

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

آزمون آزمایشی ۱۴ فروردین ۱۴۰۳

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۳ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

مرحله ۱۳

دفترچه شماره ۱



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 + 2ax + b} = +\infty$ مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۲- اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[2, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = 2f(3x)$ کدام است؟

- (۱) $[4, 8]$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[6, 12]$ (۴) $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$

۳- اگر $\tan 2x = \frac{6}{\tan^2 x - 1}$ مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

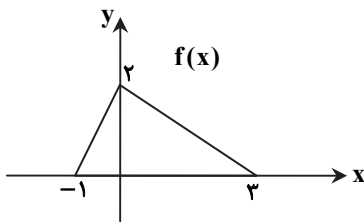
۴- اگر چند جمله‌ای $x^4 + ax^2 - ax - 1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

۵- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x} = 2$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9\pi}{4}$ (۲) $\frac{7\pi}{4}$ (۳) $\frac{11\pi}{4}$ (۴) $\frac{13\pi}{4}$

۶- نمودار تابع f شکل روبه‌رو است. اشتراک دامنه و برد تابع $y = 2f(1+2x) - 3$ کدام است؟



- (۱) $\{-1\}$

- (۲) $[-1, 1]$

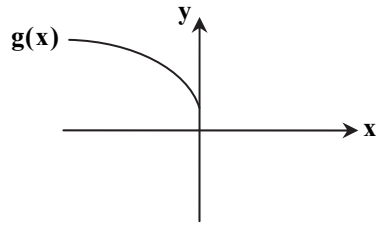
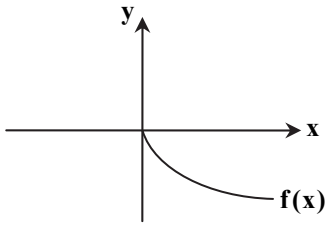
- (۳) $[-3, 1]$

- (۴) $[-1, 0]$

۷- اگر $x^A - 1 = (x-1)f(x)$ و $x^A - 1 = (x+1)g(x)$ مقدار $g(-1) - f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) -۱۴ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

۸- با توجه به دو نمودار داده شده، کدام گزینه می تواند درست باشد؟



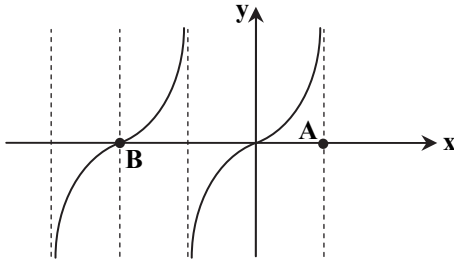
(۱) $f(-x) = 2 + g(x)$

(۲) $g(-x) = 2 + f(x)$

(۳) $g(x) + f(-x) = 2$

(۴) $g(x) - f(-x) = 2$

۹- بخشی از نمودار $y = \tan \frac{x}{3}$ در شکل روبه رو آورده شده است. اندازه پاره خط AB کدام است؟



(۱) $\frac{9\pi}{2}$

(۲) $\frac{7\pi}{2}$

(۳) $\frac{2\pi}{2}$

(۴) $\frac{5\pi}{2}$

۱۰- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $x = \frac{k\pi}{5}$

(۳) $x = \frac{2k\pi}{5}$

(۲) $x = \frac{k\pi}{3}$

(۱) $x = \frac{2k\pi}{3}$

۱۱- اگر خط $y = 5$ مجانب افقی تابع $f(x) = ax - \frac{x^2 - 3x}{x + b}$ باشد، مجانب قائم f کدام است؟

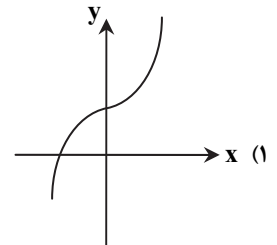
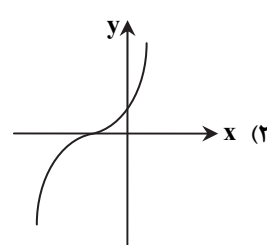
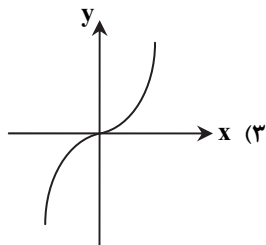
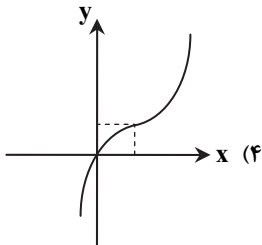
(۴) $x = -3$

(۳) $x = 3$

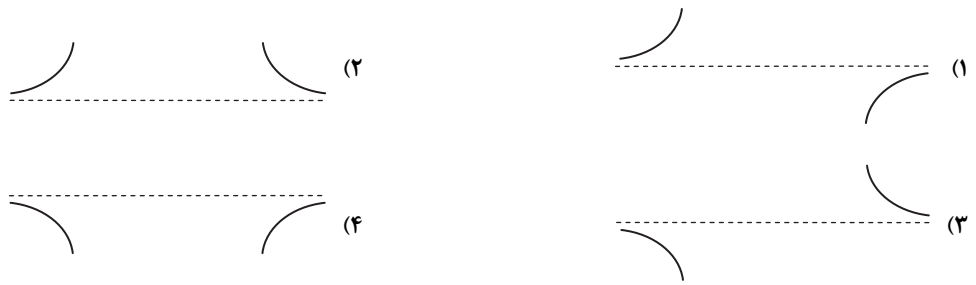
(۲) $x = -2$

(۱) $x = 2$

۱۲- نمودار $y = (x^2 + 3)(x + 3)$ را یک واحد به راست و هشت واحد به پایین انتقال می دهیم. نمودار حاصل در کدام گزینه آمده است؟



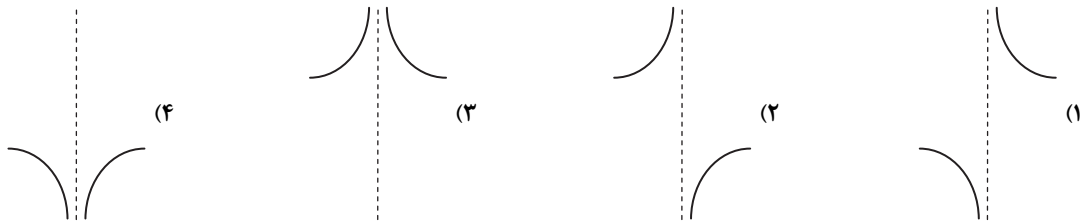
۱۳- تابع $f(x) = \frac{4x}{x+1}$ در اطراف مجانب افقی خود به کدام صورت است؟



۱۴- اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(ax+1)^3 - (ax-1)^3}{(ax^2+1)^2 - (ax^2-1)^2} = 4$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $-\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۱۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{2[x]+5}{x^2+4x+4}$ ، در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)



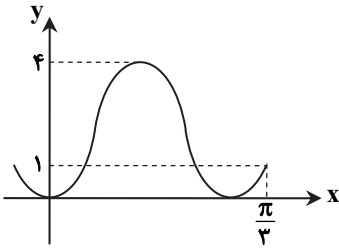
۱۶- به ازای چند عدد صحیح a ، تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x + 5a & x < 2 \end{cases}$ ، اکیداً یکنوا است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷- تابع $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{(ax+b)(2x^2+1)}$ ، فقط یک مجانب به معادله $y = 2$ دارد. مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) ۱۶ (۴) $-\frac{1}{16}$

۱۸- قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin^2 bx$ به صورت روبه‌رو است. حاصل ab کدام است؟



۱۰ (۱)

۲ (۲)

۱۴ (۳)

۲۲ (۴)

۱۹- اگر $A + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ، وارون ماتریس $A + 2I$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۲۰- فاصله نقطه $M(-1, 3)$ از مرکز دایره‌ای با معادله $2x^2 + 2y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ کدام است؟

$$\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$5 \quad (۳)$$

$$2\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$\sqrt{17} \quad (۱)$$

۲۱- اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} i^2 + 3j^2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ، مقدار $\frac{b+c+d}{a}$ کدام است؟

$$-24 \quad (۴)$$

$$9 \quad (۳)$$

$$-31 \quad (۲)$$

$$18 \quad (۱)$$

۲۲- اگر $A^2 + 2A = \bar{O}$ و A و I هر دو ماتریس‌های $n \times n$ باشند، حاصل $(A+I)(-3A-2I)$ کدام است؟

$$5A - 2I \quad (۴)$$

$$A + 2I \quad (۳)$$

$$A - 2I \quad (۲)$$

$$A \quad (۱)$$

۲۳- اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & k \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ برابر باشد، آنگاه مقدار k کدام است؟

$$-2, \frac{5}{2} \quad (۴)$$

$$-1, \frac{7}{2} \quad (۳)$$

$$1, \frac{7}{2} \quad (۲)$$

$$2, \frac{5}{2} \quad (۱)$$

۲۴- A یک ماتریس است به طوری که $A^2 + A = I$ ، در این صورت وارون A^2 کدام است؟

$$2I + A \quad (۴)$$

$$I - A \quad (۳)$$

$$2I - A \quad (۲)$$

$$I + A \quad (۱)$$

۲۵- به ازای چند مقدار m ، دستگاه $\begin{cases} 2mx - y = 4 \\ 4x + (m+1)y = -2 \end{cases}$ ، فاقد جواب است؟

(۱) هیچ مقدار (۲) یک مقدار (۳) بی شمار مقدار (۴) صفر یا بی شمار

۲۶- معادله دایره‌ای که مرکز آن به طول -2 بوده و بر دو خط به معادلات $d: y = 2x + 1$ و $d': y = 2x - 7$ مماس باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 + 4x + 14y + 49/8 = 0$
 (۲) $x^2 + y^2 + 4x + 14y + 56/2 = 0$
 (۳) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 49/8 = 0$
 (۴) $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 56/2 = 0$

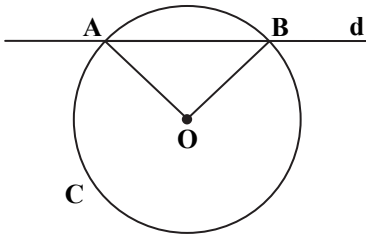
۲۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB = 15$ است. اگر تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از نقطه B به فاصله 4 بوده و از A و C نیز به یک فاصله باشد، طول وتر BC کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۲۸- اگر بدانیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

۲۹- نقطه O مرکز دایره $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y = m$ است که خط $d: x + y = -1$ را قطع کرده است. اگر مثلث OAB متساوی‌الاضلاع باشد، m کدام است؟



(۱) ۶
(۲) ۵
(۳) ۳
(۴) ۴

۳۰- اگر $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ و $A \subseteq S$ و برای هر $n \in A$ حاصل عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی صحیح و فرد باشد، آنگاه مجموعه A حداکثر چند زیرمجموعه دارد؟

(۱) ۳۲ (۲) ۱۶ (۳) ۸ (۴) ۴

۳۱- در یک تقسیم، به مقسوم، ۱۴ واحد اضافه می‌کنیم. در این صورت به خارج‌قسمت، ۲ واحد اضافه می‌شود؛ اما مقسوم‌علیه و باقی‌مانده تغییری نمی‌کنند. مقسوم‌علیه کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۲

۳۲- در اثبات حکم $x^2 + y^2 + z^2 + 6 \geq 2x - 2y - 4z$ ، به روش بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ ($x, y, z \in \mathbb{R}$)

- (۱) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \geq 0$ (۲) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \geq 0$
 (۳) $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 \geq 0$ (۴) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 \geq 0$

۳۳- حاصل عبارت $([6a^2, 36a^3], (24a^2, 4a))$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $6|a|$ (۲) $4|a|$ (۳) $4a^2$ (۴) $4a^3$

۳۴- به‌ازای کدام مقدار برای a ، باقی‌مانده تقسیم عدد $35a72$ بر 9 برابر 1 است؟

- (۱) 7 (۲) 2 (۳) 6 (۴) 4

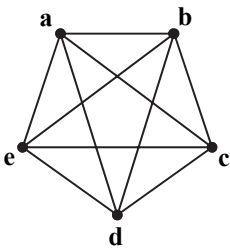
۳۵- اگر دو عدد $4a-3$ و $5a-8$ رقم یک‌دیگر باشند، باقی‌مانده تقسیم عدد $3a+2$ بر 6 کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 5

۳۶- معادله سیاله $104 = (7n+1)x + 29y$ در \mathbb{Z} جواب ندارد. رقم وسط کوچک‌ترین عدد سه رقمی n کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۳۷- در گراف روبه‌رو، چند مسیر به طول 4 از رأس a به b وجود دارد؟



- (۱) 10
 (۲) 8
 (۳) 6
 (۴) 5

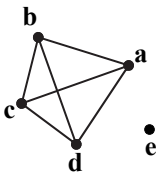
۳۸- چند گراف همبند وجود دارد که در آن $p+q=8$ و دارای دور به طول 3 باشد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۳۹- منحنی $8x^2 - 2xy - y = -3$ از چند نقطه با مختصات صحیح عبور می‌کند؟

- (۱) 5 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۴۰- در گراف روبه‌رو، چند زیرگراف وجود دارد به‌طوری که شرایط $q=4$ ، $\deg(b)=3$ و $\delta=0$ برای آن‌ها برقرار باشد؟



- (۱) 8
 (۲) 2
 (۳) 3
 (۴) 6

کلاس مشاوره

با حضور مشاوران با تجربه

بعد از آزمون سریع بیاسر کلاس

بعد از آزمون قراره کلی نکته مشاوره ای یاد بگیری

- ◆ تا روند تحصیلت صعودی باشه
- ◆ تا به مرحله بعدی بهتر فکر کنی
- ◆ تا روز به روز برای رسیدن به هدفت با انگیزه بیشتر تلاش کنی
- ◆ تا با نکات فنی که توسط مشاور ارائه می شود دقیق تر در مسیر خودت حرکت کنی

ما در مؤسسه گزینه دو در کنار سنجش و ارزشیابی با کلاس مشاوره کنار شما هستیم.

- ◆ ارزیابی نکات و توصیه های مشاوره ای برای آزمون مرحله بعد
- ◆ حضور نفرات برتر کنکور و بیان تجربه ها
- ◆ بررسی مسائل مشاوره ای مربوط به داوطلبان

تا آخرش باهاتم...

بعد از اعلام نتایج هر آزمون
(حدوداً ساعت ۱۹) سریع بیاسر کلاس



گزینه دو، راهی نو

آپارات
اشتراک ویدیو
aparat.com/gozine2/live

کنکور پریمیوم

KONKOORPREMIUM

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

آزمون آزمایشی ۱۴ فروردین ۱۴۰۳

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسشها: ۶۵		مدت پاسخ‌گویی: ۷۵ دقیقه		

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۳ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مرحله ۱۳

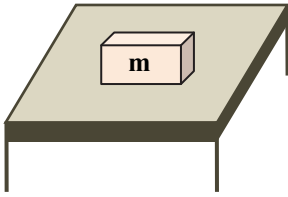
دفترچه شماره ۲



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه‌رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک‌ها، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه‌دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.

۴۱- مطابق شکل، جرم m روی سطح میز افقی ساکن است. واکنش نیروی وزن وارد بر جسم، و رو به است.



- (۱) نیرویی است که سطح میز به جسم وارد می‌کند- بالا
- (۲) نیرویی است که کره زمین به جسم وارد می‌کند- پایین
- (۳) نیرویی است که جسم به کره زمین وارد می‌کند- بالا
- (۴) نیرویی است که سطح زمین به جسم وارد می‌کند- بالا

۴۲- کدام گزینه درست است؟

- (۱) هنگامی که بسامد نیروی اعمال شده به یک نوسانگر با بسامد طبیعی آن برابر نباشد، انرژی به نوسانگر منتقل نمی‌شود.
- (۲) اگر بسامد نیروی اعمال شده به یک نوسانگر که در حضور مقاومت هوا و اصطکاک نوسان می‌کند با بسامد طبیعی نوسانگر برابر باشد، دامنه نوسان به مقدار بیشینه‌ای می‌رسد و سپس ثابت می‌ماند.

(۳) بسامد طبیعی یک آونگ ساده برابر $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$ است.

(۴) دوره تناوب آونگ ساده $T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{g}}$ است.

۴۳- تویی در راستای قائم روبه‌بالا پرتاب می‌شود. در هنگام بالا رفتن توپ، در لحظه‌ای که بزرگی نیروی مقاومت هوا $\frac{2}{3}$ برابر بزرگی نیروی مقاومت هوا در هنگام سقوط با تندی حدی است، بزرگی شتاب حرکت توپ چند برابر g است؟ (g شتاب گرانشی در سطح زمین است.)

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{5}{3}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

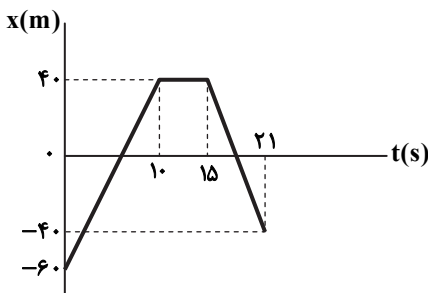
۴۴- اگر جرم جسم A ، سه برابر جرم جسم B و تکانه آن ۴ برابر تکانه جسم B باشد، انرژی جنبشی جسم A چند برابر انرژی جنبشی جسم B است؟

- (۱) $\frac{16}{3}$
- (۲) $\frac{16}{9}$
- (۳) $\frac{8}{3}$
- (۴) $\frac{8}{9}$

۴۵- قطر کره زمین تقریباً ۱۳۰۰۰ کیلومتر است. اگر وزن جسمی که در سطح زمین قرار دارد، ۳۶۰۰ نیوتون باشد، وزن آن در فاصله ۱۳۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین چند نیوتون است؟

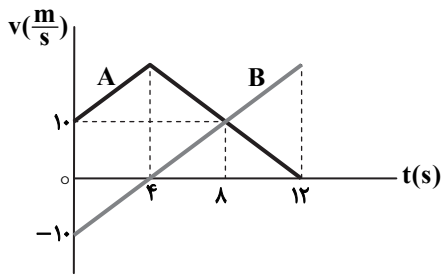
- (۱) ۱۸۰۰
- (۲) ۱۲۰۰
- (۳) ۹۰۰
- (۴) ۴۰۰

۴۶- اگر نمودار مکان- زمان یک متحرک در حرکت آن روی خط راست مطابق شکل باشد، بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 18s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟



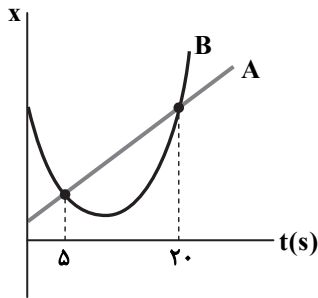
- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{2}{9}$
- (۴) $\frac{14}{9}$

۴۷- نمودار سرعت- زمان دو متحرک A و B که در امتداد محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر دو متحرک در مبدأ زمان ($t = 0$) در یک مکان باشند، بیشترین فاصله آن‌ها از یکدیگر در بازه زمانی صفر تا $t = ۱۲s$ چند متر است؟



- ۸۰ (۱)
- ۱۰۰ (۲)
- ۱۲۰ (۳)
- ۱۴۰ (۴)

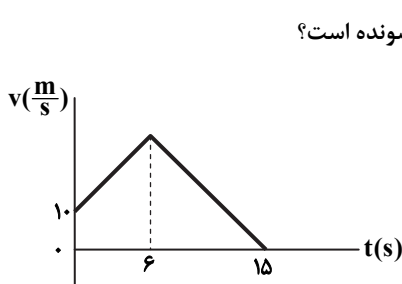
۴۸- شکل روبه‌رو، نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B که روی خط راست حرکت می‌کنند را نشان می‌دهد. چه تعداد از جملات زیر برای بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 20s$ درست است؟



- الف) تندی A ثابت است.
- ب) تندی متوسط A و B برابر است.
- پ) شتاب متوسط A و B برابر است.
- ت) تندی A در هر لحظه بیشتر از تندی B است.

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- صفر (۴)

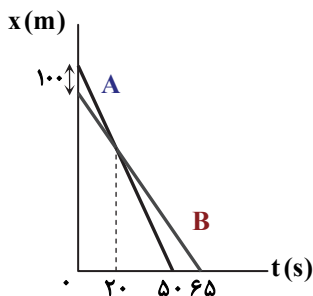
۴۹- نمودار سرعت- زمان در یک حرکت بر مسیر مستقیم به شکل روبه‌رو است. اگر سرعت متوسط متحرک در مدت $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 15s$ برابر



$17 \frac{m}{s}$ باشد، بزرگی شتاب حرکت در قسمت تندشونده چند برابر بزرگی شتاب در قسمت کندشونده است؟

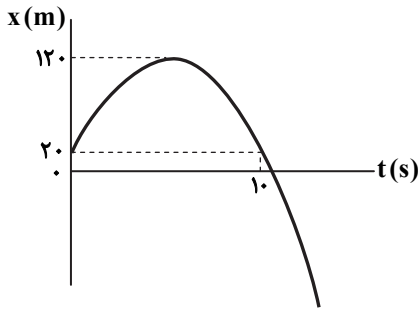
- $\frac{3}{2}$ (۱)
- ۱ (۲)
- $\frac{4}{3}$ (۳)
- $\frac{5}{6}$ (۴)

۵۰- شکل روبه‌رو نمودار مکان- زمان دو متحرک که بر روی خط راست حرکت می‌کنند را نشان می‌دهد. متحرک A در ابتدا در چند متری مبدأ بوده است؟



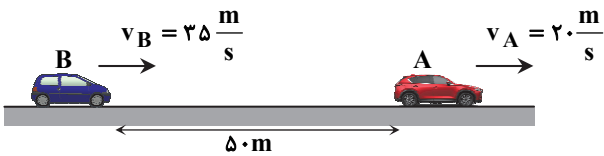
- ۹۵۰ (۱)
- ۸۵۰ (۲)
- ۶۵۰ (۳)
- ۷۵۰ (۴)

۵۱- سهمی شکل روبه‌رو، نمودار مکان- زمان یک حرکت بر خط مستقیم است. سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 30$ s، چند متر بر ثانیه است؟



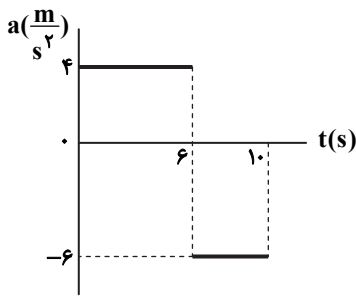
- (۱) ۱۰۰-
- (۲) ۱۲۰-
- (۳) ۸۰-
- (۴) ۶۰-

۵۲- مطابق شکل، دو اتومبیل A و B با سرعت ثابت روی خط راست و در یک جهت در حال حرکت هستند. در لحظه‌ای که فاصله دو اتومبیل به 50 m می‌رسد، راننده اتومبیل B، ترمز کرده و با شتاب 3 متر بر مربع ثانیه سرعتش را کم می‌کند. حداقل فاصله این دو اتومبیل به چند متر خواهد رسید؟



- (۱) $37/5$
- (۲) $12/5$
- (۳) ۲۰
- (۴) ۳۰

۵۳- شکل روبه‌رو، نمودار شتاب- زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. اگر سرعت متوسط متحرک در مدت $t = 0$ تا



$t = 10$ s برابر $20 \frac{m}{s}$ باشد، بزرگی سرعت متحرک در لحظه $t = 6$ s چند متر بر ثانیه است؟

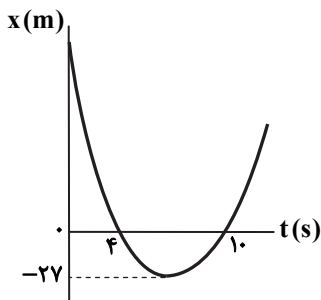
- (۱) ۳۲
- (۲) ۳۶
- (۳) ۲۸
- (۴) ۲۴

۵۴- متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند و جدول داده‌شده، مکان آن را در چند لحظه مختلف نشان می‌دهد. متحرک در لحظه $t = 12$ s از چه مکانی عبور می‌کند؟

t(s)	۰	۳	۶	۹	۱۲	...
x(m)	x_0	۳۷	۲۸	۷۳	x	...

- (۱) $x = 198$ m
- (۲) $x = 172$ m
- (۳) $x = 118$ m
- (۴) $x = 106$ m

۵۵- نمودار مکان- زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل روبه‌رو است. تندی متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) ۴۲
- (۲) ۲۴
- (۳) ۳۰
- (۴) ۱۸

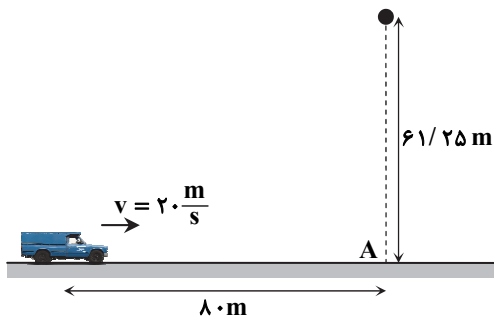
۵۶- مطابق شکل روبه‌رو، خودرویی از نقطه A از حال سکون و در مسیر مستقیم با شتاب ثابت $\frac{4}{3} \frac{m}{s^2}$ به راه می‌افتد و فاصله نقطه B تا نقطه C را در مدت ۱s طی می‌کند. تندی خودرو در وسط فاصله A تا C چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) $10\sqrt{2}$
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۶
- (۴) $16\sqrt{2}$

۵۷- دو گلوله با اختلاف زمانی ۳ ثانیه از یک ارتفاع مشخص و در شرایط خلأ رها می‌شوند. اگر هنگام رسیدن گلوله اول به سطح زمین گلوله دوم در ارتفاع ۱۶۵ متری سطح زمین باشد، تندی متوسط گلوله‌ها در کل مدت سقوط چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

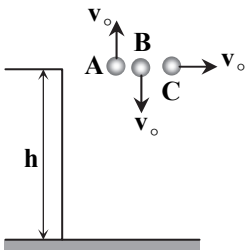
- (۱) ۳۰
- (۲) ۳۵
- (۳) ۶۰
- (۴) ۷۰



۵۸- مطابق شکل، وانتی با سرعت ثابت ۲۰ متر بر ثانیه روی سطح افقی حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که فاصله باربند آن از نقطه A، ۸۰ متر است، گلوله‌ای از بالای نقطه A در ارتفاع $61/25$ متری رها می‌شود. هنگامی که گلوله به فاصله ۵۰ متری نقطه A می‌رسد، وانت با شتاب ثابت a سرعتش را افزایش می‌دهد تا گلوله داخل باربند وانت بیفتد. شتاب a چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$) و از مقاومت هوا و ارتفاع باربند از سطح زمین چشم‌پوشی کنید.

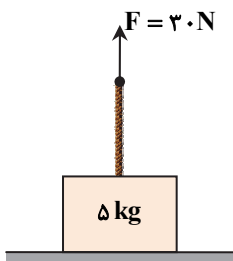
- (۱) $1/6$
- (۲) ۲۰
- (۳) ۴
- (۴) ۵

۵۹- مطابق شکل سه گلوله A، B و C با جرم و شعاع یکسان با تندی‌های اولیه یکسان از ارتفاع h در هوا در جهت‌های نشان داده‌شده پرتاب می‌شوند. کدام گزینه درباره بزرگی شتاب سه گلوله، بلافاصله پس از پرتاب درست است؟



- (۱) $a_A > a_B > a_C$
- (۲) $a_C > a_B > a_A$
- (۳) $a_A > a_C > a_B$
- (۴) $a_A = a_C = a_B$

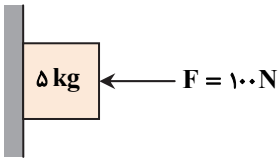
۶۰- مطابق شکل، وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم توسط طنابی با جرم ناچیز با نیروی $F = 30 \text{ N}$ کشیده می‌شود، اما حرکت نمی‌کند. اگر نیرویی که سطح زمین بر وزنه وارد می‌کند، F_N و نیرویی که وزنه بر طناب وارد می‌کند، F_1 باشد، کدام گزینه درست است؟ (از اصطکاک بین وزنه و



سطح صرف‌نظر کنید و $g = 10 \frac{N}{kg}$)

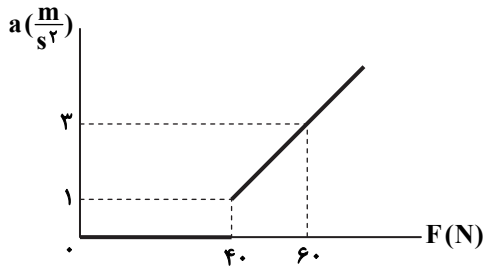
- (۱) $F_1 = 50 \text{ N}$ ، $F_N = 20 \text{ N}$
- (۲) $F_1 = 30 \text{ N}$ ، $F_N = 20 \text{ N}$
- (۳) $F_1 = 50 \text{ N}$ ، $F_N = 50 \text{ N}$
- (۴) $F_1 = 30 \text{ N}$ ، $F_N = 50 \text{ N}$

۶۱- در شکل روبه‌رو، وزنه روی سطح دیوار ساکن است. اگر اندازه نیروی F دو برابر شود، ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- (۱) بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر وزنه، دو برابر می‌شود.
- (۲) بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر وزنه، زیاد می‌شود، اما به دو برابر حالت قبل نمی‌رسد.
- (۳) بزرگی نیرویی که دیوار بر وزنه وارد می‌کند، زیاد می‌شود، اما به دو برابر حالت قبل نمی‌رسد.
- (۴) بزرگی نیرویی که دیوار بر وزنه وارد می‌کند، تغییر نمی‌کند.

۶۲- نمودار روبه‌رو، تغییرات شتاب بر حسب نیروی افقی وارد بر جعبه‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که در ابتدا روی یک سطح افقی ساکن است. مقدار m چند کیلوگرم و ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) بین

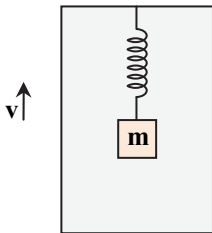


جعبه و سطح افقی کدام است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) $m = 10 \text{ kg}$ و $\mu_s = 0/4$ (۲) $m = 10 \text{ kg}$ و $\mu_s = 0/3$
- (۳) $m = 5 \text{ kg}$ و $\mu_s = 0/8$ (۴) $m = 5 \text{ kg}$ و $\mu_s = 0/7$

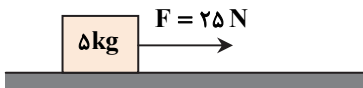
۶۳- مطابق شکل، وزنه‌ای به جرم $m = 2 \text{ kg}$ توسط فنری با ثابت $12 \frac{N}{m}$ از سقف آسانسوری آویزان است. اگر آسانسور دارای حرکت کندشونده

روبه بالا با شتاب ثابت $3 \frac{m}{s^2}$ باشد، واکنش نیرویی که فنر به سقف آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتون و به کدام سمت است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- (۱) 14 N ، پایین
- (۲) 14 N ، بالا
- (۳) 26 N ، پایین
- (۴) 26 N ، بالا

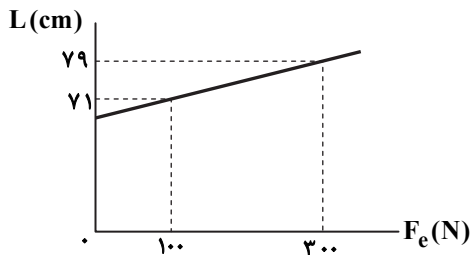
۶۴- نیروی افقی F مطابق شکل جسمی به جرم 5 kg را از حال سکون به طرف راست می‌کشد و پس از 6 ثانیه، نیروی F قطع می‌شود. اگر ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح افقی به ترتیب $\mu_s = 0/4$ و $\mu_k = 0/3$ باشد، از لحظه شروع حرکت تا توقف کامل،



جسم مسافت چند متر را طی می‌کند؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) 120
- (۲) 100
- (۳) 60
- (۴) صفر

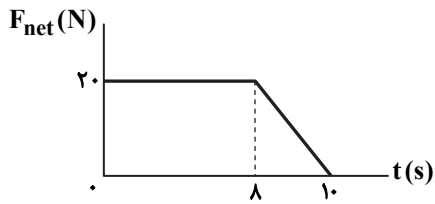
۶۵- نمودار روبه‌رو، طول یک فنر را بر حسب نیروی کشسانی آن نشان می‌دهد. به وسیله این فنر، وزنه‌ای به جرم 20 کیلوگرم را از سطح زمین از حال سکون با شتاب ثابت در مدت 4 ثانیه تا ارتفاع 24 متری به‌طور عمودی بالا می‌بریم. طول فنر در مدت این حرکت چند



سانتی‌متر می‌شود؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) $72/6$
- (۲) $75/2$
- (۳) $78/8$
- (۴) $77/4$

۶۶- نمودار نیروی خالص بر حسب زمان مربوط به جسمی به جرم ۲ کیلوگرم که روی خط راست حرکت می کند، مطابق شکل است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در مدت ۱۰ ثانیه، چند نیوتون است؟



- (۱) ۱۸
(۲) ۱۵
(۳) ۱۰
(۴) ۹

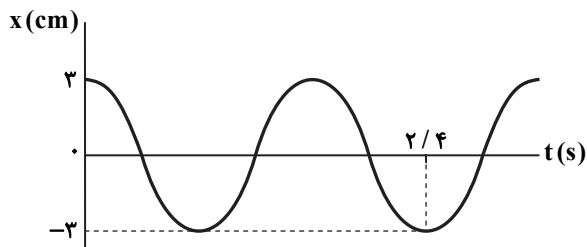
۶۷- اتومبیلی می خواهد در یک مسیر دایره ای، به طور یکنواخت دور یک میدان در سطح افقی حرکت کند. شعاع مسیر ۲۰ m و ضریب اصطکاک ایستایی بین چرخ ها و سطح در عرض جاده برابر ۰/۸ است. حداقل زمان برای طی یک دور کامل در مسیر دایره ای چند ثانیه است؟ ($g = \pi^2$)

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۶۸- گلوله ای به جرم ۵۰۰ گرم، با تندی ثابت $4 \frac{m}{s}$ روی یک دایره حرکت می کند و در هر دقیقه ۳۰ دور کامل طی می کند. اندازه نیروی خالص وارد بر این گلوله چند نیوتون است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۹- اگر نمودار مکان - زمان در یک حرکت هماهنگ ساده به شکل روبه رو باشد، کدام یک از موارد زیر در مورد این حرکت درست است؟



(۱) متحرک در هر دوره مسافت ۶ cm را طی می کند.

(۲) در لحظه $t = 0/8 s$ تندی متحرک بیشینه است.

(۳) بسامد حرکت $\frac{5}{8}$ هرتز است.

(۴) متحرک در هر ثانیه مسافت ۴/۵ سانتی متر را طی می کند.

۷۰- جسمی به جرم ۱۲۵ گرم روی سطح افقی بدون اصطکاک به فنی با ثابت $k = 500 \frac{N}{m}$ بسته می شود. فنر را ۶ سانتی متر از طول طبیعی خود

به سمت راست کشیده تر کرده و سپس آن را رها می کنیم تا به نوسان در آید. $\frac{3}{4}$ ثانیه پس از رها کردن فنر، سرعت جسم چند متر بر ثانیه

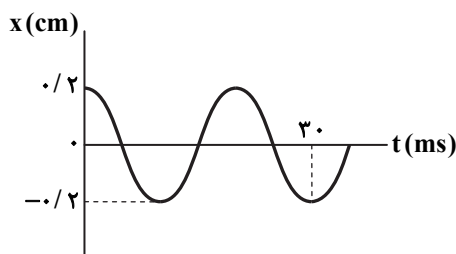
خواهد بود؟ (جهت مثبت محور حرکت را به سمت راست در نظر بگیرید و $\pi^2 = 10$)

- (۱) $+1/2\pi$ (۲) $-1/2\pi$ (۳) $+0/6\pi$ (۴) $-0/6\pi$

۷۱- در یک حرکت هماهنگ ساده با دامنه ۵ سانتی متر و بسامد ۲۰ هرتز، متحرک در لحظه $t = 0$ در انتهای مثبت مسیر قرار دارد. تندی متوسط متحرک از لحظه $t_1 = 0$ تا $t_2 = 400 ms$ چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۰/۲ (۲) ۲ (۳) ۰/۴ (۴) ۴

۷۲- نمودار مکان - زمان متحرکی در یک حرکت هماهنگ ساده به شکل روبه رو است. در کدام لحظه شتاب متحرک صفر است؟ ($\pi^2 = 10$)



(۱) $t = 10 ms$

(۲) $t = 15 ms$

(۳) $t = 20 ms$

(۴) $t = 24 ms$

۷۳- در یک حرکت هماهنگ ساده، جرم نوسانگر ۵۰۰ گرم، بسامد حرکت ۵ هرتز و دامنه حرکت ۲ سانتی متر است. در لحظه‌ای که تندی نوسانگر

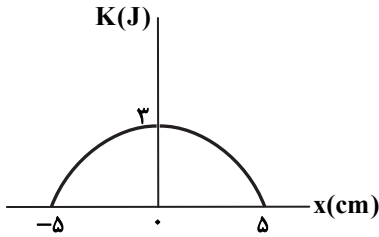
$$\frac{1}{5} \text{ تندی آن هنگام عبور از وضع تعادل است، انرژی پتانسیل نوسانگر چند میلی ژول می‌شود؟ } (\pi^2 = 10)$$

- ۴ (۱) ۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۹۶ (۴)

۷۴- در یک حرکت هماهنگ ساده سامانه وزنه- فنر، جرم وزنه ۶۰۰ گرم و نمودار انرژی جنبشی بر حسب مکان، مطابق شکل است. دوره تناوب

$$\text{حرکت چند ثانیه است؟ } (\pi^2 = 10)$$

- ۱ (۱) ۰/۱
۲ (۲) ۰/۲
۳ (۳) ۰/۲۵
۴ (۴) ۰/۰۵



۷۵- آونگ‌های ساده A و B هم‌زمان در یک محل از یک وضعیت به نوسان درمی‌آیند و در مدت ۷۲ ثانیه آونگ B، ۵ نوسان بیشتر از A انجام

$$\text{می‌دهد. اگر طول آونگ A برابر ۸۱ سانتی متر باشد، طول آونگ B } (g = \pi^2 \frac{m}{s^2})$$

- ۱ (۱) ۱۹ سانتی متر بلندتر از آونگ A است.
۲ (۲) ۱۹ سانتی متر کوتاه‌تر از آونگ A است.
۳ (۳) ۱۷ سانتی متر بلندتر از آونگ A است.
۴ (۴) ۱۷ سانتی متر کوتاه‌تر از آونگ A است.

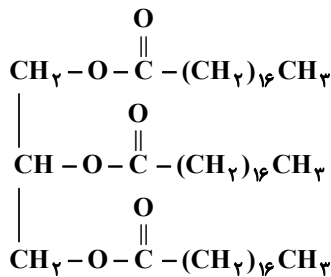
۷۶- در بین عبارتهای زیر چند عبارت درست است؟

- به‌طور کلی مواد قطبی در حلال‌های قطبی و مواد ناقطبی در حلال‌های ناقطبی حل می‌شوند.
- اگر ذره‌های سازنده حل‌شونده با مولکول‌های حلال جاذبه‌های مناسبی برقرار کنند، حل‌شونده در حلال حل می‌شود.
- لکه عسل به راحتی با آب شسته می‌شود؛ زیرا عسل حاوی مولکول‌های قطبی است که در ساختار خود شمار زیادی OH دارند.
- اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند هیدروکربنی هستند که هم در آب و هم در حلال‌های ناقطبی حل می‌شوند.

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۷- با توجه به ساختار روبه‌رو، چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- نشان‌دهنده یک اسید چرب است که بخش ناقطبی آن بر بخش قطبی غلبه دارد.
- دارای سه گروه عاملی استری و ۵۷ اتم کربن است.
- از آبکافت هر مول آن، ۳ مول الکل و ۳ مول اسید چرب ایجاد می‌شود.
- اسید چرب حاصل از آبکافت این مولکول، می‌تواند برای تهیه صابون جامد با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{33}CO_2Na$ استفاده شود.



- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

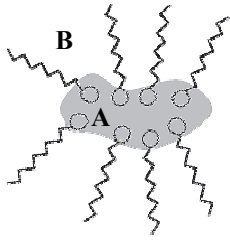
۷۸- در نوعی آب شهری غلظت Mg^{2+} و Ca^{2+} به ترتیب برابر با ۶۰۰ ppm و ۲۰۰۰ ppm است. ۲ لیتر از این آب، چند مول صابون سدیم با فرم

کلی $RCOONa$ را از چرخه پاک‌کنندگی خارج می‌کند؟ ($Mg = 24, Ca = 40; g \cdot mol^{-1}$) (جگالی آب ذکر شده $1g \cdot mL^{-1}$ است.) (معادله موازنه شود.)



- ۱ (۱) ۰/۱
۲ (۲) ۰/۲
۳ (۳) ۰/۳
۴ (۴) ۰/۴

۷۹- شکل روبه‌رو، پخش شدن قطره A توسط مولکول‌های صابون در مایع B را نشان می‌دهد. بر این اساس، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟



- شکل، یک قطره روغن که به وسیله مولکول‌های صابون در آب پخش می‌شود را نشان می‌دهد.
- قسمت آبیونی صابون، تنها با قطره A برهم‌کنش دارد.
- نیروهای بین‌مولکولی غالب در مایع B، از نوع وان‌دروالس است.
- مولکول‌های صابون از بخش آب‌گریز خود، جذب مایع A شده و آن را به صورت قطره‌های ریزی در مایع B پخش می‌کند.

۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

۸۰- اگر شمار اتم‌های کربن در زنجیر هیدروکربنی یک پاک‌کننده غیرصابونی، $\frac{1}{3}$ شمار اتم‌های هیدروژن در صابونی مایع دارای اتم نیتروژن و با ۱۵ اتم کربن باشد، جرم مولی پاک‌کننده غیرصابونی چند گرم بر مول است؟ (زنجیر هیدروکربنی در هردو پاک‌کننده، سیر شده است.)

($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Na = 23, S = 32 : g \cdot mol^{-1}$)

۲۳۵ (۱) ۲۸۶ (۲) ۳۱۴ (۳) ۳۳۴ (۴)

۸۱- کدام گزینه در مورد مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم نادرست است؟

- (۱) این مخلوط در واکنش با چربی‌ها و روغن‌ها موادی همانند صابون تولید می‌کند که در آب محلول هستند.
- (۲) گرمادهی واکنش می‌تواند موجب ذوب شدن چربی‌ها و افزایش قدرت پاک‌کنندگی می‌شود.
- (۳) گاز تولیدی در اثر واکنش مواد موجود در مخلوط، موجب افزایش فشار و کنده شدن مواد از سطح داخلی لوله می‌گردد.
- (۴) پاک‌کنندگی این مخلوط جنبه فیزیکی داشته و برخلاف پاک‌کننده‌های خورنده، جنبه شیمیایی ندارد.

۸۲- کدام محلول رسانایی الکتریکی بیشتری دارد؟ ($Cl = 35.5, Na = 23 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) محلول ۰/۵ مولار HF با درجه یونش ۰/۰۸

(۲) محلولی به حجم ۵ لیتر که از انحلال ۰/۰۲ مول N_2O_5 در آب حاصل شده است.

(۳) محلول ۱ مولار HA با $K_a = 3/2$

(۴) محلول NaCl با چگالی $1/25 g \cdot mL^{-1}$ که غلظت Na^+ در آن ۲۳۰۰ppm است.

۸۳- در محلول ۰/۱ مولار اسیدی تک‌پروتون‌دار در دمای اتاق، مجموع غلظت یون‌های حاصل از یونش اسید، 10^{-3} برابر غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده اسید است. به تقریب درصد یونش اسید و pH این محلول به ترتیب از راست به چپ، کدام هستند؟ ($\log 5 = 0.7$)

(۱) ۰/۰۵، ۵/۳ (۲) ۰/۵، ۵/۳ (۳) ۰/۵، ۴/۳ (۴) ۰/۰۵، ۴/۳

۸۴- با توجه به شکل روبه‌رو، کدام توصیف نادرست است؟ (فلز مورد استفاده Mg است و در هر دو ظرف به یک اندازه قرار داده شده است.)

(۱) ظرف «ب» می‌تواند شامل یک اسید قوی ۱ مولار و ظرف «الف» می‌تواند یک اسید ضعیف ۱ مولار باشد.

(۲) اگر در هر دو ظرف اسید به قدر کافی وجود داشته باشد، حجم نهایی گاز H_2 تولید شده، یکسان است.

(۳) مقدار محلول اسید موجود در دو ظرف می‌تواند یکسان اما با غلظت‌های متفاوت باشد.

(۴) در صورتی که غلظت مولی هر دو اسید یکسان باشد، ثابت یونش اسید در ظرف «الف» بیشتر از «ب» خواهد بود.



<<ب>>



<<الف>>

۸۵- در محلولی از یک اسید تک‌پروتون‌دار با $pH = 4$ ، تعداد مولکول‌های یونیده‌نشده ۳ برابر آنیون‌های مربوط به یونش اسید موجود در محلول است. در این شرایط ثابت یونش اسید به تقریب چند مول بر لیتر است؟

(۱) $3/3 \times 10^{-4}$ (۲) $1/3 \times 10^{-4}$ (۳) $3/3 \times 10^{-5}$ (۴) $1/3 \times 10^{-5}$

۸۶- کدام عبارت‌ها درست هستند؟

الف) در دمای 25°C ، غلظت H^+ در محلول 0.001 مولار نیتریک اسید، 10^8 برابر غلظت H^+ در محلول 0.001 مولار KOH است.

ب) در دما و غلظت یکسان، pH محلول اسید HA ($K_a = 10^{-5}$)، بیشتر از pH محلول اسید HX ($K_a = 10^{-4}$) است.

پ) در آب خالص با دمای 25°C ، رابطه $[\text{H}^+] + [\text{OH}^-] = 10^{-14}$ برقرار است.

ت) با اضافه کردن اندکی HCl به آب خالص در دمای ثابت، میزان یونش آب افزایش می‌یابد.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «پ» و «ت» (۳) «الف» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

۸۷- برای تهیه 200mL محلول Ca(OH)_2 با $\text{pH} = 11/3$ چند میلی‌گرم کلسیم هیدروکسید با خلوص 74% لازم است؟ (ناخالصی‌ها نامحلول در آب هستند و $\text{Ca(OH)}_2 = 74 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

($\log 2 = 0.3, \log 5 = 0.7$)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

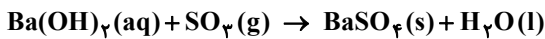
۸۸- به 200mL محلول HNO_3 با $\text{pH} = 1$ ، 0.4 گرم سود سوزآور می‌افزاییم. pH محلول حاصل کدام است؟ (از تغییر حجم محلول صرف نظر شود.) ($\text{H} = 1, \text{O} = 16, \text{Na} = 23 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

($\log 5 = 0.7$)

(۱) $1/3$ (۲) $1/5$ (۳) $1/7$ (۴) ۲

۸۹- در دمای اتاق، 200 میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با $\text{pH} = 12/4$ ، توسط چند لیتر گاز SO_3 با چگالی $4 \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ به‌طور کامل خنثی می‌شود؟

($\log 2 = 0.3$) ($\text{SO}_3 = 80 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(۱) ۱ (۲) 0.5 (۳) 0.1 (۴) 0.05

۹۰- کدام گزینه نادرست است؟ ($\log 3 \approx 0.48$)

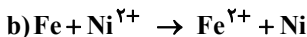
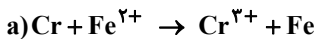
(۱) مصرف غذاها و داروهای اسیدی باعث تشدید بیماری‌های معده خواهد شد.

(۲) شیرۀ معده به‌قدری اسیدی است که در هر بار ترشح، تعدادی از سلول‌های دیواره معده از بین می‌روند.

(۳) غلظت یون هیدرونیوم در شیرۀ معده، حدود $0.3 \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ و pH آن حدود ۳ است.

(۴) گل ادریسی در خاک‌های دارای خاصیت اسیدی و بازی، به‌ترتیب به رنگ آبی و سرخ می‌روید.

۹۱- با توجه به واکنش‌های داده شده، پس از موازنه چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟



■ ضریب گونه کاهنده در واکنش a، دو برابر ضریب گونه اکسنده در واکنش b است.

■ ترتیب قدرت کاهندگی گونه‌ها به‌صورت $\text{Cr} > \text{Fe} > \text{Ni}$ است.

■ محلول دارای یون‌های کروم (III) را می‌توان در ظرف‌های آهنی نگهداری کرد.

■ قدرت اکسندگی گونه اکسنده در واکنش a بیشتر از قدرت اکسندگی گونه اکسنده در واکنش b است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۲- تیغه‌ای از جنس آلومینیم را در 300 میلی‌لیتر محلول آبی‌رنگ مس (II) سولفات قرار می‌دهیم. اگر پس از بی‌رنگ شدن محلول، جرم تیغه

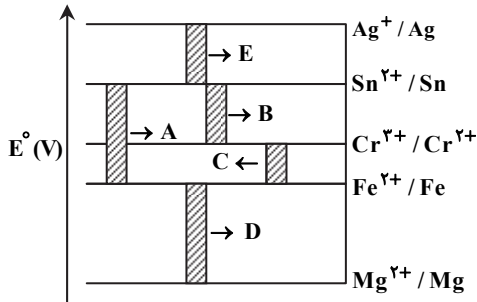
0.69 گرم تغییر کرده باشد، غلظت اولیه محلول چند $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ بوده است؟ (مس تولیدشده به‌طور کامل روی تیغه رسوب می‌کند.)

($\text{Al} = 27, \text{Cu} = 64 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۱) 0.05 (۲) 0.01 (۳) 0.1 (۴) 0.5

۹۳- کدام توصیف درباره سلول گالوانی Zn-Cu نادرست است؟

- ۱) به مرور از جرم تیغه روی کاسته و به جرم تیغه مس افزوده می شود.
 - ۲) آنیون ها از طریق دیواره متخلخل به بخش کاتدی و کاتیون ها به بخش آندی منتقل می شوند.
 - ۳) به مرور غلظت یون Zn^{2+} افزایش و غلظت یون Cu^{2+} کاهش می یابد.
 - ۴) در مدار بیرونی، الکترون ها از تیغه روی به سمت تیغه مس در جریان هستند.
- ۹۴- در نمودار زیر هر خط نشان دهنده یک سلول گالوانی است. با توجه به آن، چه



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

- تعداد از واکنش های داده شده در این سلول ها رخ می دهد؟
- B : $Cr^{2+}(aq) + Sn^{2+}(aq) \rightarrow Cr^{3+}(aq) + Sn(s)$ ■
- A : $Fe(s) + Sn^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Sn(s)$ ■
- C : $Fe(s) + Cr^{3+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Cr^{2+}(aq)$ ■
- D : $Mg^{2+}(aq) + Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Mg(s)$ ■
- E : $Ag(s) + Sn^{2+}(aq) \rightarrow Ag^+(aq) + Sn(s)$ ■

۹۵- در چند مورد از عبارات زیر، سلول های گالوانی و الکترولیتی مشابه هستند؟

- الف) به طور طبیعی و خودبه خود انجام شدن واکنش اکسایش-کاهش
- ب) جهت حرکت آنیون ها از کاند به سمت آند
- پ) کاهش گونه ها در الکتروود با پتانسیل مثبت تر (قطب مثبت سلول الکتروشیمیایی)
- ت) جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از آند به کاند
- ث) تعداد محلول های الکترولیت مورد استفاده

۴ (۴)

۳ (۳)

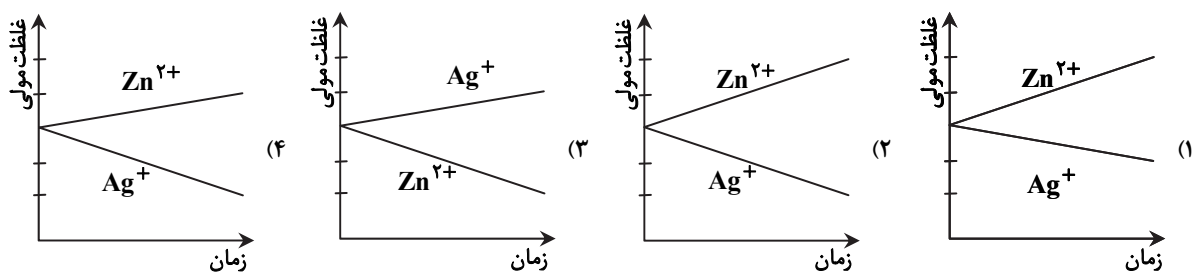
۲ (۲)

۱ (۱)

۹۶- اگر تیغه فلزی X برخلاف تیغه فلزی Y، با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش دهد، کدام گزینه درست است؟

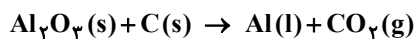
- ۱) در سری الکتروشیمیایی، نیم سلول استاندارد X، موقعیت بالاتری نسبت به نیم سلول استاندارد Y دارد.
- ۲) مقدار emf سلول گالوانی استاندارد X-Y از emf سلول های استاندارد X-SHE و SHE-Y بزرگ تر است.
- ۳) پتانسیل استاندارد نیم سلول X برخلاف پتانسیل استاندارد نیم سلول Y، عددی مثبت است.
- ۴) کاتیون فلز X، اکسندۀ قوی تری از یون هیدروژن و کاتیون فلز Y است.

۹۷- کدام نمودار، تغییر غلظت یون ها را در سلول گالوانی روی-نقره به درستی نشان می دهد؟



۹۸- اگر در فرایند حال، تغییر جرم تیغه های آندی در هر روز ۶ تن باشد، با فرض بازدهی ۸۰ درصد، چند تن آلومینیم با خلوص ۹۰ درصد حاصل

می شود؟ (معادله موازنه شود و $C = 12$ ، $O = 16$ ، $Al = 27$: $g \cdot mol^{-1}$)



۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۹۹- چند مورد از عبارت‌های زیر در ارتباط با خوردگی آهن درست است؟

- (الف) فرآورده نهایی خوردگی آهن، زنگ آهن است که نام آن آهن (II) هیدروکسید است و رنگ قهوه‌ای مایل به قرمز دارد.
 (ب) خوردگی خودبه‌خودی آهن نشان می‌دهد که پتانسیل کاهش فلز آهن منفی‌تر از پتانسیل کاهش عنصر اکسیژن است.
 (پ) در خوردگی آهن، ابتدا اتم‌های فلز آهن به یون آهن (II) و سپس اتم‌های فلز آهن به یون آهن (III) اکسایش می‌یابند و طی هر دو مرحله اتم‌های عنصر اکسیژن اکسند هستند.
 (ت) اگر برای جلوگیری از خوردگی آهن، آن را با لایه نازکی از فلز قلع بیوشانیم، لایه نازک قلع مانند لایه رنگ در قطعه‌های آهنی رنگ شده از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند و در صورت ایجاد خراش، آهن خورده می‌شود.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۰- کدام توصیف دربارهٔ برقکافت آب نادرست است؟

- (۱) کاغذ pH در محلول پیرامون آند آن، به رنگ قرمز در می‌آید.
 (۲) واکنش کاتدی آن به صورت $2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$ است.
 (۳) حجم گاز حاصل در آند دستگاه، دو برابر حجم گاز حاصل در کاتد است.
 (۴) برای انجام آن باید اندکی الکترولیت به آب افزوده شود.
 ۱۰۱- دو قاشق فلزی با جرم یکسان در شرایط کاملاً مشابه در دو سلول جداگانه آبکاری می‌شوند. برای این منظور، یک قاشق در محلول نقره نیترات و دیگری در محلول مس (II) نیترات قرار داده می‌شود. پس از عبور $6/02 \times 10^{22}$ الکترون از مدار بیرونی هریک از این سلول‌ها،

کدام قاشق جرم بیشتری دارد و تفاوت جرم آن‌ها چند گرم است؟ ($Cu = 64, Ag = 108 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) قاشق با روکش نقره - ۴/۴ (۲) قاشق با روکش مس - ۷/۶
 (۳) قاشق با روکش نقره - ۷/۶ (۴) قاشق با روکش مس - ۴/۴

۱۰۲- کدام گزینه در مورد تولید فلز سدیم به روش برقکافت درست است؟

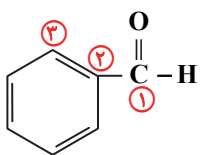
- (۱) از برقکافت محلول غلیظ NaCl استفاده می‌شود.
 (۲) نیم‌واکنش کاتدی این فرایند به صورت $Na^+(aq) + e^- \rightarrow Na(s)$ است.
 (۳) فرآورده آندی آن در یکی از مراحل استخراج منیزیم از آب دریا نیز حاصل می‌شود
 (۴) با افزودن اندکی محلول $CaCl_2$ به سامانه، فرایند با صرفه اقتصادی بیشتری همراه خواهد شد.

۱۰۳- در سلول گالوانی استاندارد نقره-روی، اگر حجم محلول‌های موجود در بخش آندی و کاتدی ۲ لیتر باشد، پس از ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه، غلظت کاتیون‌ها در ظرف آند دو برابر ظرف کاتد می‌شود. تغییر جرم تیغه آندی چند گرم است و سرعت متوسط تولید نقره در این سلول، چند مول

بر ثانیه است؟ ($Zn = 65, Ag = 108 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) 26×10^{-3} (۲) 4×10^{-3} (۳) 26×10^{-3} (۴) 2×10^{-3}

۱۰۴- با توجه به ساختار روبه‌رو که مربوط به بنز آلدهید است، کدام گزینه درست می‌باشد؟



(۱) عدد اکسایش کربن شماره ۱ بزرگ‌تر از عدد اکسایش کربن ۲ و کربن ۳ است.

(۲) عدد اکسایش تمامی اتم‌های کربن حلقه بنزن با هم برابر است.

(۳) عدد اکسایش کربن شماره ۱ با کربن اتین برابر است.

(۴) تنوع عدد اکسایش اتم‌های کربن در این ترکیب مشابه نفتالن است.

۱۰۵- در سلول گالوانی حاصل از اتصال SHE و روی، در لحظه‌ای که $83/75$ درصد از تیغه آندی به‌صورت دست‌نخورده باقی‌مانده، pH الکترولیت کاتدی کدام است؟ (جرم اولیه تیغه آندی را ۸۰ گرم و حجم هریک از الکترولیت‌ها را ۵۰۰ سی‌سی در نظر بگیرید.)

($\log 2 = 0/3$) ($Zn = 65 : g \cdot mol^{-1}$)

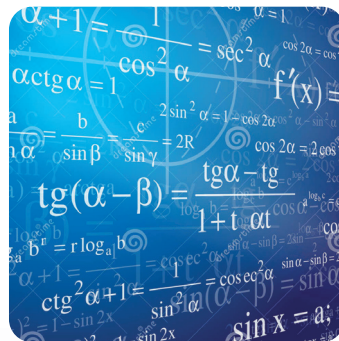
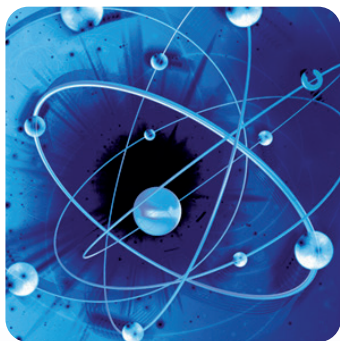
- (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۴ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۷

دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۱۴ فروردین ۱۴۰۳ (مرحله ۱۳)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

گروه آزمایشی علوم ریاضی



ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

برای آنکه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 + 2ax + b} = +\infty$ ، باید $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج باشد، پس:

$$x^2 + 2ax + b = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$$

$$a + b = 0$$

بنابراین:

۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ ، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود. نکته: برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید. نمودار تابع $y = 2f(3x)$ ، از انقباض افقی تابع $f(x)$ و انبساط عمودی آن به دست می‌آید، باید توجه کرد که چون فقط دامنه را می‌خواهیم،

انبساط افقی مدنظر است. داریم:

$$D_{f(x)}: 2 \leq x < 4 \Rightarrow D_{f(3x)}: 2 \leq 3x < 4 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{4}{3}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

تساوی داده شده در صورت سؤال را با استفاده از نکته ساده می‌کنیم:

$$\tan 2x = \frac{6}{\tan^2 x - 1} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{6}{\tan^2 x - 1} \Rightarrow 2 \tan x = -6 \Rightarrow \tan x = -3$$

۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $r(x)$ و $q(x)$ وجود دارند به طوری که $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

ابتدا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^4 + ax^2 - ax - 1 = (x-1)^2 \cdot q(x)$$

اگر قرار دهیم $x = 1$ تساوی برقرار است، یعنی عبارت بر $x - 1$ بخش پذیر است، در این حالت با استفاده از تجزیه چندجمله‌ای داریم:

$$x^4 - 1 + a(x^2 - x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + (x-1)(ax) = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1 + ax)$$

برای آنکه بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، کافی است $x^3 + x^2 + x + 1 + ax$ به ازای $x = 1$ صفر شود، بنابراین:

$$1 + 1 + 1 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -\cos \alpha$ ، $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

معادله را به فرم ساده تری می‌نویسیم:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\sin 3x \sin x - \cos x \cos 3x}{\sin x \cos x} = 2$$

$$-\cos(3x + x) = 2 \sin x \cos x \Rightarrow -\cos 4x = \sin 2x \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 4x\right) = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - 4x \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{4} + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{3\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ -2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در بازه $(0, \pi)$ ، جواب‌های معادله عبارتند از $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{7\pi}{4}$ است.

با توجه به نمودار f داریم:

$$D_f = [-1, 3]$$

$$R_f = [0, 2]$$

در ضابطه $y = 2f(1+2x) - 3$ با توجه به D_f باید:

$$-1 \leq 1+2x \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow D_y = [-1, 1]$$

از طرفی:

$$R_f = [0, 2] \Rightarrow 2 \times 0 - 3 \leq 2f(1+2x) - 3 \leq 2 \times 2 - 3 \Rightarrow -3 \leq 2f(1+2x) - 3 \leq 1 \Rightarrow R_y = [-3, 1]$$

بنابراین اشتراک دامنه و برد تابع y به صورت $[-1, 1]$ است.نکته: اگر $n \in \mathbb{N}$ بر $x^n - a^n$ بخش پذیر است و داریم:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

نکته: اگر n عددی طبیعی زوج باشد، $x^n - a^n$ بر $x+a$ بخش پذیر است و داریم:

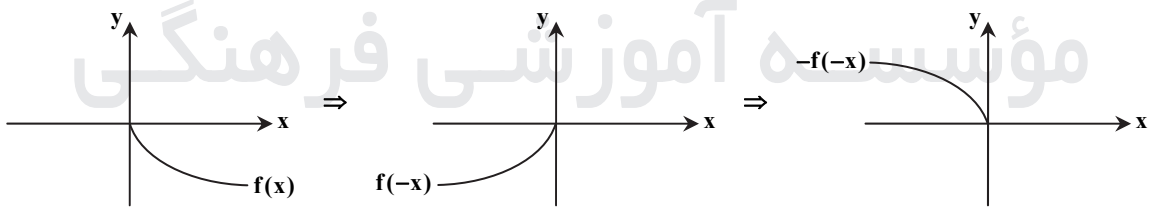
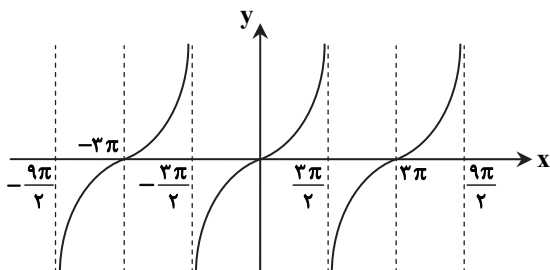
$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

با توجه به نکات داریم:

$$x^8 - 1 = (x-1) \underbrace{(x^7 + x^6 + x^5 + \dots + x + 1)}_{f(x)} \quad x^8 - 1 = (x+1) \underbrace{(x^7 - x^6 + x^5 - \dots + x - 1)}_{g(x)}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} f(1) = 8 \\ g(-1) = -8 \end{cases} \Rightarrow g(-1) - f(1) = -16$$

نکته: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می شود.نکته: اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به دست می آیند، بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.نکته: اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند، بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.از نمودار $f(x)$ ، نمودار تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:اگر به عنوان مثال ۲ یا ۳ واحد نمودار به سمت بالا منتقل شده باشد، ضابطه‌هایی مانند $g(x) = 2 - f(-x)$ یا $g(x) = 3 - f(-x)$ قابل قبول اند، بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.ابتدا نمودار تابع $y = \tan \frac{x}{3}$ را رسم می کنیم:مطابق شکل، $A = \frac{3\pi}{2}$ و $B = -3\pi$ ، بنابراین:

$$AB = \frac{3\pi}{2} + 3\pi = \frac{9\pi}{2}$$

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k + 1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.
با توجه به آنکه کسر برابر صفر شده است، پس باید صورت کسر صفر باشد و مخرج کسر صفر نباشد. داریم:

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دقت کنید که مقادیر $x = 2k\pi + \pi$ قابل قبول نیستند؛ زیرا مخرج کسر را صفر می‌کنند، پس $x = \frac{2k\pi}{5}$ جواب کلی معادله داده شده است.

نکته: خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

نکته: $x = a$ را مجانب قائم تابع f گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر را داشته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{ax(x+b) - (x^2 - 3x)}{x+b} = \frac{ax^2 + axb - x^2 + 3x}{x+b} = \frac{(a-1)x^2 + (ab+3)x}{x+b}$$

این تابع به شرطی مجانب افقی دارد که $a-1=0$ باشد، پس $a=1$ و داریم:

$$f(x) = \frac{(b+3)x}{x+b} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(b+3)x}{x} = b+3$$

خط $y = b+3$ مجانب افقی است، پس مطابق فرض سؤال $b+3=5$ و $b=2$ است، بنابراین مجانب قائم خط $x = -b$ ، یعنی $x = -2$ است.

نکته: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 + 3)(x+3) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 9) = (x+1)^3 + 8$$

حال نمودار f را یک واحد به راست و هشت واحد به پایین انتقال می‌دهیم، در این صورت داریم:

$$f(x-1) - 8 = (x-1+1)^3 + 8 - 8 = x^3$$

نمودار جدید آن $y = x^3$ خواهد شد که نمودار آن در گزینه ۳ آمده است.

نکته: خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x+1} = 4$ ، پس $y = 4$ مجانب افقی تابع است. برای بررسی اینکه تابع در اطراف مجانب افقی بالای خط یا پایین آن قرار می‌گیرد، ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{4x}{x+1} = \frac{4x+4-4}{x+1} = 4 - \frac{4}{x+1}$$

حال نمودار تابع را در $x \rightarrow \pm\infty$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{4}{x+1} \rightarrow 0^+ \Rightarrow 4 - \frac{4}{x+1} \rightarrow 4^- \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{4}{x+1} \rightarrow 0^- \Rightarrow 4 - \frac{4}{x+1} \rightarrow 4^+ \end{cases}$$

پس وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، تابع زیر مجانب افقی و وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، تابع بالای مجانب افقی است. نمودار به شکل زیر است:

$$\text{نکته: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + 1}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + 1} = \begin{cases} \pm\infty & m > n \\ a & m = n \\ a' & n > m \\ \cdot & \end{cases}$$

نکته: به طور کلی وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است.

ابتدا صورت و مخرج حد داده شده را ساده می‌کنیم تا بتوان صورت و مخرج را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(ax+1)^2 - (ax-1)^2}{(ax^2+1)^2 - (ax^2-1)^2} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a^2x^2 + 1 + 2ax) - (a^2x^2 - 1 - 2ax)}{(a^2x^4 + 1 + 2ax^2) - (a^2x^4 + 1 - 2ax^2)} = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4a^2x^2}{4a^2x^2} = 4 \Rightarrow \frac{2a}{2} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

نکته: $x = a$ را مجانب قائم تابع f گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر را داشته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

برای یافتن مجانب قائم و بررسی نمودار تابع در مجاورت مجانب قائم از ریشه مخرج و رفتار تابع در مجاورت ریشه مخرج کمک می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{2[x]+5}{(x+2)^2} \Rightarrow x = -2 \text{ مجانب قائم}$$

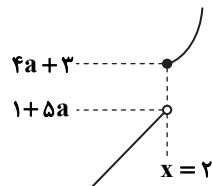
$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -2^+ : \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2[x]+5}{(x+2)^2} = \frac{-4+5}{\cdot+} = +\infty \\ x \rightarrow -2^- : \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2[x]+5}{(x+2)^2} = \frac{-6+5}{\cdot+} = -\infty \end{array} \right.$$

پس نمودار در مجاورت مجانب قائم به صورت  است.

نکته: تابع f را در یک بازه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه‌بالا خواهیم رفت.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گوییم.

با توجه به اینکه ضابطه دوم f خطی با شیب مثبت و اکیداً صعودی است، پس برای اکیداً یکنوا بودن f لازم است نمودار آن به صورت زیر باشد.



دقت کنید که نمودار ضابطه اول باید قسمتی از یک سهمی روبه‌بالا باشد که بعد از رأس سهمی باشد، پس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \cdot \\ \text{طول رأس سهمی} = 0 \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} a > \cdot \\ a \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \cdot < a \leq 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = 1, 2 \\ 4a + 3 \geq 1 + 5a \end{array} \right.$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$
 برقرار باشد.

ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{(ax+b)(2x^2+1)} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(ax+b)(2x^2+1)}$$

با توجه به تابع f ، برای اینکه فقط یک مجانب افقی به صورت $y = 2$ داشته باشد، باید $ax+b$ در مخرج ریشه ۱ داشته باشد تا با $x-1$ در صورت کسر ساده شود، پس داریم:

$$a(1) + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

حال تابع f را ساده کرده و با توجه به مقدار مجانب افقی، مقدار a و b را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+1)}{a(x-1)(2x^2+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2ax^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -a = -\frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$a \times b = -\frac{1}{16}$$

نکته ۱: توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیم $|a| + c$ ، مقدار مینیم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

$$2 \text{ نکته } 2: \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

ماکزیم تابع برابر a است، پس: $a = 4$

با استفاده از نکته ۲ داریم:

$$y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2bx) = 2(1 - \cos 2bx)$$

نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{3}$ ، سومین نقطه تقاطع خط $y = 1$ با نمودار تابع در اعداد مثبت است، پس می‌توان نوشت:

$$1 = 2(1 - \cos 2b \times \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos \frac{2\pi b}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi b}{3} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \dots$$

سومین جواب مثبت

بنابراین:

$$\frac{2\pi b}{3} = \frac{7\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{7}{2} \Rightarrow ab = 14$$

نکته: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (در صورت وجود)، عبارت است از:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از نکته بالا داریم:

$$(A + 2I)^{-1} = \frac{1}{9-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

نکته: در معادله گسترده (ضمنی) دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، مرکز دایره به مختصات $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است.

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 2 = 0 \xrightarrow{+2} x^2 + y^2 + 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow O(-2, 1) \text{ (مرکز دایره)}$$

$$\text{فاصله نقطه } M(-1, 3) \text{ از مرکز دایره } |MO| = \sqrt{(-2+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\text{نکته: } r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

$$\text{نکته: } [a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

ابتدا درایه‌های ماتریس $[i^2 + 3j^2]_{2 \times 2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{11} = 4, a_{12} = 13, a_{21} = 7, a_{22} = 16$$

اکنون با توجه به فرض داریم:

$$\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 7 & 16 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+5 & 3b \\ 3c & 3d+5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 3a+5 \\ 13 = 3b \\ 7 = 3c \\ 16 = 3d+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{13}{3} \\ c = \frac{7}{3} \\ d = \frac{11}{3} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{b+c+d}{a} = \frac{\frac{13}{3} + \frac{7}{3} + \frac{11}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{31}{3}}{-\frac{1}{3}} = -31$$

$$A^2 + 2A = \bar{O} \Rightarrow A^2 = -2A$$

$$(A+I)(-2A-2I) = -2A^2 - 2AI - 2IA - 2I \cdot I = 4A - 2A - 2A - 2I = A - 2I$$

دترمینان ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3k+1) - 2(-1+2k) = 3-k$$

$$|B| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} - k$$

حال طبق فرض سؤال داریم:

$$|A| = |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} \Rightarrow 3-k = \frac{1}{\frac{3}{2}-k} \Rightarrow (3-k)(\frac{3}{2}-k) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} - 3k - \frac{3}{2}k + k^2 = 1 \Rightarrow 2k^2 - 9k + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (2k-7)(k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{7}{2} \end{cases}$$

نکته: در مورد دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B اگر $A \cdot B = I$ ، آنگاه $A^{-1} = B$.

$$A^2 + A = I \Rightarrow A(A+I) = I \Rightarrow A^{-1} = A+I$$

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = (A+I)^2 = A^2 + 2A + I = \underbrace{A^2 + A + A + I}_{I} = 2I + A$$

نکته: در دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، در این حالت دو خط موازی اند و هیچ نقطه مشترکی ندارند.

لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

طبق نکته فوق داریم:

$$\begin{cases} 2mx - y = 4 \\ 4x + (m+1)y = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2m}{4} = \frac{-1}{m+1} \neq \frac{4}{-2} \Rightarrow \frac{2m}{4} = \frac{-1}{m+1} \Rightarrow 2m^2 + 2m = -4 \Rightarrow m^2 + m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow m \text{ وجود ندارد.}$$

یعنی دو خط هیچ گاه موازی نیستند، پس هیچ وقت دستگاه بی جواب نیست.

نکته: اگر دو خط موازی $d: y = mx + h$ و $d': y = mx + h'$ مفروض باشند، معادله

خطی که موازی آن‌ها و در وسط آن دو خط باشد به صورت $y = mx + \frac{h+h'}{2}$ است.

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $d: ax + by + c = 0$ به صورت زیر است:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ است.

با توجه به شکل روبه‌رو چون دو خط d و d' موازی هستند، معادله خط l

که موازی دو خط d و d' و از مرکز دایره می‌گذرد به صورت زیر است:

$$l: y = 2x + \frac{-7+1}{2} \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 2(-2) - 3 = -7 \Rightarrow O(-2, -7) \text{ مرکز دایره}$$

$$d: 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow r = OH = \frac{|2(-2) - (-7) + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+7)^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 14y + 49 - \frac{16}{5} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 14y + 49/5 = 0$$

نکته ۱: مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

نکته ۲: عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله هستند.

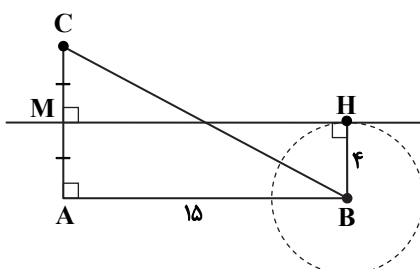
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A و C به یک فاصله باشند، عمودمنصف AC

است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه B به فاصله ۴ باشند، دایره‌ای به مرکز

B و شعاع ۴ است. مطابق صورت سؤال باید عمودمنصف و دایره مماس باشند:

$$AM = BH = 4 \Rightarrow AC = 8$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{17^2} = 17$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$A^n - A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n - 2^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1}(2-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

نکته: فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

ابتدا معادله دایره را استاندارد می‌کنیم و مرکز و شعاع آن را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = m \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = m+2$$

$$R = \sqrt{m+2} \quad (*)$$

مثلث OAB متساوی الاضلاع است، پس فاصله O تا خط d برابر ارتفاع مثلث است.

بنابراین:

$$d: x+y+1=0$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow \frac{|1+1+1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \quad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\sqrt{m+2} = \sqrt{6} \Rightarrow m=4$$

نکته (اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها): گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به این روش اثبات، «اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها» می‌گویند.

نکته: یک مجموعه n عضوی تعداد 2^n زیرمجموعه دارد.

با توجه به نکته همه حالت‌ها را در نظر می‌گیریم:

n	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
۱	۱
۲	۹
۳	۳۶
۴	۱۰۰
۵	۲۲۵
۶	۴۴۱

با توجه به جدول، حاصل عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ به‌ازای $n = 1, 2, 5, 6$ ، مقدار صحیح و فرد است. بنابراین $A = \{1, 2, 5, 6\}$ که تعداد

$$16 = 2^4 \text{ زیرمجموعه دارد.}$$

نکته (قضیه تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که:

$$a = bq + r \quad \text{و} \quad 0 \leq r < b$$

طبق فرض و نکته فوق داریم:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a + 14 = b(q+2) + r \end{cases} \Rightarrow bq + r + 14 = bq + 2b + r \Rightarrow 2b = 14 \Rightarrow b = 7$$

نکته: در اثبات برخی نامساوی‌ها یا تساوی‌های ریاضی، حکم را آنقدر ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. حال اگر مسیر طی شده را برگردیم حکم ثابت می‌شود، به این روش، اثبات بازگشتی می‌گوییم.
با توجه به نکته، عبارت را دسته‌بندی و ساده می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6 \geq 2x - 2y - 4z \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + (z^2 + 4z) + 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 4z + 4) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 \geq 0$$

این رابطه همواره درست است. با عملیات برگشت، حکم مسأله ثابت خواهد شد.

$$a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases} \text{ نکته:}$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$6a^2 | 36a^2 \Rightarrow [6a^2, 36a^2] = |36a^2|$$

$$4a | 24a^2 \Rightarrow (24a^2, 4a) = |4a|$$

با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$([6a^2, 36a^2], (24a^2, 4a)) = (|36a^2|, |4a|) = \frac{|4a| \cdot |36a^2|}{|4a|} = 4|a|$$

نکته: باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ است.
نکته: می‌توان به یک طرف یا هر دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی، ضربی از پیمانه را اضافه کرد:

$$a \equiv b \Rightarrow a \equiv mk + b \text{ و } a + mk \equiv b \text{ و } a + mk \equiv b + mk'$$

راه‌حل اول:

با توجه به نکته داریم:

$$35a72 \equiv 1 \Rightarrow 3 + 5 + a + 7 + 2 \equiv 1 \Rightarrow 17 + a \equiv 1 \Rightarrow a \equiv -16 \Rightarrow a \equiv -16 + 2(9)$$

$$\Rightarrow a \equiv 2 \xrightarrow{\text{یک رقم است}} a = 2$$

راه‌حل دوم (روش تستی):

با چک کردن گزینه‌ها به جای a واضح است که فقط $a = 2$ قابل قبول است؛ زیرا مجموع ارقام عدد 35272 برابر ۱۹ می‌شود که باقی‌مانده‌اش ۹ برابر ۱ است.

نکته: برای تعیین رقم یکان هر عدد، کفایت باقی‌مانده آن را بر ۱۰ به دست آوریم.

نکته: دو عدد دارای رقم یکان مساوی هستند، اگر و فقط اگر در پیمانه ۱۰ با یکدیگر هم‌نهشت باشند.

با توجه به نکات بالا داریم:

$$4a - 3 \equiv 5a - 8 \Rightarrow 8 - 3 \equiv 5a - 4a \Rightarrow a \equiv 5$$

$$\Rightarrow a = 10k + 5 \Rightarrow 3a + 2 = 30k + 17 \equiv 17 \equiv 17 - 2 \times 6 \equiv 5$$

پس باقی‌مانده تقسیم $3a + 2$ بر ۶، برابر ۵ است.

نکته: شرط وجود جواب در معادله سیاله $ax + by = c$ آن است که $(a, b) | c$.

با توجه به نکته و اینکه ۲۹ عددی اول است، داریم:

$$(7n + 1, 29) | 104 \Rightarrow 7n + 1 = 29k \Rightarrow 7n + 1 \equiv 0 \Rightarrow 7n \equiv -1 \equiv 28 \Rightarrow n \equiv 4 \Rightarrow n = 4 + 29k'$$

$$\Rightarrow \text{رقم وسط} = 2 \Rightarrow n = 4 + 29 \times 4 = 120 \Rightarrow \text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی}$$

۳۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v در G ، دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند.

راه حل اول:

طبق شکل، مسیرهای به طول ۴ از a به b عبارتند از:

aedcb aecdb adecb adceb acedb acdeb

بنابراین ۶ مسیر به طول ۴ از a به b وجود دارد.

راه حل دوم:

با توجه به اینکه گراف، کامل است، می‌توان تعداد مسیرها را با استفاده از اصل ضرب محاسبه کرد. به این صورت که باید سه رأس d, c, e را بین دو رأس a و b قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر است با:

$$\frac{1}{\text{رأس } a} \times \frac{3}{\text{رأس}} \times \frac{2}{\text{رأس}} \times \frac{1}{\text{رأس}} \times \frac{1}{\text{رأس } b} = 6$$

۳۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته ۱: دنباله $v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دوبه‌دو متمایز را که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است، یک دور به طول n می‌نامیم.

نکته ۲: گراف G را همبند گوئیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر G همبند نباشد، ناهمبند است. حالات مختلف برای $p + q = 8$ به صورت زیر است:

$$p + q = 8$$

۰	۸	x	وجود ندارد.
۱	۷	x	
۲	۶	x	
۳	۵	x	

$$4 \quad 4 \Rightarrow$$



۵	۳	x	ناهمبند
۶	۲	x	
۷	۱	x	
۸	۰	x	

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۳۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

$$\begin{cases} x|y \\ x|z \end{cases} \Rightarrow x|my + nz \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

باید نقاط (x, y) را روی منحنی به گونه‌ای تعیین کنیم که x و y هر دو عدد صحیح باشند. y را بر حسب x حل می‌کنیم.

$$8x^2 - 2xy - y + 3 = 0 \Rightarrow y(-2x - 1) = -8x^2 - 3 \Rightarrow y = \frac{8x^2 + 3}{2x + 1}$$

اکنون باید y عددی صحیح باشد. برای این منظور باید $8x^2 + 3$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد:

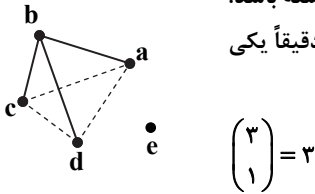
$$\begin{cases} 2x + 1 | 8x^2 + 3 \\ 2x + 1 | 2x + 1 \xrightarrow{\times 4x} 2x + 1 | 8x^2 + 4x \\ 2x + 1 | 4x - 3 \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2x + 1 | 5 \Rightarrow 2x + 1 = \pm 1, \pm 5 \Rightarrow x = 0, -1, 2, -3 \\ 2x + 1 | 2(2x + 1) \end{cases}$$

پس چهار نقطه با مختصات صحیح روی منحنی وجود دارد.

نکته (زیرگراف): یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد.

برای اینکه درجه رأس b برابر ۳ باشد، باید هر سه یال متصل به رأس b را داشته باشیم.

همچنین چون حداقل درجه برابر صفر است، پس باید رأسی از درجه صفر در زیرگراف مورد نظر وجود داشته باشد. بنابراین زیرگراف مورد نظر باید شامل رأس e هم باشد. اکنون برای اینکه اندازه گراف برابر ۴ بشود، باید دقیقاً یکی از ۳ یال باقی‌مانده، در زیرگراف مورد نظر وجود داشته باشد که تعداد حالت‌های آن برابر است با:



$$\binom{3}{1} = 3$$

پس تعداد زیرگراف‌های مورد نظر برابر ۳ است.

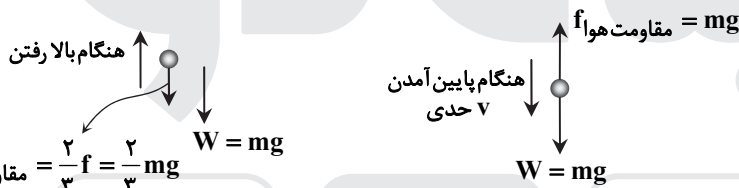
فیزیک

واکنش نیروی وزن وارد بر جسم، نیرویی است که جسم به کره زمین وارد می‌کند و رو به بالا است.

در نوسانگرهای میرا (در حضور مقاومت و اصطکاک) اگر بسامد نیروی اعمال‌شده به نوسانگر برابر بسامد طبیعی نوسان باشد، دامنه نوسان‌ها به تدریج افزایش می‌یابد و به مقدار بیشینه‌ای می‌رسد و سپس ثابت می‌ماند در این حالت می‌گوییم پدیده تشدید (رزونانس) رخ داده است.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

در هنگام سقوط، وقتی توپ به تندی حدی می‌رسد، بزرگی نیروی مقاومت هوا برابر وزن آن است:



$$(F_{net})_y = ma \Rightarrow -W - f' = ma \Rightarrow -mg - \frac{2}{3}mg = ma \Rightarrow -\frac{5}{3}mg = ma \Rightarrow a = -\frac{5}{3}g \Rightarrow |a| = \frac{5}{3}g$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2 \times \left(\frac{m_B}{m_A}\right) = 4^2 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

$$W = \frac{GM_em}{r^2} = \frac{GM_em}{(R_e + h)^2}$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2}\right)^2 \xrightarrow{h_1=0, h_2=2R_e} \frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{R_e}{2R_e}\right)^2 \Rightarrow W_2 = \frac{W_1}{4} = \frac{3600}{4} = 900 \text{ N}$$

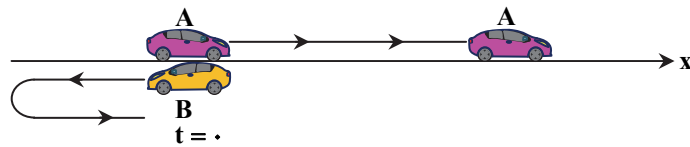
در مدت $t = 0$ تا $t = 10 \text{ s}$ سرعت متحرک ثابت است:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{40 - (-60)}{10} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در مدت $t = 15 \text{ s}$ تا $t = 21 \text{ s}$ نیز سرعت متحرک ثابت است:

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-40 - 40}{6} = -\frac{40}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-\frac{40}{3} - 10}{18 - 3} = \frac{-\frac{70}{3}}{15} = -\frac{14}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow |a_{av}| = \frac{14}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



متحرک A در کل بازه زمانی صفر تا $t = 12s$ در جهت مثبت محور x حرکت می کند (چون سرعت آن مثبت است)، ولی متحرک B در بازه زمانی صفر تا $t = 4s$ در خلاف جهت محور x حرکت می کند، پس از متحرک A دور می شود. در لحظه $t = 4s$ متحرک B می ایستد و برمی گردد و تدریجاً تندی خود را زیاد می کند، ولی تا لحظه $t = 8s$ هنوز تندی آن از تندی متحرک A کمتر است و در نتیجه فاصله آن ها همچنان زیاد می شود. از لحظه $t = 8s$ به بعد، تندی متحرک B بیشتر از A بوده و چون در پشت سر A در حرکت است، فاصله آن تا A کم می شود، بنابراین بیشترین فاصله دو متحرک در $t = 8s$ است.

با کمی دقت معلوم می شود متحرک B در بازه صفر تا $t = 8s$ به مکان اولیه خود بازمی گردد و جابه جایی آن صفر است، لذا کافی است جابه جایی متحرک A را در بازه زمانی صفر تا $t = 8s$ محاسبه کنیم. توجه کنید شتاب متحرک A در بازه $(4s, 12s)$ ثابت بوده و در نتیجه در تمام این بازه شتاب متوسط یکسان است.

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{(8s, 12s)} = \frac{0 - 10}{12 - 8} = -2.5 \frac{m}{s^2}, \quad a_{(4s, 12s)} = \frac{0 - v(4)}{12 - 4} \Rightarrow -2.5 = \frac{-v(4)}{8} \Rightarrow v(4) = 20 \frac{m}{s}$$

نمودار $v-t$ متحرک A در هریک از بازه های $(0, 4s)$ و $(4s, 8s)$ خط راست است؛ بنابراین در هریک از این بازه ها سرعت متوسط برابر میانگین سرعت اولیه و نهایی آن بازه خواهد بود:

$$v_{av(0, 4s)} = \frac{v_0 + v(4)}{2} = \frac{10 + 20}{2} = 15 \frac{m}{s} \xrightarrow{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \Delta x_{(0, 4s)} = 15 \times 4 = 60 m$$

$$v_{av(4s, 8s)} = \frac{v(4) + v(8)}{2} = \frac{20 + 10}{2} = 15 \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x_{(4s, 8s)} = 15 \times 4 = 60 m$$

$$\text{فاصله بیشترین} = 60 + 60 = 120 m$$

نکته: با توجه به اینکه جابه جایی برابر با مساحت بین نمودار $v-t$ با محور زمان است نیز می توان نوشت:

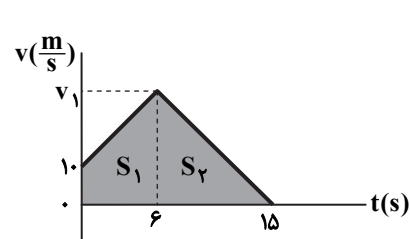
$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{(0, 4s)} &= \frac{20 + 10}{2} \times 4 = 60 m \\ \Delta x_{(4s, 8s)} &= \frac{10 + 20}{2} \times 4 = 60 m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{فاصله بیشترین} = 60 + 60 = 120 m$$

الف) درست؛ نمودار مکان- زمان A خط مستقیم است، پس سرعت ثابت و در نتیجه تندی A هم ثابت خواهد بود.

ب) نادرست؛ اگرچه جابه جایی A و B و در نتیجه سرعت متوسط آن ها در این بازه یکسان است، ولی مسافت طی شده توسط B بیشتر است؛ بنابراین تندی متوسط B بیشتر از A می شود.

پ) نادرست؛ به طور مشخص، شتاب A صفر است، اما شتاب B صفر نیست.

ت) نادرست؛ با توجه به اینکه شیب مماس بر نمودار مکان- زمان برابر سرعت لحظه ای و اندازه سرعت لحظه ای هم برابر تندی لحظه ای است، می توان تشخیص داد که در لحظات ابتدایی و انتهایی این بازه تندی B بیشتر و در برخی لحظات میانی تندی A بیشتر است.



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = 15 \times 17 = 255 m$$

جابه جایی برابر است با مساحت بین نمودار سرعت- زمان با محور زمان.

$$\Delta x = S_1 + S_2 = \frac{10 + v_1}{2} \times 6 + \frac{9 \times v_1}{2} \Rightarrow 255 = \frac{60 + 6v_1 + 9v_1}{2}$$

$$\Rightarrow 510 = 60 + 15v_1 \Rightarrow v_1 = 30 \frac{m}{s}$$

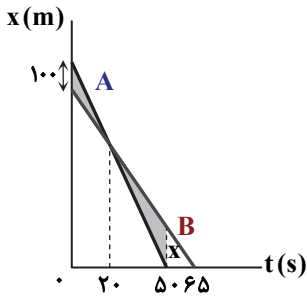
اندازه سرعت ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد، پس حرکت ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است. همچنین در هر قسمت، نمودار

$v-t$ خطی بوده پس شتاب ثابت خواهد بود. ($a = a_{av}$)

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{30 - 10}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \frac{m}{s^2} \\ a_2 = \frac{0 - 30}{15 - 6} = \frac{-30}{9} = -\frac{10}{3} \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a_1|}{|a_2|} = 1$$

راه حل اول:

از تشابه دو مثلث رنگی داریم:



$$\frac{x}{100} = \frac{30}{20} \Rightarrow x = 150 \text{ m}$$

اکنون با استفاده از قضیه تالس می توان گفت:

$$\frac{x}{x_{OB}} = \frac{65-50}{65} \Rightarrow \frac{150}{x_{OB}} = \frac{15}{65} \Rightarrow x_{OB} = 650 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_{OA} = 650 + 100 = 750 \text{ m}$$

راه حل دوم:

حرکت هر دو متحرک یکنواخت (سرعت ثابت) است، پس:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{-x_{OA}}{50} = -\frac{x_{OA}}{50} \\ v_B = \frac{-x_{OB}}{65} = -\frac{x_{OB}}{65} = \frac{-(x_{OA} - 100)}{65} \end{cases}$$

$$x_A = x_B \xrightarrow[t=20s]{x=vt+x_0} -\frac{x_{OA}}{50} \times 20 + x_{OA} = \frac{-(x_{OA} - 100)}{65} \times 20 + (x_{OA} - 100) \Rightarrow \frac{30}{50} x_{OA} = (x_{OA} - 100) \times \frac{45}{65}$$

$$\Rightarrow x_{OA} = 750 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳

$$x_0 = 20 \text{ m}$$

چون نمودار مکان- زمان سهمی است حرکت با شتاب ثابت است. بنابراین:

با توجه به تقارن سهمی، می توان گفت محور تقارن سهمی در $t = 5 \text{ s}$ است، یعنی رأس سهمی در $t = 5 \text{ s}$ است و در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار که برابر سرعت متحرک در $t = 5 \text{ s}$ است، صفر می باشد.

$$v(t = 5 \text{ s}) = 0 \Rightarrow 5a + v_0 = 0$$

در مدت $t = 0$ تا $t = 5 \text{ s}$ جابه جایی ۱۰۰ متر است.

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \Delta t \Rightarrow 120 - 20 = \frac{v_0 + 0}{2} \times 5 \Rightarrow 100 = 5 \frac{v_0}{2} \Rightarrow v_0 = +40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \xrightarrow{5a + v_0 = 0} a = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_{av} = \frac{v_0 + v}{2} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_0 + v(3 \cdot 5)}{2} = \frac{40 + (-8 \times 30 + 40)}{2} = \frac{40 - 200}{2} = -80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۵۲- پاسخ: گزینه ۲

تندی اتومبیل B در حال کاهش است و تا زمانی که تندی آن به $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ نرسیده به اتومبیل A نزدیک می شود و پس از آنکه تندی اتومبیل B

کمتر از $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ شد، دو اتومبیل از هم دور می شوند؛ بنابراین کمترین فاصله آن ها زمانی است که تندی اتومبیل B به $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می رسد؛ به شرط

$$v_{2B} = at + v_{0B} \Rightarrow v_{2B} = -3t + 35 = 20 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

آنکه تا این لحظه به جلویی برخورد نکرده باشد:

اگر مبدأ مکان را محل اتومبیل B انتخاب کرده باشیم، داریم:

$$x_B = \frac{1}{2} at^2 + v_{0B} t + x_{0B} = \frac{1}{2} \times (-3)t^2 + 35t + 0 \xrightarrow{t=5s} x_B = -37/5 + 175 = 137/5 \text{ m}$$

$$\text{جلویی: } x_A = 20t + 50 \xrightarrow{t=5s} x_A = 20 \times 5 + 50 = 150 \text{ m}$$

$$\text{کمترین فاصله دو اتومبیل} = x_A(5) - x_B(5) = 150 - 137/5 = 12/5 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۵۳- پاسخ: گزینه ۱

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_6 = 4 \times 6 + v_0 = 24 + v_0 \\ v_{10} = -6 \times 4 + v_6 = -24 + (24 + v_0) = v_0 \end{cases}$$

در هر قسمت شتاب ثابت است و جابه جایی از رابطه $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \times \Delta t$ حساب می شود:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{v_0 + v_6}{2} \times 6 + \frac{v_6 + v_{10}}{2} \times 4 \xrightarrow{v_{10} = v_0} \Delta x = \frac{v_0 + (v_0 + 24)}{2} \times 10 = (v_0 + 12) \times 10$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(v_0 + 12) \times 10}{10} = v_0 + 12 \Rightarrow 20 = v_0 + 12 \Rightarrow v_0 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_6 = v_0 + 24 = 8 + 24 = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow 28 - 37 = \frac{v_3 + v_6}{2} \times 3 \Rightarrow -9 = \frac{v_3 + v_6}{2} \times 3 \Rightarrow v_3 + v_6 = -6 \frac{m}{s} \quad (1) \text{ رابطه}$$

$$73 - 28 = \frac{v_9 + v_6}{2} \times 3 \Rightarrow 45 = 3 \times \frac{v_9 + v_6}{2} \Rightarrow v_9 + v_6 = 30 \frac{m}{s} \quad (2) \text{ رابطه}$$

$$\text{رابطه (۳): } \Delta v = a \cdot \Delta t \rightarrow 6a = 36 \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2} \quad (3) \text{ رابطه}$$

$$v_9 + v_6 = 30 \Rightarrow (9a + v_0) + (6a + v_0) = 30 \xrightarrow{\text{رابطه (۳)}} 15 \times 6 + 2v_0 = 30 \Rightarrow v_0 = -3 \frac{m}{s}$$

$$x_{12} - x_9 = \frac{v_{12} + v_9}{2} \times 3 = \frac{21a + 2v_0}{2} \times 3 = (10/5a + v_0) \times 3 = (10/5 \times 6 - 30) \times 3 = 99 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_{12} = 99 + 73 = 172 \text{ m}$$

راه حل اول:

$$\text{رابطه (۱): } v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \frac{v_f + v_0}{2} = 0 \Rightarrow v_f = -v_0$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow{\text{از رابطه (۱)}} fa + v_0 = -(10a + v_0) \Rightarrow 14a = -2v_0 \Rightarrow v_0 = -7a$$

$$\text{رأس سهمی: } v = 0 \Rightarrow at + (-7a) = 0 \Rightarrow t = 7s$$

(این نتیجه را می توان از ویژگی های سهمی نیز خیلی زود به دست آورد.)

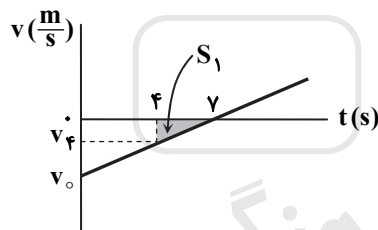
$$\text{بازه } 4s \text{ تا } 7s: \Delta x = \frac{v_f + v_7}{2} \times \Delta t \Rightarrow -27 = \frac{v_f + 0}{2} \times 3 \Rightarrow v_f = -18 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{v_7 - v_f}{7 - 4} = \frac{0 - (-18)}{3} = 6 \frac{m}{s^2} \Rightarrow v_0 = -7a = -42 \frac{m}{s}$$

چون در بازه ۰ تا ۴s جهت حرکت عوض نمی شود، داریم:

$$s_{av} = |v_{av}| \Rightarrow s_{av} = \left| \frac{v_0 + v_f}{2} \right| = \left| \frac{-42 - 18}{2} \right| = 30 \frac{m}{s}$$

راه حل دوم:



$$\Delta x_{f-7} = S_1 \Rightarrow -27 = \frac{v_f \times 3}{2} \Rightarrow v_f = -18 \frac{m}{s}$$

$$\text{تشابه مثلث ها: } \frac{v_f}{v_0} = \frac{7-4}{7-0} \Rightarrow v_0 = \frac{-18 \times 7}{3} = -42 \frac{m}{s}$$

$$s_{av} = |v_{av}| = \left| \frac{(-42) + (-18)}{2} \right| = 30 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x_{BC} = \frac{1}{2} at^2 + v_B t \Rightarrow 18 = \frac{1}{2} \times 4 \times 1^2 + v_B \times 1 \Rightarrow v_B = 16 \frac{m}{s}$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a \Delta x_{AB} \Rightarrow 16^2 - 0 = 2 \times 4 \times \Delta x_{AB} \Rightarrow \Delta x_{AB} = 32 \text{ m}$$

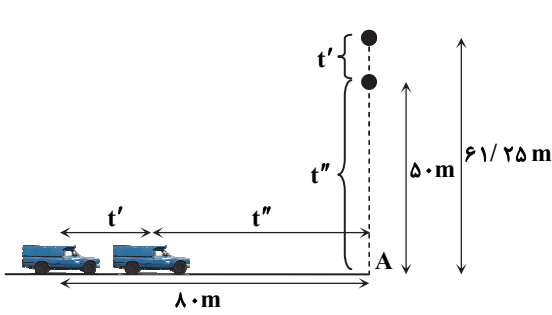
$$\Delta x_{AC} = \Delta x_{AB} + \Delta x_{BC} = 32 + 18 = 50 \text{ m}$$

$$v^2 - v_A^2 = 2a \Delta x \Rightarrow v^2 - 0 = 2 \times 4 \times \left(\frac{50}{2}\right) \Rightarrow v = 10\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{رابطه (۱): } h = \frac{1}{2} gt^2 \text{ گلوله اول} \\ \text{رابطه (۲): } h - 165 = \frac{1}{2} g(t-3)^2 \Rightarrow h - 165 = \frac{1}{2} gt^2 + \frac{9}{2} g - 3gt \end{cases} \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} 3 \cdot t = 210 \Rightarrow t = 7s$$

$$t = 7s : v = gt = 10 \times 7 = 70 \frac{m}{s}$$

$$s_{av} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{70 + 0}{2} = 35 \frac{m}{s}$$



$$61/25 - 50 = \frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow t' = 1/5s$$

$$\Delta x_{t'} = vt' = 20 \times 1/5 = 30m$$

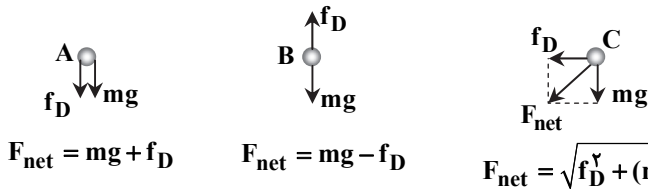
$$61/25 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = 3/5s$$

$$t'' = 3/5 - 1/5 = 2s$$

$$\Delta x_{t''} = 80 - 30 = 50 = \frac{1}{2}at''^2 + 20t'' \Rightarrow 50 = \frac{1}{2}a \times 4 + 20 \times 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$$

چون تندی اولیه، جرم و حجم گلوله‌ها یکسان است، بزرگی مقاومت هوا برای هر سه گلوله بلافاصله پس از پرتاب یکسان است.



$$F_{net} = mg + f_D$$

$$F_{net} = mg - f_D$$

$$F_{net} = \sqrt{f_D^2 + (mg)^2}$$

رابطه بین بزرگی نیروی خالص وارد بر گلوله‌ها به صورت زیر است:

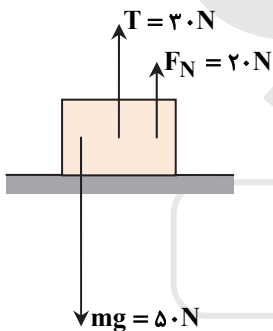
$$F_{net(A)} > F_{net(C)} > F_{net(B)}$$

طبق رابطه $F_{net} = ma$ داریم:

$$a_A > a_C > a_B$$

نیروی کشش طناب در دو سر آن هم‌اندازه است، پس طناب، وزنه را با نیروی $F = 20N$ بالا می‌کشد و وزنه هم واکنش آن نیرو یعنی $F_1 = 20N$ را بر طناب وارد می‌کند. از سوی دیگر، نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است.

$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_N + 20 - 50 = 0 \Rightarrow F_N = 20N$$



در حالت اول ($F = 100N$) وزنه ساکن است، پس $f_s = mg = 50N$ و با زیاد شدن F ، اگرچه F_N زیاد می‌شود ($F_N = F$)؛ اما مقدار f_s تغییر نمی‌کند.

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2} \Rightarrow R = \sqrt{(mg)^2 + F^2}$$

با دو برابر شدن مقدار F ، مقدار R زیاد می‌شود؛ اما به دو برابر نمی‌رسد.

با توجه به نمودار معلوم می‌شود که اگر $F \leq 40N$ باشد، جعبه اصلاً حرکت نمی‌کند ($a = 0$) و برای $F > 40N$ ، جعبه حرکت می‌کند؛ پس $f_{s,max} = 40N$ است.

$$40 = f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_N = mg} 40 = \mu_s mg \Rightarrow 10\mu_s m = 40 \Rightarrow \mu_s m = 4 \quad (1) \text{ رابطه (۱)}$$

در حالت‌هایی که جعبه حرکت می‌کند، هر چه F بیشتر باشد، a هم بیشتر می‌شود.

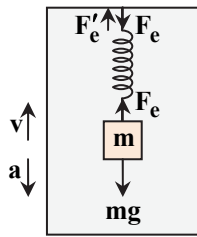
$$F - f_k = ma \Rightarrow a = \frac{F - f_k}{m} \Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{(F_2 - f_k) - (F_1 - f_k)}{m} = \frac{F_2 - F_1}{m}$$

$$\Rightarrow 3 - 1 = \frac{60 - 40}{m} \Rightarrow 2 = \frac{20}{m} \Rightarrow m = 10kg \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \mu_s = 0.4$$

۶۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نیروی که فنر به وزنه وارد می‌کند، روبه‌بالا و نیرویی که فنر به سقف وارد می‌کند، روبه‌پایین است و واکنش آن را سقف به فنر و روبه‌بالا (F'_e) وارد می‌کند.

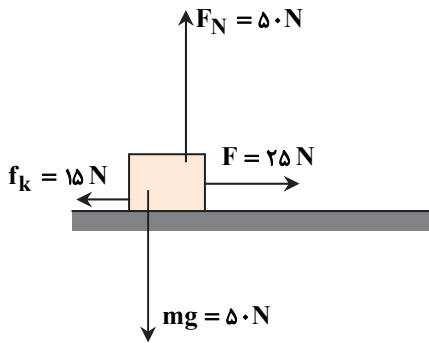


$$(F_{net})_y = ma \Rightarrow F_e - mg = ma \Rightarrow F_e - 20 = 2 \times (-3)$$

$$\Rightarrow F_e = 14 \text{ N} \Rightarrow F'_e = F_e = 14 \text{ N}$$

۶۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$f_{s,max} = \mu_s \cdot F_N = \mu_s \cdot mg = 0.4 \times 50 = 20 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg = 0.3 \times 50 = 15 \text{ N}$$

در قسمت اول، وضعیت نیروهای وارد بر جسم به شکل روبه‌رو است:

$$\text{در راستای افقی: } F_{net} = ma \Rightarrow 25 - 15 = 5a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 = 2 \times 6 + 0 = 12 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \cdot \Delta t = \frac{12 + 0}{2} \times 6 = 36 \text{ m}$$

در قسمت دوم، نیروی F قطع شده و تنها f_k بر جسم اثر می‌کند:

$$\text{در راستای افقی: } F_{net} = ma \Rightarrow 0 - 15 = 5a \Rightarrow a = -3 \frac{m}{s^2}$$

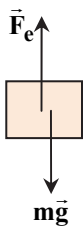
(جهت مثبت را همان جهت حرکت در نظر گرفته‌ایم.)

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 12^2 = 2 \times (-3) \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{12 \times 12}{6} = 24 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = 36 + 24 = 60 \text{ m}$$

۶۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} a \times 4^2 + 0 \Rightarrow a = 3 \frac{m}{s^2}$$

$$F_e - mg = ma \Rightarrow F_e - 20 = 20 \times 3 \Rightarrow F_e = 260 \text{ N}$$

طبق قانون هوک ($F_e = k|\Delta L|$) تغییر طول فنر متناسب با بزرگی نیروی آن است، یعنی می‌توانیم بین تغییر طول فنر و نیروی آن تناسب مستقیم بنویسیم و در نتیجه طول فنر یک تابع خطی (درجه ۱) از بزرگی نیروی آن است.

$$\frac{L_2 - L_1}{F_{e2} - F_{e1}} = \frac{L_3 - L_1}{F_{e3} - F_{e1}} \Rightarrow \frac{79 - 71}{300 - 100} = \frac{L - 71}{260 - 100} \Rightarrow \frac{8}{200} \times 160 = L - 71 \Rightarrow L - 71 = 6.4 \Rightarrow L = 77.4 \text{ cm}$$

تذکر: البته می‌توانید ابتدا ثابت فنر (k) و طول عادی آن (L_0) را با استفاده از نمودار به‌دست آورده و سپس طول فنر را محاسبه نمایید.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۶- پاسخ: گزینه ۱

مساحت زیر نمودار $F_{net} - t$ برابر با اندازه تغییرات تکانه است:

$$S = \Delta p = 20 \times \left(\frac{1 + 10}{2} \right) = 110 \text{ N.s}$$

$$\Delta p = F_{av} \times \Delta t \Rightarrow 110 = F_{av} \times 10 \Rightarrow F_{av} = 11 \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۷- پاسخ: گزینه ۲

در حرکت اتومبیل به دور میدان، نیروی اصطکاک ایستایی در عرض جاده، نقش نیروی مرکزگرا را دارد. بنابراین:

$$f_s = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{f_s r}{m}}$$

حداقل زمان به‌ازای بیشترین تندی به‌دست می‌آید و طبق رابطه بالا بیشترین تندی به‌ازای بیشترین نیروی اصطکاک یعنی $f_{s,max}$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mu_s mgr}{m}} = \sqrt{\mu_s gr} \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu_s rg}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T_{min} = \frac{2\pi r}{v_{max}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu_s rg}} \Rightarrow T_{min} = \frac{2 \times 20}{\sqrt{0.8 \times 20}} = \frac{2 \times 20}{4} = 10 \text{ s}$$

$$T = \frac{\Delta t}{N} = \frac{60}{30} = 2s \quad \text{و} \quad T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{v}{\pi} m$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4 \times 4}{\frac{4}{\pi}} = 4\pi \frac{m}{s^2} = 12 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{net} = ma = 0.5 \times 12 = 6N$$

زمان مشخص شده روی شکل، $\frac{3}{2}T$ است.

$$\frac{3}{2}T = 2/4s \Rightarrow T = 1/6s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1/6} = 6 \text{ Hz}$$

در حرکت هماهنگ ساده، متحرک در هر دوره، مسافت $4A$ را می‌پیماید. دامنه این حرکت 3 سانتی‌متر است، بنابراین متحرک در هر دوره 12 cm طی می‌کند.

در مورد گزینه ۴ توجه کنید که حرکت هماهنگ ساده یک حرکت یکنواخت نیست و نمی‌توان گفت در هر ثانیه مسافت ثابت و معینی را طی می‌کند. تنها در دو مورد خاص می‌توانید چنین جملاتی در مورد حرکت هماهنگ ساده بیان نمایید: در هر دوره، مسافت $4A$ طی می‌شود و در هر نصف دوره، مسافت $2A$ طی می‌شود.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50 \cdot \pi^2}{0.125}} = \sqrt{\frac{10000 \cdot \pi^2}{25}} = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0.1s$$

$$N = \frac{t}{T} = \frac{40}{0.1} = 400 \Rightarrow \text{نوسانگر در مبدأ مختصات قرار دارد و به طرف راست در حرکت است}$$

$$\Rightarrow v = v_{max} = A\omega = 0.06 \times 20\pi = +1.2\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} s = 50 \text{ ms}$$

$$\Delta t = 400 \text{ ms} = 8T$$

مسافتی که متحرک در هر دوره طی می‌کند، $4A$ است؛ بنابراین تندی متوسط متحرک برابر است با:

$$s_{av} = \frac{4A}{T}$$

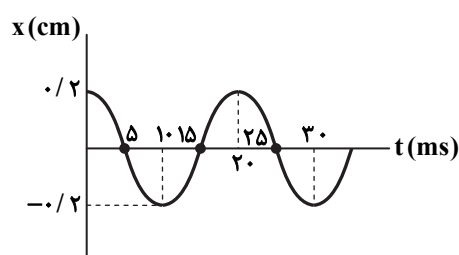
توجه کنید که در هر ضرب صحیحی از دوره نیز، s_{av} همین مقدار می‌شود؛ یعنی در مدت n دوره داریم:

$$s_{av} = \frac{n \times 4A}{nT} = \frac{4A}{T} \Rightarrow s_{av} = \frac{4 \times 0.05}{0.05} = 20 \times 0.05 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{6T}{4} = 30 \Rightarrow T = 20 \text{ ms} = 0.02s$$

متحرک در لحظه‌های $t = 5 \text{ ms}$ ، $t = 15 \text{ ms}$ و $t = 25 \text{ ms}$ از مرکز نوسان عبور می‌کند و در لحظه‌های $t = 0$ ، $t = 10 \text{ ms}$ ، $t = 20 \text{ ms}$ و $t = 30 \text{ ms}$ به نقاط بازگشت (در انتهای مسیر) می‌رسد.

در هنگام عبور از مرکز نوسان (وضع تعادل) شتاب متحرک صفر است و در هر یک از دو انتهای مسیر ($x = \pm A$) بزرگی شتاب آن بیشینه است.



$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 2\pi^2 m f^2 A^2 = 2 \times 10^{-3} \times 0.5 \times 5^2 \times \left(\frac{2}{100}\right)^2 = 0.1 \text{ J}$$

$$v = \frac{1}{2} v_{\max} \xrightarrow{K = \frac{1}{2} m v^2} K = \frac{1}{25} K_{\max} = \frac{1}{25} E$$

$$U = E - K = \frac{24}{25} E \Rightarrow U = \frac{24}{25} \times \frac{1}{10} = 0.096 \text{ J} \Rightarrow U = 96 \text{ mJ}$$

$$E = 2\pi^2 m f^2 A^2 \Rightarrow 3 = 2\pi^2 \times 0.6 \times f^2 \times \left(\frac{5}{100}\right)^2 \Rightarrow f^2 = \frac{3 \times 10^4}{2\pi^2 \times 0.6 \times 25} = 10^2 \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.1 \text{ s}$$

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{L_A}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.81}{\pi^2}} = 1/8 \text{ s}$$

$$\Delta t = n_A T_A \Rightarrow 72 = n_A \times 1/8 \Rightarrow n_A = 40 \Rightarrow n_B = 40 + 5 = 45$$

$$\Delta t = n_B T_B \Rightarrow 72 = 45 T_B \Rightarrow T_B = \frac{72}{45} = \frac{8}{5} = 1/6 \text{ s}$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{L_B}{g}} \Rightarrow 1/6 = 2\pi \sqrt{\frac{L_B}{\pi^2}} \Rightarrow L_B = 0.64 \text{ m}$$

پس طول آونگ B به اندازه $81 - 64 = 17 \text{ cm}$ کوتاه تر است.

شیمی

عبارت‌های «اول»، «دوم» و «سوم» درست هستند.

بررسی عبارت چهارم: کربوکسیلیک اسیدهای حداکثر با ۵ اتم کربن، در آب محلول هستند، انواع سنگین تر آن‌ها اغلب نامحلول در آب هستند و اسیدهای چرب نیز در این دسته قرار دارند.

فقط عبارت «دوم» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: نشان‌دهنده یک استر سنگین است که بخش ناقطبی آن بر بخش قطبی غلبه دارد.

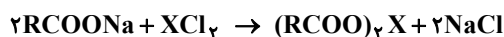
عبارت سوم: از آبکافت هر مول آن، یک مول الکل سه عاملی و ۳ مول اسید چرب ایجاد می‌شود.

عبارت چهارم: اسید چرب حاصل از آبکافت این مولکول، برای تهیه صابون جامدی با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{35}CO_2Na$ استفاده می‌شود.

$$g \text{ Mg}^{2+} = 2000 \times \frac{600}{106} = 1129 \text{ g} \Rightarrow \text{mol Mg}^{2+} = \frac{1129}{24} = 0.05$$

$$g \text{ Ca}^{2+} = 2000 \times \frac{2000}{106} = 3773 \text{ g} \Rightarrow \text{mol Ca}^{2+} = \frac{3773}{40} = 0.1$$

هر مول از این کاتیون‌ها، ۲ مول صابون را به رسوب تبدیل می‌کند:



$$\text{mol رسوب شده} = (2 \times 0.05) + (2 \times 0.1) = 0.3 \text{ mol}$$

فقط عبارت «سوم» درست است.

با توجه به شکل و حل شدن بخش قطبی مولکول‌های صابون در قطره ریز مایع A، می‌توان نتیجه گرفت که مایع A قطبی و مایع B ناقطبی است. از آنجا که B ناقطبی است، نیروهای بین‌مولکولی غالب آن، از نوع وان‌دروالسی است. در مورد «ب» دقت کنید که مجموعه

قسمت آنیونی صابون است که با هر دو مایع A و B برهم‌کنش دارد.

۸۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

صابونی مایع دارای اتم نیتروژن (RCOONH_۴) با ۱۵ اتم کربن یا به عبارتی دیگر با زنجیر هیدروکربنی سیرشده ۱۴ کربنی (C_{۱۴}H_{۲۹}COONH_۴) دارای ۳۳ اتم هیدروژن است؛ پس در زنجیر هیدروکربنی پاک کننده غیرصابونی ۱۱ اتم کربن وجود دارد و فرمول شیمیایی آن به صورت C_{۱۱}H_{۲۳}C_۶H_۴SO_۳Na است. جرم مولی این ترکیب ۳۳۴ گرم بر مول است.

۸۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

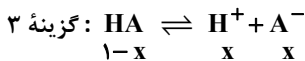
پاک کنندگی این مخلوط به دلیل فشار ناشی از تولید گاز جنبه فیزیکی دارد. علاوه بر این، NaOH جزء پاک کننده های خورنده بوده که واکنش آن با چربی جنبه شیمیایی دارد.

۸۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$۱ \text{ گزینه } ۱ = [\text{H}^+] + [\text{F}^-] = 2[\text{H}^+] = 2M\alpha = 2 \times 0.05 \times 0.8 = 0.08 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

$$\text{هر مول } \text{N}_2\text{O}_5 \text{ در آب، ۴ مول یون تولید می کند. } ۰.۰۲ \times ۴ = ۰.۰۸ \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$



$$K_a = \frac{x^2}{1-x} = 3/2 \Rightarrow x = 0.8 \Rightarrow \text{مجموع غلظت یون ها} = 2x = 1.6 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

$$۴ \text{ گزینه } ۴: M_{\text{Na}^+} = \frac{10 \times 0.23 \times 1/25}{23} = 0.125 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع غلظت یون ها} = [\text{Na}^+] + [\text{Cl}^-] = 2[\text{Na}^+] = 2 \times 0.125 = 0.25 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۳- پاسخ: گزینه ۴

غلظت یون های حاصل از یونش را ۲x و غلظت مولکول های یونیده نشده اسید را ۰/۱-x در نظر می گیریم:

$$2x = 10^{-3} (0.1-x) \Rightarrow 2x = 10^{-4} \Rightarrow x = 5 \times 10^{-5} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

$$\text{درجه یونش} = \frac{x}{0.1} = \frac{5 \times 10^{-5}}{0.1} = 0.0005 \Rightarrow \alpha = 0.05\%$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log(5 \times 10^{-5}) = 5 - 0.7 = 4.3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۴- پاسخ: گزینه ۱

سرعت واکنش فلزات (مثلاً فلز Mg) با اسیدها، به غلظت یون H⁺ در محلول بستگی دارد. بنابراین می توان دریافت غلظت H⁺ در ظرف «الف» بیشتر از ظرف «ب» است و در صورتی که غلظت مولی یکسانی از دو اسید در دو ظرف وجود داشته باشد، اسید ظرف «الف» می تواند اسید قوی و ظرف «ب» ضعیف باشد (اسید ظرف «الف» قوی تر از ظرف «ب» است)، بنابراین عبارت گزینه ۱ نادرست است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۵- پاسخ: گزینه ۳

در محلول ذکر شده غلظت یون هیدرونیوم برابر با ۱۰^{-۴} mol·L⁻¹ است:

$$\text{HA} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{A}^- \quad K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]} = \frac{10^{-4} \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-4}} = 3/3 \times 10^{-5} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۶- پاسخ: گزینه ۱

عبارت های «الف» و «ب» درست هستند.
(الف)

$$\left. \begin{aligned} \text{HNO}_3 : 0.001 \text{ M} &\Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-3} \\ \text{KOH} : 0.001 \text{ M} &\Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-3} \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{10^{-3}}{10^{-11}} = 10^8$$

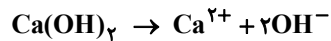
(ب) هر چه K_a کوچک تر باشد، اسید ضعیف تر و در غلظت یکسان، pH محلول آن بیشتر است.
بررسی عبارت های نادرست:

$$(پ) \text{ در آب خالص } 25^\circ\text{C}، \text{ رابطه } [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \text{ برقرار است.}$$

(ت) با اضافه کردن HCl به آب خالص، غلظت H⁺ زیاد می شود؛ بنابراین [OH⁻] که ناشی از یونش آب است، کم می شود و می توان نتیجه گرفت که میزان یونش آب کاهش می یابد.

$$\text{pH} = 11/3 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-11/3} = 10^{-12} \times 10^{1/3} = 5 \times 10^{-12}$$

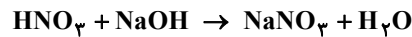
$$\Rightarrow [\text{H}^+] \times [\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 2 \times 10^{-3}$$



$$[\text{OH}^-] = 2x = 2(\alpha \cdot M) = 2(1 \times M) = 2 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow M = 0/001 \Rightarrow \text{mol Ca(OH)}_2 = 0/001 \times 0/2 = 2 \times 10^{-4}$$

$$2 \times 10^{-4} = \frac{y \times 10^{-3}}{74} \times \frac{74}{100} \Rightarrow y = 20 \text{ mg}$$



$$\text{HNO}_3 \begin{cases} \text{حجم} = 0/2 \text{ L} \\ \text{pH} = 1 \Rightarrow [\text{H}^+] = 0/1 \end{cases} \Rightarrow \text{مول اسید} = 0/02$$

$$\text{mol NaOH} = \frac{0/4}{40} = 0/01$$

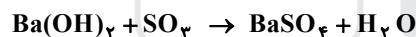
$$\text{مول اسید خنثی شده} = 0/02 - 0/01 = 0/01$$

$$\text{غلظت مولی اسید خنثی نشده} = \frac{0/01}{0/2} = 0/05 \Rightarrow [\text{H}^+] = 0/05 \Rightarrow \text{pH} = -\log 0/05 = 1/3$$

$$\text{pH} = 12/4 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-12/4} = 10^{-13} \times (10^{1/3})^2 = 4 \times 10^{-13} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-13}} = 2/5 \times 10^{-2}$$

در محلول Ba(OH)_2 ، غلظت OH^- دو برابر غلظت مولی محلول است.

$$[\text{OH}^-] = 2[\text{Ba(OH)}_2] \Rightarrow [\text{Ba(OH)}_2] = 1/25 \times 10^{-2}$$



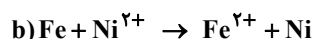
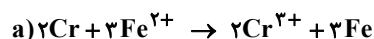
$$\text{SO}_3 \text{ حجم گاز} = 0/2 \text{ L Ba(OH)}_2(\text{aq}) \times \frac{1/25 \times 10^{-2} \text{ mol Ba(OH)}_2}{1 \text{ L Ba(OH)}_2(\text{aq})} \times \frac{1 \text{ mol SO}_3}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2} \times \frac{80 \text{ g SO}_3}{1 \text{ mol SO}_3} \times \frac{1 \text{ L SO}_3}{4 \text{ g SO}_3}$$

$$= 0/05 \text{ L SO}_3$$

غلظت مولی شیره معده برابر با $0/03$ مول بر لیتر و pH آن حدود $1/5$ است.

$$\text{pH} = -\log(3 \times 10^{-2}) = 2 - \log 3 = 2 - 0/48 = 1/52$$

معادله موازنه شده واکنشها به صورت زیر است:



براساس این واکنشها:

قدرت کاهشدهنده ها: $\text{Cr} > \text{Fe} > \text{Ni}$

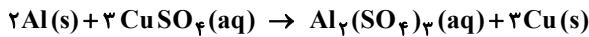
قدرت اکسندگی اکسندنده ها: $\text{Cr}^{3+} < \text{Fe}^{2+} < \text{Ni}^{2+}$

عبارت‌های «اول»، «دوم» و «سوم» درست هستند.

بررسی عبارت چهارم: قدرت اکسندگی گونه اکسندنده واکنش a (Fe^{2+}) کمتر از قدرت اکسندگی گونه اکسندنده در واکنش b (Ni^{2+}) است.

راه حل اول:

جرم آلومینیم مصرفی را x و جرم مس تولیدشده را y می‌نامیم. با توجه به معادله واکنش به‌ازای مصرف ۵۴ گرم آلومینیم، ۱۹۲ گرم مس تولید می‌شود بنابراین y از x بزرگتر است:



$$y \text{ g Cu} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{64 \text{ g Cu}} \times \frac{2 \text{ mol Al}}{3 \text{ mol Cu}} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} = x \text{ g Al} \Rightarrow 32x = 9y$$

$$\begin{cases} 32x = 9y \\ y - x = 0.69 \end{cases} \Rightarrow 23x = 0.69 \times 9 \Rightarrow x = 0.27 \text{ g}$$

$$? \text{ mol CuSO}_4 = 0.27 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol CuSO}_4}{2 \text{ mol Al}} = \frac{3}{200} \text{ mol CuSO}_4$$

$$[\text{CuSO}_4] = \frac{\frac{3}{200} \text{ mol CuSO}_4}{0.3 \text{ L}} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

راه حل دوم:

با توجه به معادله واکنش، به‌ازای مصرف ۳ مول CuSO_4 ، ۱۳۸ گرم $((3 \times 64) - (2 \times 27) = 138)$ به جرم تیغه اضافه می‌شود:

$$0.69 \text{ g} \times \frac{3 \text{ mol CuSO}_4}{138 \text{ g}} = 0.015 \text{ mol CuSO}_4$$

$$[\text{CuSO}_4] = \frac{0.015 \text{ mol}}{0.3 \text{ L}} = 0.05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

۹۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

با عبور از دیواره متخلخل، آنیون‌ها به بخش آندی و کاتیون‌ها به بخش کاتدی منتقل می‌شوند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۴- پاسخ: گزینه ۳

در جدول پتانسیل الکترودی عناصر، گونه سمت چپ بالاتر (مثبت‌تر) در جدول می‌تواند با گونه سمت راست پایین‌تر (منفی‌تر) جدول کاهش دهد.



واکنش می‌دهد



بر این اساس مورد «چهارم» و «پنجم» نادرست است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۵- پاسخ: گزینه ۲

بررسی تفاوت‌ها:

(الف) در سلول‌های گالوانی برخلاف سلول‌های الکترولیتی، واکنش اکسایش-کاهش به‌طور طبیعی و خودبه‌خود انجام می‌شود.

(ب) علامت الکترودهای آند و کاتد در سلول‌های گالوانی متفاوت با سلول‌های الکترولیتی است.

(ث) در سلول‌های الکترولیتی برخلاف سلول‌های گالوانی، دو الکتروود در یک محلول الکترولیت قرار می‌گیرند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۶- پاسخ: گزینه ۲

تیغه فلزی X برخلاف تیغه فلزی Y با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد؛ یعنی فلز X کاهنده قوی‌تری از هیدروژن و هیدروژن هم کاهنده قوی‌تری از فلز Y است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) در سری الکتروشیمیایی، نیم‌سلول استاندارد X موقعیت پایین‌تری نسبت به نیم‌سلول استاندارد Y دارد.

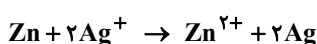
(۳) پتانسیل استاندارد نیم‌سلول X برخلاف پتانسیل استاندارد نیم‌سلول Y ، عددی منفی است.

(۴) کاتیون فلز X ، اکسندۀ ضعیف‌تری از یون هیدروژن و کاتیون فلز Y است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۷- پاسخ: گزینه ۴

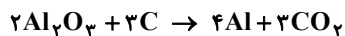
در سلول گالوانی روی-نقره، الکتروود روی، آند است و در سطح آن اکسایش رخ می‌دهد و الکتروود نقره، کاتد است و در سطح آن نیم‌واکنش کاهش رخ می‌دهد و واکنش کلی به‌صورت روبه‌رو است:



ضریب استوکیومتری یون‌های نقره، دو برابر ضریب استوکیومتری یون‌های روی است؛ بنابراین غلظت یون‌های نقره با شیب بیشتری باید تغییر کند.

۹۸- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

براساس واکنش موازنه شده داریم:



راه حل اول:

استفاده از کسر تبدیل:

$$6 \times 10^6 \text{ g C} \times \frac{1 \text{ mol C}}{12 \text{ g C}} \times \frac{4 \text{ mol Al}}{3 \text{ mol C}} \times \frac{27 \text{ g Al خالص}}{1 \text{ mol Al}} \times \frac{100 \text{ g Al ناخالص}}{90 \text{ g Al خالص}} \times \frac{1}{100} = 16 \times 10^6 \text{ g Al} = 16 \text{ ton Al}$$

راه حل دوم:

استفاده از تناسب

$$\frac{6}{3 \times 12} \times \frac{100}{100} = \frac{x}{4 \times 27} \times \frac{100}{100} \Rightarrow x = 16 \text{ ton}$$

۹۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

عبارت‌های «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) فرآورده نهایی خوردگی آهن، زنگ آهن است که نام علمی آن آهن (III) هیدروکسید است و رنگ قهوه‌ای مایل به قرمز دارد.
پ) در خوردگی آهن، ابتدا اتم‌های فلز آهن به یون آهن (II) و سپس یون‌های آهن (II) به یون‌های آهن (III) اکسایش می‌یابند و طی هر دو مرحله اتم‌های عنصر اکسیژن اکسند هستند.

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

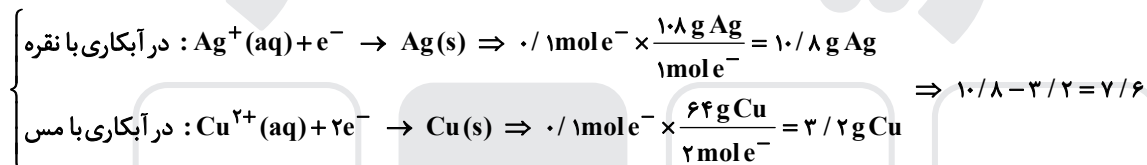
در کاند H_2 تولید می‌شود که حجم آن دو برابر حجم O_2 آزاد شده در آند است.
واکنش کلی تجزیه آب نیز این موضوع را تأیید می‌کند.



۱۰۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

$$6 / 0.2 \times 10^{22} e^- \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6 / 0.2 \times 10^{23} e^-} = 0.1 \text{ mole}^-$$

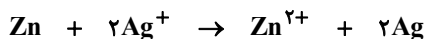
افزایش جرم قاشق‌ها به دلیل نیم‌واکنش‌های کاهش‌ی زیر است:



۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

در تولید Na، از برقکافت سدیم کلرید مذاب (NaCl(l)) استفاده می‌شود و براساس آن، گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ نادرست خواهند بود. (استفاده از محلول (aq) نادرست است).
فرآورده آندی در این فرایند، گاز کلر است که در برقکافت منیزیم کلرید مذاب نیز به دست می‌آید.

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



مقدار اولیه: ۲ مول ۲ مول

مقدار نهایی در ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه: -x ۲-۲x ۲+x +۲x

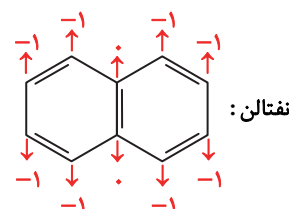
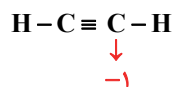
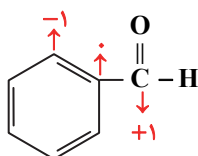
$$2+x = 2(2-2x) \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = 0.4$$

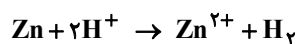
$$Zn \text{ تغییر جرم تیغه} = 0.4 \times 65 = 26 \text{ g}$$

$$\Delta t = (3 \times 60) + 20 = 200 \text{ s}$$

$$\bar{R}(Ag) = \frac{2 \times 0.4}{200} = 4 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)





با توجه به اینکه $100 - 83 / 75 = 16 / 25$ درصد از تیغه آندی، مصرف شده است، خواهیم داشت:

$$\text{جرم مصرفی تیغه آندی} = 80 \times \frac{16 / 25}{100} = 13 \text{ g Zn}$$

$$\text{مصرف شده } \text{H}^+ \text{ مول} : 13 \text{ g Zn} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{65 \text{ g Zn}} \times \frac{2 \text{ mol H}^+}{1 \text{ mol Zn}} = 0.4 \text{ mol H}^+$$

$$[\text{H}^+] = \frac{0.4 \text{ mol}}{0.5 \text{ L}} = 0.8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+]_{\text{نهایی}} = 1 - 0.8 = 0.2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log(2 \times 10^{-1}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی