درس‌نامه

۱) مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویه ABC، داریم:



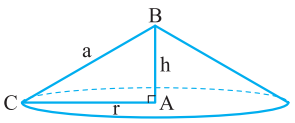
$AB = \frac{1}{2}a \ , \ AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

۲) از دوران مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن، یک مخروط قائمه به دست می‌آید.



۳) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

پاسخ تشریحی با توجه به آنچه در درس‌نامه گفتیم، یک مخروط قائم به ارتفاع $h = AB = \frac{1}{2}a$ و شعاع قاعدهٔ $r = AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ داریم که حجم آن برابر می‌شود با:



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{8}\pi a^3$$

تست و پاسخ ۳۴

مساحت مقطع یک استوانهٔ قائم با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد، دو برابر مساحت مقطع صفحه‌ای است که عمود بر ارتفاع، آن را قطع می‌کند. نسبت مساحت جانبی به مساحت کل استوانه کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\pi+1}$ ۲) $\frac{\pi}{\pi+2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{2}{\pi}$

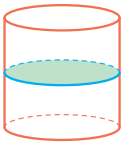
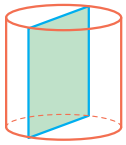
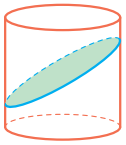
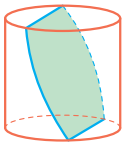
پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره باید انواع برش مقطع در شکل‌های مختلف فضایی و محاسبهٔ مساحت‌ها و حجم‌های آن‌ها را بلد باشید.

درس‌نامه

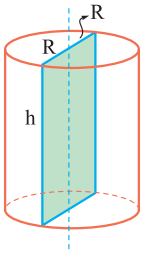
۱) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

۲) در جدول زیر، حالت‌های مختلف برش استوانهٔ قائم را می‌بینید.

نوع برش	برش افقی	برش قائم	برش مایل	
شکل فضایی				
مقطع	دایره	مستطیل	بیضی	قسمتی از یک بیضی

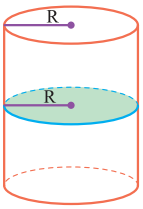
۳) مساحت جانبی استوانهٔ قائمی به شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع h برابر است با $2\pi Rh$ و مساحت کل آن برابر است با: $2\pi Rh + 2\pi R^2$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ مساحت مقطع استوانه با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد):** مقطع یک استوانهٔ قائم با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد، یک مستطیل است به ابعاد قطر قاعدهٔ استوانه و ارتفاع استوانه؛ پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۲Rh$$



گام دوم (محاسبهٔ مساحت مقطع استوانه با صفحهٔ عمود بر ارتفاع): مقطع استوانهٔ قائم با صفحهٔ عمود بر ارتفاع، یک دایره با شعاع قاعدهٔ استوانه است که مساحت آن برابر است با:

$$S' = \pi R^{۲}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حال سؤال گفته که $S = ۲S'$ است؛ پس:

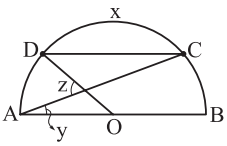
$$۲Rh = ۲\pi R^{۲} \Rightarrow h = \pi R$$

پس نسبت مساحت جانبی به مساحت کل استوانه برابر است با:

$$\frac{S_{\text{جانبی}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{۲\pi Rh}{۲\pi Rh + ۲\pi R^{۲}} = \frac{h}{h+R} = \frac{\pi R}{\pi R + R} = \frac{\pi}{\pi + ۱}$$

تست و پاسخ ۳۵

در شکل زیر، O وسط قطر نیم‌دایره و CD با AB موازی است. اگر اندازهٔ کمان CD برابر با x باشد، کدام گزینه حتماً درست است؟



۱) $x = y + z$

۲) $۲z = x + y$

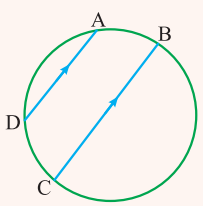
۳) $z = x - ۲y$

۴) $x + y + z = ۱۸۰^\circ$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

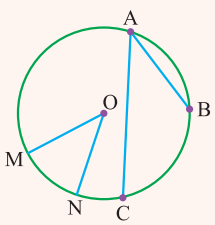
۱) کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در دایره با هم برابرند.



$$AD \parallel BC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$$

۲) اندازهٔ زاویهٔ محاطی در یک دایره برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن.

۳) اندازهٔ زاویهٔ مرکزی در یک دایره برابر است با اندازهٔ کمان مقابل به آن.

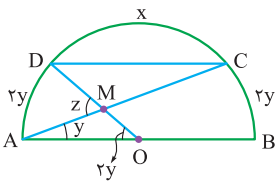


$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}, \hat{O} = \overset{\frown}{MN}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق درس‌نامهٔ بالا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} DC \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} \\ \text{زاویهٔ محاطی } \hat{A} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۲y \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = ۲y \Rightarrow \text{زاویهٔ مرکزی: } A\hat{O}D = ۲y$$

گام دوم: با توجه به این‌که $\overset{\frown}{DC} = x$، اگر مجموع سه کمان تشکیل‌دهندهٔ نیم‌دایره را برابر ۱۸۰° قرار دهیم، خواهیم داشت:



$$x + ۴y = ۱۸۰^\circ \quad (I)$$

هم‌چنین z، یک زاویهٔ خارجی مثلث AOM است؛ پس داریم:

$$z = y + ۲y \Rightarrow z = ۳y \Rightarrow z - ۳y = ۰ \quad (II)$$

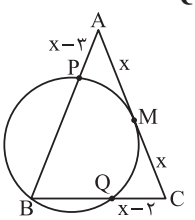
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: از جمع‌کردن طرفین معادله‌های (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l} x+۴y=۱۸۰^\circ \\ z-۳y=۰ \\ \hline x+y+z=۱۸۰^\circ \end{array}$$

تست و پاسخ ۳۶

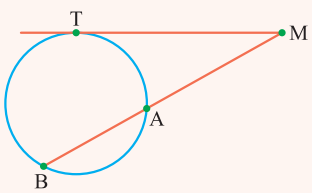
مطابق شکل، مثلث ABC متساوی‌الساقین (AB = AC) و دایرهٔ گذرنده از B در وسط AC بر آن مماس است. حاصل $\frac{BP}{BQ}$ کدام است؟



۱) ۱/۵
۲) ۱/۶
۳) ۱/۷
۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه رابطهٔ طولی قاطع و مماس در دایره



$$MT^۲ = MA \times MB$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل و رابطهٔ طولی قاطع و مماس در دایره، داریم:

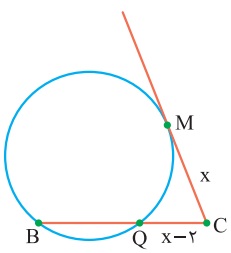
$$AM^۲ = AP \times AB \xrightarrow{AB=AC=۲x} x^۲ = (x-۳).۲x \Rightarrow x^۲ = ۲x^۲ - ۶x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ (غ‌ق‌ق)} \\ x = ۶ \checkmark \end{cases}$$

گام دوم: چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، داریم:

$$AB = AC = ۲x \Rightarrow BP + x - ۳ = ۲x \xrightarrow{x=۶} BP + ۳ = ۱۲ \Rightarrow BP = ۹$$

گام سوم: با نگاهی دوباره به شکل می‌توانیم رابطهٔ طولی قاطع و مماس دیگری را نیز در دایره پیدا کنیم.



$$CM^۲ = CQ \times BC \Rightarrow x^۲ = (x-۲) \times BC \xrightarrow{x=۶} ۴BC = ۳۶ \Rightarrow BC = ۹$$

$$BC = BQ + QC \Rightarrow ۹ = BQ + (x-۲) \Rightarrow ۹ = BQ + ۴ \Rightarrow BQ = ۵$$

گام چهارم: اکنون که مقادیر BQ و BP را به دست آوردیم به سراغ خواستهٔ مسئله می‌رویم:

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{۹}{۵} = ۱/۸$$

تست و پاسخ ۳۷

نقطهٔ A′، تصویر A در بازتاب نسبت به خط d است. اگر AA′ = ۶ و O نقطه‌ای روی خط d باشد به طوری که OA = ۵، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ A از خط OA′ کدام است؟

۱) ۳/۶ ۲) ۴ ۳) ۴/۴ ۴) ۴/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

۱) بازتاب یک تبدیل ایزومتری است، یعنی طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.

۲) یکی از تکنیک‌های به دست آوردن طول ارتفاع در مثلث، پیداکردن مساحت آن مثلث با ارتفاع و قاعده‌های مختلف و مساوی هم قراردادن آن‌هاست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

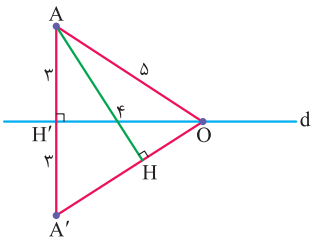
پاسخ تشریحی **گام اول:** چون نقطهٔ A' بازتاب A نسبت به خط d است و بازتاب نیز یک تبدیل ایزومتری است؛ پس $AH' = A'H'$ و چون $AA' = ۶$، داریم:

$$AH' = A'H' = ۳$$

هم‌چنین مثلث AOH' قائم‌الزاویه است و با توجه به این‌که $OA = ۵$، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH'، داریم:

$$OH' = ۴$$

گام دوم: با توجه به شکل، به دلیل ایزومتری‌بودن بازتاب داریم $OA = OA'$ و فاصلهٔ نقطهٔ A از خط OA' همان طول ارتفاع وارد بر قاعدهٔ OA' در مثلث متساوی‌الساقین AOA' است. اکنون با توجه به مورد (۲) درس‌نامه مساحت مثلث AOA' را با دو روش مختلف به دست می‌آوریم و با هم برابر قرار می‌دهیم:



$$\begin{cases} S_{AOA'} = \frac{OH' \times AA'}{۲} \Rightarrow S_{AOA'} = \frac{۴ \times ۶}{۲} = ۱۲ \\ S_{AOA'} = \frac{AH \times A'O}{۲} \Rightarrow S_{AOA'} = \frac{۵}{۲} \times AH \end{cases} \Rightarrow \frac{۵}{۲} \times AH = ۱۲ \Rightarrow AH = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

تست و پاسخ ۳۸

نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,۴)$ قرار دارد. در تجانس به مرکز A و نسبت $-\frac{۱}{۲}$ دایرهٔ C به دایرهٔ $C'(O',R')$ تبدیل می‌شود و در یک دوران پادساعتگرد به مرکز O و زاویهٔ ۶۰°، دایرهٔ C' به دایرهٔ $C''(O'',R')$ تبدیل می‌شود. طول مماس‌مشترک داخلی دو دایرهٔ C' و C'' کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

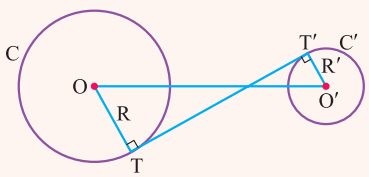
درس‌نامه

۱) دوران یک تبدیل ایزومتری است، یعنی طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.

۲) برای رسم دوران‌یافتهٔ دایرهٔ $C(O,R)$ در دوران به مرکز M و زاویهٔ θ، باید O را حول M به اندازهٔ θ دوران دهیم تا O' به دست آید، سپس به مرکز O' و شعاع R یک دایره رسم کنیم.

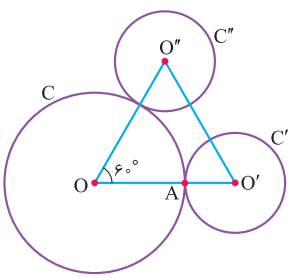
۳) برای رسم مجانس دایرهٔ $C(O,R)$ در تجانس به مرکز M و نسبت k، تصویر O را در تجانس به مرکز M و نسبت k به دست می‌آوریم و آن را O' می‌نامیم، سپس دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $|k|R$ رسم می‌کنیم.

۴) طول مماس‌مشترک داخلی دو دایرهٔ C و C' از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$TT' = \text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^۲ - (R+R')^۲}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** نقطهٔ A را روی دایرهٔ C در نظر می‌گیریم. نقطهٔ O با تجانسی به مرکز A و $k = -\frac{۱}{۲}$ بر روی نقطهٔ O' منطبق می‌شود و داریم:



$$OA' = \frac{۱}{۲}OA \Rightarrow O'A = ۲ = R'$$

اکنون دایرهٔ C' را به مرکز O' و شعاع ۲ رسم می‌کنیم.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: برای دوران دایرهٔ C' به اندازهٔ ۶۰ درجه به مرکز نقطهٔ O کافی است نقطهٔ O' را حول O به اندازهٔ ۶۰ درجه دوران دهیم تا مرکز دایرهٔ C'' یا همان O'' به دست آید. چون $\hat{O}=60^\circ$ و $OO'=OO''$؛ پس می‌توان نتیجه گرفت که مثلث $OO'O''$ متساوی‌الاضلاع است و خواهیم داشت:

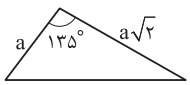
$$OO'=OO''=O'O''=OA+OA'=R+R'=6$$

گام سوم: با توجه به قسمت (۴) درس‌نامه، طول مماس‌مشترک داخلی دو دایرهٔ C' و C'' را به دست می‌آوریم:

$$\text{طول مماس‌مشترک داخلی}=\sqrt{(O'O'')^2-(R'+R'')^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

تست و پاسخ ۳۹

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث رسم‌شده، چند برابر a است؟

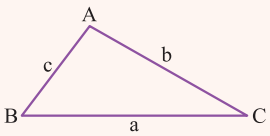


۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
۲) $\sqrt{2/5}$
۳) $\sqrt{5}$
۴) $\sqrt{10}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

۱) **قضیهٔ سینوس‌ها:** در مثلث ABC با اضلاع $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$ داریم:



$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

که R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

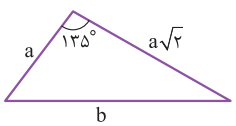
۲) **قضیهٔ کسینوس‌ها:** در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها:

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

۳) برای دو زاویهٔ α و β همواره داریم:

$$\alpha+\beta=180^\circ \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\sin\beta\\ \cos\alpha=-\cos\beta\end{cases}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** در ابتدا با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها، ضلع سوم مثلث (همان b) را برحسب a به دست می‌آوریم:



$$b^2=a^2+(a\sqrt{2})^2-2a\times a\sqrt{2}\times\cos 135^\circ \Rightarrow b^2=3a^2-2\sqrt{2}a^2\cos 135^\circ$$

$$\cos 135^\circ=-\sin 45^\circ \Rightarrow b^2=3a^2-2\sqrt{2}a^2\underbrace{(-\sin 45^\circ)}_{\frac{-\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b^2=3a^2+2a^2$$

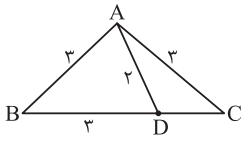
$$\Rightarrow b^2=5a^2 \Rightarrow b=\sqrt{5}a$$

گام دوم: با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها طول شعاع دایرهٔ محیطی را برحسب a به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{5}a}{\sin 135^\circ}=2R \Rightarrow \frac{\sqrt{5}a}{\underbrace{\sin 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=2R \Rightarrow \sqrt{5}a=\sqrt{2}R \Rightarrow R=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}a=\sqrt{\frac{5}{2}}a=\sqrt{2/5}\,a$$

تست و پاسخ ۴۰

با توجه به شکل، نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث ADC کدام است؟



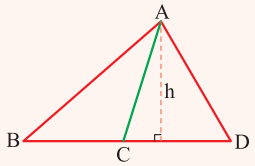
۱) ۲/۸
۲) ۳
۳) ۳/۲
۴) ۳/۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

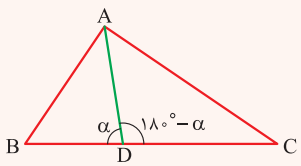
۱) اگر دو مثلث در یک ارتفاع مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع مشترک.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{CD}$$

۲) **قضیهٔ استوارت**: در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است.

رابطهٔ زیر همواره برقرار است:



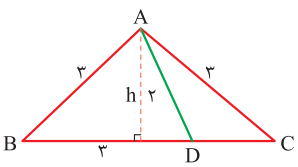
$$AB^2.DC + AC^2.BD = AD^2.BC + BD.DC.BC$$

حالت خاص: اگر $AB = AC$ باشد، داریم:

$$AB^2 - AD^2 = BD.DC$$

پاسخ تشریحی

گام اول: طبق مورد (۲) درس‌نامه، از حالت خاص رابطهٔ استوارت در مثلث متساوی‌الساقین ABC استفاده می‌کنیم، داریم:



$$AB^2 - AD^2 = BD.DC \Rightarrow ۹ - ۴ = ۳ \times DC \Rightarrow DC = \frac{۵}{۳} \Rightarrow BC = \frac{۵}{۳} + ۳ = \frac{۱۴}{۳}$$

گام دوم: طبق مورد (۱) درس‌نامه، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABC به ADC برابر با نسبت قاعده‌های آن‌هاست و خواهیم داشت:

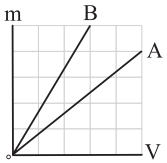
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{BC}{DC} = \frac{\frac{۱۴}{۳}}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۱۴}{۵} = ۲/۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک پایه: فیزیک (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۳۰، فیزیک (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۴۹

تست و پاسخ ۴۱

نمودار جرم برحسب حجم دو مایع A و B به شکل زیر است. جرم یکسانی از این دو مایع را مخلوط می‌کنیم. چگالی مخلوط حاصل چند برابر چگالی مایع A است؟ (حجم دو مایع در اثر مخلوط‌شدن تغییر نمی‌یابد.)

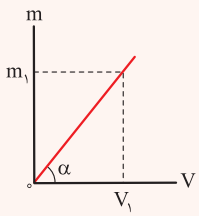


۱) $\frac{۲۹}{۱۸}$
۲) $\frac{۱۸}{۲۹}$
۳) $\frac{۳۷}{۵۰}$
۴) $\frac{۵۰}{۳۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره به کمک شیب نمودار، نسبت چگالی‌های دو مایع A و B را مشخص کنید، سپس به کمک رابطهٔ $\rho_{مخلوط}=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}$، چگالی مایع مخلوط را برحسب ρ_A به دست آورید.

درس‌نامه شیب نمودار جرم ـ حجم بیانگر چگالی جسم است.

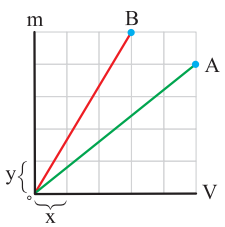


$$\Rightarrow \rho=\frac{m_۱}{V_۱}=\tan\alpha$$

اگر مایعی به جرم m_A و چگالی ρ_A را با مایعی به جرم m_B و چگالی ρ_B مخلوط کنیم، چگالی مخلوط آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}\xrightarrow{V=\frac{m}{\rho}}\rho_{مخلوط}=\frac{m_A+m_B}{\frac{m_A}{\rho_A}+\frac{m_B}{\rho_B}}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک نمودار جرم برحسب حجم، نسبت چگالی مایع B به چگالی مایع A را به دست می‌آوریم:



$$\rho_B=\frac{m_B}{V_B}=\frac{۵y}{۳x}=\frac{۵}{۳}(\frac{y}{x})$$

$$\rho_A=\frac{m_A}{V_A}=\frac{۴y}{۵x}=\frac{۴}{۵}(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_A}=\frac{\frac{۵}{۳}(\frac{y}{x})}{\frac{۴}{۵}(\frac{y}{x})}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ $\rho_{مخلوط}=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}$، چگالی مخلوط حاصل از دو مایع A و B را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}=\frac{m_A+m_B}{\frac{m_A}{\rho_A}+\frac{m_B}{\rho_B}}\xrightarrow{m_A=m_B=m}\rho_{مخلوط}=\frac{m+m}{\frac{m}{\rho_A}+\frac{m}{\rho_B}}$$

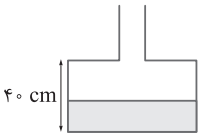
$$\Rightarrow \rho_{مخلوط}=\frac{۲m}{\frac{m\rho_B+m\rho_A}{\rho_A\rho_B}}=\frac{۲\rho_A\rho_B}{\rho_A+\rho_B}\xrightarrow{\rho_B=\frac{۲۵}{۱۲}\rho_A}\rho_{مخلوط}=\frac{۲\rho_A(\frac{۲۵}{۱۲}\rho_A)}{\rho_A+\frac{۲۵}{۱۲}\rho_A}$$

$$\Rightarrow \rho_{مخلوط}=\frac{\frac{۵۰}{۱۲}\rho_A^۲}{\frac{۳۷}{۱۲}\rho_A}=\frac{۵۰}{۳۷}\rho_A$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۲

مساحت مقطع قسمت پهن و قسمت باریک ظرف شکل زیر، به ترتیب $50\,cm^2$ و $25\,cm^2$ است و درون آن $1\,kg$ آب ریخته‌ایم. اگر به این ظرف $1/6\,kg$ روغن اضافه شود، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال تغییر می‌کند؟ ($\rho_{آب}=0/8\,g/cm^3$ و $\rho_{روغن}=0/8\rho_{آب}$ و $g=10\,N/kg$)

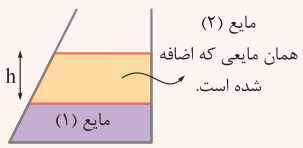


۱) $2/4$
۲) $3/2$
۳) $3/6$
۴) $4/8$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره ابتدا با استفاده از حجم آب، ارتفاع آب درون ظرف را به دست آورید، سپس با استفاده از رابطهٔ $\rho=\frac{m}{V}$، حجمی که توسط روغن در ظرف اشغال می‌شود و ارتفاع روغن اضافه‌شده را محاسبه کرده و فشار ناشی از روغن را به دست آورید.

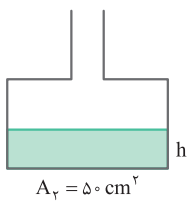
درس نامه طبق اصل پاسکال، با اضافه کردن یک مایع به درون ظرف، فشار در تمام نقاط زیر آن به مقدار یکسانی افزایش می‌یابد. این افزایش فشار از رابطهٔ $\Delta P=\rho_{مایع}gh_{مایع}$ به دست می‌آید.



$$\Delta P=\rho_2 gh$$

معمولاً در حل این نوع سؤالات، چالش اصلی ما یافتن ارتفاع مایع اضافه شده است.

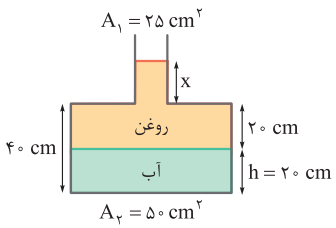
پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که در ظرف $1000\,g$ آب ریخته شده است، ارتفاع آب (h) در این حالت را به دست می‌آوریم:



$$V_{آب}=\frac{m_{آب}}{\rho_{آب}}=\frac{1000}{1}=1000\,cm^3$$

$$V_{آب}=A_2\times h \Rightarrow 1000=50\times h \Rightarrow h=20\,cm$$

گام دوم: حجم روغن و سپس ارتفاع روغن درون ظرف را به دست می‌آوریم:



$$V_{روغن}=\frac{m_{روغن}}{\rho_{روغن}}=\frac{1600}{0/8}=2000\,cm^3$$

$$V_{روغن}=A_1x+A_2(20) \Rightarrow 2000=25(x)+50(20) \Rightarrow 1000=25x \Rightarrow x=40\,cm$$

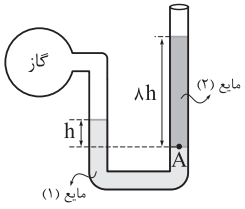
بنابراین ارتفاع روغن در ظرف، $60\,cm\,(=20+40)$ است.

گام سوم: از آن‌جا که سؤال، تغییرات فشار را پس از اضافه‌کردن روغن خواسته است، کافی است فشار ناشی از روغن را به دست آوریم:

$$\Delta P=P_{روغن}=\rho_{روغن}gh_{روغن}=0/8\times10^3\times10\times0/6=4/8\,kPa$$

تست و پاسخ ۴۳

در شکل زیر، چگالی مایع (۱)، ۴ برابر چگالی مایع (۲) است. اگر فشار گاز محبوس در مخزن، ۲۰ درصد بیشتر از فشار هوا باشد، فشار پیمانه‌ای نقطهٔ A چند برابر فشار هوا است؟



۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره یکی از سؤالات رایج در بحث فشار، لوله‌های U شکل است. در این سؤال‌ها باید به سراغ نقاط هم‌تراز در یک مایع برویم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

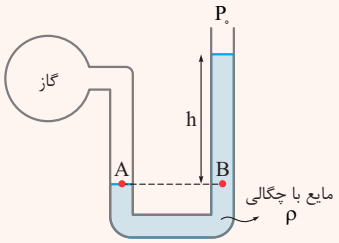
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

خودت حل کنی بهتره نقطه‌ای هم‌تراز با نقطهٔ A را بیابید و با نوشتن برابری فشار برای این نقطه و نقطهٔ A، رابطه‌ای بین فشار هوا و چگالی مایع (۲) مشخص کنید.

فشار پیمانه‌ای را در نقطهٔ A به دست آورده و نسبت آن با فشار هوا در مرحلهٔ قبلی را محاسبه کنید.

درس نامه مانومتر وسیله‌ای برای اندازه‌گیری فشار گاز مخزن‌ها است. یک شاخهٔ لولهٔ U‌شکل به مخزن گاز بسته می‌شود و معمولاً شاخهٔ دیگر با هوای آزاد در ارتباط است.

برای حل این سؤالات، مانند شکل زیر، از هم‌ترازبودن نقاطی که در یک مایع هستند استفاده می‌کنیم.

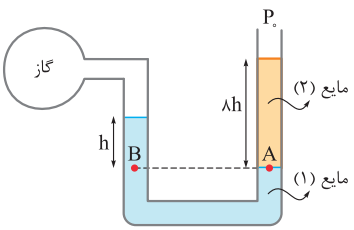


$$P_A = P_B$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 + \rho gh$$

$$\Rightarrow \underbrace{P_{\text{گاز}} - P_0}_{\text{فشار پیمانه‌ای گاز}} = \rho gh$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو نقطهٔ A و B در یک مایع و در یک تراز قرار دارند، بنابراین فشار در این دو نقطه برابر است.



$$P_A = P_B$$

$$\Rightarrow P_0 + \rho_2 g(8h) = P_{\text{گاز}} + \rho_1 gh$$

$$\xrightarrow[P_{\text{گاز}}=1/2P_0]{\rho_1=4\rho_2} P_0 + 8\rho_2 gh = 1/2P_0 + 4\rho_2 gh \Rightarrow 4\rho_2 gh = 0/2P_0 \Rightarrow 20\rho_2 gh = P_0$$

گام دوم: فشار پیمانه‌ای را در نقطهٔ A به دست می‌آوریم:

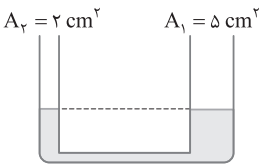
$$P_A = P_0 + \rho_2 g(8h) \Rightarrow \underbrace{P_A - P_0}_{\text{فشار پیمانه‌ای در نقطهٔ A}} = 8\rho_2 gh$$

گام سوم: نسبت فشار پیمانه‌ای نقطهٔ A را به فشار هوا به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_{\text{A پیمانه‌ای}}}{P_0} = \frac{8\rho_2 gh}{20\rho_2 gh} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

تست و پاسخ ۴۴

مساحت مقطع شاخه‌های سمت راست و چپ لولهٔ U‌شکل زیر، به ترتیب $5\,cm^2$ و $2\,cm^2$ است. در لوله مقداری جیوه به حال تعادل قرار دارد. اگر در شاخهٔ سمت راست $170\,g$ آب بریزیم، اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ (چگالی جیوه $13/6\,g/cm^3$ است.)



۱) ۵
۲) ۲/۵
۳) ۲
۴) ۱

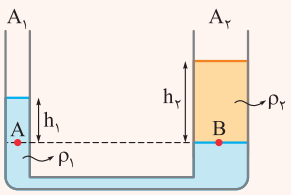
پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا وضعیت نهایی آب و جیوه را پس از اضافه‌کردن آب به صورت کیفی در شکل مشخص کنید، سپس به کمک نقاط هم‌تراز در یک مایع، اختلاف سطح جیوه در دو طرف را به دست آورید.

درس نامه

شکل مقابل دو مایع مخلوط‌نشدنی را نمایش می‌دهد که به تعادل رسیده‌اند.

مایعی که چگالی‌اش بیشتر است، در قسمت پایین لوله قرار می‌گیرد.



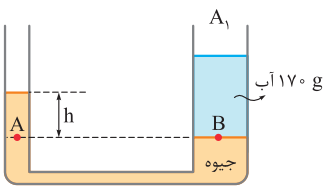
$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 gh_1 = P_0 + \rho_2 gh_2 \Rightarrow \rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

با توجه به این‌که معمولاً در لوله‌های U‌شکل، سطح مقطع لوله در یک طرف تغییر نمی‌کند، برای محاسبهٔ فشار می‌توانیم از رابطهٔ $P=\frac{mg}{A}$ هم استفاده کنیم؛ مثلاً در شکل بالا برای محاسبه P_B می‌توان نوشت:

$$P_B = P_\circ + \frac{m_{(2)\text{مایع}}g}{A_2}$$

پاسخ تشریحی با اضافه‌کردن ۱۷۰ گرم آب به شاخهٔ سمت راست، جیوه در شاخهٔ سمت راست پایین می‌آید و به اندازهٔ همان حجم، جیوه در شاخهٔ سمت چپ بالا می‌رود. شکل مقابل وضعیت نهایی آب و جیوه را نشان می‌دهد.



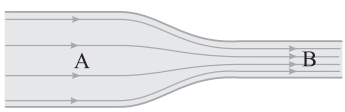
فشار در نقاط هم‌تراز A و B با هم برابرند:

$$P_A = P_B \Rightarrow \cancel{P_\circ} + \rho_{\text{جیوه}}gh = \cancel{P_\circ} + \frac{mg}{A_1} \Rightarrow \rho_{\text{جیوه}}h = \frac{m}{A_1} \Rightarrow ۱۳/۶\times۱۰^{۳}\times h = \frac{۱۷۰\times۱۰^{-۳}}{۵\times۱۰^{-۴}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{۱۷۰\times۱۰^{-۳}}{۵\times۱۰^{-۴}\times۱۳/۶\times۱۰^{۳}} = \frac{۱۷\times۱۰^{-۲}}{۶۸\times۱۰^{-۱}} = \frac{۱}{۴۰}\,m \Rightarrow h = \frac{۱۰۰}{۴۰}\,cm = ۲/۵\,cm$$

تست و پاسخ ۴۵

در لولهٔ افقی شکل زیر که از دو بخش A و B تشکیل شده، جریان لایه‌ای و پایای آب برقرار است. اگر قطر مقطع بخش A، ۲ برابر قطر مقطع بخش B باشد، کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ تندی آب (v) و فشار آن (P) در دو بخش A و B درست است؟



الف) $v_B = ۲v_A$

ب) $v_B = ۴v_A$

پ) $P_B > P_A$

ت) $P_A > P_B$

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره با استفاده از معادلهٔ پیوستگی $(A_Av_A = A_Bv_B)$ رابطهٔ بین تندی‌ها را در قسمت‌های A و B مشخص کنید. سپس به کمک اصل برنولی فشار در نقاط A و B را مقایسه کنید.

درس‌نامه

پیوستگی: اگر شاره‌ای با جریان لایه‌ای در لوله‌ای با دو سطح مقطع متفاوت حرکت کند، آهنگ شارش حجمی شاره، در طول لوله مقداری ثابت دارد.

$$A_۱ \times v_۱ = A_۲ \times v_۲$$

اصل برنولی: در یک شارهٔ در حال حرکت، با افزایش تندی، فشار داخل شاره کاهش می‌یابد. به کمک معادلهٔ پیوستگی می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر شاره‌ای وارد قسمت باریک‌تر شود، تندی آن افزایش می‌یابد و فشار آن کم‌تر می‌شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک معادلهٔ پیوستگی، رابطهٔ بین تندی در بخش‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A_Av_A = A_Bv_B \Rightarrow r_A^{۲}\times v_A = r_B^{۲}\times v_B \xrightarrow{r_A = ۲r_B} ۴v_A = v_B$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

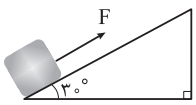
گام دوم: طبق اصل برنولی، با افزایش تندی شارهٔ در حال حرکت، فشار آن کاهش می‌یابد.

$$v_B > v_A \xrightarrow{\text{اصل برنولی}} P_B < P_A$$

بنابراین موارد «ب» و «ت»، درست هستند.

تست و پاسخ ۴۶

در شکل زیر، به جسم ساکنی به جرم $2\,kg$، نیروی ثابت $F = 20\,N$، موازی با سطح شیب‌دار وارد می‌شود و جسم را تا بالای سطح شیب‌دار جابه‌جا می‌کند. اگر کار انجام‌شده توسط نیروی F برابر با $72\,J$ باشد، تندی جسم در بالای سطح شیب‌دار به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟ ($g = 10\,N/kg$ و اصطکاک و مقاومت هوا، ناچیز است.)



۱) ۳
۲) ۶
۳) $3\sqrt{2}$
۴) $6\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطهٔ $W_F = Fd\cos\theta$، مسافتی را که جسم تا رسیدن به بالاترین نقطه پیموده است به دست آورید، سپس به کمک زاویهٔ 30°، تغییر ارتفاع جسم را به دست آورید.

در نهایت با به کار بردن قضیهٔ کار و انرژی جنبشی $(W_t = \Delta K)$، تندی جسم در بالای سطح شیب‌دار را به دست آورید.

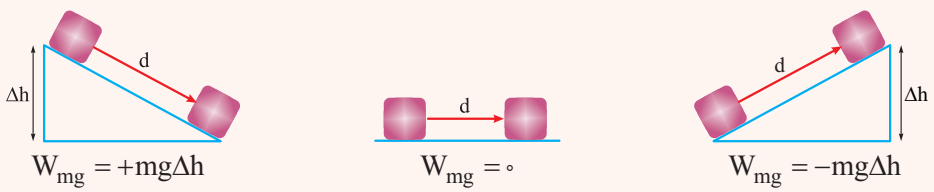
درس‌نامه

۱) کار نیروی ثابت $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$ از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$W_F = Fd\cos\theta$$

W_F = کار نیروی F (J) F = اندازهٔ نیرو (N) d = اندازهٔ جابه‌جایی (m) θ = زاویهٔ بین $\vec{F}$ و $\vec{d}$

۲) برای محاسبهٔ کار نیروی وزن از رابطهٔ $W_{mg} = \pm mg\Delta h$ استفاده می‌کنیم. برای محاسبهٔ کار نیروی وزن در جابه‌جایی یک جسم در طول یک مسیر، تنها تغییرات ارتفاع (جابه‌جایی در راستای نیروی وزن) مهم است. به طوری که اگر جابه‌جایی قائم جسم رو به پایین باشد، کار نیروی وزن مثبت و اگر رو به بالا باشد، کار نیروی وزن منفی است.

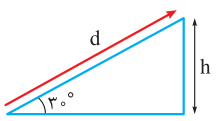


۳) قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است. چه مسیر آن مستقیم باشد و چه نباشد.

$$W_t = K_2 - K_1$$

W_t = کار کل (کار برایند نیروها) (J) K_1 = انرژی جنبشی در وضعیت (۱) (J) K_2 = انرژی جنبشی در وضعیت (۲) (J)

پاسخ تشریحی **گام اول:** کار انجام‌شده توسط نیروی F برابر $72\,J$ است. مسافت طی‌شده تا رسیدن به بالای سطح شیب‌دار را به دست می‌آوریم:



$$W_F = Fd\cos\theta \Rightarrow 72 = 20 \times d \times \cos 0^\circ \Rightarrow d = \frac{72}{20} = 3/6\,m$$

حال به کمک زاویهٔ 30°، تغییرات ارتفاع جسم را در این جابه‌جایی به دست می‌آوریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow 0/5 = \frac{h}{3/6} \Rightarrow h = 1/8\,m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی برای محاسبهٔ تندی در بالای سطح شیب‌دار استفاده می‌کنیم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_F = \Delta K$$

$$\Rightarrow -mgh + ۷۲ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow{v_۱=۰} -۲(۱۰)(۱/۸) + ۷۲ = \frac{۱}{۲}(۲)(v_۲^۲)$$

$$\Rightarrow -۳۶ + ۷۲ = v_۲^۲ \Rightarrow ۳۶ = v_۲^۲ \Rightarrow v_۲ = ۶\ m/s$$

تست و پاسخ ۴۷

یک پمپ با توان مصرفی ۱kW، در هر دقیقه، ۶۰۰kg آب را از چاهی به عمق ۵m، تا ارتفاع ۱ متری از سطح زمین بالا آورده و آن را با تندی ۴m/s پرتاب می‌کند. بازده این پمپ چند درصد است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$)

۱) ۵۸ ۲) ۶۶ ۳) ۶۸ ۴) ۷۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره به کمک قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار انجام‌شده توسط پمپ را به دست آورید، سپس توان خروجی پمپ را با استفاده از رابطهٔ $P = \frac{W}{t}$ محاسبه کنید و در نهایت بازده پمپ را با رابطهٔ $Ra = \frac{P_{خروجی}}{P_{ورودی}} \times ۱۰۰$ به دست آورید.

درس نامه

به نسبت کار مفید یک سیستم به کار ورودی، بازده می‌گوییم که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Ra = \frac{P_{خروجی}}{P_{ورودی}} \times ۱۰۰ \quad \text{یا} \quad Ra = \frac{E_{خروجی}}{E_{ورودی}} \times ۱۰۰$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از رابطهٔ $W_t = \Delta K$، کار انجام‌شده توسط پمپ را به دست می‌آوریم:

$$W_{پمپ} + W_{وزن} = \Delta K$$

$$\Rightarrow W_{پمپ} - mg\Delta h = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

توجه کنید که آب از عمق ۵m به ارتفاع ۱متری سطح زمین آمده است و تغییرات ارتفاع آن ۶m است.

$$W_{پمپ} - ۶۰۰ \times ۱۰ \times ۶ = \frac{۱}{۲}(۶۰۰)(۴^۲ - ۰^۲)$$

$$\Rightarrow W_{پمپ} - ۳۶۰۰۰ = ۴۸۰۰ \Rightarrow W_{پمپ} = ۴۰۸۰۰\ J$$

گام دوم: توان خروجی پمپ را به دست می‌آوریم:

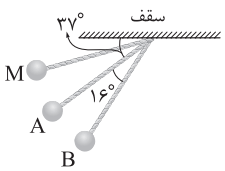
$$P_{خروجی} = \frac{W}{t} = \frac{۴۰۸۰۰}{۶۰} = ۶۸۰\ W$$

گام سوم: بازده پمپ را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{خروجی}}{P_{ورودی}} \times ۱۰۰ = \frac{۶۸۰}{۱۰۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۶۸$$

تست و پاسخ ۴۸

در شکل زیر، آونگی به طول ۱/۵ m از نقطهٔ M رها می‌شود. اگر اختلاف تندی گلولهٔ آونگ در دو نقطهٔ A و B برابر با ۱ m/s باشد، تندی گلوله در نقطهٔ A چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$، $\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$ و اتلاف انرژی مکانیکی ناچیز است.)



۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

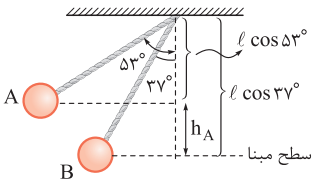
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

خودت حل کنی بهتره تغییر ارتفاع گلولهٔ آونگ در جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B را به دست آورید (برای محاسبهٔ تغییر ارتفاع از طول آونگ و زاویه‌ای که آونگ با خط قائم می‌سازد استفاده کنید)، سپس تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی را به کمک رابطهٔ $\Delta U = mg\Delta h$ محاسبه کنید تا در نهایت با به کار بردن رابطهٔ $\Delta U + \Delta K = 0$ تندی در نقطهٔ A را محاسبه کنید.

درس‌نامه در یک سامانه که با محیط بیرون تبادل انرژی ندارد، انرژی مکانیکی (E) مقداری ثابت است، بنابراین داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow 0 = \underbrace{(U_2 - U_1)}_{\Delta U} + \underbrace{(K_2 - K_1)}_{\Delta K} \Rightarrow \Delta U + \Delta K = 0$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی را به دست می‌آوریم:



$$h_A = \ell\cos 37^\circ - \ell\cos 53^\circ \Rightarrow h_A = \ell(\cos 37^\circ - \cos 53^\circ)$$
$$\Rightarrow h_A = \ell(0/8 - 0/6) = 1/5(0/2) = 0/3\,m\,,\ h_B = 0$$
$$\Delta U_{AB} = mgh_B - mgh_A = 0 - m(10)(0/3) = -3\,m$$

گام دوم: از آن‌جا که اتلاف انرژی مکانیکی نداریم، رابطهٔ $\Delta U + \Delta K = 0$ برقرار است.

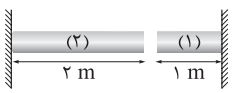
$$\Delta U + \Delta K = 0 \Rightarrow -3m + \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = 3m \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = 6$$

تندی گلوله در نقطهٔ B، $1\ m/s$ بیشتر از تندی گلوله در نقطهٔ A است، بنابراین داریم:

$$(v_A + 1)^2 - v_A^2 = 6 \Rightarrow v_A^2 + 2v_A + 1 - v_A^2 = 6$$
$$\Rightarrow 2v_A = 5 \Rightarrow v_A = 2/5\ m/s$$

تست و پاسخ ۴۹

در شکل زیر، دو میلهٔ فلزی (۱) و (۲) در دمای $20^\circ C$ روبه‌روی یکدیگر قرار دارند. اگر در این دما فاصلهٔ بین دو میله $0/2\ cm$ باشد، در چه دمایی برحسب درجهٔ فارنهایت دو میله به هم می‌رسند؟ (ضریب انبساط طولی میله‌های (۱) و (۲) به ترتیب $\alpha_1 = 10^{-5}\frac{1}{K}$ و $\alpha_2 = 2\times10^{-5}\frac{1}{K}$ است.)



۱) ۴۰
۲) ۶۰
۳) ۱۰۸
۴) ۱۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره تغییرات طول میلهٔ (۱) و میلهٔ (۲) را با استفاده از رابطهٔ $\Delta L = \alpha L_0 \Delta\theta$ به دست آورید و مجموع تغییر طول دو میله را برابر با عدد $0/2\ cm$ قرار دهید تا تغییرات دما به دست آید.

توجه کنید در نهایت به کمک رابطهٔ $F = \frac{9}{5}\theta + 32$، دما را برحسب درجهٔ فارنهایت محاسبه کنید.

درس‌نامه

اگر دمای میله‌ای به طول L_0 را به اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر دهیم، طول میله به اندازهٔ ΔL تغییر می‌کند. تغییر طول از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta\theta$$

α ضریب انبساط طولی است که یکای آن $\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ C}$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** اگر مجموع تغییرات طول میلهٔ (۱) و میلهٔ (۲) برابر $0/2\ cm$ شود، دو میله به یکدیگر می‌رسند.

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0/2\ cm$$
$$\Rightarrow \alpha_1(L_0)_1\Delta\theta + \alpha_2(L_0)_2\Delta\theta = 0/2\ cm \Rightarrow 10^{-5}\times100\times\Delta\theta + 2\times10^{-5}\times200\times\Delta\theta = 0/2$$
$$\Rightarrow \Delta\theta(10^{-3} + 4\times10^{-3}) = 0/2 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{0/2}{5\times10^{-3}} = \frac{0/2\times10^{+3}}{5} = \frac{200}{5} = 40^\circ C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

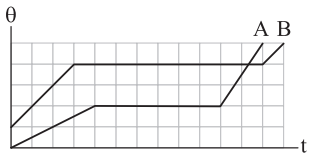
گام دوم: دمای ثانویه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow 40 = \theta_2 - 20 \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ C$$

$$F_2 = \frac{9}{5}\theta_2 + 32 \xrightarrow{\theta_2 = 60^\circ C} F_2 = \frac{9}{5}(60) + 32 = 140^\circ F$$

تست و پاسخ ۵۰

نمودار دما برحسب زمان برای دو جسم جامد A و B که با آهنگ ثابت و یکسانی گرما دریافت می‌کنند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ گرمای نهان ویژهٔ ذوب دو جسم (L_F) و ظرفیت گرمایی آن‌ها در حالت جامد (C) الزاماً درست است؟



الف) $(L_F)_A = \frac{3}{2}(L_F)_B$

ب) $(L_F)_A = \frac{2}{3}(L_F)_B$

پ) $C_A = 2C_B$

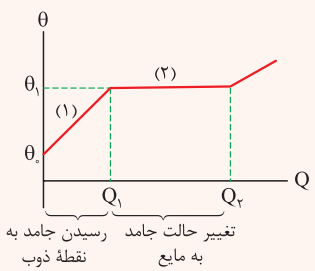
ت) $C_B = 2C_A$

۱) الف و ت ۲) ب و پ ۳) پ ۴) ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره در قسمت اول نمودار، به کمک رابطهٔ $Q = C\Delta\theta$ و رابطهٔ $Q = Pt$ به طور هم‌زمان، ظرفیت گرمایی دو جسم را به دست آورید و مقایسه کنید. سپس در قسمتی که نمودار به صورت افقی است، دو رابطهٔ $Q = mL_F$ و $Q = Pt$ را به طور هم‌زمان به کار ببرید تا نسبت L_F دو جسم را مشخص کنید.

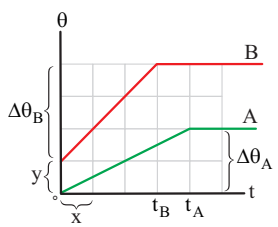
درس نامه نمودار مقابل، تغییرات دما برحسب گرما را نشان می‌دهد. ظرفیت گرمایی در حالت جامد (C) و گرمای نهان ویژهٔ ذوب (L_F) به صورت زیر قابل محاسبه هستند.



(۱) قسمت $\Rightarrow Q_1 - 0 = C(\theta_1 - \theta_0) \Rightarrow Q_1 = C(\theta_1 - \theta_0)$

(۲) قسمت $\Rightarrow Q_2 - Q_1 = mL_F$

پاسخ تشریحی **گام اول:** هر دو جسم A و B با آهنگ ثابت و یکسانی گرما دریافت کرده‌اند (آن را P فرض کرده‌ایم). به کمک رابطهٔ $Q = C\Delta\theta$، ظرفیت گرمایی دو جسم را در حالت جامد به دست می‌آوریم و مقایسه می‌کنیم:



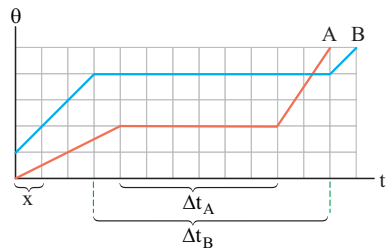
$$Q_A = C_A\Delta\theta_A \Rightarrow P \times t_A = C_A\Delta\theta_A \Rightarrow P \times 4x = C_A \times 2y \Rightarrow C_A = \frac{2Px}{y}$$

$$Q_B = C_B\Delta\theta_B \Rightarrow P \times t_B = C_B\Delta\theta_B \Rightarrow P \times 3x = C_B \times 3y \Rightarrow C_B = \frac{Px}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{C_A}{C_B} = \frac{\frac{2Px}{y}}{\frac{Px}{y}} = 2 \Rightarrow C_A = 2C_B$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: گرمای نهان ذوب (L_F) دو جسم را به کمک رابطهٔ $Q = mL_F$ به دست می‌آوریم:



$$Q_A = m_A(L_F)_A \Rightarrow P\times\Delta t_A = m_A(L_F)_A \Rightarrow P\times 6x = m_A\times(L_F)_A \Rightarrow (L_F)_A = \frac{6Px}{m_A}$$

$$Q_B = m_B(L_F)_B \Rightarrow P\times\Delta t_B = m_B(L_F)_B \Rightarrow P\times 9x = m_B(L_F)_B \Rightarrow (L_F)_B = \frac{9Px}{m_B}$$

با توجه به این‌که دربارهٔ نسبت جرم‌های A و B اطلاعاتی نداریم، نمی‌توانیم رابطه‌ای بین $(L_F)_A$ و $(L_F)_B$ بیان کنیم.

تست و پاسخ ۵۱

درون ظرفی مسی به جرم m، یک قطعه یخ به جرم m و دمای $0^\circ C$ قرار دارد. اگر به مجموعه گرما دهیم، تا لحظه‌ای که آب شروع به جوشیدن می‌کند، چند درصد از گرما به ظرف داده شده است؟ ($c_{مس} = 0/2 \frac{J}{g.K} = 5c_{آب}$، $L_F = 336\ J/g$، فشار هوای محیط $1atm$ و تبخیر سطحی ناچیز است.)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره گرمایی که یخ صفر درجه نیاز دارد تا به آب $100^\circ C$ تبدیل شود را به دست آورید، سپس گرمایی که ظرف مسی نیاز دارد تا به دمای $100^\circ C$ برسد را محاسبه کنید. در نهایت نسبت گرمایی که مس دریافت کرده به گرمای کل را محاسبه کنید.

درس نامه

- اگر جسمی به جرم m، به اندازهٔ Q با محیط تبادل گرما داشته باشد و بدون تغییر حالت، دمای آن از θ_1 به θ_2 برسد، رابطهٔ گرمای مبادله‌شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1)$$

c: گرمای ویژهٔ جسم است که یکای آن $\frac{J}{kg.^\circ C}$ است.

- گرمایی که برای ذوب‌کردن جسمی به جرم m در نقطهٔ ذوب آن نیاز داریم، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Q = mL_F$$

L_F، گرمای نهان ذوب است که یکای آن $\frac{J}{kg}$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** گرمایی که مس دریافت می‌کند به یخ منتقل می‌شود؛ بنابراین برای رسیدن یخ صفر درجه به آب $100^\circ C$، کل گرمای داده‌شده به مجموعه به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{کل} = Q_{\text{تبدیل یخ صفر به آب صفر}} + Q_{\text{تبدیل آب صفر به آب }100^\circ C} + Q_{\text{تبدیل مس صفر به مس }100^\circ C}$$

$$\Rightarrow Q_{کل} = mL_F + mc_{آب}(100-0) + m(\frac{c_{آب}}{5})(100-0) \Rightarrow Q_{کل} = m(80c_{آب}) + 100mc_{آب} + 20mc_{آب}$$

$$\Rightarrow Q_{کل} = 200mc_{آب}$$

گام دوم: نسبت گرمایی که مس دریافت کرده به گرمای کل را به دست می‌آوریم:

$$\frac{Q_{مس}}{Q_{کل}} = \frac{20mc_{آب}}{200mc_{آب}} = 0/1$$

بنابراین ۱۰ درصد گرما، به ظرف مسی داده شده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۵۲

جسم‌های A، B و C با دماهای $\theta_A = ۱۰^\circ C$، $\theta_B = ۹۰^\circ C$ و $\theta_C = ۳۰^\circ C$ را در تماس با هم قرار می‌دهیم تا به تعادل گرمایی برسند. اگر اندازهٔ گرمایی که جسم‌های A و B تا رسیدن به تعادل با مجموعه مبادله می‌کنند، به ترتیب ۷۵۰ J و ۲۵۰ J و ظرفیت گرمایی جسم C در SI برابر ۱۰۰ باشد، دمای تعادل چند درجهٔ سلسیوس است؟ (از تبادل گرما با محیط صرف نظر کنید.)

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره با توجه به این‌که تبادل گرمایی با محیط صورت نگرفته، رابطهٔ $Q_A + Q_B + Q_C = ۰$ را بنویسید و سپس Q_C را به دست آورید. در نهایت به کمک رابطهٔ $Q_C = C\Delta\theta_C$، دمای تعادل را به دست آورید.

درس نامه

اگر چند جسم با دماهای متفاوت در کنار هم باشند، آن‌قدر با هم گرما مبادله می‌کنند تا دمای آن‌ها یکسان شود. در این حالت که به تعادل گرمایی رسیده‌اند، دمای آن‌ها به یک دمای یکسان به نام دمای تعادل (θ_e) رسیده است.

قانون پایستگی انرژی $\Rightarrow Q_۱ + Q_۲ + Q_۳ + \ldots = ۰$

نکته دمای تعادل (θ_e) بین کم‌ترین و بیشترین دمای جسم‌هایی است که در کنار هم قرار گرفته‌اند.

$\theta_{min} < \theta_e < \theta_{max}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** جسم A کم‌ترین دما را دارد، بنابراین جسم A برای رسیدن به دمای تعادل گرما دریافت می‌کند. $(\theta_e > \theta_A)$

$Q_A = +۷۵۰\ J$

گام دوم: جسم B بیشترین دما را دارد، بنابراین جسم B برای رسیدن به دمای تعادل گرما از دست می‌دهد. $(\theta_e < \theta_B)$

$Q_B = -۲۵۰\ J$

گام سوم: براساس قانون پایستگی انرژی داریم: $Q_A + Q_B + Q_C = ۰ \Rightarrow ۷۵۰ - ۲۵۰ + Q_C = ۰ \Rightarrow Q_C = -۵۰۰\ J$

گام چهارم: به کمک رابطهٔ $Q_C = C_C(\theta_e - \theta_C)$ دمای تعادل را به دست می‌آوریم:

$Q_C = C_C(\theta_e - \theta_C) \Rightarrow -۵۰۰ = ۱۰۰(\theta_e - ۳۰)$

$\Rightarrow -۵ = \theta_e - ۳۰ \Rightarrow \theta_e = +۲۵^\circ C$

تست و پاسخ ۵۳

جرم هوای موجود در اتاقی به طول ۶m، عرض ۴m و ارتفاع ۳m در فشار ۱bar و دمای $۱۷^\circ C$ چند کیلوگرم است؟ ($R = ۸\frac{J}{mol.K}$، جرم مولی متوسط گازهای موجود در هوا ۲۹g / mol است.)

$۱۷ + ۲۷۳ = ۲۹۰\ K$

۱) ۹۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس نامه معادلهٔ حالت برای گازهای کامل مطابق رابطهٔ زیر است:

$PV = nRT$ (حجم $m^۳$، ثابت جهانی گاز $J/mol.K$، دما K، فشار Pa، مقدار ماده mol)

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از معادلهٔ حالت، تعداد مول گازها را به دست می‌آوریم:

$$PV = nRT \xrightarrow[R=۸\frac{J}{mol.K},\ T=۲۷۳+۱۷=۲۹۰K]{P=۱bar=۱۰^۵Pa,\ V=۶\times۴\times۳=۷۲m^۳} ۱۰^۵ \times ۷۲ = n \times ۸ \times ۲۹۰ \Rightarrow n = \frac{۹\times۱۰^۵}{۲۹۰}mol$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

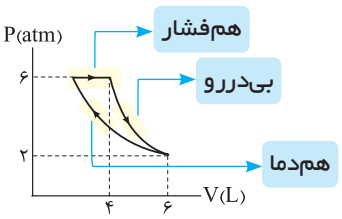
گام دوم: با داشتن تعداد مول گازها و جرم مولی، جرم گاز را حساب می‌کنیم:

$$n=\frac{m}{M} \Rightarrow m=n.M \xrightarrow[M=29\,g/mol]{n=\frac{9\times10^5}{290}\,mol} m=\frac{9\times10^5}{290}\times29=9\times10^4\,g \xrightarrow{10^3\,g=1\,kg} m=90\,kg$$

تست و پاسخ ۵۴

نمودار فشار برحسب حجم مقدار معینی گاز آرمانی در طی یک چرخهٔ ترمودینامیکی، که از سه فرایند هم‌دما، هم‌فشار و بی‌دررو تشکیل شده، به شکل زیر است. اگر کاری که گاز بر روی محیط انجام می‌دهد، در فرایند بی‌دررو برابر ۱۸۰۰J باشد، گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در فرایند هم‌فشار چند ژول است؟

قرینهٔ کار محیط بر روی گاز



۱) ۳۰۰
۲) ۱۲۰۰
۳) ۱۸۰۰
۴) ۳۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

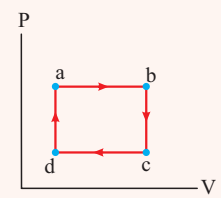
مشاوره *یه سری سؤال مثل این تست رو حتماً علامت بذار تا توی دوران جمع‌بندی مرورش کنی. چون هم‌زمان با این سؤال ۳تا فرایند و یک چرخه رو مرور می‌کنی.*

درس‌نامه

- **فرایند هم‌فشار:** فرایندی است که فشار گاز در طی فرایند ثابت می‌ماند. کار در فرایند هم‌فشار طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$W=-P.\Delta V$$

- **فرایند هم‌دما:** فرایندی است که دمای گاز در طی فرایند ثابت می‌ماند. بنابراین در این فرایند انرژی درونی گاز تغییر نمی‌کند $(\Delta U=0)$.
- **فرایند بی‌دررو:** فرایندی است که در طی آن گرما مبادله نمی‌شود. بنابراین در این فرایند تغییر انرژی درونی با کاری که محیط بر روی گاز انجام می‌دهد برابر است.
- **چرخهٔ ترمودینامیکی:** مجموعه‌ای از فرایندهای ترمودینامیکی که دستگاه پس از طی‌کردن آن‌ها به حالت اولیهٔ خود بازمی‌گردد. مثلاً در شکل مقابل abcda یک چرخهٔ ترمودینامیکی را نشان می‌دهد. در طی یک چرخهٔ ترمودینامیکی کامل، انرژی درونی دستگاه تغییر نمی‌کند.

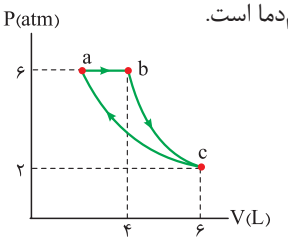


$$\Delta U_{abcda}=\Delta U_{ab}+\Delta U_{bc}+\Delta U_{cd}+\Delta U_{da}=0$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** مطابق شکل زیر، نوع هر یک از فرایندها را مشخص می‌کنیم.

نکته در نمودار P ـ V برای دو فرایند هم‌دما و بی‌درروی مقدار معینی گاز کامل، شیب نمودار بی‌دررو بیشتر از شیب نمودار هم‌دما است.

با توجه به نکتهٔ بالا درمی‌یابیم که بین فرایندهای bc و ca، فرایند bc انبساط بی‌دررو و فرایند ca تراکم هم‌دما است.



ab: انبساط هم‌فشار
bc: انبساط بی‌دررو
ca: تراکم هم‌دما

گام دوم: با توجه به این‌که انرژی درونی دستگاه در طی چرخه تغییر نمی‌کند و $\Delta U_{bc}=W_{bc}$ و $\Delta U_{ca}=0$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta U_{abca}=\Delta U_{ab}+\Delta U_{bc}+\Delta U_{ca} \xrightarrow[\Delta U_{bc}=W_{bc}=-W'_{bc}=-1800\,J]{\Delta U_{abca}=0\ ,\ \Delta U_{ca}=0}$$

$$0=\Delta U_{ab}+(-1800)+0 \Rightarrow \Delta U_{ab}=1800\,J$$

آزمون سیزدهم حضوری
دوازدهم ریاضی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: کار انجام‌شده در فرایند ab را حساب می‌کنیم:

نکته در فرایند هم دما، حاصل‌ضرب P.V مقداری ثابت است. بنابراین داریم: $P_1V_1 = P_2V_2$

با توجه به نکتهٔ بالا می‌توانیم حجم اولیهٔ گاز در نقطهٔ a را به کمک فرایند ca به دست آوریم:

$$P_cV_c = P_aV_a \Rightarrow ۲\times۶ = ۶\times V_a \Rightarrow V_a = ۲\,L$$

حالا داریم: $W_{ab} = -P\Delta V \Rightarrow W_{ab} = -۶\times۱۰^{۵}\times((۴-۲)\times۱۰^{-۳}) = -۱۲۰۰\,J$

گام چهارم: با داشتن ΔU_{ab} و W_{ab}، گرمای مبادله‌شده در فرایند ab را حساب می‌کنیم:

$$\Delta U_{ab} = Q_{ab} + W_{ab} \xrightarrow[W_{ab}=-۱۲۰۰\,J]{\Delta U_{ab}=۱۸۰۰\,J} ۱۸۰۰ = Q_{ab} - ۱۲۰۰$$

$$\Rightarrow Q_{ab} = ۳۰۰۰\,J$$

تست و پاسخ ۵۵

توان خروجی یک ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی، ۶۰kW و بازده آن ۳۰ درصد است. اگر این ماشین در هر دقیقه ۲۰۰۰ چرخه را بپیماید، جرم بنزین مصرفی آن در هر چرخه چند گرم است؟ (گرمای حاصل از سوختن بنزین ۵۰kJ / g است.)

۱) ۰/۱۲ ۲) ۱/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

بازده ماشین گرمایی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

($|W|$: مقدار کاری که ماشین انجام می‌دهد. Q_H: مقدار گرمایی که ماشین می‌گیرد.)

توان خروجی یک دستگاه طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

(P: توان خروجی (W)، W: کار (J)، Δt: زمان (s))

پاسخ تشریحی **گام اول:** مقدار کاری که ماشین گرمایی در هر چرخه انجام می‌دهد را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{W_t}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱\,min = ۶۰\,s]{P = ۶۰\,kW = ۶\times۱۰^{۴}\,W} ۶\times۱۰^{۴} = \frac{W_t}{۶۰} \Rightarrow W_t = ۳/۶\times۱۰^{۶}\,J$$

$$W_t = n|W| \xrightarrow[W_t = ۳/۶\times۱۰^{۶}]{n = ۲۰۰۰\ \text{چرخه}} ۳/۶\times۱۰^{۶} = ۲۰۰۰\times|W| \Rightarrow |W| = ۱۸۰۰\,J$$

گام دوم: با داشتن بازده ماشین گرمایی و کاری که ماشین انجام می‌دهد، گرمای دریافتی ماشین گرمایی را به دست می‌آوریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \xrightarrow[|W| = ۱۸۰۰\,J]{\eta = \frac{۳۰}{۱۰۰} = ۰/۳} ۰/۳ = \frac{۱۸۰۰}{Q_H} \Rightarrow Q_H = ۶۰۰۰\,J$$

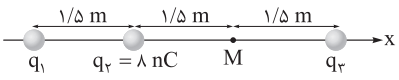
گام سوم: مقدار بنزین مصرفی را حساب می‌کنیم:

$$m_{\text{بنزین مصرفی}} = ۶۰۰۰\,J \times \frac{۱\,g\ \text{بنزین}}{۵۰\,kJ} \times \frac{۱\,kJ}{۱۰۰۰\,J} = ۰/۱۲\,g\ \text{بنزین}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۵۶

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x قرار دارند و نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از آن‌ها برابر صفر است. اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟ $(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) $3021\vec{i}$
۲) $-3021\vec{i}$
۳) $3381\vec{i}$
۴) $-3381\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا با استفاده از تعادل بارهای الکتریکی، اندازه و علامت بارهای q_1 و q_2 را به دست آورید، سپس میدان الکتریکی هر یک از بارها را در نقطهٔ M مشخص کنید و در پایان، میدان الکتریکی خالص در این نقطه را به دست آورید.

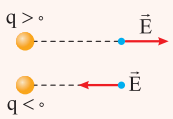
درس‌نامه

۱) میدان الکتریکی حاصل از یک ذرهٔ باردار، در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از بار q:

$$E = k\frac{|q|}{r^2}$$

ثابت کولن $(9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$ — اندازهٔ بار الکتریکی (C) — فاصله (m) — اندازهٔ میدان الکتریکی (N/C)

جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.



۲) **قانون کولن:** اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای که در راستای خط مستقیم بین آن‌ها اثر می‌کند، با حاصل‌ضرب بزرگی آن‌ها متناسب است و با مربع فاصلهٔ بین آن‌ها نسبت وارون دارد.

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

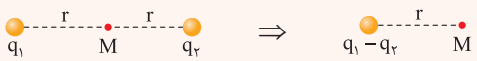
بارهای الکتریکی (C) — ثابت کولن $(9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$ — اندازهٔ نیرو (N) — فاصلهٔ بین دو بار (m)

۳) اگر دو بار ذره‌ای q_1 و q_2 به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار گیرند و بخواهیم نقطه‌ای را روی خط واصل دو بار یا امتداد آن به گونه‌ای تعیین کنیم که بار سوم q_3 در آن‌جا به حال تعادل بماند، یعنی نیروی خالص وارد بر آن صفر شود، نقطهٔ مورد نظر اولاً: در صورتی که q_1 و q_2 همنام باشند، بین آن دو و اگر ناهمنام باشند، خارج از فاصلهٔ آن دو قرار می‌گیرد. ثانیاً همواره به باری نزدیک‌تر است که اندازهٔ آن کوچک‌تر است.

$$F_{13} - F_{23} = 0 \Rightarrow F_{13} = F_{23} \Rightarrow k\frac{|q_1||q_3|}{r_1^2} = k\frac{|q_2||q_3|}{r_2^2} \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

- وقتی ۳ ذرهٔ باردار در یک راستا قرار گیرند و نیروی خالص وارد بر هر یک از آن‌ها صفر باشد، همواره بار میانی با دو بار الکتریکی دیگر، ناهمنام است.
- گاهی برای بررسی نیرو یا میدان الکتریکی حاصل از یک بار ذره‌ای، می‌توانیم آن بار الکتریکی را از محلی که قرار دارد، حذف کرده و به جای آن بار دیگری و در محل دیگری قرار دهیم که همان اثر بار اول را ایجاد کند.

مثال: بار q_2 به محل بار q_1 انتقال یافته است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** علامت و اندازه‌های q_1 و q_3 را تعیین می‌کنیم:

با توجه به درس‌نامه باید q_1 و q_3 همنام باشند و علامت آن‌ها مخالف با علامت بار q_2 باشد؛ بنابراین $q_1 < 0$ و $q_3 < 0$.

از طرفی اگر بار q_3 را مبنا قرار داده و نیروی خالص وارد بر آن را صفر در نظر بگیریم، داریم:

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow |\frac{q_2}{q_1}| = (\frac{r_2}{r_1})^2 \xrightarrow[r_1 = 4/5\,m]{r_2 = 3\,m\ ,\ q_2 = 8\,nC} |\frac{8}{q_1}| = (\frac{3}{4/5})^2 \Rightarrow \frac{8}{|q_1|} = (\frac{2}{3})^2$$

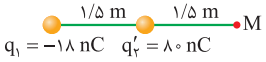
$$\Rightarrow \frac{8}{|q_1|} = \frac{4}{9} \Rightarrow |q_1| = 18\,nC \xrightarrow{q_1 < 0} q_1 = -18\,nC$$

اکنون بار q_2 را مبنا قرار داده و نیروی خالص وارد بر آن را صفر در نظر می‌گیریم:

$$F_{12} = F_{32} \Rightarrow |\frac{q_3}{q_1}| = (\frac{r_3}{r_1})^2 \xrightarrow[r_1 = 1/5\,m]{r_3 = 3\,m\ ,\ q_1 = -18\,nC} \frac{|q_3|}{18} = (\frac{3}{1/5})^2$$

$$\Rightarrow |q_3| = 18 \times 4 = 72\,nC \xrightarrow{q_3 < 0} q_3 = -72\,nC$$

گام دوم: بار q_3 را به محل بار q_2 منتقل می‌کنیم تا شکل ساده‌تر شود:



$$q_2' = q_2 - q_3 = 8 - (-72) = 80\,nC$$

گام سوم: میدان الکتریکی حاصل از هر کدام از بارهای q_1 و q_2' را در نقطهٔ M به دست می‌آوریم:

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{r_1^2} \xrightarrow[r_1 = 1/5\,m + 1/5\,m = 3\,m]{k = 9\times10^9\,N.m^2/C^2\ ,\ |q_1| = 18\,nC = 18\times10^{-9}\,C} E_1 = 9\times10^9 \times \frac{18\times10^{-9}}{3^2}$$

$$\Rightarrow E_1 = 18\,N/C \xrightarrow{q_1 < 0} \vec{E}_1 = (-18\,N/C)\vec{i}$$

$$E_2' = k\frac{|q_2'|}{r_2^2} \xrightarrow[r_2 = 1/5\,m]{k = 9\times10^9\,N.m^2/C^2\ ,\ |q_2'| = 80\,nC = 80\times10^{-9}\,C} E_2' = 9\times10^9 \times \frac{80\times10^{-9}}{(1/5)^2}$$

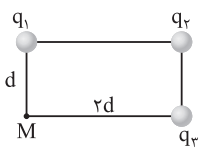
$$\Rightarrow E_2' = \frac{9\times80}{2/25} = 320\,N/C \xrightarrow{q_2' > 0} \vec{E}_2' = (320\,N/C)\vec{i}$$

گام چهارم: میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2' = (-18\,N/C)\vec{i} + (320\,N/C)\vec{i} = (302\,N/C)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۵۷

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای q_1، q_2 و q_3 در سه رأس مستطیل قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M (رأس چهارم مستطیل) برابر صفر باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ برابر با کدام گزینه است؟



۱) ۵
۲) -5
۳) $5\sqrt{5}$
۴) $-5\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

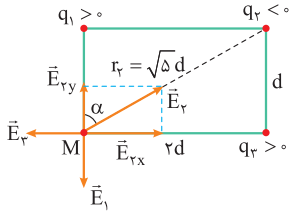
مشاوره برای حل تست‌های الکتریسیتهٔ ساکن، لازم است اطلاعات کافی در مورد هندسه، بردارها، نسبت‌های مثلثاتی و محاسبات معمولی ریاضی داشته باشید وگرنه به مشکل بر می‌خورید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای آن‌که میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M صفر باشد، باید میدان الکتریکی برایند حاصل از بارهای الکتریکی q_1 و q_3 در نقطهٔ M با میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در این نقطه، خنثی شود. $\vec{E}_{1,3} + \vec{E}_2 = 0$

بنابراین باید q_1 و q_3 همنام باشند، اما q_2 با آن‌ها ناهمنام باشد؛ بنابراین $\frac{q_2}{q_1} < 0$ بوده و ۱ و ۳ رد می‌شوند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: فرض می‌کنیم $q_1 > 0$، $q_2 < 0$ و $q_3 > 0$ باشند:



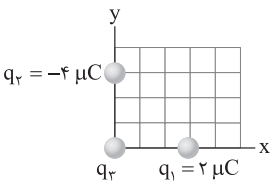
$$r_2 = \sqrt{d^2 + (2d)^2} = \sqrt{5d^2} = \sqrt{5}d$$

$$E_1 = E_{2y} \Rightarrow k\frac{|q_1|}{r_1^2} = k\frac{|q_2|}{r_2^2} \times \cos\alpha \xrightarrow{r_1 = d,\ r_2 = \sqrt{5}d} \frac{|q_1|}{d^2} = \frac{|q_2|}{5d^2} \times \frac{d}{\sqrt{5}d}$$

$$\Rightarrow |q_1| = \frac{|q_2|}{5\sqrt{5}} \xrightarrow{\frac{q_2}{q_1} < 0} \frac{q_2}{q_1} = -5\sqrt{5}$$

تست و پاسخ ۵۸

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در صفحهٔ مختصات قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 در SI برابر $\vec{F} = 12\vec{i} - 18\vec{j}$ باشد، اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 چند نیوتون است؟ $\left(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}\right)$



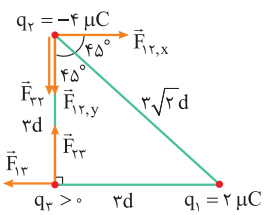
۱) $3\sqrt{2}$
۲) $6\sqrt{2}$
۳) $3\sqrt{5}$
۴) $6\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه هنگام عددگذاری در رابطهٔ قانون کولن، اگر بارهای الکتریکی برحسب میکروکولن و فاصلهٔ دو بار، برحسب سانتی‌متر نوشته شوند، ضریب ثابت (k) را برابر با $90\frac{N.cm^2}{(\mu C)^2}$ در نظر می‌گیریم تا نیرو برحسب نیوتون به دست آید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** هر یک از مربع‌های موجود در زمینهٔ شکل را به ضلع d (برحسب cm) فرض می‌کنیم.

با استفاده از قانون کولن، اندازهٔ نیروی الکتریکی $\vec{F}_{12}$ را به دست می‌آوریم:



$$F_{12} = k\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}$$

$$\xrightarrow[r_{12} = 3\sqrt{2}d]{k = 90\frac{N.cm^2}{(\mu C)^2},\ |q_1| = 2\mu C,\ |q_2| = 4\mu C} F_{12} = 90 \times \frac{2\times4}{18d^2} = \frac{40}{d^2}$$

گام دوم: اندازهٔ مؤلفهٔ افقی نیروی $\vec{F}_{12}$ را برابر با 12N قرار می‌دهیم و d^2 را به دست می‌آوریم:

$$F_{12,x} = 12N \Rightarrow 12 = \frac{40}{d^2} \Rightarrow d^2 = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}\ cm^2$$

گام سوم: F_{32} را محاسبه می‌کنیم:

$$F_{12,y} + F_{32} = 18N \xrightarrow{F_{12,y} = F_{12,x} = 12N} 12 + F_{32} = 18 \Rightarrow F_{32} = 6\ N$$

با توجه به قانون سوم نیوتون، $F_{23} = 6N$ خواهد بود.

گام چهارم: بار q_3 را به دست می‌آوریم:

$$F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} \xrightarrow[r_{23} = 3d,\ F_{23} = 6N]{k = 90\ N.cm^2/(\mu C)^2,\ |q_2| = 4\mu C} 6 = 90 \times \frac{4\times q_3}{9d^2}$$

$$\xrightarrow{d^2 = \frac{10}{3}\ cm^2} 6 = \frac{90\times4q_3}{9\times\frac{10}{3}} \Rightarrow q_3 = 0/5\ \mu C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام پنجم: نیروی $F_{۱۳}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F_{۱۳}=k\frac{|q_۱||q_۳|}{r_{۱۳}^۲} \xrightarrow[r_{۱۳}=۳d \Rightarrow r_{۱۳}^۲=۹d^۲]{k=۹۰\frac{N.cm^۲}{(\mu C)^۲},\ |q_۱|=۲\mu C,\ |q_۳|=۰/۵\mu C}$$

$$F_{۱۳}=\frac{۹۰\times۲\times۰/۵}{۹d^۲}=\frac{۱۰}{d^۲} \xrightarrow{d^۲=\frac{۱۰}{۳}cm^۲} F_{۱۳}=۳\ N$$

گام ششم: اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ را به دست می‌آوریم:

$$F_{T۳}=\sqrt{F_{۱۳}^۲+F_{۲۳}^۲} \xrightarrow[F_{۲۳}=۶N]{F_{۱۳}=۳N} F_{T۳}=\sqrt{۳^۲+۶^۲}=\sqrt{۳^۲+۴\times۳^۲}$$

$$\Rightarrow F_{T۳}=\sqrt{۵\times۳^۲} \Rightarrow F_{T۳}=۳\sqrt{۵}\ N$$

تست و پاسخ ۵۹

در یک میدان الکتریکی، ذره‌ای به بار الکتریکی $-۵۰\mu C$ از نقطهٔ A با پتانسیل الکتریکی ۱۰۰ V، به نقطهٔ B با پتانسیل الکتریکی -۳۰۰ V جابه‌جا می‌شود. کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی در طی این جابه‌جایی چند میلی‌ژول است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) -۱۰ ۴) -۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

شرط تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی این است که میدان الکتریکی بر روی ذرهٔ باردار کار انجام دهد و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$\Delta U_E=-W_E$ → کار نیروی الکتریکی (J)
↘ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

رابطهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی با تغییر پتانسیل الکتریکی به صورت زیر است:

$$\Delta V=\frac{\Delta U_E}{q}$$

ΔV: تغییر پتانسیل الکتریکی (V)
ΔU_E: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)
q: بار الکتریکی (C)

در این رابطه، q را همراه با علامت آن قرار دهید.

پاسخ تشریحی

گام اول: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta V=\frac{\Delta U_E}{q} \xrightarrow[q=-۵۰\mu C=-۵\times۱۰^{-۵}C]{\Delta V=-۳۰۰-۱۰۰=-۴۰۰\ V} -۴۰۰=\frac{\Delta U_E}{-۵\times۱۰^{-۵}} \Rightarrow \Delta U_E=۰/۰۲\ J=۲۰\ mJ$$

گام دوم: کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم:

$$W_E=-\Delta U_E=-۲۰\ mJ$$

تست و پاسخ ۶۰

بار الکتریکی یک کرهٔ فلزی به قطر ۲۰cm، برابر $۱۲\mu C$ است. چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI کدام است؟ $(\pi=۳)$

شعاع $=۱۰cm$ ← $C/m^۲$

۱) $۱۰^{-۴}$ ۲) $۱۰^{-۵}$
۳) $۲/۵\times۱۰^{-۴}$ ۴) $۲/۵\times۱۰^{-۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

چگالی سطحی بار (σ) را طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma = \frac{q}{A} \xrightarrow{\text{جسم کروی}} \sigma = \frac{q}{4\pi r^2}$$

(σ: چگالی سطحی بار (C/m^2)، q: بار الکتریکی (C)، A: مساحت سطح (m^2)، r: شعاع کره (m))

پاسخ تشریحی طبق رابطهٔ چگالی سطحی بار داریم:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi r^2} \xrightarrow[r=\frac{d}{2}=\frac{20}{2}=10\,cm=0/1m]{q=12\mu C=12\times10^{-6}C,\ \pi=3} \sigma = \frac{12\times10^{-6}}{4\times3\times(0/1)^2} = 10^{-4}\ C/m^2$$

تست و پاسخ ۶۱

فاصلهٔ بین صفحه‌های خازنی ۵mm، مساحت هر یک از صفحه‌های آن ۴۰cm² و بین صفحه‌های آن هوا است. فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن چند میلی‌متر و چگونه تغییر کند تا ظرفیت آن ۴/۸pF افزایش یابد؟ ($\varepsilon_0 = 9\times10^{-12}\frac{C^2}{N.m^2}$)

تغییرات فاصله رو میخواد، نه فاصلهٔ نهایی!

۱) ۳، افزایش یابد.
۲) ۲، افزایش یابد.
۳) ۳، کاهش یابد.
۴) ۲، کاهش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

ظرفیت خازن وابسته به ساختار خازن بوده و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{\kappa \varepsilon_0 A}{d}$$

(C: ظرفیت خازن (F)، κ: ثابت دی‌الکتریک، ε_0: ضریب گذردهی الکتریکی خلأ (F/m)، A: مساحت صفحات خازن (m^2)، d: فاصلهٔ صفحه‌های خازن (m))

پاسخ تشریحی طبق رابطهٔ $C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$ داریم:

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d} \xrightarrow{\kappa, A \text{ ثابت}} C_2 - C_1 = \kappa\varepsilon_0 A\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon_0=9\times10^{-12}C^2/N.m^2,\ A=40cm^2=40\times10^{-4}m^2,\ d_1=5mm=5\times10^{-3}m]{C_2-C_1=4/8pF=4/8\times10^{-12}F,\ \kappa=1} 4/8\times10^{-12} = 1\times9\times10^{-12}\times40\times10^{-4}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{5\times10^{-3}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{400}{3} = \frac{1}{d_2} - 200 \Rightarrow \frac{1}{d_2} = \frac{1000}{3} \Rightarrow d_2 = 0/003\ m = 3mm \Rightarrow d_2 - d_1 = 3-5 = -2\,mm$$

بنابراین فاصلهٔ بین صفحات خازن باید ۲ mm کاهش یابد.

تست و پاسخ ۶۲

اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی در طی دو مرحلهٔ متوالی ابتدا ۲۰V و سپس ۱۰V افزایش یابد، انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن در هر مرحله ۳۰۰μJ تغییر می‌کند. ظرفیت این خازن چند میکروفاراد است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱۰
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

رابطهٔ انرژی ذخیره‌شده در خازن با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن و ظرفیت خازن به صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

(U: انرژی خازن (J)، V: اختلاف پتانسیل دو سر خازن، C: ظرفیت خازن (F))

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی طبق رابطهٔ $U=\frac{1}{2}CV^2$، داریم:

$$U'-U=\frac{1}{2}C(V'^2-V^2)=\frac{1}{2}C(V'-V)(V'+V)$$

$$U_2-U_1=\frac{1}{2}C(V_2-V_1)(V_2+V_1)\Rightarrow 300\times10^{-6}=\frac{1}{2}C(20)(2V_1+20)\quad(1)$$

$$U_3-U_2=\frac{1}{2}C(V_3-V_2)(V_3+V_2)\Rightarrow 300\times10^{-6}=\frac{1}{2}C(10)(2V_2+10)\quad(2)$$

$$\xrightarrow[(2)]{(1)} 1=\frac{4V_1+40}{2V_2+10}\xrightarrow{V_2=V_1+20} 4V_1+40=2(V_1+20)+10\Rightarrow V_1=5\ V$$

حالا ظرفیت خازن را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(1)} 300\times10^{-6}=\frac{1}{2}C(20)(30)\Rightarrow C=10^{-6}F=1\ \mu F$$

تست و پاسخ ۶۳

مقاومت الکتریکی یک قطعه سیم فلزی در دمای $20^\circ C$ برابر R است. سیم را از دستگاهی عبور می‌دهیم تا سطح مقطع آن ۲۰ درصد کاهش یابد. پس از عبور سیم از دستگاه، دمای آن را به چند درجهٔ سلسیوس برسانیم تا مقاومتش برابر با $2R$ شود؟ ($\alpha_{\text{فلز}}=4\times10^{-3}K^{-1}$)

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۹۰ ۴) ۷۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره *حتماً می‌خواست به خواستهٔ سؤال باشه! توی این سؤال اَزَت دمای نهایی رو می‌خواد نه این که بیای تغییر دما رو انتخاب کنی و توی دام ۴ بیفتی!*

درس نامه

رابطهٔ مقایسه‌ای مقاومت یک سیم با حجم ثابت در دو حالت (۱) و (۲)

R: مقاومت

A: مساحت مقطع سیم

$$\frac{R_2}{R_1}=\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

اگر دمای سیمی با مقاومت اولیهٔ R_1 را به اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر دهیم، مقاومت سیم به اندازهٔ ΔR تغییر می‌کند و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\Delta R=R_1\alpha\Delta\theta$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** مقاومت سیم را پس از تغییر سطح مقطع نسبت به مقاومت اولیه $(R_1=R)$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{R_2}{R_1}=\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\xrightarrow{A_2=A_1-\frac{20}{100}A_1=0/8A_1}\frac{R_2}{R_1}=\left(\frac{A_1}{0/8A_1}\right)^2=\frac{25}{16}\xrightarrow{R_1=R}R_2=\frac{25}{16}R$$

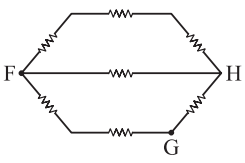
گام دوم: از روی تغییرات مقاومت سیم در حالت سوم (پس از افزایش دما) نسبت به حالت دوم، دمای نهایی را به دست می‌آوریم:

$$R_3-R_2=R_2\alpha\Delta\theta\xrightarrow[\alpha=4\times10^{-3}\frac{1}{K}]{R_3=2R\ ,\ R_2=\frac{25}{16}R}\underbrace{2R-\frac{25}{16}R}_{\frac{7}{16}R}=\frac{25}{16}R\times4\times10^{-3}\times\Delta\theta$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=70^\circ C\Rightarrow\theta_2-20=70\Rightarrow\theta_2=90^\circ C$$

تست و پاسخ ۶۴

در شکل زیر، مقاومت‌ها مشابه‌اند. اگر مقاومت الکتریکی معادل بین دو نقطهٔ F و H برابر 18Ω باشد، مقاومت الکتریکی معادل بین دو نقطهٔ F و G برابر چند اهم است؟



۱) ۱۴ ۲) ۱۵

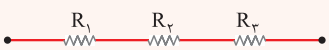
۳) ۳۰ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

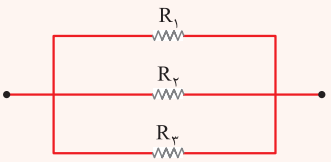
۱) **به هم بستن متوالی مقاومت‌ها:** دو مقاومت را متوالی می‌گوییم که فقط از یک سر به هم متصل بوده و از محل اتصال آن‌ها هیچ انشعاب جریان‌داری خارج نگردد.



$$R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳$$

مقاومت معادل (Ω)

۲) **به هم بستن موازی مقاومت‌ها:** مقاومت‌هایی را موازی می‌گوییم که هر دو سر آن‌ها به وسیلهٔ سیم‌هایی رابط به یکدیگر متصل شده باشند.



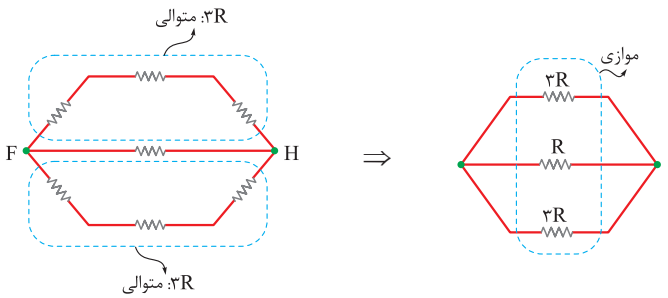
$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳}$$

مقاومت معادل (Ω)

همچنین برای دو مقاومت موازی $R_۱$ و $R_۲$ به اختصار می‌توان نوشت:

$$R_{eq} = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲}$$

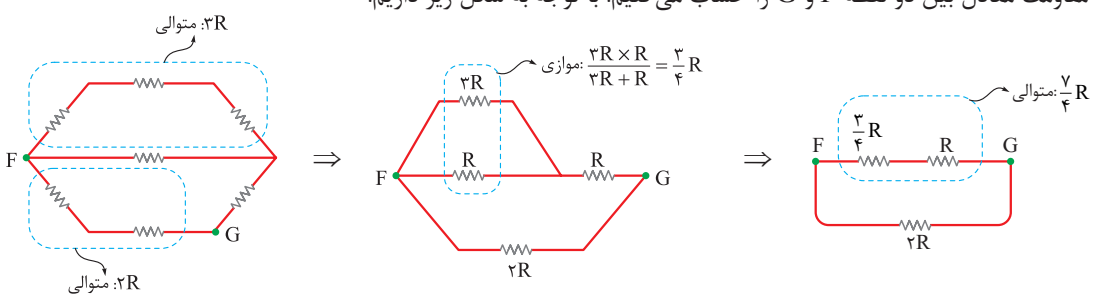
پاسخ تشریحی **گام اول:** از روی مقاومت معادل بین دو نقطهٔ F و H، مقدار هر یک از مقاومت‌ها را برحسب R حساب می‌کنیم. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\frac{۱}{R_{FH}} = \frac{۱}{۳R} + \frac{۱}{۳R} + \frac{۱}{R} = \frac{۱+۱+۳}{۳R} = \frac{۵}{۳R}$$

$$\Rightarrow R_{FH} = \frac{۳}{۵}R = ۱۸ \Rightarrow R = ۳۰\,\Omega$$

گام دوم: مقاومت معادل بین دو نقطهٔ F و G را حساب می‌کنیم. با توجه به شکل زیر داریم:

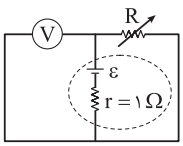


$$\frac{۱}{R_{FG}} = \frac{۱}{\frac{۷}{۴}R} + \frac{۱}{۲R} = \frac{۸+۷}{۱۴R} = \frac{۱۵}{۱۴R} \Rightarrow R_{FG} = \frac{۱۴}{۱۵}R$$

$$\xrightarrow{R=۳۰\Omega} R_{FG} = \frac{۱۴}{۱۵} \times ۳۰ = ۲۸\,\Omega$$

تست و پاسخ ۶۵

در مدار شکل زیر، اگر مقاومت الکتریکی رئوستا ۲/۵ Ω افزایش یابد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، از ۱۲ V به ۱۳ V می‌رسد. در این مدار، نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد چند ولت است؟



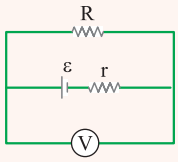
۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

در مدار تک‌حلقهٔ ساده، مطابق شکل زیر، ولتاژ دو سر مقاومت خارجی و باتری یکسان بوده و برابر است با:



مقاومت خارجی ↖ جریان ↑ مقاومت درونی ↑

$V = RI = \varepsilon - rI = \frac{R\varepsilon}{R+r}$

↓ اختلاف پتانسیل ↓ نیروی محرکه

پاسخ تشریحی طبق رابطهٔ $V = \frac{R\varepsilon}{R+r}$ داریم:

$$V = \frac{R\varepsilon}{R+r} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{R_2\varepsilon}{R_2+r}}{\frac{R_1\varepsilon}{R_1+r}} = \frac{R_2(R_1+r)}{R_1(R_2+r)}$$

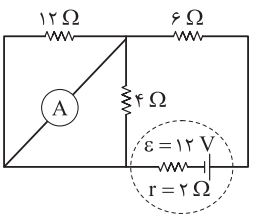
$$\xrightarrow[R_2=R_1+2/5(\Omega)]{V_1=12V,\ V_2=13V,\ r=1\Omega} \frac{13}{12} = \frac{(R_1+2/5)(R_1+1)}{R_1(R_1+2/5+1)} \Rightarrow R_1^2+3/5R_1-30=0 \Rightarrow (R_1-4)(R_1+7/5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = 4\Omega \ \checkmark \\ R_1 = -7/5\Omega \ \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{R_1\varepsilon}{R_1+r} \Rightarrow 12 = \frac{4\times\varepsilon}{4+1} \Rightarrow \varepsilon = 15V$$

تست و پاسخ ۶۶

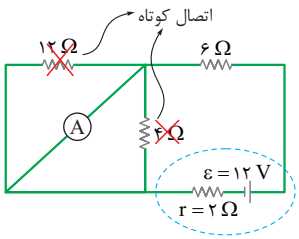
اگر در مدار شکل زیر، جای آمپرسنج آرمانی و منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی را عوض کنیم، مقداری که آمپرسنج نشان می‌دهد، چند آمپر و چگونه تغییر می‌کند؟

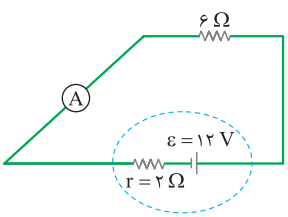


۱) ۱، افزایش می‌یابد.
۲) ۱، کاهش می‌یابد.
۳) ۵ / ۰، افزایش می‌یابد.
۴) ۵ / ۰، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** مقداری که آمپرسنج در حالت اول نشان می‌دهد (I_A) را حساب می‌کنیم:

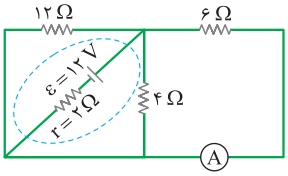


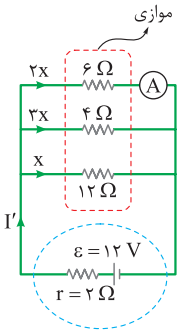


$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} = \frac{12}{6+2} = 1/5A$$

$$I_A = I = 1/5A$$

گام دوم: جای آمپرسنج و باتری را عوض می‌کنیم و در حالت دوم هم مقداری که آمپرسنج نشان می‌دهد (I'_A) را حساب می‌کنیم:





SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$\frac{1}{R'_{eq}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1+3+2}{12}=\frac{1}{2} \Rightarrow R'_{eq}=2\,\Omega$$

$$I'=\frac{\varepsilon}{R'_{eq}+r}=\frac{12}{2+2}=3A \Rightarrow I'_A=\left(\frac{2x}{2x+3x+x}\right)I'=\frac{1}{3}\times 3=1\,A$$

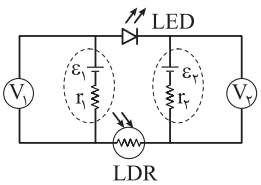
بنابراین عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، به اندازهٔ $0/5\,A$ کاهش می‌یابد.

تست و پاسخ ۶۷

در مدار شکل زیر، LED در حال گسیل نور است. اگر شدت نور تابیده به LDR را افزایش دهیم، مقدارهایی که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟ (نور گسیلی از LED به LDR نمی‌تابد.)

بنابراین جهت جریان در مدار ساعتگرد است. (موافق LED)

مقاومت LDR کاهش می‌یابد.



۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۲) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

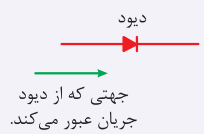
۴) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره *این سؤال بسیار خلاقانه طراحی شده؛ LDR و LED رو خوب یاد بگیرید چون سال‌های قبل هم ازش توی کنکور سؤال اومده.*

پاسخ تشریحی

نکات ۱) از دیود تنها در یک جهت جریان الکتریکی می‌تواند عبور کند و در خلاف جهت، دیود مانع عبور جریان می‌شود. به شکل زیر نگاه کنید.



۲) وقتی شدت نور تابیده‌شده به LDR افزایش می‌یابد، مقاومت آن کم می‌شود.

با توجه به نکتهٔ (۱) چون LED که نوعی دیود است، در حال گسیل نور است، بنابراین جهت جریان مدار موافق با جریان ناشی از ε_1 به صورت ساعتگرد است. در نتیجه باتری ε_1 مولد و باتری ε_2 مصرف‌کننده است. بنابراین داریم:

$$V_1=\varepsilon_1-r_1I$$

$$V_2=\varepsilon_2+r_2I$$

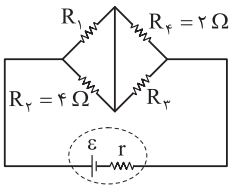
طبق نکتهٔ (۲) با افزایش شدت نور تابیده‌شده به LDR ، مقاومت آن کاهش و جریان کل مدار افزایش می‌یابد، بنابراین داریم:

$$\downarrow V_1=\varepsilon_1-r_1I\uparrow \;,\; \uparrow V_2=\varepsilon_2+r_2I\uparrow$$

در نتیجه V_1 کاهش و V_2 افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۶۸

در مدار شکل زیر، اگر جریان الکتریکی عبوری از مقاومت‌های R_2 و R_4 یکسان باشد، توان مصرفی مقاومت R_1 چند برابر توان مصرفی مقاومت R_3 است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره بعضی از دانش‌آموزان تصور می‌کنند که در حل تست‌های مربوط به مدارها، حتماً باید در ابتدا مقاومت معادل مدار را حساب کنند. در حالی که در حل بعضی از این تست‌ها اصلاً نیازی به محاسبهٔ مقاومت معادل مدار نیست.

درس‌نامه

۱) قاعدهٔ انشعاب: مجموع جریان‌هایی که به هر نقطهٔ انشعاب (گره) وارد می‌شوند، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطهٔ انشعاب خارج می‌شوند.

۲) قانون اُهم:

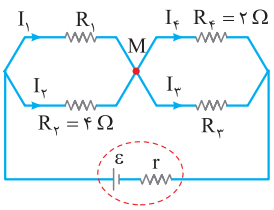
$V = RI$ (V: اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت (V)، R: مقاومت الکتریکی (Ω)، I: جریان الکتریکی (A))

۳) توان الکتریکی مصرفی در یک مقاومت:

$P = VI$ (P: توان مصرفی (W)، V: اختلاف پتانسیل (V)، I: جریان الکتریکی (A))

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی، با یکدیگر برابر است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم و از قاعدهٔ انشعاب در نقطهٔ M استفاده می‌کنیم:



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \xrightarrow{I_2 = I_4} I_1 = I_3$$

گام دوم: R_1 و R_2 موازی هستند پس $V_1 = V_2$ است. به طور مشابه R_3 و R_4 نیز موازی‌اند و $V_3 = V_4$ است. پس داریم:

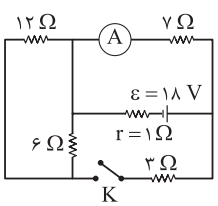
$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{V_2}{V_4} \xrightarrow{V=RI} \frac{V_1}{V_3} = \frac{R_2 I_2}{R_4 I_4} \xrightarrow[R_2=4\Omega\,,\,R_4=2\Omega]{I_2=I_4} \frac{V_1}{V_3} = \frac{4}{2} = 2$$

گام سوم: نسبت توان مصرفی مقاومت R_1 به توان مصرفی مقاومت R_3 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{V_1 I_1}{V_3 I_3} \xrightarrow[\frac{V_1}{V_3}=2]{I_1=I_3} \frac{P_1}{P_3} = 2$$

تست و پاسخ ۶۹

در مدار شکل زیر، با بستن کلید K مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۱/۷۵، افزایش می‌یابد.

۲) ۱/۷۵، کاهش می‌یابد.

۳) ۰/۲۵، افزایش می‌یابد.

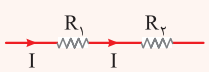
۴) ۰/۲۵، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

۱) **به هم بستن مقاومت‌ها:**

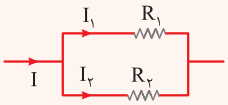
الف) متوالی:



$$R_{1,2} = R_1 + R_2$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ب) موازی:

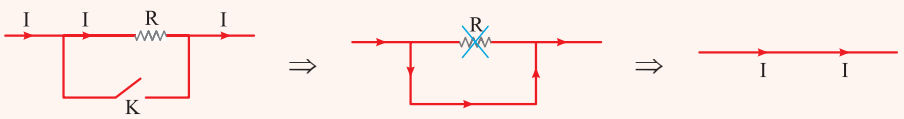


$$R_{1,2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

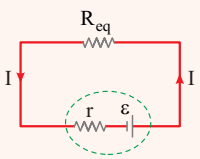
$$V_1=V_2 \Rightarrow I_1R_1=I_2R_2$$

۲) **ساده‌کردن مدار**: نقاطی از مدار را که با سیم رابط (با مقاومت ناچیز) به یکدیگر متصل شده‌اند، با پتانسیل یکسان و با نام مشترک یک نقطه در نظر می‌گیریم. بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی، دو سر مدار یا دو سر مولد را مبنا قرار داده و سایر اجزاء مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری‌شده جای‌گذاری می‌کنیم تا شکل ساده‌تری از مدار به دست آید.

۳) **اتصال کوتاه**: هرگاه دو سر یک مقاومت یا مجموعه‌ای از مقاومت‌ها، به وسیلهٔ یک سیم رابط (با مقاومت ناچیز) به هم متصل شوند، تمام جریان از درون آن سیم گذشته و از مقاومت مذکور هیچ جریانی نمی‌گذرد. در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم که آن مقاومت، اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.



۴) **جریان در یک مدار تک‌حلقه**:

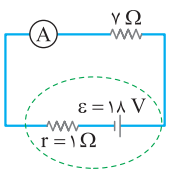


$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$$

جریان الکتریکی (A) — نیروی محرکهٔ مولد (V) — مقاومت معادل مدار (Ω) — مقاومت درونی مولد (Ω)

پاسخ تشریحی

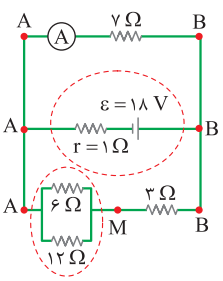
گام اول: در حالی که کلید K باز است مقاومت‌های ۶Ω و ۱۲Ω با هم متوالی می‌شوند، اما معادل آن دو اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردند. بنابراین مدار به صورت مقابل ساده می‌شود:

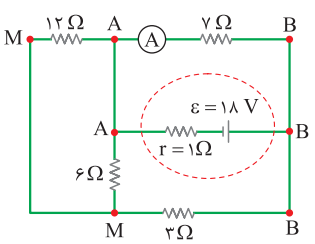


$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \xrightarrow[R_{eq}=7\Omega\,,\,r=1\Omega]{\varepsilon=18V} I=\frac{18}{7+1}$$

$$\Rightarrow I=\frac{18}{8}=2/25A$$

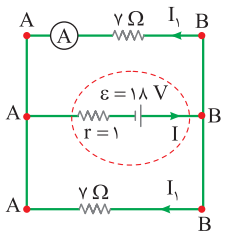
گام دوم: در حالتی‌که کلید بسته شود، مدار به شکل زیر درمی‌آید:





موازی: $\frac{6\times12}{6+12}=4\Omega$

متوالی: $4+3=7\Omega$



دو مقاومت ۷Ω با یکدیگر موازی هستند. پس مقاومت معادل مدار به صورت زیر است:

$$R_{eq}=\frac{7\times7}{7+7}=3/5\Omega$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: جریان اصلی مدار و جریانی را که از آمپرسنج می‌گذرد، به دست می‌آوریم:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \xrightarrow[r=1\Omega]{\varepsilon=18V\,,\,R_{eq}=3/5\Omega} I=\frac{18}{3/5+1}=\frac{18}{4/5}=4A$$

در گره B داریم:

$$I=I_1+I_1=2I_1 \xrightarrow{I=4A} I_1=2A$$

آمپرسنج در حالت کلید بسته، جریان $2A$ را نشان می‌دهد. بنابراین جریان $0/25A$ کاهش یافته است.

تست و پاسخ ۷۰

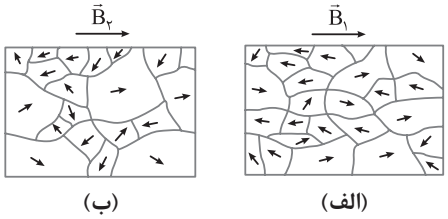
جهت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی در یک ماده، در حضور میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$، به شکل‌های (الف) و (ب) است. کدام مورد، به ترتیب، دربارهٔ نوع این مادهٔ مغناطیسی و مقایسهٔ بزرگی میدان‌های مغناطیسی درست است؟

۱) پارامغناطیسی، $B_1 > B_2$

۲) پارامغناطیسی، $B_2 > B_1$

۳) فرومغناطیسی، $B_1 > B_2$

۴) فرومغناطیسی، $B_2 > B_1$



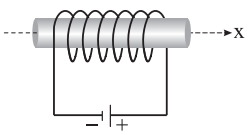
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جا که این ماده دارای حوزه‌های مغناطیسی است، پس فرومغناطیس محسوب می‌شود. مادهٔ پارامغناطیس اصلاً حوزهٔ مغناطیسی ندارد. بنابراین ۱ و ۲ رد می‌شوند.

گام دوم: میدان مغناطیسی B_2 با حضور خود، حوزه‌های مغناطیسی هم‌جهت با خود در ماده را بزرگ‌تر کرده است بنابراین اندازهٔ میدان مغناطیسی B_2 بزرگ‌تر از B_1 است.

تست و پاسخ ۷۱

در شکل زیر، محور سیملولهٔ آرمانی منطبق بر محور x و جریان الکتریکی عبوری از آن برابر $4A$ است. اگر تعداد حلقه‌های سیملوله در هر سانتی‌متر از طول سیملوله برابر ۸ باشد، میدان مغناطیسی در داخل سیملوله و دور از لبه‌های آن، برحسب گاوس کدام است؟ $(\mu_0 = 12/5\times10^{-7}\ \frac{T.m}{A})$



۱) $40\vec{i}$

۲) $4\vec{i}$

۳) $-40\vec{i}$

۴) $-4\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

اندازهٔ میدان مغناطیسی درون یک سیملولهٔ آرمانی حامل جریان و دور از لبه‌های آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_0 N I}{\ell}$$

B: اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)، μ_0: تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T.m}{A})$، N: تعداد حلقه‌ها، I: جریان الکتریکی (A)، ℓ: طول سیملوله (m)

رابطهٔ تسلا و گاوس به صورت مقابل است: $1G=10^{-4}T$

میدان مغناطیسی فوق، به موازات محور سیملوله بوده و جهت آن به کمک قاعدهٔ دست راست به دست می‌آید. به طوری که اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت جریان سیملوله ببندیم، انگشت شست، جهت میدان درون سیملوله را نشان می‌دهد.

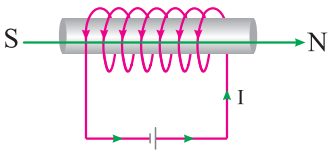
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** اندازهٔ میدان مغناطیسی درون سیملوله را به دست می‌آوریم:

$$B=\frac{\mu_{\circ} NI}{\ell} \xrightarrow[I=4A\ ,\ \ell=1cm=10^{-2}m]{\mu_{\circ}=12/5\times10^{-7}\frac{T.m}{A}\ ,\ N=8} B=\frac{12/5\times10^{-7}\times8\times4}{10^{-2}}$$

$$\Rightarrow B=400\times10^{-5}T=40\times10^{-4}T \xrightarrow{1G=10^{-4}T} B=40\,G$$

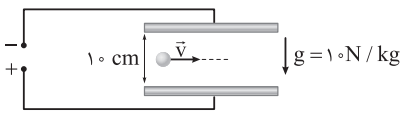
گام دوم: جهت این میدان با قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود. با توجه به شکل، جهت این میدان مغناطیسی به طرف راست است.



$$\vec{B}=(40\,G)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۷۲

مطابق شکل زیر، ذره‌ای به جرم $0/4g$ و بار الکتریکی $10\mu C$ با سرعتی به بزرگی $5\times10^{3}\,m/s$ در امتداد افق، وارد فضای بین دو صفحهٔ رسانای افقی که اختلاف پتانسیل الکتریکی آن‌ها $20V$ است، می‌شود. بین این دو صفحه، میدان مغناطیسی یکنواختی به اندازهٔ چند تسلا و در چه جهتی ایجاد شود تا ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد؟



۱) $0/04$، $\otimes$
۲) $0/04$، $\odot$
۳) $0/12$، $\otimes$
۴) $0/12$، $\odot$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) نیروی وارد بر بار ذره‌ای q در میدان الکتریکی E:

$$\vec{F}=q\vec{E}$$

($\vec{F}$: نیرو (N)، q: بار الکتریکی (C)، $\vec{E}$: میدان الکتریکی (N/C))

اگر $q>0$ باشد، $\vec{F}$ و $\vec{E}$ هم‌جهت هستند؛ اما اگر $q<0$ باشد، $\vec{F}$ و $\vec{E}$ در خلاف جهت یکدیگر قرار می‌گیرند.

۲) میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحهٔ رسانای موازی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$E=\frac{\Delta V}{d}$$

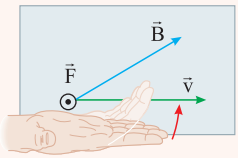
(E: اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت (N/C)، ΔV: اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات (V)، d: فاصلهٔ بین دو صفحه (m))

۳) نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F=|q|\,v\,B\sin\theta$$

(F: اندازهٔ نیرو (N)، $|q|$: بار الکتریکی (C)، v: تندی ذرهٔ باردار (m/s)، B: اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)، θ: زاویهٔ بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$)

جهت این نیرو، با استفاده از قاعدهٔ دست راست برای ذرات دارای بار مثبت، به صورت زیر تعیین می‌گردد:
اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان بازشدهٔ ما در جهت $\vec{v}$ باشد ـ به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویهٔ کوچک‌تری که $\vec{v}$ با $\vec{B}$ می‌سازد و در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم، در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد ـ انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذرهٔ دارای بار مثبت خواهد بود.



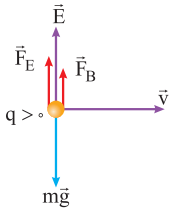
۴) اگر ذرهٔ بارداری به وزن $m\vec{g}$ از ناحیه‌ای عبور کند که هم‌زمان تحت تأثیر دو میدان الکتریکی و مغناطیسی است و بخواهد بدون انحراف، مسیر مستقیم خود را ادامه دهد، باید نیروی خالص وارد بر این ذره در راستای قائم، برابر صفر باشد.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** جهت میدان الکتریکی یکنواخت، از صفحهٔ دارای بار مثبت به طرف صفحهٔ دارای بار منفی است؛ پس جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ به طرف بالا است و اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E=\frac{\Delta V}{d} \xrightarrow[d=10\,cm=0/1m]{\Delta V=20V} E=\frac{20}{0/1}=200\,V/m \text{ یا } N/C$$

گام دوم: نیروی ناشی از میدان الکتریکی (F_E) رو به بالا است:



$$F_E=qE \xrightarrow[E=200\,N/C]{q=10\mu C=10\times10^{-6}C} F_E=10^{-5}\times200\,N$$

$$\Rightarrow F_E=2\times10^{-3}\,N$$

گام سوم: اندازه و جهت $\vec{F}_B$ را تعیین می‌کنیم:

$$\vec{F}_E+\vec{F}_B+m\vec{g}=0$$

$$mg=0/4\times10^{-3}\times10=4\times10^{-3}\,N$$

$$2\times10^{-3}+F_B=4\times10^{-3} \Rightarrow F_B=2\times10^{-3}\,N$$

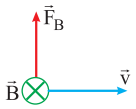
بنابراین $\vec{F}_B$ باید رو به بالا باشد:

گام چهارم: اندازه و جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را به دست می‌آوریم:

$$F_B=|q|v_B\sin\theta \xrightarrow[|q|=10\mu C=10^{-5}C\ ,\ \theta=90^\circ]{F_B=2\times10^{-3}N\ ,\ v=5\times10^3\,m/s} 2\times10^{-3}=10^{-5}\times5\times10^3\times B\times1$$

$$\Rightarrow B=\frac{2}{5}\times10^{-1}=0/04\,T$$

جهت $\vec{B}$ نیز با توجه به قاعدهٔ دست راست، درون‌سو خواهد بود.



تست و پاسخ ۷۳

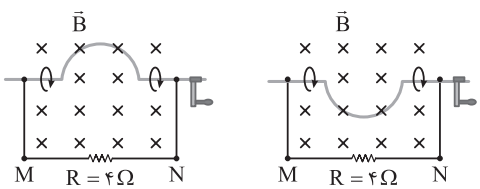
در شکل (۱)، میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابتی به بزرگی $0/08\,T$ بر صفحه عمود و شعاع نیم‌حلقهٔ رسانا $10\,cm$ است. وضعیت نیم‌حلقه در مدت $0/2\,s$، پس از نیم‌دور چرخش یکنواخت در جهت نشان داده شده، از شکل (۱) به شکل (۲) تبدیل می‌شود. در این بازهٔ زمانی، جریان متوسط القایی عبوری از مقاومت R چند میلی‌آمپر و در چه جهتی است؟

۱) π، از M به N

۲) π، از N به M

۳) $\frac{\pi}{2}$، از M به N

۴) $\frac{\pi}{2}$، از N به M



پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) **قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:** هرگاه شار مغناطیسی‌ای که از مدار بسته‌ای می‌گذرد تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است.

$$\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

ε_{av}: نیروی محرکهٔ القایی متوسط (V)
N: تعداد حلقه
$\Delta\Phi$: تغییر شار مغناطیسی (Wb)
Δt: بازهٔ زمانی (s)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در حالت خاص، اگر تغییر شار مغناطیسی به علت تغییر مساحت سطح مدار بسته باشد، می‌توان نوشت:

$$\Phi = AB\cos\theta \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NB\cos\theta\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

(Φ: شار مغناطیسی (Wb)، B: اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)، A: مساحت سطح مدار (m^2)، θ: زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح)

جریان القایی متوسط ایجادشده در مقاومت R از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$$

(I_{av}: جریان القایی متوسط (A)، ε_{av}: نیروی محرکهٔ القایی متوسط (V)، R: مقاومت الکتریکی (Ω))

۲) **قانون لنز:** جریان حاصل از نیروی محرکهٔ القایی در یک مدار یا پیچه، در جهتی است که آثار میدان مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به‌وجود آورندهٔ جریان القایی یعنی تغییر شار مغناطیسی مخالفت می‌کند. از قانون لنز برای تعیین جهت جریان القایی استفاده می‌شود.

الف) وقتی شار افزایشی است:

میدان مغناطیسی القایی (ثانویه) در جهت مخالف میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با افزایش شار مخالفت کند.

ب) وقتی شار کاهشی است:

میدان مغناطیسی القایی (ثانویه) هم‌جهت با میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با کاهش شار مخالفت کند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در بازهٔ زمانی ۰ / ۲s مساحت سطح مدار بسته، به اندازهٔ مساحت سطح دایره‌ای به شعاع ۱۰cm افزایش می‌یابد.

$$\Delta A = \pi r^2 \xrightarrow{r=10\,cm=10^{-1}\,m} \Delta A = \pi\times10^{-2}\,m^2$$

اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$|\varepsilon_{av}| = NB\cos\theta\frac{\Delta A}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta A=\pi\times10^{-2}\,m^2\ ,\ \Delta t=0/2\,s]{N=1\ ,\ B=0/08\,T\ ,\ \cos\theta=1}$$

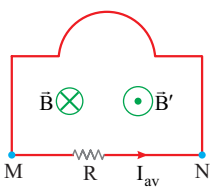
$$|\varepsilon_{av}| = 1\times8\times10^{-2}\times1\times\frac{\pi\times10^{-2}}{0/2} = \frac{8\times10^{-4}\times\pi}{0/2} = 4\pi\times10^{-3}\,V$$

گام دوم: اندازهٔ جریان القایی متوسط ایجادشده در مدار بسته را حساب می‌کنیم:

$$|I_{av}| = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} \xrightarrow[R=4\Omega]{|\varepsilon_{av}|=4\pi\times10^{-3}\,V} |I_{av}| = \frac{4\pi\times10^{-3}}{4} = \pi\times10^{-3}\,A$$

$$\Rightarrow |I_{av}| = \pi\,mA$$

گام سوم: شار مغناطیسی عبوری در بازهٔ زمانی ۰ تا ۰ / ۲s در حال افزایش است. پس طبق قانون لنز، جهت جریان القایی باید به‌گونه‌ای عمل کند که میدان مغناطیسی ناشی از آن ($\vec{B}'$) در خلاف جهت $\vec{B}$ باشد. طبق قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در مقاومت R باید از M به طرف N باشد تا میدان مغناطیسی برون‌سوی حاصل از آن ($\vec{B}'$) برخلاف جهت میدان $\vec{B}$ باشد.



تست و پاسخ ۷۴

با استفاده از سیمی مسی به قطر مقطع ۱mm حلقه‌ای به شعاع ۲۵cm ساخته شده است. در مدتی که شار مغناطیسی عبوری از حلقه ۰ / ۸Wb تغییر می‌کند، تعداد الکترون‌های شارش‌یافته در آن برابر کدام است؟ ($e = 1/6\times10^{-19}\,C$ و مقاومت ویژهٔ مس $2\times10^{-8}\,\Omega.m$ است.)

۱) $1/25\times10^{16}$ ۲) $1/25\times10^{20}$ ۳) 5×10^{16} ۴) 5×10^{20}

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

۱) **مقاومت یک جسم در دمای ثابت**، با طول و جنس آن نسبت مستقیم دارد، ولی با مساحت سطح مقطع آن رابطهٔ عکس دارد.

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

(R: مقاومت الکتریکی (Ω)، L: طول (m)، A: مساحت سطح مقطع (m^2)، ρ: مقاومت ویژه (Ωm))

۲) اگر شار مغناطیسی‌ای که از یک مدار بسته می‌گذرد تغییر کند، نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی حاصل از آن سبب می‌شود که بار الکتریکی Δq در آن مدار شارش کند.

$$\Delta q = -N \frac{\Delta \Phi}{R}$$

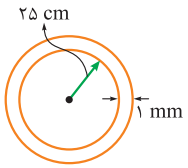
(Δq: بار الکتریکی شارش‌یافته (C)، N: تعداد حلقه، $\Delta \Phi$: تغییر شار مغناطیسی (Wb)، R: مقاومت الکتریکی مدار (Ω))

۳) بار الکتریکی جسم، مضرب درستی از بار بنیادی e است.

$$\Delta q = n e$$

(Δq: بار الکتریکی (C)، n: تعداد الکترون‌ها، e: بار بنیادی $= 1/6 \times 10^{-19} C$)

پاسخ تشریحی **گام اول:** مقاومت الکتریکی سیم مسی را به دست می‌آوریم. طول این سیم، همان محیط دایره‌ای به شعاع $25\ cm$ است.



$$L = 2\pi r = 2\pi \times 25 \times 10^{-2} = 0/5\pi\ m$$

$$A = \pi \frac{d^2}{4} \xrightarrow{d=1mm=10^{-3}m} A = \frac{\pi}{4} \times 10^{-6}\ m^2$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow[A=\frac{\pi}{4}\times10^{-6}m^2]{\rho=2\times10^{-8}\Omega.m\ ,\ L=0/5\pi m} R = 2 \times 10^{-8} \times \frac{0/5\pi}{\frac{\pi}{4}\times10^{-6}} = 4 \times 10^{-2}\Omega$$

گام دوم: اندازهٔ بار الکتریکی گذرنده از سیم را حساب می‌کنیم:

$$|\Delta q| = N \frac{|\Delta \Phi|}{R} \xrightarrow[R=4\times10^{-2}\Omega]{N=1,\ |\Delta\Phi|=0/8Wb} |\Delta q| = 1 \times \frac{0/8}{4 \times 10^{-2}} = 20\ C$$

گام سوم: تعداد الکترون‌های شارش‌یافته را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{|\Delta q|}{e} \xrightarrow[e=1/6\times10^{-19}C]{|\Delta q|=20C} n = \frac{20}{1/6 \times 10^{-19}} = 1/25 \times 10^{20}$$

تست و پاسخ ۷۵

معادلهٔ جریان ـ زمان عبوری از یک القاگر با ضریب القاوری $2\ mH$ در SI به صورت $I = 0/2\sin(100\pi t)$ است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، برای اولین بار انرژی ذخیره‌شده در القاگر برابر با $30\ \mu J$ می‌شود؟

۱) $\frac{1}{200}$ ۲) $\frac{1}{300}$ ۳) $\frac{1}{400}$ ۴) $\frac{1}{600}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

۱) انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

(U: انرژی ذخیره‌شده (J)، L: ضریب القاوری (H)، I: جریان الکتریکی (A))

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲) معادلهٔ جریان متناوب سینوسی:

جریان الکتریکی (A) — زمان (s)

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

بیشینهٔ اندازهٔ جریان (A) — دوره (s)

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از انرژی ذخیره‌شده در القاگر، جریان الکتریکی مربوط به آن را به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow[L=2mH=2\times10^{-3}H]{U=30\mu J=30\times10^{-6}J} 30\times10^{-6} = \frac{1}{2}\times2\times10^{-3}\times I^2$$

$$\Rightarrow 30\times10^{-3} = I^2 \Rightarrow I^2 = \frac{3}{100} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{3}}{10}A$$

گام دوم: اکنون باید ببینیم که پس از لحظهٔ $t=0$ جریان گذرنده از این القاگر در چه زمانی، برای اولین بار به $\frac{\sqrt{3}}{10}A$ می‌رسد:

$$I = 0/2\sin(100\pi t) \xrightarrow{I=\frac{\sqrt{3}}{10}A} \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{2}{10}\sin(100\pi t)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(100\pi t) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \sin(100\pi t) \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 100\pi t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{300}s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی پایه: شیمی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۲، شیمی (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۱

تست و پاسخ ۷۶

کدام مطلب درست است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) نام شیمیایی ترکیب‌های PCl_5، CS_2 و Cr_2O_3 به ترتیب فسفر پنتاکلرید، کربن دی‌سولفید و دی‌کروم تری‌اکسید است.

۲) در دما و فشار یکسان، حجم ۴/۲ گرم گاز اتن، بیشتر از حجم ۴ گرم گاز متان است.

۳) در دما و فشار اتاق برای یک گاز معین، همواره نسبت شمار مولکول‌ها به شمار مول‌های گاز مقدار ثابتی است.

۴) $CuCl_2$ یک ترکیب غیرآلی است و در ساختار آن، مانند SCl_2 یون‌های کلرید وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) نام شیمیایی ترکیب‌های PCl_5، CS_2، C_2O_3 به ترتیب فسفر پنتاکلرید، کربن دی‌سولفید و کروم (III) اکسید است.

نکته برای نام‌گذاری ترکیب‌های یونی از پیشوندهای یونانی (مونو، دی، تری و ...) استفاده نمی‌شود. هم‌چنین می‌دانیم برای فلزهایی که چند نوع کاتیون دارند، باید بار آن‌ها به صورت عدد رومی (I، II، III و ...) بیاید.

۲) براساس قانون آووگادرو در دما و فشار یکسان، حجم مولی گازها با هم برابر است؛ بنابراین می‌توان به جای حجم گازها، مقدار مول آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

$$?molC_2H_4 = 4/2 gC_2H_4 \times \frac{1 molC_2H_4}{28 gC_2H_4} = 0/15$$

$$?molCH_4 = 4 gCH_4 \times \frac{1 molCH_4}{16 gCH_4} = 0/25$$

$$\Rightarrow CH_4 \text{ مول} > C_2H_4 \text{ مول} \Rightarrow CH_4 \text{ حجم} > C_2H_4 \text{ حجم}$$

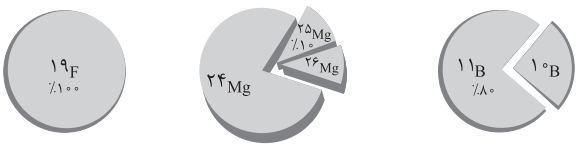
۳) می‌دانیم در دما و فشار اتاق، همهٔ گازها جزء مواد مولکولی هستند. نسبت شمار مولکول‌ها به شمار مول‌های یک مادهٔ مولکولی همواره برابر با عدد آووگادرو $(6/02\times10^{23})$ است.

$$\frac{\text{شمار مولکول‌های ماده}}{\text{شمار مول ماده}} = 6/02\times10^{23} \Rightarrow \text{شمار مول ماده} = \frac{\text{شمار مولکول‌های ماده}}{6/02\times10^{23}}$$

۴) $CuCl_2$ یک ترکیب یونی است و در ساختار آن یون‌های مس (II) و کلرید وجود دارد اما SCl_2 که از دو نافلز تشکیل شده، یک ترکیب مولکولی است و از واحدهای مولکولی مجزا تشکیل شده است؛ یعنی در ساختار آن هیچ یونی (از جمله یون‌های کلرید) وجود ندارد.

تست و پاسخ ۷۷

با توجه به شکل‌های زیر که ایزوتوپ‌های ۳ عنصر فلوئور، منیزیم و بور را در یک نمونهٔ طبیعی نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ (عدد جرمی را معادل جرم اتمی در نظر بگیرید.)



جرم اتمی میانگین : ۲۴/۳۲ amu

- **ایزوتوپ فلوئور ـ ۲۰ به یقین ساختگی است.**
- **جرم اتمی میانگین بور، برابر ۱۰/۸ amu است.**
- **جرم مولی BF_3 برابر ۶۷/۸ گرم بر مول است.**
- **درصد فراوانی سبک‌ترین ایزوتوپ منیزیم، برابر ۷۹ درصد است.**

یعنی ^{24}Mg

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی همهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: از آن‌جایی که درصد فراوانی ایزوتوپ فلوئور ـ ۱۹ در طبیعت برابر ۱۰۰ است؛ بنابراین هیچ ایزوتوپ دیگری از آن در طبیعت وجود ندارد و ایزوتوپ فلوئور ـ ۲۰ به یقین ساختگی است.

عبارت دوم:

روش اول: محاسبهٔ جرم اتمی میانگین با فرمول کتاب درسی:

$$M=\frac{M_1\times F_1+M_2\times F_2}{F_1+F_2}=\frac{(10\times 20)+(11\times 80)}{20+80}=10/8\ amu$$

روش دوم: محاسبهٔ جرم اتمی میانگین با فرمول تستی:

$$M=M_1+\left[(M_2-M_1)\times\frac{F_2}{F_{کل}}\right]=10+\left[\overbrace{(11-10)}^{1}\times\frac{\overbrace{80}^{0/8}}{100}\right]=10/8\ amu$$

عبارت سوم: جرم مولی BF_3 به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\text{جرم مولی } BF_3=(1\times \text{جرم مولی B})+(3\times \text{جرم مولی F})=(10/8\times 1)+(19\times 3)=67/8\ g.mol^{-1}$$

عبارت چهارم: می‌دانیم که مجموع درصد فراوانی ایزوتوپ‌ها برابر ۱۰۰ است، پس داریم:

$$F_1+F_2+F_3=100\Rightarrow F_1+10+F_3=100\Rightarrow F_3=90-F_1$$

روش اول: استفاده از فرمول کتاب درسی:

$$M=\frac{M_1F_1+M_2F_2+M_3F_3}{F_1+F_2+F_3}\Rightarrow 24/32=\frac{(24\times F_1)+(25\times 10)+(26\times \overbrace{F_3}^{90-F_1})}{100}$$

$$2432=24F_1+250+2340-26F_1\Rightarrow 2F_1=158\Rightarrow F_1=\%79$$

روش دوم: استفاده از فرمول تستی:

$$M=M_1+\left[(M_2-M_1)\times\frac{F_2}{F_{کل}}\right]+\left[(M_3-M_1)\times\frac{F_3}{F_{کل}}\right]$$

$$24/32=24+[(\overbrace{25}^{1}-24)\times\frac{\overbrace{10}^{0/1}}{100}]+[(\overbrace{26}^{2}-24)\times\frac{F_3}{100}]\Rightarrow 0/32=0/1+\frac{2F_3}{100}\Rightarrow 0/22=\frac{2F_3}{100}\Rightarrow F_3=\%11$$

$$\Rightarrow F_1=90-F_3=90-11=\%79$$

تست و پاسخ ۷۸

کدام موارد زیر نادرست است؟

الف) انرژی لایه‌ها و تفاوت انرژی میان لایه‌ها در یک اتم، یک کمیت کوانتومی است.

ب) تفاوت طول موج دو نوار رنگی مجاور در طیف نشری خطی اتم هیدروژن، با افزایش طول موج این نوارهای رنگی، کاهش می‌یابد.

پ) در یک اتم، لایه‌های الکترونی که عدد کوانتومی اصلی کوچک‌تر یا مساوی ۳ دارند، نمی‌توانند زیرلایه‌ای با عدد کوانتومی فرعی برابر ۳ داشته باشند.

ت) مطابق قاعدهٔ آفبا، زیرلایه‌ای که پس از زیرلایهٔ 6s و قبل از زیرلایهٔ 6p الکترون می‌گیرد، نمی‌تواند $n+l$ برابر ۷ داشته باشد.

۱) الف ـ پ
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ ب ـ ت
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

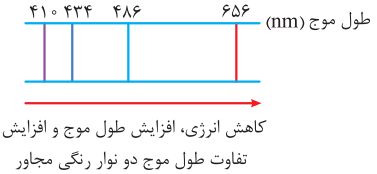
پاسخ تشریحی موارد «ب» و«ت» نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف) مقادیر انرژی یک الکترون در یک اتم، تنها می‌تواند مقادیر معینی باشد. در واقع انرژی الکترون‌ها در اتم‌ها، کوانتومی است. هم‌چنین دادوستد انرژی، هنگام انتقال الکترون از یک لایه به لایهٔ دیگر کوانتومی است. یعنی الکترون هنگام انتقال از یک لایه به لایهٔ دیگر، انرژی را به صورت پیمانهٔ معینی، جذب یا نشر می‌کند؛ بنابراین انرژی لایه‌ها و تفاوت انرژی میان لایه‌ها در اتم، یک کمیت کوانتومی (پیمانه‌ای) است. ✓

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ب) در طیف نشری خطی اتم هیدروژن، با کاهش انرژی (افزایش طول موج) نوارهای رنگی، تفاوت طول موج آن‌ها افزایش می‌یابد (نه کاهش!) و خطوط رنگی از هم دورتر می‌شوند. ✖



کاهش انرژی، افزایش طول موج و افزایش تفاوت طول موج دو نوار رنگی مجاور

پ) در هر لایهٔ الکترونی، مقادیر مجاز برای عدد کوانتومی فرعی (l) می‌تواند برابر صفر تا $(n-1)$ باشد؛ بنابراین در لایهٔ الکترونی سوم زیر لایه‌هایی با $l=0(s)$، $l=1(p)$ و $l=2(d)$ وجود دارند، در لایهٔ دوم زیرلایه‌های $l=0(s)$ و $l=1(p)$ وجود دارند و در لایهٔ اول فقط زیرلایهٔ $l=0(s)$ وجود دارد.

ت) مطابق قاعدهٔ آفبا زیر لایه‌ها به ترتیب زیر الکترون می‌گیرند: ✖

$$\overset{n+l=5+2=7}{\uparrow}$$
$$1s\ 2s\ 2p\ 3s\ 3p\ 4s\ 3d\ 4p\ 5s\ 4d\ 5p\ \underbrace{6s}\ 4f\ 5d\ \underbrace{6p}\ 7s\ 5f\ 6d\ 7p$$
$$\underset{n+l=4+3=7}{\downarrow}$$

تست و پاسخ ۷۹

با توجه به جدول زیر، چند مورد از مطالب داده‌شده به یقین درست است؟

عنصر	A	D	E	M
نسبت شمار الکترون‌های دارای $n=3$ به $n=4$ در اتم	۸	۳	۱۳	۷

- عنصر A به یقین به دستهٔ s جدول تناوبی تعلق دارد.
- شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم عنصرهای D و E برابر است.
- نسبت شمار الکترون‌های دارای $l=0$ به $l=2$ در اتم E برابر ۱/۴ است.
- مجموع $n+l$ الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایهٔ یون M^{3+} برابر ۲۵ است.
- شعاع اتمی عنصر A بزرگ‌تر از شعاع عنصر D است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی عبارت‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم درست‌اند.

با توجه به اطلاعات جدول داده‌شده آرایش الکترونی عنصرهای E، D، A و M را رسم می‌کنیم.

عنصر A می‌تواند $_{19}K$ یا $_{28}Ni$ باشد.

$$_{19}A: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ \underbrace{3s^2\ 3p^6}_{8e^-}\ \underbrace{4s^1}_{1e^-} \quad \text{یا} \quad _{28}A: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ \underbrace{3s^2\ 3p^6\ 3d^8}_{16e^-}\ \underbrace{4s^2}_{2e^-} \Rightarrow \frac{16}{2}=\frac{8}{1}=8$$

$$_{34}D: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ \underbrace{3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}}_{18e^-}\ \underbrace{4s^2 4p^4}_{6e^-} \Rightarrow \frac{18}{6}=3$$

$$_{24}E: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ \underbrace{3s^2\ 3p^6\ 3d^5}_{13e^-}\ \underbrace{4s^1}_{1e^-} \Rightarrow \frac{13}{1}=13$$

$$_{26}M: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ \underbrace{3s^2\ 3p^6\ 3d^6}_{14e^-}\ \underbrace{4s^2}_{2e^-} \Rightarrow \frac{14}{2}=7$$

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در عنصر A در یک حالت، می‌تواند آخرین الکترون وارد زیرلایهٔ 3d شود؛ بنابراین این عنصر می‌تواند به دستهٔ d جدول تناوبی تعلق داشته باشد، پس نمی‌توانیم بگوییم این عبارت به یقین درست است!

عبارت دوم: عنصر D دارای ۶ الکترون ظرفیت $(4s^2 4p^4)$ است و عنصر E نیز ۶ الکترون ظرفیتی $(3d^5 4s^1)$ دارد.

عبارت سوم: در اتم E، ۷ الکترون در زیرلایه‌های با $l=0$ $(1s^2, 2s^2, 3s^2, 4s^1)$ و ۵ الکترون نیز در زیرلایهٔ با $l=2$ آن $(3d^5)$ وجود دارد.

$$\frac{7}{5}=1/4$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

عبارت چهارم: آرایش الکترونی M^{3+} به صورت زیر است:

$$M^{3+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \overset{\substack{n=3 \\ \downarrow}}{3d^5} \overset{\substack{l=2 \\ \uparrow}}{}$$

برای الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه $n+l = 5\times(n+l) = 5\times(3+2) = 25$

نکته برای محاسبهٔ $(n+l)$ الکترون‌های یک زیرلایه، حاصل جمع n و l را در شمار الکترون‌های موجود در آن زیرلایه ضرب می‌کنیم.

عبارت پنجم: در هر دوره از چپ به راست شعاع اتمی عناصر کاهش می‌یابد. عنصر A (چه $_{19}A$ باشد و چه $_{28}A$) و $_{34}D$ هر دو در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارند و $_{34}D$ نسبت به A ($_{19}A$ یا $_{28}A$) در سمت راست جدول تناوبی قرار دارد، پس شعاع اتمی کوچک‌تری نسبت به A دارد.

نکته در هر دوره از جدول تناوبی، شمار لایه‌های الکترونی اشغال‌شده برابر است اما از چپ به راست، با افزایش شمار پروتون‌های هسته، جاذبه بر روی لایه‌های الکترونی افزایش می‌یابد و لایه‌ها متراکم‌تر شده و شعاع اتمی کوچک‌تر می‌شود.

تست و پاسخ ۸۰

پس از موازنهٔ معادلهٔ واکنش‌های زیر، کدام مطلب درست است؟

a) $C_4H_8(g) + NO(g) \rightarrow CO_2(g) + N_2(g) + H_2O(l)$

b) $TiO_2(s) + BrF_3(l) \rightarrow TiF_4(s) + Br_2(l) + O_2(g)$

c) $Sn(s) + HNO_3(aq) \rightarrow SnO_2(s) + NO(g) + H_2O(l)$

۱) بزرگ‌ترین ضریب استوکیومتری، متعلق به یکی از مواد شرکت‌کننده در واکنش (a) است.

۲) مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها، در معادله‌های (a) و (c) برابر است.

۳) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در یکی از معادله‌هایی که هر سه حالت فیزیکی مواد را دارد، برابر ۲۰ است.

۴) در واکنش (b) ضریب استوکیومتری هیچ دو ماده‌ای با یکدیگر برابر نیست. ← یا واکنش b یا واکنش c

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی ابتدا معادلهٔ واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم:

a) $C_4H_8(g) + 12NO(g) \rightarrow 4CO_2(g) + 6N_2(g) + 4H_2O(l)$

b) $3TiO_2(s) + 4BrF_3(l) \rightarrow 3TiF_4(s) + 2Br_2(l) + 3O_2(g)$

c) $3Sn(s) + 4HNO_3(aq) \rightarrow 3SnO_2(s) + 4NO(g) + 2H_2O(l)$

بررسی گزینه‌ها:

۱) بزرگ‌ترین ضریب استوکیومتری در بین همهٔ مواد شرکت‌کننده در واکنش‌های a، b و c متعلق به NO از واکنش a، با ضریب ۱۲ است.

۲) مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها در معادلهٔ a برابر ۱۳ و در معادلهٔ c برابر ۷ است.

۳) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده (یعنی هم واکنش‌دهنده‌ها و هم فراورده‌ها) در معادلهٔ b و c که هر سه حالت ماده (یعنی s ،l و g) را دارند به ترتیب برابر ۱۵ و ۱۶ است.

۴) در واکنش b ضریب استوکیومتری TiO_2، TiF_4 و O_2 با هم برابر است.

تست و پاسخ ۸۱

در تبدیل فلزی از دورهٔ چهارم جدول تناوبی به یون پایدار M^{2+}، مجموع $n+l$ الکترون‌های ظرفیت فلز M، ۹ واحد کاهش می‌یابد. اگر تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در این یون برابر ۷ باشد، کدام مطلب به یقین درست است؟

۱) تفاوت عدد اتمی عنصر M با عدد اتمی گاز نجیب هم‌دورهٔ خود برابر ۷ است.

۲) نسبت عدد جرمی به بار الکتریکی این یون برابر ۳۲ است.

۳) در بیرونی‌ترین لایهٔ الکترونی اتم عنصر M، یک الکترون وجود دارد.

۴) اتم عنصر M دارای ۷ زیرلایهٔ الکترونی است که از الکترون پر شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی در بین عناصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی فقط هنگام تبدیل $_{24}Cr$ به $_{24}Cr^{2+}$ و $_{29}Cu$ به $_{29}Cu^{2+}$، مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی ۹ واحد کاهش می‌یابد.

$_{24}Cr:[_{18}Ar]\underbrace{3d^5 4s^1}$

مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی: $\underbrace{[(3+2)\times 5]}_{3d^5}+\underbrace{[(4+0)\times 1]}_{4s^1}=29 \Rightarrow$

$_{24}Cr^{2+}:[_{18}Ar]\underbrace{3d^4}$

مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی: $\underbrace{(3+2)\times 4}_{3d^4}=20$

$_{29}Cu=[_{18}Ar]\underbrace{3d^{10} 4s^1}$

مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی: $\underbrace{[(3+2)\times 10]}_{3d^{10}}+\underbrace{[(4+0)\times 1]}_{4s^1}=54 \Rightarrow$

$_{29}Cu^{2+}:[_{18}Ar]\underbrace{3d^9}$

مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی: $\underbrace{(3+2)\times 9}_{3d^9}=45$

بررسی گزینه‌ها:

۱) تفاوت عدد اتمی $_{29}Cu$ با $_{36}Kr$ برابر ۷ واحد است اما تفاوت عدد اتمی $_{24}Cr$ با $_{36}Kr$ برابر ۱۲ واحد است. پس نمی‌توانیم بگوییم این مطلب به یقین درست است!

۲)

گام اول: ابتدا عدد جرمی $_{24}Cr^{2+}$ و $_{29}Cu^{2+}$ را محاسبه کنیم.

روش اول:

$$_{24}Cr^{2+}\begin{cases}p=24\\e=22\\n-e=7\end{cases}\Rightarrow n-22=7\Rightarrow n=29\Rightarrow A=p+n=24+29=53$$

$$_{29}Cu^{2+}\begin{cases}p=29\\e=27\\n-e=7\end{cases}\Rightarrow n-27=7\Rightarrow n=34\Rightarrow A=p+n=29+34=63$$

روش دوم: استفاده از رابطهٔ تستی مقابل:

$$Z=\frac{A-(\text{اختلاف نوترون‌ها و الکترون‌ها})}{2}\ \text{بار}+\begin{cases}{}_{24}Cr^{2+}:24=\dfrac{A-7+(+2)}{2}\Rightarrow A=53\\ {}_{29}Cu^{2+}:29=\dfrac{A-7+(+2)}{2}\Rightarrow A=63\end{cases}$$

گام دوم: حال نسبت عدد جرمی به بار هر کاتیون را حساب می‌کنیم:

$$_{24}^{53}Cr^{2+}:\frac{53}{2}=26/5$$

$$_{29}^{63}Cu^{2+}:\frac{63}{2}=31/5$$

۳) در هر دو عنصر $_{24}Cr$ و $_{29}Cu$، در بیرونی‌ترین لایهٔ الکترونی $(n=4)$، فقط یک الکترون وجود دارد.

۴) در عنصر $_{29}Cu$ فقط ۶ زیرلایه و در عنصر $_{24}Cr$ فقط ۵ زیرلایه از الکترون پر شده است.

$_{24}Cr:\underbrace{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6}_{\text{زیرلایه‌های پر}}\ 3d^5 4s^1$

$_{29}Cu:\underbrace{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10}}_{\text{زیرلایه‌های پر}}\ 4s^1$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۸۲

برای مصرف ۱۶۰ لیتر گاز اوزون در واکنش زیر، به چند گرم آمونیاک نیاز است و در این واکنش چند گرم فراوردهٔ جامد تولید می‌شود؟ (چگالی گاز اکسیژن در شرایط آزمایش ۱/۴۲ گرم بر لیتر است.) $(H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

$NH_4NO_3(s)$

(موازنهٔ معادلهٔ واکنش کامل شود.) $2NH_3(g)+aO_3(g)\rightarrow bNH_4NO_3(s)+4O_2(g)+cH_2O(g)$

۱) ۱۴۲، ۴۰/۲۳ ۲) ۹۴، ۴۰/۲۳ ۳) ۱۴۲، ۶۰/۳۵ ۴) ۹۴، ۶۰/۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی **گام اول:** موازنهٔ معادلهٔ واکنش را کامل می‌کنیم:

$$2NH_3(g)+4O_3(g)\rightarrow NH_4NO_3(s)+4O_2(g)+H_2O(g)$$

گام دوم: ابتدا چگالی گاز O_3 را از روی چگالی گاز O_2، در شرایط یکسان، حساب می‌کنیم. می‌دانیم در دما و فشار یکسان، نسبت چگالی دو گاز برابر با نسبت جرم مولی آن‌ها است.

$$\frac{d_{O_3}}{d_{O_2}}=\frac{M_{O_3}}{M_{O_2}}\rightarrow\frac{d_{O_3}}{1/42}=\frac{48}{32}\rightarrow d_{O_3}=\frac{\overset{3}{\cancel{48}}}{\underset{2}{\cancel{32}}}\times 1/42=3\times 0/71=2/13\ g.L^{-1}$$

گام سوم: جرم آمونیاک مورد نیاز را از روی حجم گاز اوزون مصرف‌شده محاسبه می‌کنیم.

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$?gNH_3=160LO_3\times\frac{2/13gO_3}{1LO_3}\times\frac{1molO_3}{48gO_3}\times\frac{2molNH_3}{4molO_3}\times\frac{17gNH_3}{1molNH_3}=60/35\ gNH_3$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\text{جرم}}_{NH_3}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{NH_3}}=\frac{\text{چگالی}\times\text{حجم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{O_3}}\Rightarrow\frac{xg}{2\times 17}=\frac{160\times 2/13}{4\times 48}\Rightarrow x=60/35gNH_3$$

گام چهارم: جرم فراوردهٔ جامد $(NH_4NO_3(s))$ را حساب می‌کنیم.

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$?gNH_4NO_3=160LO_3\times\frac{2/13gO_3}{1LO_3}\times\frac{1molO_3}{48gO_3}\times\frac{1molNH_4NO_3}{4molO_3}\times\frac{80gNH_4NO_3}{1molNH_4NO_3}=142\ gNH_4NO_3$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\text{جرم}}_{NH_4NO_3}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{NH_4NO_3}}=\frac{\text{چگالی}\times\text{حجم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{O_3}}\Rightarrow\frac{xg}{1\times 80}=\frac{160\times 2/13}{4\times 48}\Rightarrow x=142\ gNH_4NO_3$$

تست و پاسخ ۸۳

چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ فرایند هابر، درست است؟

- روشی صنعتی برای تولید آمونیاک از واکنش گازهای نیتروژن و هیدروژن است.
- با استفاده از کاتالیزگر آهن، سرعت و دمای لازم برای انجام واکنش افزایش می‌یابد.
- واکنش آن برگشت‌ناپذیر است و در دما و فشار اتاق به کندی انجام می‌شود.
- در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری فراوردهٔ آن در آب بیشتر از انحلال‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها است.
- حالت فیزیکی فراوردهٔ آن در دما و فشار اتاق، مایع است که می‌تواند به طور مستقیم به خاک تزریق شود.

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در صنعت از واکنش گازهای هیدروژن و نیتروژن به روش هابر برای تولید آمونیاک استفاده می‌کنند. ✓

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$$

عبارت دوم: با استفاده از کاتالیزگر ورقهٔ آهنی، تنها سرعت انجام واکنش افزایش می‌یابد. استفاده از کاتالیزگر ارتباطی به تغییر دما ندارد. ✗

عبارت سوم: واکنش تولید آمونیاک به روش هابر، واکنشی برگشت‌پذیر است (نه برگشت‌ناپذیر!) و دقت داشته باشید که در دما و فشار اتاق گازهای هیدروژن و نیتروژن حتی در حضور جرقه یا کاتالیزگر نیز با هم واکنش نمی‌دهند. ✗

عبارت چهارم: آمونیاک یک مادهٔ مولکولی قطبی است اما گازهای هیدروژن و نیتروژن مولکول‌های ناقطبی دارند؛ بنابراین انحلال‌پذیری آمونیاک در آب از گازهای هیدروژن و نیتروژن بیشتر است. ✓

عبارت پنجم: حالت فیزیکی فراوردهٔ فرایند هابر (آمونیاک)، در دما و فشار اتاق، گاز است نه مایع! البته دقت داشته باشید که آمونیاک مایع می‌تواند به طور مستقیم به خاک تزریق شود. ✗

تست و پاسخ ۸۴

۰/۰۰۴ مول نمک XSO_4 را در ۴ لیتر آب‌مقطر حل می‌کنیم تا محلولی با چگالی یک گرم بر میلی‌لیتر و غلظت ۱۶۰ppm از این نمک تهیه شود. جرم مولی فسفات فلز X (با بار الکتریکی مشابه در XSO_4)، چند گرم بر مول است؟ $(O = 16, P = 31, S = 32 : g.mol^{-1})$

۱) ۳۱۵ ۲) ۳۵۸

۳) ۲۶۲ ۴) ۳۸۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره تیپ تست‌هایی که جرم مولی یک عنصر موجود در ترکیب را مجهول می‌دهند و از محاسبات استوکیومتری یا محاسبات غلظت محلول‌ها برای تعیین آن استفاده می‌کنند، در کنکورهای اخیر بسیار مورد توجه طراحان بوده است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا از روی غلظت ppm و حجم محلول، جرم حل‌شوندهٔ XSO_4 را پیدا می‌کنیم و به کمک مول XSO_4 جرم مولی فلز X را محاسبه می‌کنیم. حال با توجه به بار کاتیون X^{2+}، فرمول شیمیایی فسفات این کاتیون را می‌نویسیم و جرم مولی فسفات فلز X را حساب می‌کنیم.

پاسخ تشریحی

گام اول: از روی غلظت و حجم محلول XSO_4، جرم مولی X را حساب می‌کنیم:

روش اول: استفاده از رابطهٔ غلظت ppm:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 160 = \frac{m_{XSO_4}(g)}{4 \times 10^3 (g)} \times 10^6 \Rightarrow m_{XSO_4} = 0/64\,g$$

(۴L ≈ ۴kg)

$$\text{مول } XSO_4 = \frac{\text{جرم } XSO_4}{\text{جرم مولی } XSO_4} \Rightarrow 0/004 = \frac{0/64}{\text{جرم مولی } XSO_4} \Rightarrow \text{جرم مولی } XSO_4 = 160\,g.mol^{-1}$$

$$X + \underbrace{32}_{S} + (\underbrace{16}_{O} \times 4) = 160 \Rightarrow X = 64\,g.mol^{-1}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{مول } XSO_4 \text{ حل‌شونده}}{\text{ضریب}} = \frac{\frac{ppm}{10^6} \times \text{جرم محلول}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{XSO_4 \text{ محلول}}} \Rightarrow \frac{0/004}{1} = \frac{4 \times 10^3 \times \frac{160}{10^6}}{1 \times (X + \underbrace{32}_{S} + (\underbrace{16}_{O} \times 4))} \Rightarrow X = 64\,g.mol^{-1}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: با توجه به فرمول یون سولفات (SO_4^{2-}) می‌توان فهمید که کاتیون در XSO_4 به صورت X^{2+} است؛ بنابراین فرمول شیمیایی فسفات (PO_4^{3-}) این کاتیون به‌صورت $X_3(PO_4)_2$ خواهد بود.

$$\text{جرم مولی } X_3(PO_4)_2 = \underbrace{(64\times3)}_{192} + \underbrace{(31+\underbrace{(16\times4)}_{64})\times2}_{95} = 382\,g.mol^{-1}$$

تست و پاسخ ۸۵

چه تعداد از موارد زیر امکان‌پذیر است؟

- **یک مولکول اتم‌های H و F داشته باشد، اما توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی نداشته باشد.**
- **یک ماده دارای مولکول‌های ناقطبی باشد، اما نقطهٔ جوش بیشتری نسبت به آب داشته باشد.**
- **یک ترکیب مولکولی قطبی، جاذبهٔ بین مولکولی قوی‌تری از یک ترکیب یونی داشته باشد.**
- **یک هیدروکربن بتواند به هر نسبت در آب حل شود.**
- **یک ترکیب یونی، فاقد اتم فلزی باشد.**

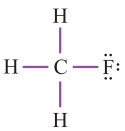
۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول، دوم و پنجم امکان‌پذیر هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در صورتی میان مولکول‌های یک ماده می‌تواند پیوند هیدروژنی برقرار شود که در ساختار مولکول‌های آن ماده، اتم H به یکی از اتم‌های F یا O یا N متصل باشد، در غیر این‌صورت مولکول‌های آن ماده توانایی برقراری پیوند هیدروژنی بین خودشان را نخواهند داشت؛ برای مثال در بین مولکول‌های CH_3F پیوند هیدروژنی برقرار نمی‌شود.



عبارت دوم: اگر جرم مولی دو ماده نزدیک به هم باشد، هر چه گشتاور دو قطبی مولکول‌های سازندهٔ یک ماده بزرگ‌تر باشد، نقطهٔ‌جوش آن نیز بیشتر خواهد بود. اما ممکن است جرم مولی مادهٔ ناقطبی به اندازه‌ای بیشتر باشد که بر عامل قطبیت غلبه کند و نقطهٔ جوش مادهٔ ناقطبی بیشتر از مادهٔ قطبی شود. مثلاً مادهٔ ناقطبی ید (I_2) نقطهٔ جوش بیشتری نسبت به آب دارد.

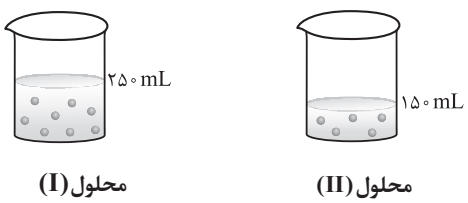
عبارت سوم: در ترکیب‌های یونی واحدهای مجزای مولکول وجود ندارد و استفاده از واژهٔ جاذبهٔ بین مولکولی برای ترکیب‌های یونی نادرست است. البته ماده‌های یونی جاذبه‌های قوی‌تری (پیوند یونی) نسبت به ماده‌های مولکولی (نیروی بین مولکولی) دارند.

عبارت چهارم: گشتاور دوقطبی اغلب هیدروکربن‌ها ناچیز و در حدود صفر است. یک هیدروکربن هرگز نمی‌تواند به هر نسبتی در آب حل شود.

عبارت پنجم: ترکیب‌های یونی که کاتیون سازندهٔ آن‌ها آمونیوم است، فاقد اتم فلزی هستند. مانند آمونیوم کلرید (NH_4Cl).

تست و پاسخ ۸۶

شکل داده‌شده دو محلول با حل‌شونده‌های متفاوت را در آب نشان می‌دهد. هر ذرهٔ نشان داده شده در شکل، هم‌ارز با ۰/۰۵ مول و چگالی محلول‌های (I) و (II) به ترتیب ۱/۶ و ۱/۲ گرم بر میلی‌لیتر است. اگر درصد جرمی حل‌شوندهٔ دو محلول برابر باشد، جرم مولی حل‌شوندهٔ محلول (II) چند برابر جرم مولی حل‌شوندهٔ محلول (I) است؟



محلول (I) محلول (II)

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۸۴

۳) ۱/۱۹ ۴) ۱/۴۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی

روش اول:

گام اول: مول حل‌شوندهٔ محلول‌های (I) و (II) را حساب می‌کنیم.

$$n_I = ۸ \times ۰/۰۵ = ۰/۴\,mol \quad n_{II} = ۵ \times ۰/۰۵ = ۰/۲۵\,mol$$

گام دوم: درصد جرمی دو محلول را برابر هم قرار می‌دهیم تا نسبت جرم مولی حل‌شوندهٔ محلول I (M_I) به جرم مولی حل‌شوندهٔ محلول II (M_{II}) به دست آید.

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\overbrace{\text{جرم مولی} \times \text{مول}}^{\text{جرم حل شونده}}}{\underbrace{\text{جرم محلول}}_{\text{چگالی محلول} \times \text{حجم محلول(mL)}}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۰/۴ \times M_I}{۲۵۰ \times ۱/۶} = \frac{۰/۲۵ \times M_{II}}{۱۵۰ \times ۱/۲} \Rightarrow \frac{M_{II}}{M_I} = ۰/۷۲$$

روش دوم: از فرمول «غلظت مولی $= \frac{۱۰ad}{\text{جرم مولی}}$» استفاده می‌کنیم:

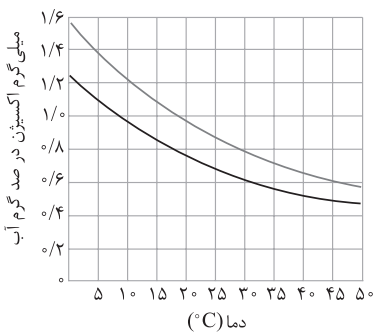
$$\frac{\text{غلظت مولی محلول (I)}}{\text{غلظت مولی محلول (II)}} = \frac{\frac{۸ \times ۰/۰۵}{۲۵۰}}{\frac{۵ \times ۰/۰۵}{۱۵۰}} = \frac{۱۵ \times ۸}{۵ \times ۲۵} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰ \times a_I d_I}{\frac{\text{I جرم مولی}}{}} = \frac{۲۴}{۲۵} \Rightarrow \frac{\text{II جرم مولی}}{\text{I جرم مولی}} \times \frac{d_I}{d_{II}} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{II جرم مولی}}{\text{I جرم مولی}} = \frac{۲۴}{۲۵} \times \frac{۱/۲}{۱/۶} = \frac{۱۸}{۲۵} = ۰/۷۲$$

تست و پاسخ ۸۷

شکل مقابل، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن را در آب آشامیدنی و آب دریا نشان می‌دهد. اگر گاز اکسیژن آزادشده از افزایش دمای ۲ تُن آب از دمای $۱۸^\circ C$ به $۴۵^\circ C$ بتواند ۰/۱۲۵ مول گاز متان را به طور کامل بسوزاند، نوع این آب کدام است و شمار مولکول‌های اکسیژن حل‌شده در ۳۰۰ گرم از این آب که نسبت به گاز O_2 سیر شده است، در دمای اتاق به تقریب کدام است؟ $(O = ۱۶\,g.mol^{-1})$



۱) آشامیدنی ـ ۵×۱۰^{۱۹}

۲) دریا ـ ۵×۱۰^{۱۹}

۳) دریا ـ ۵×۱۰^{۲۲}

۴) آشامیدنی ـ ۵×۱۰^{۲۲}

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا واکنش موازنه‌شدهٔ سوختن کامل متان را می‌نویسیم و از روی مول متان، جرم گاز اکسیژن را حساب می‌کنیم. سپس با توجه به این‌که از افزایش دمای ۲ تُن $(۲ \times ۱۰^۶\,g)$ محلول چه‌قدر اکسیژن آزاد شده، مقدار گاز اکسیژن آزادشده از ۱۰۰ گرم آب را محاسبه می‌کنیم و با مقایسهٔ مقدار به‌دست‌آمده با نمودارهای داده‌شده نوع آب را تعیین می‌کنیم. برای حل قسمت دوم مسئله، در دمای اتاق $(۲۵^\circ C)$ انحلال‌پذیری O_2 را در ۱۰۰ گرم آب از روی نمودار پیدا می‌کنیم و با ضرب‌کردن آن در عدد ۳، جرم گاز اکسیژن موجود در ۳۰۰ گرم آب به‌دست می‌آید و از روی آن، شمار مولکول‌های اکسیژن را به دست می‌آوریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

نکته در یک دما و فشار معین، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در آب دریا کم‌تر از آب آشامیدنی است، به عبارت دیگر **با افزایش مقدار نمک حل‌شده در آب، انحلال‌پذیری گازهای ناقطبی مانند اکسیژن، در آب کاهش می‌یابد.**

دلیل: بین یون‌های یک نمک حل‌شده در آب (مانند یون‌های Na^+ و Cl^-) و مولکول‌های آب، نیروی جاذبهٔ قوی یون ـ دوقطبی برقرار می‌شود؛ از این‌رو تمایل مولکول‌های قطبی آب به مولکول‌های ناقطبی اکسیژن کاهش یافته و گاز اکسیژن از محلول پا به *فرار می‌ذاره!* (انحلال‌پذیری آن کم می‌شود.)

پاسخ تشریحی

قسمت اول:

گام اول: معادلهٔ موازنه‌شدهٔ سوختن کامل متان را می‌نویسیم و جرم O_2 لازم برای سوختن ۰/۱۲۵ مول متان را حساب می‌کنیم.

$$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$$

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$?gO_2 = 0/125\,molCH_4 \times \frac{2\,molO_2}{1\,molCH_4} \times \frac{32\,gO_2}{1\,molO_2} = 8\,gO_2$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}_{O_2}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{CH_4}} \Rightarrow \frac{xg}{2 \times 32} = \frac{0/125}{1} \Rightarrow x = 8\,gO_2$$

گام دوم: به ازای حرارت‌دادن ۲ تُن آب، ۸ گرم (۸۰۰۰ میلی‌گرم) گاز اکسیژن آزاد شده است، حال مقدار گاز اکسیژن آزادشده از حرارت‌دادن ۱۰۰ گرم آب را حساب می‌کنیم.

$$?mgO_2 = 100\,g\,\text{آب} \times \frac{8000\,mgO_2}{2 \times 10^6\,g\,\text{آب}} = 0/4\,mgO_2$$

با توجه به نمودارهای داده‌شده، اگر دمای ۱۰۰ گرم آب آشامیدنی (منحنی بالایی) را از $18^\circ C$ به $45^\circ C$ بالا ببریم، ۰/۴ میلی‌گرم گاز اکسیژن از آب آزاد می‌شود.

قسمت دوم:

گام اول: با توجه به نمودار، در دمای اتاق $(25^\circ C)$ در ۱۰۰ گرم آب آشامیدنی، حداکثر ۰/۹ میلی‌گرم گاز اکسیژن حل می‌شود، حال مقدار گاز اکسیژن در ۳۰۰ گرم آب را حساب می‌کنیم.

$$?mgO_2 = 300\,g\,\text{آب} \times \frac{0/9\,mgO_2}{100\,g\,\text{آب}} = 2/7\,mgO_2$$

گام دوم: شمار مولکول‌های اکسیژن در ۲/۷mg از آن را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,\text{مولکول}\ O_2 = 2/7 \times 10^{-3}\,gO_2 \times \frac{1\,molO_2}{32\,gO_2} \times \frac{6/02 \times 10^{23}\,\text{مولکول}\ O_2}{1\,molO_2} \simeq 5 \times 10^{19}\,\text{مولکول}\ O_2$$

تست و پاسخ ۸۸

کدام مطلب درست است؟

۱) ترکیب‌های آلی فرّار به دلیل داشتن نقطهٔ جوش پایین‌تر از آب، به راحتی در تصفیهٔ آب به روش تقطیر، از آب جدا می‌شوند.

۲) آب تصفیه‌شده به روش اسمز معکوس برخلاف روش تقطیر، نیاز به کلرزنی ندارد.

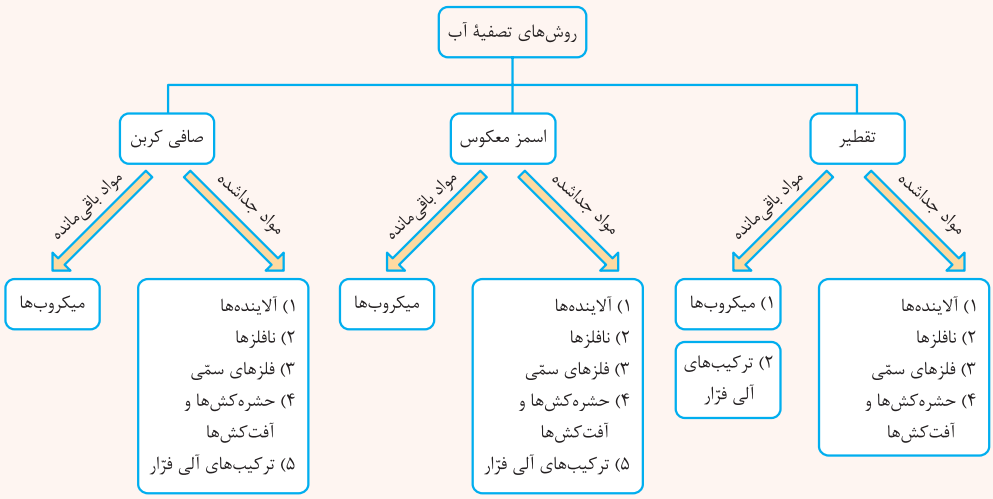
۳) اگر دو طرف یک غشای نیمه‌تراوا آب‌مقطر و شیر وجود داشته باشد، با گذشت زمان حجم شیر افزایش می‌یابد.

۴) آلاینده‌های موجود در آب تصفیه‌شده به روش صافی کربن، کم‌تر از آب تصفیه‌شده به روش اسمز معکوس است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه مقایسهٔ روش‌های تصفیهٔ آب:



پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) به دلیل پایین‌تربودن نقطهٔ جوش ترکیب‌های آلی فرّار از نقطهٔ جوش آب، این مواد در روش تقطیر، از آب حذف نمی‌شوند.

۲) در آب تصفیه‌شده به هر ۳ روش تقطیر، اسمز معکوس و صافی کربن، میکروب‌ها حذف نمی‌شوند و در هر ۳ روش نیاز به کلرزنی وجود دارد.

۳) در فرایند اسمز، مولکول‌های آب (حلال) از طریق غشای نیمه‌تراوا از محیط رقیق (آب مقطر) به محیط غلیظ (شیر) مهاجرت می‌کنند و حجم محلول غلیظ (شیر) افزایش می‌یابد.

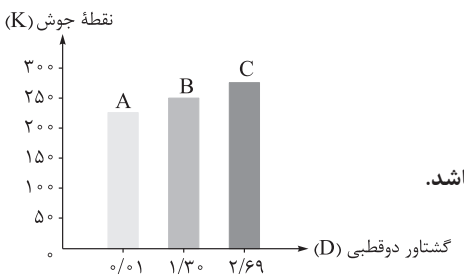
۴) در هر دو روش صافی کربن و اسمز معکوس، فقط میکروب‌ها، از آب جدا نمی‌شوند.

تست و پاسخ ۸۹

با توجه به نمودار روبه‌رو، چند مورد از مطالب زیر به یقین درست است؟

(جرم مولی هر سه مادهٔ آلی A، B و C را با یکدیگر برابر در نظر بگیرید.)

- **در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری مادهٔ A در هگزان از دو مادهٔ دیگر بیشتر است.**
- **اگر C یک آلدهید دوکربنه باشد، A می‌تواند آلکانی راست‌زنجیر با ۱۸ اتم هیدروژن باشد.**
- **حالت فیزیکی هیچ کدام از مواد A، B و C در دمای اتاق مایع نیست.**
- **بین مولکول‌های B نمی‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل شود.**



۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: گشتاور دو قطبی مادهٔ A از دو مادهٔ دیگر کم‌تر است؛ بنابراین در حلال‌های ناقطبی مانند هگزان بیشتر از دو مادهٔ دیگر حل می‌شود. ✓

عبارت دوم: آلکانی با ۱۸ اتم هیدروژن همان C_8H_{18} است. نقطهٔ جوش آلکان با ۸ کربن، بالاتر از دمای اتاق ($25^\circ C$ یا $298K$) است، در حالی‌که نقطهٔ جوش مادهٔ A کم‌تر از $250K$ است. درضمن جرم مولی آلدهید دوکربنه (C_2H_4O) با جرم مولی C_8H_{18} برابر نیست. ✗

عبارت سوم: نقطهٔ‌جوش هر سه مادهٔ A ، B و C پایین‌تر از دمای اتاق ($25^\circ C$ یا $298K$) است؛ بنابراین هر سه ماده در دمای اتاق به حالت گازی هستند. ✓

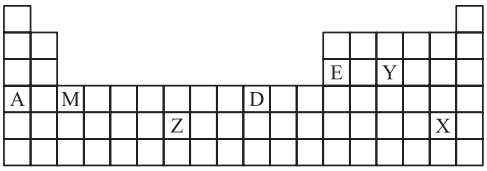
عبارت چهارم: نقطهٔ‌جوش مادهٔ B به تقریب برابر $250K$ یا $-23^\circ C$ است. دقت داشته باشید با این‌که آمونیاک نقطهٔ جوش پایین‌تری $(-33^\circ C)$ از مادهٔ B دارد ولی بین مولکول‌های آمونیاک پیوند هیدروژنی برقرار است؛ بنابراین به یقین نمی‌توانیم بگوییم که میان مولکول‌های سازندهٔ مادهٔ B نمی‌تواند پیوند هیدروژنی برقرار شود. ✗

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

تست و پاسخ ۹۰

با توجه به شکل زیر که جایگاه چند عنصر را در جدول تناوبی نشان می‌دهد، کدام موارد داده‌شده درست است؟



الف) مجموع شمار الکترون‌های دارای عددهای کوانتومی $l = ۲$ و $l = ۰$ در اتم عنصر D دو برابر مجموع شمار این الکترون‌ها در اتم عنصر A است.

ب) اتم‌های M و E با از دست دادن سه الکترون به کاتیون پایدار $+۳$ تبدیل می‌شوند و به آرایش الکترونی گاز نجیب می‌رسند.

پ) ترکیبی با فرمول $YX_۳$ یک مادهٔ مولکولی است که نسبت شمار جفت‌الکترون پیوندی به ناپیوندی در آن برابر ۰/۳ است.

ت) Z نخستین عنصر ساخت بشر است و تفاوت عدد اتمی دو عنصر هم‌گروه آن برابر ۵۱ است.

تکنسیم

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

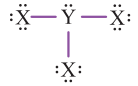
پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

الف) آرایش الکترونی عنصرهای $_{۲۸}D$ و $_{۱۹}A$ به صورت زیر است.

$$\left.\begin{array}{l} {}_{۲۸}D : ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ ۳p^۶ ۳d^۸ ۴s^۲ \Rightarrow (d)l = ۲ \text{ شمار الکترون در زیر لایهٔ} = ۸e^- \\ \Rightarrow (s)l = ۰ \text{ شمار الکترون در زیر لایهٔ} = ۸e^- \\ {}_{۱۹}A : ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ ۳p^۶ ۴s^۱ \Rightarrow ۰ \text{ شمار الکترون در زیر لایهٔ} = ۷e^- \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱۶}{۷} \neq ۲$$

ب) اتم‌های $_{۲۱}M$ با از دست دادن ۳ الکترون به آرایش گاز نجیب آرگون $(_{۱۸}Ar)$ می‌رسند و اتم‌های $_{۱۳}E$ با از دست دادن ۳ الکترون به آرایش گاز نجیب نئون $(_{۱۰}Ne)$ می‌رسند.

پ) عناصر $_{۱۵}Y$ و $_{۵۳}X$ با یکدیگر ترکیب مولکولی با فرمول $YX_۳$ تشکیل می‌دهند و ساختار لوویس (آرایش الکترون ـ نقطه‌ای) آن به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۳}{۱۰}$$

ت) عنصر $_{۴۳}Z$ همان تکنسیم است که اولین عنصر ساخت بشر می‌باشد. عدد اتمی عنصر بالایی آن ۲۵ و عدد اتمی عنصر پایین آن ۷۵ است و تفاوت عدد اتمی این دو عنصر برابر ۵۰ است.

تست و پاسخ ۹۱

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) شیوهٔ اتصال اتم(های) کربن در ترکیب‌های هیدروژن سیانید، اتان و اتن به اتم‌های جانبی متفاوت است.

۲) در مدل گلوله ـ میلهٔ پروپین، تفاوت اتصال کربن مرکزی به اتم‌های کربن جانبی از طریق تعداد میله‌ها قابل مشاهده است.

۳) در مدل فضاپرکن هیدروژن سیانید، اندازهٔ اتم مرکزی از اتم‌های جانبی بزرگ‌تر است.

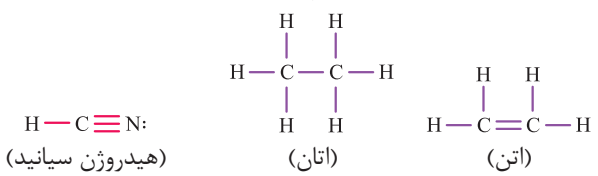
۴) در ساختار ۲، ۳ـ دی‌متیل هگزان، ۴ اتم کربن وجود دارند که هر کدام به سه کربن دیگر متصل هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی ۴ برخلاف سایر گزینه‌ها، نادرست است.

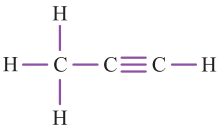
بررسی گزینه‌ها:

۱ در ساختار هیدروژن سیانید اتم کربن با یک پیوند یگانه و یک پیوند سه‌گانه به اتم‌های مجاور متصل است. در ساختار اتان هر اتم کربن با ۴ پیوند یگانه به اتم‌های مجاور متصل است و در ساختار اتن هر اتم کربن با یک پیوند دوگانه و دو پیوند یگانه به اتم‌های مجاور متصل است.

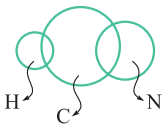


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

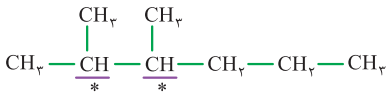
۲) در مدل گلوله و میله، اتم‌ها را با گلوله و پیوندها را با میله نمایش می‌دهند، پس تفاوت نوع و شمار پیوندهای هر اتم کربن با اتم‌های جانبی خود مشخص است. بنابراین در پروپین با ساختار مقابل، کربن مرکزی به یک کربن با یک میله (پیوند یگانه) و به یک کربن با سه میله (پیوند سه‌گانه) متصل است.



۳) شعاع اتمی کربن از هیدروژن و نیتروژن بزرگ‌تر است. ترتیب شعاع اتم‌ها: $C > N > H$



۴) با توجه به شکل زیر، در ساختار ۲، ۳ـ دی‌متیل هگزان فقط دو اتم کربن وجود دارد که هر کدام به سه اتم کربن دیگر متصل شده است.



تست و پاسخ ۹۲

براساس واکنش‌های زیر، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

الف) $Fe_2O_3(s) + HCl(aq) \rightarrow A(aq) + H_2O(l)$

ب) $FeCl_2(aq) + NaOH(aq) \rightarrow D(?) + NaCl(aq)$

پ) $Fe(s) + HCl(aq) \rightarrow M(aq) + H_2(g)$

- A و M فرمول یکسانی دارند.
- حالت فیزیکی مادهٔ D جامد است.
- از واکنش مادهٔ A با سدیم هیدروکسید کافی، رسوب قرمز مایل به قهوه‌ای ایجاد می‌شود.
- واکنش فلز مس با مادهٔ D در شرایط مناسب، پیشرفت خودبه‌خودی دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره با این‌که هر سال قبل از برگزاری کنکور سراسری سازمان سنجش به صورت رسمی اعلام می‌کند که واکنش‌های لازم را در آزمون سراسری خواهیم داد ولی تجربه نشون داده که باید واکنش‌هایی که در متن کتاب درسی مطرح شده رو کامل حفظ باشین! از ما گفتن بود. ☺

پاسخ تشریحی عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در واکنش «الف» مادهٔ A همان $FeCl_3$ است، ولی در واکنش «پ» مادهٔ M، $FeCl_2$ می‌باشد.

الف) $Fe_2O_3(s) + 6HCl(aq) \rightarrow 2FeCl_3(aq) + 3H_2O(l)$

پ) $Fe(s) + 2HCl(aq) \rightarrow FeCl_2(aq) + H_2(g)$

عبارت دوم: در واکنش «ب» مادهٔ D همان رسوب آهن (II) هیدروکسید ($Fe(OH)_2(s)$) است.

ب) $FeCl_2(aq) + 2NaOH(aq) \rightarrow Fe(OH)_2(s) + 2NaCl(aq)$

عبارت سوم: از واکنش $FeCl_3(aq)$ با محلول NaOH، رسوب قرمز مایل به قهوه‌ای (آهن (III) هیدروکسید) حاصل می‌شود.

$$FeCl_3(aq) + 3NaOH(aq) \rightarrow \underbrace{Fe(OH)_3(s)}_{\text{رسوب قرمز مایل به قهوه‌ای}} + 3NaCl(aq)$$

عبارت چهارم: از آن‌جایی‌که واکنش‌پذیری فلز مس از فلز آهن کم‌تر است پس واکنشی میان Cu با $Fe(OH)_2$ انجام نمی‌گیرد.

$Cu(s) + Fe(OH)_2(s) \rightarrow$ واکنش انجام نمی‌شود

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۳

در واکنش زیر، با مصرف کامل ۶/۴ گرم مس (I) سولفید با خلوص ۵۰٪، ۱/۶ لیتر گاز $NO_2(g)$ با چگالی ۱/۱۵ گرم بر لیتر به دست آمده است. بازده درصدی واکنش کدام است؟ $(N=14, O=16, S=32, Cu=64 : g.mol^{-1})$

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $Cu_2S(s)+HNO_3(aq)\rightarrow Cu(NO_3)_2(aq)+CuSO_4(aq)+NO_2(g)+H_2O(l)$

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش را می‌نویسیم:

$$Cu_2S(s)+12HNO_3(aq)\rightarrow Cu(NO_3)_2(aq)+CuSO_4(aq)+10NO_2(g)+6H_2O(l)$$

گام دوم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$?LNO_2\ (\text{مقدار نظری}) = 6/4\,g\,Cu_2S\ (\text{ناخالص}) \times \frac{50\,Cu_2S\ (\text{خالص})}{100\,g\,Cu_2S\ (\text{ناخالص})} \times \frac{1\,mol\,Cu_2S}{160\,g\,Cu_2S} \times \frac{10\,mol\,NO_2}{1\,mol\,Cu_2S} \times \frac{46\,g\,NO_2}{1\,mol\,NO_2} \times \frac{1\,LNO_2}{1/15\,g\,NO_2} = 8\,LNO_2$$

$$\text{بازده درصدی واکنش} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{1/6}{8} \times 100 = 20\%$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\underbrace{\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{Cu_2S(s)} = \underbrace{\frac{\text{چگالی گاز} \times \text{حجم گاز}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{NO_2(g)} \Rightarrow \frac{6/4 \times \frac{50}{100} \times \frac{x}{100}}{1 \times 160} = \frac{1/6 \times 1/15}{10 \times 46} \Rightarrow x = 20\%$$

تست و پاسخ ۹۴

۷ گرم از یک هیدروکربن که هر مولکول آن دارای ۱۵ اتم است، در شرایط STP با ۱۶/۸ لیتر گاز اکسیژن به طور کامل واکنش می‌دهد. کدام مطلب دربارهٔ این هیدروکربن نادرست است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) $\frac{2}{3}$ شمار کل پیوندهای آن از نوع $C-H$ است.

۲) می‌تواند دارای ۵ پیوند $C-C$ باشد.

۳) تفاوت جرم مولی آن با بنزن با جرم ۸ مول گاز هیدروژن برابر است.

۴) اگر ترکیب مورد نظر امکان واکنش با برم مایع را داشته باشد، از آن می‌توان پلیمری با ساختار $\left[\text{C}_6\text{H}_{10}\right]_n$ تهیه کرد.

سیرنشده باشد

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) **گام اول:** فرمول مولکولی هیدروکربن را C_xH_y در نظر می‌گیریم و واکنش سوختن آن را می‌نویسیم.

$$C_xH_y+(x+\frac{y}{4})O_2\rightarrow xCO_2+\frac{y}{2}H_2O$$

گام دوم: با استفاده از محاسبات استوکیومتری، رابطهٔ میان x و y را حساب می‌کنیم.

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$7\,g\,C_xH_y = \overset{3}{\cancel{16/8}}\,LO_2 \times \frac{1\,mol\,O_2}{\underset{4}{\cancel{22/4}}\,LO_2} \times \frac{1\,mol\,C_xH_y}{(x+\frac{y}{4})\,mol\,O_2} \times \frac{(12x+y)\,g\,C_xH_y}{1\,mol\,C_xH_y}$$

$$\Rightarrow \frac{7\times4}{3}=\frac{12x+y}{x+\frac{y}{4}} \Rightarrow 28x+7y=36x+3y \Rightarrow 4y=8x \Rightarrow y=2x$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

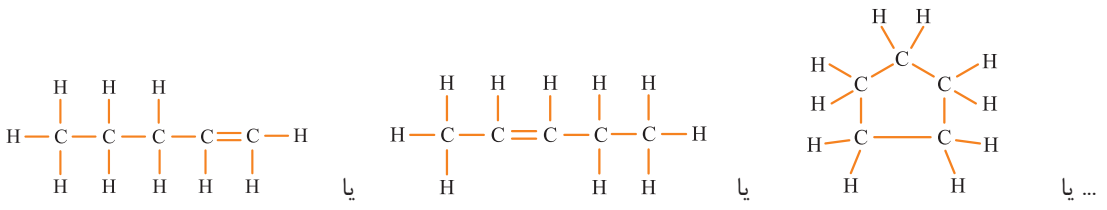
روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C_xH_y}}=\frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی}\times\text{ضریب}}_{O_2}}\Rightarrow\frac{7g}{1\times(12x+y)}=\frac{16/8\,L}{(x+\frac{y}{4})\times 22/4}\Rightarrow y=2x$$

گام سوم: حالا با توجه به این‌که در صورت سؤال گفته شده که شمار کل اتم‌های هیدروکربن برابر ۱۵ است، می‌توانیم مقدار x و y را حساب کنیم.

$$x+y=15\xrightarrow{y=2x}x+2x=15\Rightarrow 3x=15\Rightarrow x=5$$

فرمول مولکولی هیدروکربن C_5H_{10} است؛ بنابراین یا یک آلکن ۵کربنی (۱ـ پنتن یا ۲ـ پنتن) است یا سیکلو آلکان ۵کربنی (سیکلوپنتان، متیل سیکلوبوتان و ...):



۱ـ پنتن | یا | ۲ـ پنتن | یا | سیکلوپنتان | یا ...

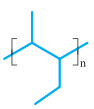
بررسی گزینه‌ها:

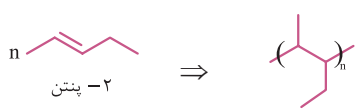
۱ با توجه به ساختار هر دو ترکیب می‌بینیم که شمار کل پیوندهای اشتراکی برابر ۱۵ و شمار پیوندهای $C-H$ برابر ۱۰ است.

$$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

۲ این ترکیب می‌تواند سیکلوپنتان باشد که در ساختار آن۵ پیوند $C-C$ وجود دارد.

۳ تفاوت جرم مولی هیدروکربن $(C_5H_{10}=70g.mol^{-1})$ با جرم مولی بنزن $(C_6H_6=78g.mol^{-1})$ برابر ۸ گرم بر مول است و این عدد با جرم مولی ۴ مول گاز هیدروژن (H_2) برابر می‌باشد نه ۸ مول!!!

۴ اگر هیدروکربن مد نظر سؤال ساختار آلکن داشته باشد، می‌تواند با برم مایع واکنش بدهد؛ بنابراین در این گزینه منظور طراح سؤال، آلکن ۵ کربنی است. اگر ترکیب مورد نظر ۲ـ پنتن باشد، می‌تواند پلیمری با ساختار  تشکیل دهد.



تست و پاسخ ۹۵

اگر آنتالپی سوختن کامل گاز اتان در دمای اتاق برابر با ۱۵۶۰– کیلوژول بر مول و آنتالپی پیوندهای $C=O$، $O=O$ و $C\equiv O$ به ترتیب برابر با ۷۹۹، ۴۹۵ و ۱۰۷۲ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی واکنش سوختن ناقص ۱ مول گاز اتان به طوری که فراورده‌های آن، $CO(g)$ و $H_2O(l)$ باشند، چند کیلوژول است؟

۱) ۱۰۰۳–
۲) ۲۱۱۷–
۳) ۱۰۳۰–
۴) ۲۷۱۱–

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی

گام اول: واکنش تبدیل $CO(g)$ به $CO_2(g)$ را می‌نویسیم و با استفاده از مقادیر میانگین آنتالپی‌های پیوند داده‌شده، آنتالپی این واکنش را حساب می‌کنیم.

$$CO(g)+\frac{1}{2}O_2(g)\rightarrow CO_2(g) \qquad \Delta H_{\text{واکنش}}=?$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}}=(\Delta H_{C\equiv O}+\frac{1}{2}\Delta H_{O=O})-(2\times\Delta H_{C=O})=(1072+\frac{495}{2})-(2\times 799)=-278/5\,kJ.mol^{-1}$$

گام دوم: با نوشتن واکنش سوختن ناقص اتان و استفاده از قانون هس، آنتالپی این واکنش را محاسبه می‌کنیم.

۱) $C_2H_6(g)+\frac{7}{2}O_2(g)\rightarrow 2CO_2(g)+3H_2O(l) \qquad \Delta H=-1560\,kJ.mol^{-1}$

۲) $CO(g)+\frac{1}{2}O_2(g)\rightarrow CO_2(g) \qquad \Delta H_2=-278/5\,kJ.mol^{-1}$

۳) $C_2H_6(g)+\frac{5}{2}O_2(g)\rightarrow 2CO(g)+3H_2O(l) \quad \Delta H_3=?\,kJ.mol^{-1}$

حال کافی است واکنش (۲) را معکوس و در عدد ۲ ضرب کنیم تا CO_2 با ضریب ۲ در سمت چپ واکنش (۲) قرار بگیرد.

$\frac{5}{2}O_2$

۱) $C_2H_6(g)+\frac{7}{2}O_2(g)\rightarrow 2CO_2(g)+3H_2O(l) \qquad \Delta H_1=-1560\,kJ.mol^{-1}$

۲′) $2CO_2(g)\rightarrow 2CO(g)+O_2(g) \qquad \Delta H'_2=(-2)\times(-278/5)=557\,kJ.mol^{-1}$

۳) $C_2H_6(g)+\frac{5}{2}O_2(g)\rightarrow 2CO(g)+3H_2O(l)$

$$\Delta H_3=\Delta H_1+\Delta H'_2=-1560+557=-1003\,kJ.mol^{-1}$$

تست و پاسخ ۹۶

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **علت پخته‌شدن بهتر تخم مرغ در آب نسبت به روغن زیتون به ازای تغییر دمای یکسان و به ازای جرم مساوی از آب و روغن، بیشتربودن گرمای ویژهٔ آب نسبت به روغن زیتون است.**
- **وقتی یک لیوان شیر گرم می‌نوشیم، گرمای مبادله‌شده به واسطهٔ اختلاف دمای شیر گرم با بدن، بیشتر از گرمای آزادشده در اثر گوارش و سوخت‌وساز شیر $37^\circ C$ در بدن است.**
- **برای مقایسهٔ پایداری الماس و گرافیت می‌توان از مقایسهٔ گرمای سوختن یک مول از آن‌ها استفاده کرد.**
- **از بین فرایندهای «تصعید کربن دی‌اکسید جامد، تجزیهٔ N_2O_4 به NO_2، انحلال کلسیم کلرید در آب و سوختن متان»، ۳ فرایند، گرماده بوده و علامت ΔH آن‌ها منفی است.**

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و سوم درست‌اند.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اگر به دو ظرف یکسان که در دمای $25^\circ C$ قرار دارند و حاوی جرم‌های برابری از آب و روغن هستند، گرما دهیم تا دمای هر دو به مقدار معینی (مثلاً تا $75^\circ C$) برسد و سپس در هر ظرف محتویات یک تخم مرغ را بریزیم، می‌بینیم که تخم مرغ در ظرف حاوی آب پخته می‌شود. اما روغن زیتون توانایی پختن تخم مرغ با این تغییر دما در همین زمان را ندارد، زیرا به ازای این تغییر دمای یکسان، آب به دلیل ظرفیت گرمایی بیشتر، گرمای بیشتری نسبت به روغن زیتون جذب کرده و همین گرمای بیشتر را به تخم مرغ منتقل می‌کند، پس باعث پختن تخم مرغ می‌شود.

نکته گرمای ویژهٔ آب از روغن زیتون بیشتر است؛ بنابراین به ازای جرم و تغییر دمای یکسان، آب نسبت به روغن زیتون گرمای بیشتری با محیط مبادله می‌کند.

عبارت دوم: با خوردن یک لیوان شیر با دمای بالاتر از دمای بدن (مثلاً $60^\circ C$)، ابتدا شیر (سامانه) مقداری انرژی به شکل گرما از دست می‌دهد تا جایی‌که با بدن (محیط) هم‌دما شود (به دمای $37^\circ C$ برسد). در مرحلهٔ بعد، در دمای ثابت $37^\circ C$، **بخش عمدهٔ** انرژی موجود در شیر هنگام فرایند گوارش و سوخت و ساز به بدن می‌رسد.

عبارت سوم: معادلهٔ واکنش سوختن الماس و گرافیت به صورت زیر است:

$$C_{(s,\text{گرافیت})} + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 393/5\,kJ$$

$$C_{(s,\text{الماس})} + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 395/4\,kJ$$

از آن‌جا که از سوختن یک مول الماس، گرمای بیشتری آزاد می‌شود، نتیجه می‌گیریم‌که آنتالپی سوختن الماس از گرافیت بیشتر است و سطح انرژی الماس از سطح انرژی گرافیت بالاتر است (الماس ناپایدارتر از گرافیت است).

عبارت چهارم: تصعید کربن دی‌اکسید جامد و واکنش تجزیهٔ $N_2O_4(g)$ به $NO_2(g)$ جزء فرایندهای گرماگیر $(\Delta H > 0)$ و انحلال کلسیم کلرید جامد در آب و سوختن متان جزء فرایندهای گرماده $(\Delta H < 0)$ هستند.

نکته مهم‌ترین فرایندهای گرماگیر و گرماده کتاب‌های درسی در جدول زیر آورده شده است.

فرایندهای گرماگیر $(\Delta H > 0)$	فرایندهای گرماده $(\Delta H < 0)$
۱) تغییر حالت‌های فیزیکی ذوب، تبخیر و تصعید (فرازش)	۱) واکنش‌های سوختن (مانند سوختن گاز هیدروژن، کربن، هیدروکربن‌ها و ...)
۲) واکنش فتوسنتز: $6CO_2(g) + 6H_2O(l) \rightarrow C_6H_{12}O_6(s) + 6O_2(g)$	۲) واکنش فلزهای گروه اول با گاز کلر: $2M(s) + Cl_2(g) \rightarrow 2MCl(s)$
۳) انحلال آمونیوم نیترات در آب: $NH_4NO_3(s) \xrightarrow{\text{در آب}} NH_4^+(aq) + NO_3^-(aq)$	۳) انحلال کلسیم کلرید در آب: گروه اول $CaCl_2(s) \xrightarrow{\text{در آب}} Ca^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq)$
۴) تجزیهٔ N_2O_4 به NO_2: $N_2O_4(g) \rightarrow 2NO_2(g)$	۴) تشکیل HCl از H_2 و Cl_2: $H_2(g) + Cl_2(g) \rightarrow 2HCl(g)$
۵) تولید اوزون از گاز اکسیژن: $3O_2(g) \rightarrow 2O_3(g)$	۵) تشکیل NH_3 از H_2 و N_2 (فرایند هابر): $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$
۶) تشکیل NO از N_2 و O_2: $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$	۶) تشکیل آمونیاک از هیدرازین و هیدروژن: $N_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$
۷) تشکیل N_2H_4 (هیدرازین) از H_2 و N_2: $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(g)$	۷) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید: $2H_2O_2(l) \rightarrow 2H_2O(l) + O_2(g)$
۸) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید جامد: $H_2(g) + I_2(s) \rightarrow 2HI(g)$	۸) واکنش گازهای CO و NO: $2CO(g) + 2NO(g) \rightarrow 2CO_2(g) + N_2(g)$
	۹) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید گازی: $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(g)$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۷

$5O_2, 4NH_3$

اگر تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرفی در واکنش زیر، ۴/۶ گرم باشد، با انجام کامل واکنش، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود و اگر مخلوط فراورده‌ها به شرایط STP برسند، حجم گاز به‌دست‌آمده چند لیتر خواهد بود؟ $(H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

$$4NH_3(g)+5O_2(g)\rightarrow 4NO(g)+6H_2O(g) \quad \Delta H=-906kJ$$

در شرایط STP، آب مایع است.

۱) ۴/۴۸ ، ۲۷/۸ ۲) ۱۱/۲ ، ۲۷/۸ ۳) ۴/۴۸ ، ۴۵/۳ ۴) ۱۱/۲ ، ۴۵/۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

قسمت اول: از روی تفاوت جرم NH_3 و O_2 مصرف‌شده، گرمای آزادشده را حساب می‌کنیم.

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$4NH_3(g)+5O_2(g)\rightarrow 4NO(g)+6H_2O(g)$ و $\Delta H=-906kJ$

با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به ازای مصرف ۴ مول NH_3 $(4\times17=68g)$، ۵ مول گاز اکسیژن $(5\times32=160g)$ مصرف می‌شود و ۹۰۶kJ انرژی آزاد می‌شود. به عبارت دیگر اگر تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرفی برابر ۹۲ گرم $(160-68=92g)$ باشد، ۹۰۶kJ انرژی آزاد می‌شود؛ پس می‌توان گرمای آزادشده به ازای تفاوت جرم ۴/۶ گرمی این دو ماده را حساب کرد.

$$?kJ=4/6g(NH_3\ و\ O_2\ تفاوت\ جرم)\times\frac{906kJ\ انرژی}{92g(NH_3\ و\ O_2\ تفاوت\ جرم)}=45/3kJ$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{NH_3\ و\ O_2\ تفاوت\ جرم}{(O_2\ ضریب\times O_2\ جرم‌مولی)-(NH_3\ ضریب\times NH_3\ جرم\ مولی)}=\frac{q}{|\Delta H|}\Rightarrow\frac{4/6g}{(5\times32)-(4\times17)}=\frac{q}{906}\Rightarrow q=45/3kJ$$

قسمت دوم: در صورتی که فراورده‌ها به شرایط STP بازگردند، حالت فیزیکی آب مایع خواهد بود، پس تنها فراوردهٔ گازی شکل $NO(g)$ خواهد بود.

$$4NH_3(g)+5O_2(g)\rightarrow 4NO(g)+6H_2O(l)$$

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به‌ازای مصرف ۴ مول NH_3 $(4\times17=68g)$، ۵ مول گاز اکسیژن $(5\times32=160g)$ مصرف می‌شود و ۴ مول $NO(g)$ تولید می‌شود. به عبارت دیگر اگر تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرفی برابر ۹۲ گرم $(160-68=92g)$ باشد، ۴ مول $NO(g)$ تولید می‌شود؛ بنابراین می‌توان حجم $NO(g)$ تولیدشده را به ازای تفاوت جرم ۴/۶ گرمی واکنش‌دهنده‌ها حساب کرد.

$$?LNO=4/6g(NH_3\ و\ O_2\ تفاوت\ جرم)\times\frac{4molNO}{92g(NH_3\ و\ O_2\ تفاوت\ جرم)}\times\frac{22/4LNO}{1molNO}=4/48LNO$$

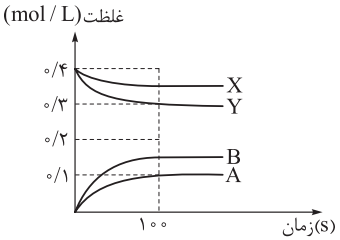
روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{NH_3\ و\ O_2\ تفاوت\ جرم}{(O_2\ ضریب\times O_2\ جرم\ مولی)-(NH_3\ ضریب\times NH_3\ جرم\ مولی)}=\frac{\overbrace{حجم\ مولی\times ضریب}^{NO}\ حجم}{}\Rightarrow\frac{4/6}{(5\times32)-(4\times17)}=\frac{xL}{4\times22/4}$$

$$\Rightarrow x=4/48L\ NO$$

تست و پاسخ ۹۸

براساس نمودار مقابل که مربوط به تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) سرعت کلی واکنش برابر با $5\times10^{-4}\ mol.L^{-1}.s^{-1}$ است.

ب) با افزایش دمای واکنش، در $t=50s$، $[A]$ می‌تواند $0/04\ mol.L^{-1}$ باشد.

پ) با استفاده از کاتالیزگر می‌توان به ازای همین مقدار واکنش‌دهنده، غلظت مادهٔ B را به $0/2\ mol.L^{-1}$ رساند.

ت) مجموع ضریب استوکیومتری فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها، با یکدیگر برابر نیست.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) می‌دانیم که با گذشت زمان، غلظت واکنش‌دهنده‌ها کاهش و غلظت فراورده‌ها افزایش می‌یابد؛ پس دو منحنی نزولی مربوط به واکنش‌دهنده‌های X و Y است و منحنی‌های صعودی مربوط به فراورده‌های A و B می‌باشد. از طرف دیگر با توجه به شکل، تا پایان واکنش (لحظهٔ افقی‌شدن نمودارها یا همان ثانیهٔ صدم)، تغییرات غلظت مادهٔ X برابر $-0/05$ مولار، تغییرات غلظت مادهٔ Y برابر $-0/1$ مولار، تغییرات غلظت مادهٔ A برابر $0/1$ مولار و تغییرات غلظت مادهٔ B برابر $0/15$ مولار است. با توجه به این‌که تغییرات غلظت مواد در یک واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است، معادلهٔ این واکنش را می‌توان به‌صورت $X + 2Y \rightarrow 2A + 3B$ نوشت.

نکته برای پیداکردن ضرایب استوکیومتری مواد می‌توان تغییرات غلظت هر ماده را به کوچک‌ترین تغییر غلظت، تقسیم کرد.

$$\text{ضریب } X = \frac{0/05}{0/05} = 1 \quad , \quad \text{ضریب } Y = \frac{0/1}{0/05} = 2 \quad , \quad \text{ضریب } A = \frac{0/1}{0/05} = 2 \quad , \quad \text{ضریب } B = \frac{0/15}{0/05} = 3$$

حال می‌توان از روی محاسبهٔ سرعت هر یک از مواد واکنش‌دهنده یا فراورده، سرعت واکنش را حساب کرد.

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_X}{1} = \frac{\bar{R}_Y}{2} = \frac{\bar{R}_A}{2} = \frac{\bar{R}_B}{3}$$

چون $\bar{R}_{\text{واکنش}}$ با $\bar{R}_X$ برابر است؛ بنابراین سرعت مصرف X را حساب می‌کنیم.

$$\bar{R}_X = -\frac{\Delta[X]}{\Delta t} = -\frac{(-0/05)}{100} = 5\times10^{-4}\,\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

ب) سرعت متوسط تولید مادهٔ A بدون تغییر دما برابر است با:

$$\frac{\bar{R}_X}{1} = \frac{\bar{R}_A}{2} \Rightarrow \bar{R}_A = 2\times5\times10^{-4} = 10^{-3}\,\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

حال غلظت A تولیدشده را با فرض سرعت ثابت و بدون تغییر دما در زمان ۵۰s محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{R}_A = \frac{\Delta[A]}{\Delta t} \Rightarrow 10^{-3} = \frac{\Delta[A]}{50} \Rightarrow \Delta[A] = 0/05\,\text{mol.L}^{-1}$$

با توجه به این‌که سرعت واکنش در ابتدا بیشتر و در ادامه کاهش می‌یابد و با افزایش دما، سرعت واکنش و سرعت تولید یا مصرف همهٔ مواد افزایش می‌یابد؛ بنابراین تغییرات غلظت A (غلظت A تولیدشده) در زمان ۵۰s با افزایش دما قطعاً بیشتر از $0/05$ مولار بوده و نمی‌تواند $0/04$ مولار باشد.

پ) استفاده از کاتالیزگر میزان پیشرفت واکنش و مقدار فراورده‌های تولیدشده در پایان واکنش را تغییر نمی‌دهد.

ت) مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به ترتیب برابر ۳ و ۵ است.

تست و پاسخ ۹۹

براساس واکنش موازنه‌نشدهٔ: $H_2O_2(aq) \rightarrow H_2O(l) + O_2(g)$ و جدول داده‌شده، سرعت کلی واکنش چند مول بر دقیقه است و اگر حجم محلول در طول انجام فرایند ثابت و چگالی آن نیز یک گرم بر میلی‌لیتر باشد، سرعت مصرف آب اکسیژنه در ۲۰ دقیقهٔ اول، چند مول بر لیتر بر دقیقه است؟

از لحظهٔ شروع تا دقیقهٔ ۲۰ ام

جرم مواد درون ظرف (گرم)	۲۰۰۰	۱۹۹۰/۴	۱۹۸۳/۲	۱۹۷۸/۴	۱۹۷۵/۲	۱۹۷۵/۲
زمان (دقیقه)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰

۱) $387/5\times10^{-4}$ و $26/25\times10^{-3}$

۲) $193/75\times10^{-4}$ و $26/25\times10^{-3}$

۳) $387/5\times10^{-4}$ و $52/5\times10^{-3}$

۴) $193/75\times10^{-4}$ و $52/5\times10^{-3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی

قسمت اول: با توجه به جدول، جرم مواد درون ظرف پس از دقیقهٔ ۴۰ام تغییری نمی‌کند، یعنی واکنش پس از گذشت ۴۰ دقیقه پایان می‌یابد؛ بنابراین از روی تغییرات جرم مواد درون ظرف (که همان جرم $O_{2(g)}$ خارج شده است.)، سرعت $O_{2(g)}$ را حساب می‌کنیم.

$$\text{جرم } O_2 \text{ خارج‌شده} = 2000 - 1975/2 = 24/8\,g O_2$$

$$\text{مول } O_2 \text{ خارج‌شده} \quad \Delta n_{O_2} = \frac{24/8}{32} = 0/775\,mol O_2$$

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta n_{O_2}}{\Delta t} = \frac{0/775}{40} = 193/75 \times 10^{-4}\,mol.min^{-1}$$

دقت داشته باشید، چون ضریب استوکیومتری O_2 برابر یک است، پس سرعت متوسط تولید O_2 با سرعت کلی واکنش برابر است.

$$2H_2O_2(aq) \rightarrow 2H_2O(l) + O_2(g)$$

قسمت دوم: در این مرحله سرعت O_2 را از لحظهٔ شروع تا دقیقهٔ ۲۰ام محاسبه می‌کنیم و از روی آن به سرعت H_2O_2 می‌رسیم.

با توجه به جرم اولیهٔ مواد (۲۰۰۰ گرم) و چگالی محلول (یک گرم بر میلی‌لیتر) می‌فهمیم که حجم محلول ۲۰۰۰ میلی‌لیتر یا ۲ لیتر بوده است.

$$\text{جرم } O_2 \text{ خارج‌شده} = 2000 - 1983/2 = 16/8\,g O_2$$

$$\text{مول } O_2 \text{ خارج‌شده} \quad \Delta n_{O_2} = \frac{16/8}{32} = 0/525\,mol O_2$$

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta n_{O_2}}{\Delta t \times V} = \frac{0/525}{20 \times 2} = 13/125 \times 10^{-3}\,mol.L^{-1}.min^{-1}$$

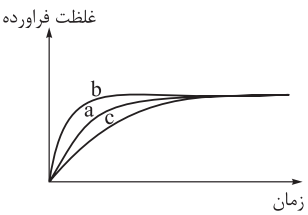
حال می‌توان سرعت H_2O_2 را از روی سرعت O_2 محاسبه کرد.

$$\frac{\bar{R}_{H_2O_2}}{2} = \frac{\bar{R}_{O_2}}{1} \Rightarrow \bar{R}_{H_2O_2} = 13/125 \times 10^{-3} \times 2 = 26/25 \times 10^{-3}\,mol.L^{-1}.min^{-1}$$

تست و پاسخ ۱۰۰

نمودارهای غلظت ـ زمان مقابل، مربوط به تولید یک فراوردهٔ خاص در یک واکنش برگشت‌ناپذیر است.

چه تعداد از عبارت‌های زیر در رابطه با آن درست است؟



- **اگر در اثر حضور یک ماده در واکنش، نمودار a به نمودار c تبدیل شود، نقش آن ماده می‌تواند شبیه به نقش لیکوپن در بدن انسان باشد.**

بازدارنده

- **تبدیل نمودار a به b می‌تواند بر اثر استفاده از کاتالیزگر یا افزایش دما باشد.**
- **اگر به جای محلول ۱ مولار واکنش‌دهنده به حجم ۱ لیتر، از محلول ۲ مولار آن با حجم ۰/۵ لیتر و مقدار کافی از سایر واکنش‌دهنده‌ها استفاده شود، نمودار a به نمودار c تبدیل می‌شود.**
- **برای تبدیل نمودار a به b می‌توان به جای ۱ لیتر محلول واکنش‌دهنده با غلظت ۲ مولار، از ۰/۵ لیتر محلول واکنش‌دهنده با غلظت ۴ مولار استفاده کرد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: با توجه به شکل، شیب نمودار غلظت ـ زمان (سرعت) در نمودار c کم‌تر از نمودار a است؛ بنابراین در حضور مادهٔ ذکرشده در صورت سؤال، سرعت کاهش یافته است یعنی این ماده همانند لیکوپن یک بازدارنده می‌باشد.

عبارت دوم: شیب نمودار b نسبت به a تندتر است؛ بنابراین سرعت واکنش در نمودار b بیشتر از نمودار a است؛ می‌دانیم که در اثر استفاده از کاتالیزگر یا افزایش دما، سرعت واکنش نیز افزایش می‌یابد. (دقت داشته باشید که در هر دو نمودار a و b مقدار فراوردهٔ تولیدشده در پایان واکنش تغییری نکرده است.)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عبارت سوم: با افزایش غلظت محلول واکنش‌دهنده، سرعت واکنش نیز افزایش می‌یابد و شیب نمودار غلظت ـ زمان افزایش می‌یابد نه کاهش!!!
عبارت چهارم: یک لیتر محلول واکنش‌دهنده با غلظت دو مولار (دو مول واکنش‌دهنده) با نیم لیتر محلول واکنش‌دهنده با غلظت ۴ مولار (دو مول واکنش‌دهنده) از نظر مقدار مول برابر هستند؛ اما در حالت دوم به دلیل دو برابر شدن غلظت واکنش‌دهنده، شیب نمودار غلظت ـ زمان (سرعت) افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۱۰۱

کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف) شمار اتم‌های کربن در مونومر سازندهٔ پلی‌سیانو اتن و پلی‌پروپن برابر است.

ب) اگر عدد n در واکنش پلیمری‌شدن استیرن برابر ۲۰۰۰ باشد، یک مولکول پلی‌استیرن دارای ۴۰۰۰ اتم کربن است.

پ) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی وینیل‌کلرید سه برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی سیانو اتن است.

ت) پلیمر به‌کاررفته برای تهیهٔ کیسهٔ خون، همانند پلیمر به‌کاررفته در تهیهٔ نخ دندان و پتو از سه نوع عنصر تشکیل شده است.

پلی‌وینیل کلرید ← تفلون ← پلی‌سیانو اتن

۱) الف ـ پ
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ ت
۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

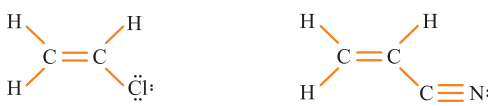
بررسی عبارت‌ها:

الف) مونومر سازندهٔ پلی‌سیانو اتن، مولکول سیانو اتن با فرمول شیمیایی C_3H_3N است و مونومر سازندهٔ پلی‌پروپن، مولکول پروپن با فرمول شیمیایی C_3H_6 می‌باشد. ✓

ب) فرمول مولکولی استیرن C_8H_8 است، همچنین فرمول شیمیایی هر واحد تکرارشوندهٔ پلی‌استیرن نیز C_8H_8 است؛ بنابراین اگر شمار واحدهای تکرارشونده در پلی‌استیرن برابر ۲۰۰۰ باشد، هر مولکول پلی‌استیرن شامل ۱۶۰۰۰ (۲۰۰۰ × ۸ = ۱۶۰۰۰) اتم کربن خواهد بود. ✗

$$nC_8H_8 \longrightarrow -(C_8H_8)_n-$$

پ) ساختار لوویس وینیل کلرید و سیانو اتن به صورت زیر است: ✓



۱= شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی ۳= شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی

ت) با توجه به جدول زیر پلیمر به کار رفته در نخ دندان، دو نوع عنصر دارد. ✓

کاربرد	کیسهٔ خون	نخ دندان	پتو
نام پلیمر	پلی‌وینیل کلرید	تفلون	پلی‌سیانواتن
ساختار	$-(C_2H_3Cl)_n-$	$-(C_2F_4)_n-$	$-(C_3H_3N)_n-$
نوع عناصر سازنده	C, H, Cl (۳ نوع عنصر)	C, F (۲ نوع عنصر)	C, H, N (۳ نوع عنصر)

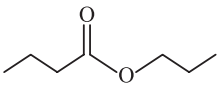
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۲

کدام گزینه نادرست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) استری که از واکنش یک الکل دارای دو اتم کربن و یک اسید تک‌عاملی با بخش ناقطبی ۵کربنی تولید می‌شود، هگزیل اتانوات نام دارد.

مثل اتانول ← هگزانوییک اسید ←

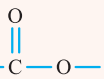
۲) بیشتر از ۱۰ درصد جرم ترکیب  را هیدروژن تشکیل داده است.

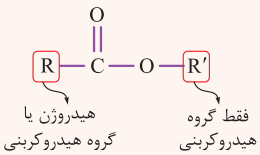
۳) اتیل بوتانوات مادهٔ موجود در آناناس است که در حضور آب کافی و کاتالیزگر، الکلی را تولید می‌کند.

۴) $HO-C_2H_4-COOH$ می‌تواند به تنهایی در شرایط مناسب یک پلی‌استر تولید کند.

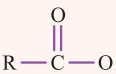
پاسخ: گزینهٔ ۱

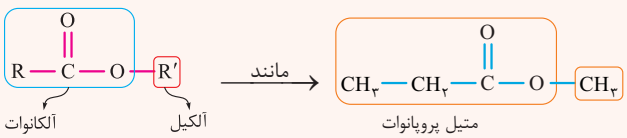
درس‌نامه

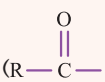
استرها: دسته‌ای از ترکیب‌های آلی هستند که در ساختار آن‌ها گروه عاملی استری  وجود دارد. فرمول ساختاری استرهای یک‌عاملی به صورت زیر است:

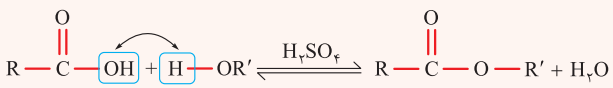


فرمول عمومی استرهای زنجیری و سیرشدهٔ یک‌عاملی با n اتم کربن به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است.

برای نام‌گذاری استرها، ابتدا باید نام زنجیر هیدروکربنی متصل به اتم اکسیژن (R') را بیاوریم؛ نام R' را برحسب تعداد کربن موجود در ساختار آن بر وزن «آلکیل» نوشته، سپس نام تعداد کربن باقی‌مانده در زنجیر اصلی  را بر وزن «آلکانوات» می‌نویسیم. به این ترتیب نام‌گذاری استرها بر وزن «آلکیل آلکانوات» خواهد بود.



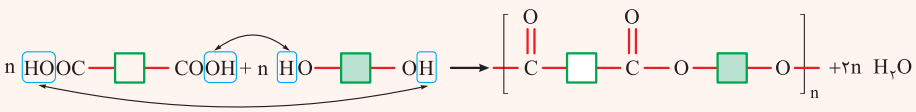
تهیهٔ استرها: یکی از ویژگی‌های مهم و کاربردی کربوکسیلیک اسیدها و الکل‌ها، واکنش میان آن‌هاست. از واکنش کربوکسیلیک اسید یک عاملی  با الکل یک‌عاملی $(R'-OH)$ در شرایط مناسب، استر و آب (H_2O) به دست می‌آید. (واکنش استری‌شدن)



این واکنش برگشت‌پذیر است؛ یعنی استرها می‌توانند در اثر واکنش با آب، طی یک واکنش برگشت‌پذیر به الکل و کربوکسیلیک اسید سازندهٔ خود تبدیل شوند.

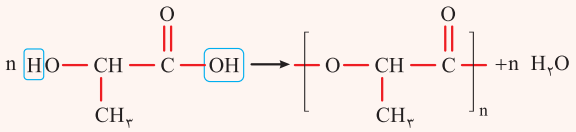
تهیهٔ پلی‌استرها:

۱) واکنش کربوکسیلیک اسید دوعاملی (دی‌اسید) با الکل دوعاملی:



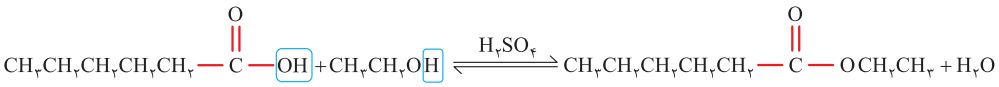
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲) واکنش تشکیل پلی‌استر از یک نوع مونومر که دارای هر دو گروه عاملی اسیدی و الکلی است (مانند لاکتیک اسید).



پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱

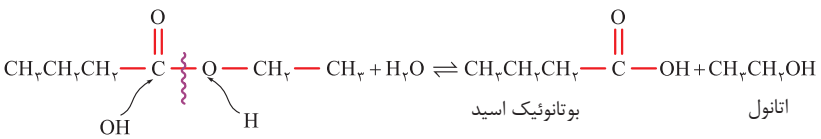


هگزانوئیک‌اسید — اتانول — اتیل‌هگزانوات

۲ فرمول مولکولی استر ۷کربنی داده‌شده به‌صورت $C_7H_{14}O_2$ است.

$$\text{درصد جرمی H} = \frac{\text{جرم H}}{\text{جرم کل ترکیب}} \times 100 = \frac{14 \times 1}{(7 \times 12) + (14 \times 1) + (2 \times 16)} \times 100 = \frac{14}{130} \times 100 \simeq \%10/77$$

۳ از واکنش آبکافت اتیل بوتانوات (استر موجود در آناناس)، اتانول و بوتانوئیک اسید حاصل می‌شود.

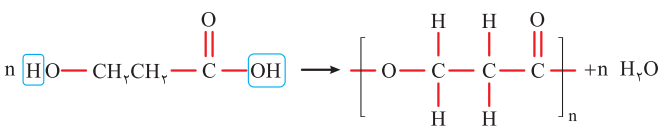


اتیل بوتانوات — بوتانوئیک اسید — اتانول

از واکنش گاز اتن با آب در حضور کاتالیزگر سولفوریک اسید نیز، اتانول تولید می‌شود.

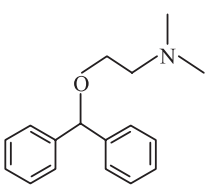
$$C_2H_4 + H_2O \rightarrow C_2H_6O$$

۴



تست و پاسخ ۱۰۳

دیفن هیدرامین یک آنتی‌هیستامین است که عمدتاً برای درمان آلرژی استفاده می‌شود. با توجه به ساختار آن، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1})$



- **در ساختار آن، اختلاف تعداد اتم‌های هیدروژن و کربن برابر ۴ است.**
- **دارای یک گروه عاملی اتری و یک گروه عاملی آمیدی است.**
- **دارای ۱۱ اتم کربن است که تنها به یک هیدروژن متصل هستند.**
- **اگر یکی از گروه‌های CH_3 آن با گروه $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-H$ جایگزین شود، جرم مولی آن ۱۴ گرم بر مول افزایش می‌یابد.**

۱) ۱ — ۲) ۲

۳) ۳ — ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

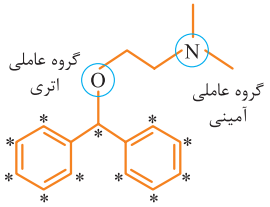
پاسخ تشریحی عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: فرمول مولکولی این ترکیب $C_{17}H_{21}NO$ است و تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن آن برابر ۴ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عبارت دوم: دارای یک گروه عاملی اتری و یک گروه عاملی آمینی است.

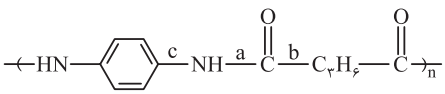


عبارت سوم: دارای ۱۱ اتم کربن است که فقط به یک اتم هیدروژن متصل شده‌اند (کربن‌ها در شکل بالا با ستاره مشخص شده‌اند).

عبارت چهارم: باید تفاوت جرم مولی گروه CH_3 و $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-H$ را حساب کنیم:

$$\text{تفاوت جرم مولی } CH_3 \text{ و } COH = \text{تفاوت جرم مولی } H_2 \text{ و } OH = ۱۷ - ۳ = ۱۴\ g.mol^{-1}$$

تست و پاسخ ۱۰۴



یک پلی‌آمید دارای ساختار مقابل است:

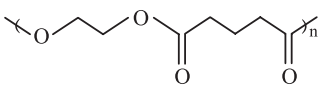
کدام موارد از مطالب زیر در رابطه با آن درست است؟

دارای حلقهٔ بنزن

الف) هر دو مونومر سازندهٔ آن، آروماتیک هستند.

ب) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در دی‌اسید سازندهٔ آن برابر ۲/۲۵ است.

پ) در حضور رطوبت و انجام آبکافت، یکی از پیوندهای b یا c شکسته می‌شوند.

ت) از واکنش دی‌اسید سازندهٔ آن با اتیلن گلیکول، یک پلیمر با ساختار  **تولید می‌شود.**

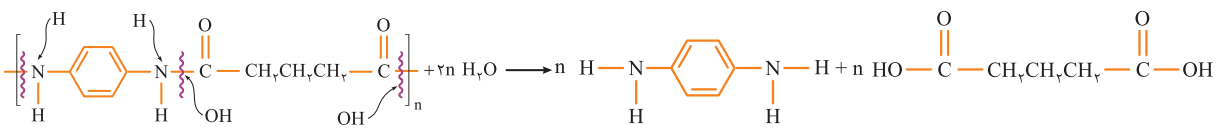
۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

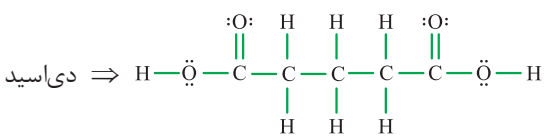
الف) یکی از مونومرهای سازندهٔ آن آروماتیک است.



آروماتیک غیرآروماتیک

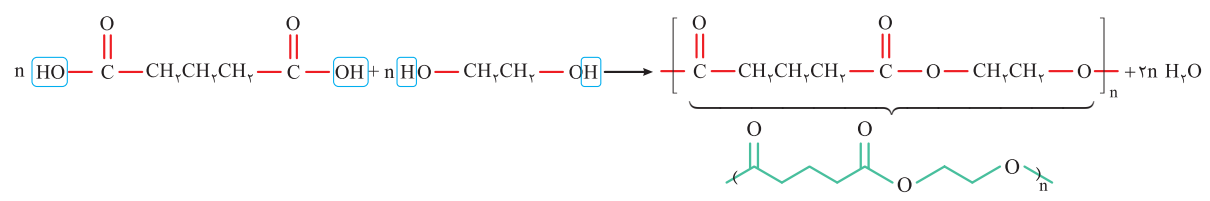
ب)

$$\frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۱۸}{۸} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$



پ) در اثر آبکافت پلی‌آمیدها در حضور آب، پیوند آمیدی (a) شکسته می‌شود.

ت) ساختار اتیلن گلیکول به صورت $HO-CH_2CH_2-OH$ است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۵

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **نشاسته در محیط گرم و مرطوب به سرعت به گلوکز تبدیل می‌شود.**
- **مواد زیست‌تخریب‌پذیر مانند نایلون‌ها و پلی‌لاکتیک اسید، توسط جانداران ذره‌بینی به مولکول‌های ساده و کوچک تبدیل می‌شوند.**
- **الیاف پلی‌آمیدی و پلی‌استری در حضور آب و مواد شوینده به مونومرهای سازندهٔ خود تبدیل می‌شوند که باعث ایجاد بوی بد و نافذ می‌شود.**
- **برای تولید پلی‌اتن، علاوه بر گرما و فشار، می‌توان از کاتالیزگری که دارای فلزهای تیتانیم و آلومینیم است، استفاده کرد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: مولکول‌های نشاسته در شرایط مناسب مانند محیط مرطوب با کاتالیزگر یا محیط گرم و مرطوب به آرامی به گلوکز تجزیه می‌شوند.

عبارت دوم: پلی‌لاکتیک اسید جزء پلیمرهای زیست تخریب‌پذیر است اما نایلون جزء پلیمرهای زیست تخریب‌ناپذیر می‌باشد.

عبارت سوم: پلیمرهای سازندهٔ لباس و پوشاک اغلب از نوع پلی‌آمیدها و پلی‌استرها هستند. هر نوع لباس و پوشاکی پس از مدتی پوسیده می‌شود؛ زیرا مولکول‌های پلیمر سازندهٔ آن‌ها با مولکول‌های موجود در محیط اطراف واکنش داده و پیوندهای استری (پیوند $C-O$ در گروه عامل استری) و پیوندهای آمیدی (پیوند $C-N$ در گروه عامل آمیدی) که در ساختار پلیمرها وجود دارند، شکسته می‌شوند و به مونومرهای سازنده‌شان تبدیل می‌شوند. این مونومرها بوی بد و نافذی دارند.

عبارت چهارم: اگر گاز اتن را در حضور کاتالیزگرهای حاوی فلزهای آلومینیم و تیتانیم در دما و فشار بالا قرار دهیم، پلی‌اتن تولید می‌شود. جرم مولی میانگین پلی‌اتن تولیدشده به نسبت مقدار کاتالیزگرهای مورد استفاده بستگی دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir