حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...)، قبل و یا بعد از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

ویژهٔ داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۳ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

آزمون آزمایشی ۲۹ دی ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

مرحلهٔ ۶

دفترچهٔ شمارهٔ ۱

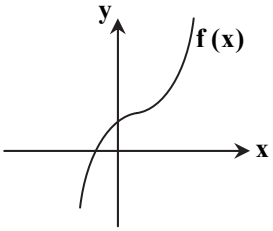
داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک‌ها، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک‌آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و ...، با استفاده از شمارهٔ داوطلبی (به‌عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به‌عنوان رمز عبور) وارد وب‌سایت گزینه‌دو به آدرس gozine2.ir شوید.

در صورتی که اینترنتی ثبت‌نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.

همچنین، شما می‌توانید با اسکن تصویر روبه‌رو به‌وسیلهٔ گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- نمودار تابع درجه‌سوم f به‌شکل روبه‌رو است. ضابطهٔ $f(x)$ برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۱) $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$

۲) $f(x)=-(x+1)^3+2$

۳) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

۴) $f(x)=-(x-1)^3+2$

۲- اگر $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{2x^2-1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-f(x))=3$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲ ۳) −۱۰ ۴) −۲

۳- نمودار تابع $f(x)=x^2-x+4$ را سه واحد در راستای افقی به‌سمت راست و دو واحد در راستای قائم به‌سمت پایین انتقال می‌دهیم و در نهایت طول نقاط منحنی حاصل را نصف می‌کنیم. نمودار نهایی، نیمساز ناحیهٔ اول را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲ یا $\frac{7}{4}$ ۲) ۲ یا $\frac{3}{4}$ ۳) ۱ یا $\frac{7}{4}$ ۴) ۱ یا $\frac{3}{4}$

۴- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x|x|-4}{x^2+3x-10}$، به‌ترتیب چند مجانب قائم و چند مجانب افقی دارد؟

۱) ۱،۱ ۲) ۱،۲ ۳) ۲،۱ ۴) ۲،۲

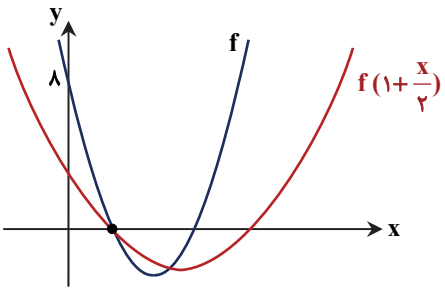
۵- در کدام تابع مثلثاتی زیر، مقدار دورهٔ تناوب برابر نصف مقدار ماکزیمم و دو برابر مقدار مینیمم تابع است؟

۱) $y=3+5\sin(\frac{\pi}{2}x)$ ۲) $y=3-5\cos(\pi x)$ ۳) $y=5+3\cos(\pi x)$ ۴) $y=5-3\sin(\frac{\pi}{2}x)$

۶- اگر $g(x)$ و $R(x)$ به‌ترتیب برابر خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^7-4x^5+3x^2-x-11$ بر x^2-4 باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)$ بر $R(x)$ کدام است؟

۱) −۴ ۲) ۲ ۳) −۲ ۴) ۴

۷- در شکل روبه‌رو نمودار توابع $f(x)=x^2-mx+n$ و $y=f(1+\frac{x}{2})$ رسم شده است. حاصل mn کدام است؟



۱) ۲۴

۲) ۳۶

۳) ۴۸

۴) ۳۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{\tan x+\cot ۲x}$، روی بازهٔ $(۰,a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

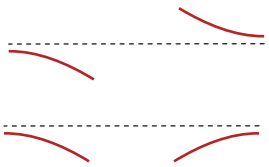
۹- تابع $y=\tan(\frac{\pi x}{۳})$ با دامنهٔ $(-۶,۱۰)$ چند مجانب قائم دارد؟

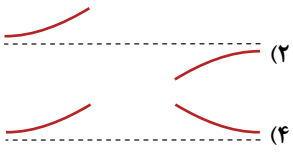
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰- تابع $y=f(x)$ در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و $ab<۰$ است. کدام تابع زیر در دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟

۱) $abf(-x)$ ۲) $-af(bx)$ ۳) $af(-bx)$ ۴) $abf(x)$

۱۱- نمودار تابع $y=\frac{۴x^۲-۱۰x+۱}{۶x^۲-۱۵x+۴}$ در اطراف مجانب افقی خود به چه صورت است؟

۱)


۲)


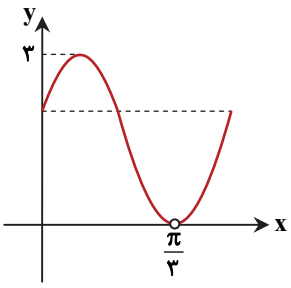
۳)

۴)

۱۲- اگر $\lim_{x\to a}\frac{۲x-۵}{ax^۲+bx+۴a}=-\infty$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۱۰ ۴) ۱۰-

۱۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{a}{۱+\tan^۲(bx-\frac{\pi}{۶})}$، در یک دورهٔ تناوب به‌صورت روبه‌رو است. حاصل $f(\frac{۵\pi}{۳})$ کدام است؟ $(b>۰)$



۱) $\frac{۵}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۴}$

۱۴- توابع خطی $f(x)=۲x+m$ و $g(x)=nx+۲$ مفروض‌اند. اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g^{-۱}(x)}=۶$ و $\lim_{x\to ۳^-}\frac{g(x)}{f^{-۱}(x)}=-\infty$ باشد، مقدار $(gof)(۲)$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{1-x}{x^2+mx+4}$، فقط دو مجانب دارد. نمودار f در مجاورت مجانب قائم خود کدام نمی‌تواند باشد؟

۱)

۲)

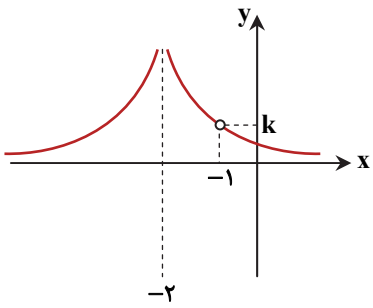
۳)

۴)

۱۶- معادلهٔ $\cos(x-\frac{\pi}{3})+\sin(2x+\frac{\pi}{6})=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷- اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{x^3+bx^2+cx+4}$ به‌صورت روبه‌رو باشد، مقدار $\frac{c+b}{a}+k$ کدام است؟



۱) ۱۶

۲) ۱۵

۳) ۱۴

۴) ۱۳

۱۸- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\frac{1}{4}$ در بازهٔ $(0,\pi)$ باشند، حاصل $\tan(\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{3}{2}$ ۲) $\pm\frac{2}{3}$ ۳) $\pm\frac{3}{4}$ ۴) $\pm\frac{4}{3}$

هندسه

هندسه ۳: کل فصل ۱ و فصل ۲ درس‌های ۱ و ۲

۱۹- اگر $A-2I=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 0\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲-

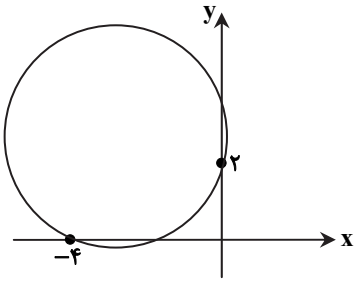
۲۰- به‌ازای کدام مقدار k معادلهٔ $\begin{vmatrix}x & 2 & k\\ 0 & x+1 & 0\\ 1 & 3 & x+2\end{vmatrix}=0$ دارای یک ریشهٔ مضاعف است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۱-

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱- اگر مرکز دایرهٔ زیر روی نیمساز ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات باشد، شعاع آن کدام است؟



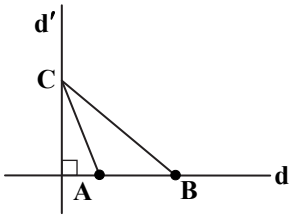
۱) ۳

۲) $\sqrt{۱۰}$

۳) ۵

۴) $\sqrt{۷}$

۲۲- در شکل روبه‌رو d و d' دو خط عمود بر هم هستند، A و B دو نقطهٔ ثابت روی d و نقطهٔ C نقطه‌ای متحرک روی d' است. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC کدام است؟



۱) خطی موازی d'

۲) نیمساز زاویهٔ بین d و d'

۳) خطی موازی d

۴) دایره‌ای به مرکز وسط AB

۲۳- وضعیت دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴y=۱۲$ و $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۱۰$ نسبت به هم کدام است؟

۱) متداخل ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) مماس بیرون

۲۴- دایره‌ای از دو نقطهٔ $A(۳,۰)$ و $B(۰,۲)$ می‌گذرد و بر محور xها مماس است. بالاترین نقطه در این دایره دارای چه عرضی می‌باشد؟

۱) ۴/۵ ۲) ۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۴

۲۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$، در ماتریس $A^۳$ مجموع درایه‌های سطر اول کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲۷ ۳) ۹ ۴) ۳۶

۲۶- اگر $A^{-۱}+B^{-۱}=B^{-۱}\cdot A^{-۱}$ باشد، حاصل $A+B$ کدام گزینه خواهد بود؟

۱) I ۲) AB ۳) BA ۴) $\bar{O}$

۲۷- از نقطهٔ $M(-۱,۴)$ واقع بر دایرهٔ $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۱۰$ مماسی رسم کرده‌ایم. این خط مماس با دایـرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱=۰$ چه وضعیتی دارد؟

۱) متقاطع ۲) مماس ۳) متخارج ۴) قابل‌تشخیص نیست.

۲۸- دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(۳,۰)$، $B(۰,-۳)$ و $C(-۱,۰)$ می‌گذرد، محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,\frac{۳}{۲})$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,\frac{۵}{۲})$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

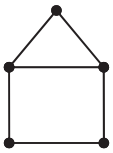
۲۹- تمام خطوط گذرنده از نقطهٔ $A(۲,۴)$ را در نظر می‌گیریم و از مبدأ مختصات عمود OH را بر این خطوط رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ H دارای کدام معادله است؟

۱) $x^۲+y^۲=۱۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۲x-۴y=۰$ ۳) $x^۲+y^۲-۲x=۰$ ۴) $x^۲+y^۲+۲x+۴y=۰$

ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته: کل فصل ۱ و فصل ۲ درس ۱

۳۰- با توجه به گراف شکل روبه‌رو، ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-px+q=۰$ کدام است؟ (p، مرتبه و q، اندازهٔ گراف است.)



۱) δ و $-\Delta$
۲) Δ و $\delta+۱$
۳) δ و Δ
۴) $-\Delta$ و $\delta-۱$

۳۱- معادلهٔ سیالهٔ خطی $۳۲x+۱۲y=۳n+۱$ به‌ازای کدام مقدار n جواب دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۳۲- در گراف $P_{۱۰}$، مجموع تعداد مسیرهای به‌طول ۱ و ۵ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳۳- به‌ازای چند عدد دورقمی طبیعی b، در تقسیم ۶۳۷ بر b، خارج‌قسمت برابر ۱۰ است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴

۳۴- چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی به معادلهٔ $xy+۲=x^۲-۵y$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴^{۵۰۰}$ بر ۴۴ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۳۶- در یک گراف r- منتظم از مرتبهٔ ۶ و اندازهٔ ۹، دور به طول ۳ وجود ندارد. تعداد دورهای به‌طول ۴ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۷- در گراف G از مرتبهٔ ۱۰، دو رأس از درجهٔ ۴ و $\delta=۰$ است. حداکثر اندازهٔ گراف کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۳۸- گراف $G_۱$ گرافی ۷- منتظم و گراف $G_۲$ گرافی کامل است. اگر با افزودن ۱۰ یال به گراف $G_۱$، گراف $G_۲$ حاصل شود، مقدار $\left|N_{G_۲}(v_۱)\right|-\left|N_{G_۱}[v_۱]\right|$ کدام است؟ ($v_۱$ یکی از رئوس گراف است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹- به‌ازای چند مقدار طبیعی $n<۲۰$، عبارت $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۴۰- در گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۶ داریم $\delta+\Delta=۶$، حداقل اندازهٔ گراف $\overline{G}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...)، قبل و یا بعد از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳
سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

گزینه‌دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

ویژهٔ داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۳ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

آزمون آزمایشی ۲۹ دی ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسش‌ها: ۶۵		مدت پاسخ‌گویی: ۷۵ دقیقه		

مرحلهٔ ۶
دفترچهٔ شمارهٔ ۲

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک‌ها، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک‌آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و ...، با استفاده از شمارهٔ داوطلبی (به‌عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به‌عنوان رمز عبور) وارد وب‌سایت گزینه‌دو به آدرس gozine2.ir شوید.
در صورتی که اینترنتی ثبت‌نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.

همچنین، شما می‌توانید با اسکن تصویر روبه‌رو به‌وسیلهٔ گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- معادلهٔ سرعت- زمان جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v = ۳t^۲ + ۶t$ است. چه تعداد از عبارت‌های زیر، در مورد آن الزاماً درست است؟

الف) حرکت جسم ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

ب) حرکت جسم همواره تندشونده است.

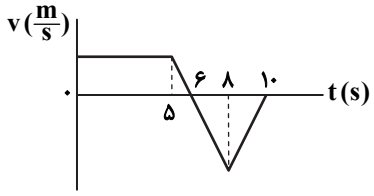
پ) بزرگی شتاب متوسط جسم در بازهٔ زمانی $۲s \le t < ۴s$ برابر با ۲۴ متر بر مربع ثانیه است.

ت) بزرگی سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی $۰ < t \le ۲s$ برابر با ۱۲ متر بر ثانیه است.

ث) جسم یک بار از مبدأ مکان می‌گذرد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۲- نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s، چند برابر بزرگی سرعت متوسط آن در این مدت است؟



۱) $\frac{۱۵}{۷}$

۲) $\frac{۱۱}{۸}$

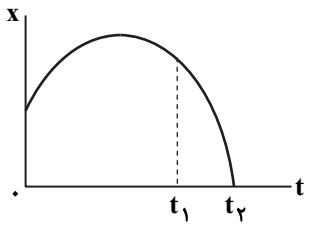
۳) $\frac{۱۹}{۳}$

۴) $\frac{۷}{۲}$

۴۳- متحرک A با تندی ثابت ۲۰ متر بر ثانیه که در جهت محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t = ۰$ از ۲۰۰ متری جلوی مبدأ مختصات می‌گذرد. در لحظهٔ $t = ۱۵s$، متحرک B که با تندی ثابت ۱۲ متر بر ثانیه در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، از ۴۰۰ متری جلوی مبدأ می‌گذرد. در لحظهٔ $t = ۲۰s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم چند متر است؟

۱) ۲۶۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۴۰

۴۴- نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت سهمی و مطابق شکل است. بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $۰ \le t < t_۱$ ..... بزرگی شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱ \le t < t_۲$ بوده و تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $۰ \le t < t_۲$ ..... بزرگی سرعت متوسط آن در این بازه است.



۱) کمتر از- بیشتر از

۲) برابر با- بیشتر از

۳) بیشتر از- کمتر از

۴) برابر با- کمتر از

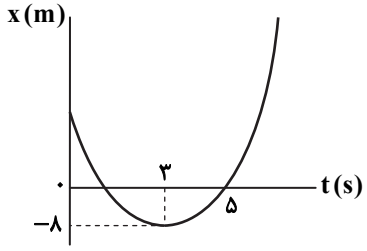
۴۵- اتومبیلی که با سرعت v در حال حرکت است، ترمز کرده و سرعت آن با شتاب ثابت کاهش یافته و متوقف می‌شود. در بازهٔ زمانی که حرکت اتومبیل شتابدار است، سرعت متوسط اتومبیل در $\frac{۲}{۳}$ آخر مسیر، برابر با $۱۰\frac{m}{s}$ است. بزرگی سرعت v چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲۰ ۲) $\frac{۲۰}{۳}$ ۳) $۱۰\sqrt{۶}$ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶- نمودار مکان- زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. سرعت جسم در لحظهٔ $t = 8\,s$ چند متر بر ثانیه است؟



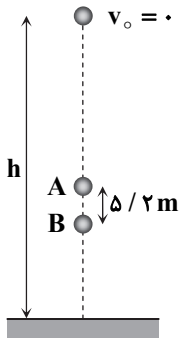
۱) ۲۰

۲) ۱۶

۳) ۱۲

۴) ۳۲

۴۷- مطابق شکل، گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌شود. سرعت متوسط گلوله در فاصلهٔ AB، ۲۶ متر بر ثانیه است و گلوله در مدت ۰/۳ ثانیه از نقطهٔ B به زمین می‌رسد. h چند متر است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$



۱) ۳۶/۲۵

۲) ۳۱/۲۵

۳) ۲۵

۴) ۴۵

۴۸- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاعی معین رها می‌شود. پس از ۰/۶ ثانیه، گلولهٔ دوم از ۴/۵ متر پایین‌تر از محل رهایی گلولهٔ اول رها می‌شود. چند ثانیه بعد از رهایی گلولهٔ دوم، دو گلوله به‌هم می‌رسند؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۱/۰۵ ۴) ۰/۵۶

۴۹- گلولهٔ A در راستای قائم و در شرایط خلأ رها می‌شود. چه تعداد از گزاره‌های داده‌شده درست است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

الف) شتاب گلوله در لحظهٔ شروع به سقوط، صفر است.

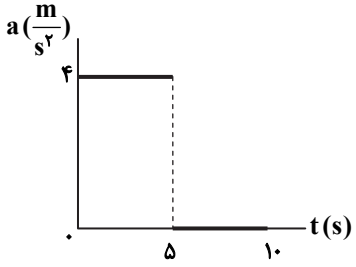
ب) مسافت طی‌شده توسط گلوله در ۲ ثانیهٔ سوم، ۱۰۰ متر است.

پ) بزرگی تغییر سرعت گلوله در ۲ ثانیهٔ دوم، دو برابر بزرگی تغییر سرعت آن در ۲ ثانیهٔ اول است.

ت) از لحظهٔ شروع تا $t = 5/28\,s$، تندی متوسط گلوله ۲۶/۴ متر بر ثانیه است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰- نمودار شتاب- زمان متحرکی روی خط راست که در مبدأ زمان با سرعت $v_0 = -5\frac{m}{s}$ از مکان $x = -25\,m$ عبور می‌کند، مطابق شکل است. در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s، بیشترین اندازهٔ سرعت و بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در SI، به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) ۱۵ و ۱۰۰

۲) ۲۵ و ۱۰۰

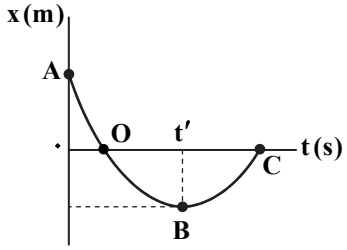
۳) ۱۵ و ۷۵

۴) ۲۵ و ۷۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۱- نمودار مکان- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد آن درست است؟



الف) بردار جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظهٔ توقف، با بردار مکان توقف زاویهٔ ۱۸۰° می‌سازد.

ب) بردار مکان اولیهٔ متحرک با بردار مکان توقف آن زاویهٔ ۱۸۰° می‌سازد.

پ) بردار جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظهٔ توقف، با بردار مکان اولیه زاویهٔ صفر درجه می‌سازد.

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) صفر

۵۲- متحرک A از مبدأ مکان با شتاب ثابت $+۲\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون روی محور افقی شروع به حرکت می‌کند. ۲ ثانیه بعد، متحرک B در خلاف جهت حرکت متحرک A، از مکان $x = -۲۰m$ با شتاب ثابت $+۵\frac{m}{s^۲}$ و سرعت $-۲۰\frac{m}{s}$ عبور می‌کند. فاصلهٔ دو متحرک ۶ ثانیه بعد از توقف متحرک B چند متر است؟

۱) ۸۶ ۲) ۱۱۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۹۶

۵۳- چتربازی به‌جرم $۶۰kg$ مدتی پس از یک پرش آزاد، چترش را باز می‌کند. ناگهان بزرگی نیروی مقاومت هوا به $۱۱۴۰N$ افزایش می‌یابد. چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد آن درست است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

الف) قبل از باز کردن چتر، بزرگی شتاب چترباز در حال افزایش است.

ب) قبل از باز کردن چتر، حرکت چترباز کندشونده است.

پ) بعد از باز کردن چتر، حرکت چترباز کندشونده است.

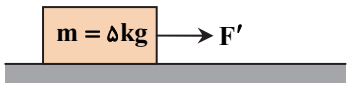
ت) بعد از باز کردن چتر، بزرگی نیروی مقاومت هوا تا رسیدن به تندی حدی، $۵۴۰N$ کاهش می‌یابد.

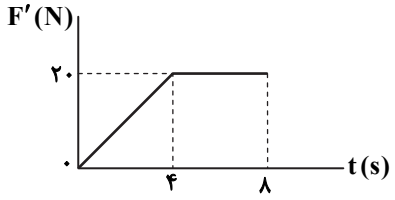
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۴- جسمی به‌جرم ۵ کیلوگرم توسط طنابی با جرم ناچیز از سقف آسانسور ساکن آویزان است. در لحظهٔ $t_۱ = ۰$ آسانسور با شتاب ثابت $a_۱$ روبه پایین شروع به حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t_۲ = t$ حرکتش را با شتاب ثابت $a_۲$ کند کرده و در لحظهٔ $t_۳ = ۳t$ متوقف می‌شود. اگر اختلاف بزرگی نیروی کشش طناب در دو بازهٔ زمانی $(t_۱, t_۲)$ و $(t_۲, t_۳)$ برابر با ۳۰ نیوتون باشد، بزرگی نیروی کشش طناب در مرحلهٔ تندشونده چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۳۰

۵۵- مطابق شکل روبه‌رو، جسم ساکن با جرم $m = ۵kg$ توسط نیروی افقی F' روی سطح افقی کشیده می‌شود و نمودار تغییرات نیروی F' برحسب زمان مطابق شکل است. تندی جسم در لحظهٔ $t = ۸s$ چند متر بر ثانیه است؟





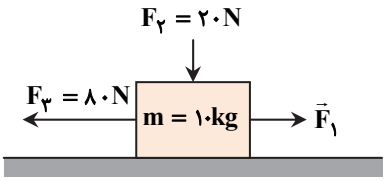
$(\mu_s = ۰/۲ \ ، \ \mu_k = ۰/۱۵ \ و \ g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۲۴ ۲) ۱۳
۳) ۲۲ ۴) ۱۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶- بر جعبه‌ای به‌جرم $m = ۱۰kg$، نیروهای ثابت $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$ مطابق شکل وارد می‌شوند. اگر جعبه روی سطح افقی در آستانهٔ حرکت باشد، کمترین مقدار نیروی $\vec{F}_۱$ چند نیوتون است؟ ($\mu_s = \frac{۱}{۲}$ و $g = ۱۰\frac{N}{kg}$)



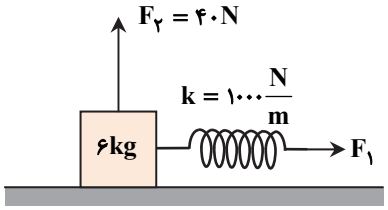
۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۳۰

۴) ۴۰

۵۷- جعبهٔ نشان داده‌شده با شتاب ثابت $۲/۵\frac{m}{s^۲}$ روی سطح افقی در حال حرکت است. اگر بزرگی جابه‌جایی طول فنر نسبت به طول عادی آن ۲/۷ سانتی‌متر باشد، بزرگی نیروی سطح بر جعبه چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰\frac{N}{kg}$)



۱) $۲\sqrt{۲۹}$

۲) $۲\sqrt{۲۴}$

۳) $۴\sqrt{۳۱}$

۴) $۴\sqrt{۳۴}$

۵۸- شعاع گردش ماهوارهٔ A به دور زمین، ۴ برابر شعاع گردش ماهوارهٔ B به دور زمین و دورهٔ گردش ماهوارهٔ A، ۸ برابر دورهٔ گردش ماهوارهٔ B است. جرم ماهوارهٔ A چند برابر جرم ماهوارهٔ B باشد تا بزرگی تکانهٔ ماهوارهٔ A دو برابر بزرگی تکانهٔ ماهوارهٔ B شود؟

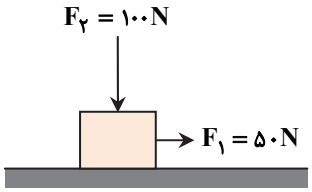
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- در شکل زیر، دو نیروی $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ بر وزنهٔ ۱۰ کیلوگرمی روی سطح افقی وارد می‌شود و وزنه ساکن است. کدام یک از جمله‌های زیر درست است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

الف) ضریب اصطکاک ایستایی بین وزنه و سطح افقی می‌تواند $\frac{۲}{۵}$ باشد.

ب) اگر بزرگی نیروی $F_۲$ را افزایش دهیم، بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر وزنه حتماً افزایش می‌یابد.

پ) اگر بزرگی نیروی $F_۱$ را افزایش دهیم، بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر وزنه حتماً افزایش می‌یابد.



۱) «الف» و «ب»

۲) «ب» و «پ»

۳) «الف» و «پ»

۴) «الف»

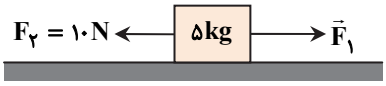
۶۰- اگر تکانهٔ یک جسم در SI، $\vec{p} = ۳۶\vec{i} + ۴۸\vec{j}$ و انرژی جنبشی آن ۱۲۰ ژول باشد، جرم جسم چند کیلوگرم است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

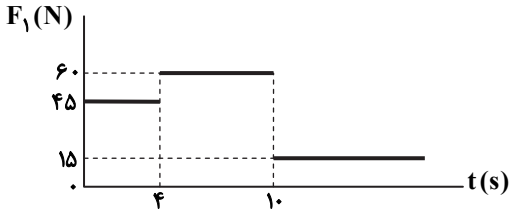
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶۱- جسمی مطابق شکل «الف» از حال سکون و از لحظهٔ $t = ۰$ تحت‌تأثیر نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ قرار می‌گیرد. اگر بزرگی $\vec{F}_۱$ مطابق نمودار شکل «ب» تغییر کند و اندازهٔ $\vec{F}_۲$ ثابت باشد، تندی جسم در لحظهٔ $t = ۱۲s$ چند متر بر ثانیه می‌شود؟ ($\mu_s = ۰/۸$ ، $\mu_k = ۰/۶$ و $g = ۱۰\frac{N}{kg}$)



(الف)



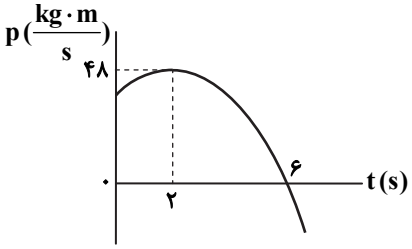
(ب)

۱) ۱۸
۲) ۱۴
۳) ۶
۴) صفر

۶۲- جسمی به جرم ۶ کیلوگرم روی دایره‌ای به شعاع ۵ متر به‌صورت یکنواخت در هر دقیقه ۱۰ دور می‌گردد. بزرگی تغییر تکانهٔ این جسم در مدتی که نیم‌دور می‌گردد، چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟

۱) ۲۵π ۲) ۲۰π ۳) ۳۰π ۴) ۱۵π

۶۳- سهمی شکل روبه‌رو، نمودار تکانه- زمان جسمی است که روی خط راست حرکت می‌کند. بزرگی نیروی متوسط وارد بر جسم در مدت $t = ۰$ تا $t = ۵s$ چند نیوتون است؟



۱) ۱/۵
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۴

۶۴- یک اتومبیل به جرم ۲ تن، پیچ افقی مسطحی به شعاع ۵۰ متر را طی می‌کند. بیشترین تندی ممکن که اتومبیل می‌تواند بدون لغزش از پیچ عبور کند، ۷۲ کیلومتر بر ساعت است. ضریب اصطکاک ایستایی بین چرخ‌ها و سطح جاده چقدر است و در صورتی که اتومبیل با تندی ۳۶ کیلومتر بر ساعت در پیچ حرکت کند، بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر چرخ‌ها چند نیوتون می‌شود؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۱) ۰/۸ و ۴۰۰۰ ۲) ۰/۸ و ۲۰۰۰ ۳) ۰/۴ و ۲۰۰۰ ۴) ۰/۴ و ۴۰۰۰

۶۵- یک تلسکوپ فضایی در ارتفاع ۲۴۰۰ کیلومتری از سطح زمین به دور زمین می‌چرخد. اگر این تلسکوپ در مداری به ارتفاع ۱۶۰۰ کیلومتر از سطح زمین قرار بگیرد، بزرگی شتاب گرانشی آن چند درصد افزایش می‌یابد؟ ($R_e = ۶۴۰۰km$: شعاع زمین)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۶۶- یک وزنه به جرم ۸ کیلوگرم توسط فنری به جرم ناچیز از سقف یک آسانسور آویخته شده است. هنگامی که آسانسور با شتاب رو به بالای $۳\frac{m}{s^۲}$ حرکت می‌کند، طول فنر ۶۸cm می‌شود و هنگامی که آسانسور با شتاب رو به پایین $۲\frac{m}{s^۲}$ حرکت می‌کند، طول فنر ۶۴cm می‌شود. هنگامی که آسانسور ایستاده و وزنه در حال تعادل باشد، طول فنر چند سانتی‌متر می‌شود؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۱) ۶۶/۲ ۲) ۶۵/۶ ۳) ۶۶/۸ ۴) ۶۴/۹

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷- در یک حرکت هماهنگ ساده، در هر دقیقه ۶۰۰ مرتبه شتاب حرکت صفر می‌شود. اگر دو انتهای مسیر با هم ۴ سانتی‌متر فاصله داشته باشند، تندی نوسانگر در هنگام عبور از وضع تعادل چند متر بر ثانیه می‌شود؟

۱) $\frac{\pi}{۱۰}$ ۲) $\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

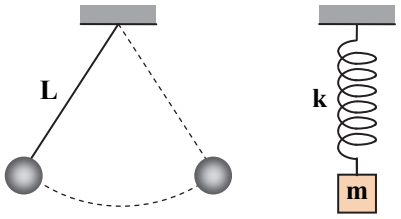
۶۸- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای بر روی پاره‌خطی به‌طول $۱۶\,cm$ نوسان می‌کند. اگر کمترین زمان لازم برای آنکه نوسانگر برای اولین‌بار از مکان $x=+۴\,cm$ به مکان $x=-۴\,cm$ برود، $\frac{۸}{۳}s$ کمتر از مدت‌زمانی باشد که نوسانگر فقط با یک تغییر جهت، از مکان $x=-۴\,cm$ به مکان $x=+۴\,cm$ می‌رود، بیشینهٔ تندی نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

۶۹- در یک حرکت هماهنگ ساده، اندازهٔ شتاب متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی دو عبور متوالی از مبدأ مکان، چند برابر اندازهٔ بیشینهٔ شتاب آن در این بازهٔ زمانی است؟

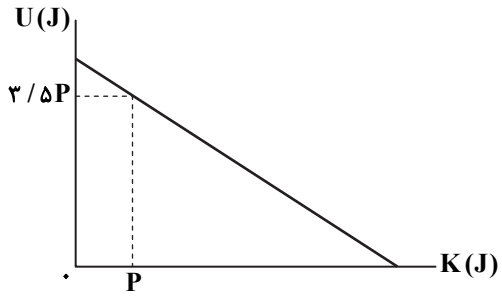
۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) $\frac{۲}{\pi}$ ۳) π ۴) ۲π

۷۰- در شکل روبه‌رو، دو نوسان‌کنندهٔ هماهنگ ساده نشان داده شده است. دورهٔ تناوب نوسان‌کنندهٔ وزنه- فنر با جرم m و ثابت فنر k، ۲ برابر دورهٔ تناوب آونگ ساده با طول L است. اگر جرم متصل به فنر را ۲۵ درصد کاهش دهیم، طول آونگ ساده را چند برابر کنیم تا دورهٔ تناوب دو نوسان‌کننده یکسان شود؟



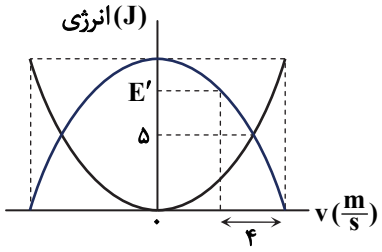
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۷۱- شکل روبه‌رو، نمودار تغییرات انرژی پتانسیل برحسب انرژی جنبشی یک نوسانگر هماهنگ سادهٔ وزنه- فنر است. اگر معادلهٔ مکان- زمان وزنه در SI به‌صورت $x=۰/۶\cos ۱۰t$ و جرم وزنه $۵۰۰\,g$ باشد، تندی وزنه هنگامی که انرژی جنبشی آن $۲P$ است، چند متر بر ثانیه می‌شود؟ (P یک عدد ثابت است.)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۷۲- نمودار انرژی‌های پتانسیل و جنبشی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم $۲۰۰\,g$ برحسب سرعت آن مطابق شکل زیر است. E' چند ژول است؟



۱) ۵/۴
۲) ۶/۱
۳) ۶/۴
۴) ۷/۵

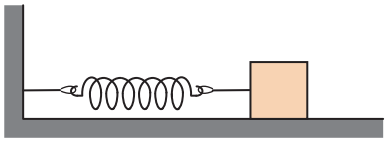
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۷۳- وزنه‌ای به جرم m به انتهای فنری با ثابت k و جرم ناچیز بسته شده و به‌صورت هماهنگ ساده نوسان می‌کند و معادلهٔ مکان- زمان آن در SI به‌صورت $x = ۰/۰۲\cos(۱۰\pi t)$ است. اگر جرم وزنه را ۸۰۰ گرم بیشتر کرده و از فنر با ثابت $۹k$ استفاده کنیم، بسامد حرکت وزنه ۱۰ هرتز می‌شود. جرم m چند گرم بوده است؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۶۴۰

۷۴- در شکل روبه‌رو، جرم فنر و کلیهٔ اصطکاک‌ها ناچیز هستند و بیشترین و کمترین طول فنر در حین نوسان وزنهٔ ۴۰۰ گرمی متصل به آن روی سطح افقی، برابر $۶۲\,cm$ و $۵۶\,cm$ است. از لحظه‌ای که طول فنر ۶۰ سانتی‌متر و حرکت وزنه تندشونده است، حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا در حالی که حرکت وزنه تندشونده است، طول فنر ۵۸ سانتی‌متر شود؟ ($\pi = \sqrt{۱۰}$ و ثابت فنر $k = ۴۰۰\frac{N}{m}$ است.)



۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۱۵
۴) ۰/۰۵

۷۵- یک آونگ ساده که در حال حرکت هماهنگ ساده است، در هر دقیقه ۵۰ نوسان انجام می‌دهد. طول آونگ را چند سانتی‌متر و چگونه تغییر دهیم تا بسامد نوسان آونگ ۱ هرتز شود؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ و $\pi^۲ = ۱۰$)

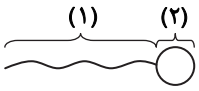
۱) ۱۱ سانتی‌متر کم کنیم. ۲) ۲۸ سانتی‌متر زیاد کنیم. ۳) ۲۰ سانتی‌متر کم کنیم. ۴) ۱۳ سانتی‌متر زیاد کنیم.

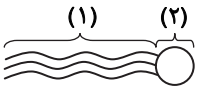
شیمی ۳۰′

زمان پیشنهادی

شیمی ۳: فصل‌های ۱ و ۲

۷۶- با توجه به شکل‌های زیر کدام عبارت(ها) نادرست هستند؟

الف) 

ب) 

الف) شکل‌های «الف» و «ب» به‌ترتیب می‌توانند مربوط به ساختار یک اسید چرب و یک استر سنگین باشند.
ب) به مخلوطی از تعداد زیادی مولکول «الف» و «ب» با هم چربی می‌گویند.
پ) قسمت (۲) در هر دو مولکول بخش قطبی را نشان می‌دهد و هر دو ترکیب با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی می‌دهند.
ت) قسمت (۱) در هر دو شکل بخش ناقطبی است و نیروهای واندروالس تشکیل می‌دهد.
ث) در هر دو شکل بخش (۱) نسبت به بخش (۲) نیروهای بین مولکولی غالب را می‌سازد.

۱) «الف» ۲) «ب» و «ت» ۳) «ث» ۴) «پ»

۷۷- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟ ($H = ۱, C = ۱۲\,g\cdot mol^{-۱}$)

- فرمول شیمیایی یک صابون جامد با زنجیرهٔ آلکیل ۱۶ کربنی سیرشده می‌تواند به‌صورت $C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na$ باشد.
- $RC_۶H_۴SO_۳Na$ یک پاک‌کنندهٔ صابونی است که در آب سخت نیز خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کند.
- برای تهیه پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیازی به چربی یا منابع حیوانی نمی‌باشد.
- در اسیدهای چرب با زنجیرهٔ آلکیل سیرشده نسبت درصد جرمی کربن به هیدروژن برابر ۶ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- تکه‌ای چربی شامل ۴ مول استر بلندزنجیر با زنجیره هیدروکربنی سیرشده به فرمول $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ است. برای تبدیل ۸۰٪ از آن به صابون سدیم چند لیتر محلول $NaOH$ با $pH = ۱۳/۷$ لازم است؟

۱) ۴/۸ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۹/۲ ۴) ۲۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹- می‌خواهیم به کمک مقداری شوینده و ۱۰۰ میلی‌لیتر از نوعی آب سخت که حاوی یون Ca^{2+} است یک پارچهٔ نخی را بشوییم. اگر غلظت یون Ca^{2+} در آب ۰/۳ مولار باشد، برای رسوب دادن تمامی یون‌های Ca^{2+} از این نمونه آب سخت به چند گرم سدیم فسفات مطابق واکنش زیر نیاز داریم؟ ($O = 16, Na = 23, P = 31, Ca = 40 g \cdot mol^{-1}$) (معادله موازنه شود.)

$$Na_3PO_4(s) + Ca^{2+}(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + Na^+(aq)$$

۱) ۳/۲۸ ۲) ۵/۴۲ ۳) ۶/۲۳ ۴) ۸/۴۲

۸۰- با توجه به جدول زیر که به عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون می‌پردازد، کدام مقایسه درست است؟

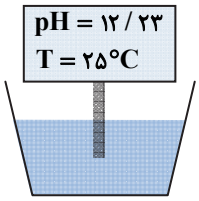
نوع صابون	نوع پارچه	دما °C	درصد لکهٔ باقی‌مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	۴۰	A
صابون بدون آنزیم	نخی	۳۰	B
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	۴۰	C
صابون آنزیم‌دار	نخی	۴۰	D

۱) $D > A > C > B$
۲) $D > A = C > B$
۳) $B > C > A > D$
۴) $B > A = C > D$

۸۱- از انحلال ۴۰۰ گرم گاز گوگرد تری‌اکسید و ۲۱۶ گرم گاز دی‌نیتروژن پنتااکسید در مقدار کافی آب به‌تقریب چه تعداد یون هیدرونیوم در آب تولید می‌شود؟ (انحلال هر دو گاز و یونش فراورده‌ها را کامل فرض کنید.) ($N = 14, O = 16, S = 32 g \cdot mol^{-1}$)

۱) $8/42 \times 10^{24}$ ۲) $4/31 \times 10^{24}$ ۳) $9/64 \times 10^{24}$ ۴) $4/82 \times 10^{24}$

۸۲- با توجه به‌شکل داده‌شده که کنترل محلولی از باریم هیدروکسید را نشان می‌دهد، غلظت محلول چند مول بر لیتر و نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به یون هیدرونیوم در آن به‌تقریب کدام است؟ ($\log 3 = 0/47$ و $\log 2 = 0/3$)



۱) $1/6 \times 10^{-2}$ و $3/7 \times 10^{-11}$
۲) 8×10^{-3} و $2/6 \times 10^{10}$
۳) 6×10^{-13} و $1/6 \times 10^{-2}$
۴) 6×10^{-13} و 8×10^{-3}

۸۳- در بین عبارت‌های زیر چند عبارت درست است؟

- pH در رودهٔ بزرگ نسبت به دهان، خون و معده بزرگ‌تر است.
- شیر فاسد شده خاصیت اسیدی دارد و $pH < 7$ دارد.
- اگر در محلول اسیدی $[H^+]$، 10^6 برابر $[OH^-]$ باشد، pH آن ۴ واحد کمتر از pH آب خالص در دمای اتاق است.
- در صورتی که در دمایی مشخص pH آب خالص ۶/۵ باشد، $pH = 7$ بازی محسوب می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۴- با مصرف چند گرم منیزیم هیدروکسید مطابق واکنش زیر، pH محلولی ۵۰۰ میلی‌لیتری از هیدروکلریک اسید با غلظت نیم مولار به ۷ می‌رسد؟ (واکنش را موازنه کنید.) ($H = 1, O = 16, Mg = 24 g \cdot mol^{-1}$)

$$Mg(OH)_2(s) + HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۵/۸۰ ۲) ۷/۲۵ ۳) ۱۴/۵ ۴) ۲۹

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۵- یک مول از اسید ضعیف HA را در یک لیتر از محلول اسید قوی HX با pH = ۱ حل می‌کنیم. غلظت A^- موجود در محلول به‌تقریب چند مول بر لیتر است؟ (از $[H^+]$ حاصل از یونش اسید ضعیف HA و تغییر حجم محلول صرف‌نظر کرده و $K_a(HA)$ را برابر $۲\times۱۰^{-۵}\ mol\cdot L^{-۱}$ در نظر بگیرید.)

۱) ۲×۱۰^{-۴} ۲) ۲×۱۰^{-۳} ۳) $۴/۵\times۱۰^{-۳}$ ۴) $۴/۵\times۱۰^{-۲}$

۸۶- کدام جمله در مورد پاک‌کننده‌های خورنده نادرست است؟

۱) پاک‌کنندهٔ پودری شکل که با آن مجاری مسدود شده با چربی را در دستگاه‌های صنعتی باز می‌کنند، از جمله پاک‌کننده‌های خورنده محسوب می‌شود.

۲) می‌توانند خاصیت اسیدی قوی یا بازی قوی داشته باشند.

۳) جوهرنمک، محلول سدیم‌هیدروکسید و محلول‌های سفیدکننده همگی پاک‌کنندهٔ خورنده هستند.

۴) این پاک‌کننده‌ها به‌جای برهم‌کنش میان ذره‌ها با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند و از نظر شیمیایی فعال هستند.

۸۷- محلولی از HCN را با آب‌مقطر ۵ برابر رقیق می‌نماییم. pH آن به چه میزان افزایش می‌یابد؟ (HCN اسیدی بسیار ضعیف است.) ($\log ۵ = ۰/۷$)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۱۵

۸۸- در واکنش فلز آهن با ۵ لیتر هیدروکلریک اسید یک مولار که سبب تولید آهن (II) کلرید می‌شود، pH محلول هر ۱۰ ثانیه ۰/۳ افزایش می‌یابد، پس از چند ثانیه ۲/۳۵ مول آهن در این فرایند مصرف می‌شود؟ ($\log ۳ = ۰/۵$ ، $\log ۲ = ۰/۳$)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۸۹- کدام عبارت نادرست است؟

۱) در واکنش جوش شیرین با اسید معده، آب و نمک طعام و سدیم‌کربنات حاصل می‌شود.

۲) هنگامی که مواد بازی سبب گرفتگی مجرای فاضلاب شوند استفاده از پاک‌کننده خورنده اسیدی توصیه می‌شود.

۳) برای افزایش قدرت پاک کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش‌شیرین می‌افزایند.

۴) گل ادریسی در محیط اسیدی به رنگ آبی و در محیط بازی به رنگ سرخ است.

۹۰- pH محلول ۰/۱ مولار HA، دو واحد بیشتر از pH محلول ۰/۰۱ مولار نیتریک‌اسید است. درجه یونش محلول ۰/۰۰۱ مولار HA کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۰۰۱ ۴) ۰/۰۰۰۱

۹۱- محلولی حاوی کاتیون‌های فلز X در ظرفی از جنس D نگهداری می‌شود. اگر تیغه‌ای از جنس فلز M را در این محلول وارد کنیم، لایه‌ای فلزی سطح تیغه را می‌پوشاند، براین‌اساس ..... .

۱) قدرت کاهندگی فلز X بیشتر از قدرت کاهندگی فلزهای D و M است.

۲) اگر فلز D با محلول اسید واکنش دهد، قطعاً فلز M نیز با محلول اسید می‌تواند واکنش دهد.

۳) کاتیون‌های فلز M در مقایسه با کاتیون‌های فلز X اکسنده‌های قوی‌تری هستند.

۴) اگر نیم سلول‌های استاندارد فلزهای M و X برای تشکیل سلول الکتروشیمیایی گالوانی به یکدیگر متصل شوند، الکترود M قطب مثبت سلول را تشکیل می‌دهد.

۹۲- در یک سلول سوختی از سوخت A به‌عنوان جایگزینی برای هیدروژن استفاده می‌شود. معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ نیم‌واکنش آندی در آن به‌صورت زیر است. انتخاب کدام ماده به‌عنوان سوخت A سبب می‌شود که حاصل عبارت $\frac{x+y+z}{a}$ عددی بزرگ‌تر شود؟

$$A + aH_۲O \rightarrow xCO_۲ + yH^+ + ze^-$$

۱) $CH_۴$ ۲) $CH_۳OH$ ۳) $C_۲H_۶$ ۴) $C_۲H_۵OH$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳- کدام مطلب(ها) در مورد سلول گالوانی استاندارد «هیدورژن- مس» نادرست است؟

الف) جهت حرکت الکترون در مدار بیرونی از نیم‌سلول هیدروژن به نیم‌سلول مس است.

ب) pH محلول الکترولیت در SHE با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

پ) اختلاف‌پتانسیل سلول برابر با پتانسیل استاندارد کاهشی نیم‌سلول مس است.

ت) با گذشت زمان جرم الکترودها تغییر می‌کند.

۱) «الف»، «ب» و «پ» ۲) «الف» و «ت» ۳) «ب» ۴) «ب» و «ت»

۹۴- در سلول گالوانی تشکیل‌شده از دو نیم‌سلول سرب و آهن، جهت حرکت آنیون‌ها در دیوارهٔ متخلخل از نیم‌سلول سرب به نیم‌سلول آهن است. بر این اساس به‌ازای مبادلهٔ ۰/۲۵ مول الکترون در سلول، چند گرم از جرم تیغهٔ آندی کاسته می‌شود؟ (محلول الکترولیت در دو نیم‌سلول شامل آهن (II) نیترات و سرب (II) نیترات است.) ($Fe = ۵۶, Pb = ۲۰۷ g \cdot mol^{-۱}$)

۱) ۱۴ ۲) ۲۵ ۳) ۷ ۴) ۵۰

۹۵- با توجه به داده‌های زیر کدام مقدار را می‌توان به پتانسیل کاهشی فلز A نسبت داد؟

$$\begin{cases} A(s) + Pd^{۲+}(aq) \rightarrow A^{۲+}(aq) + Pd(s) & E°(Pb^{۲+}(aq)/Pb(s)) = -۰/۱۳V \\ A^{۲+}(aq) + Pb(s) \rightarrow A(s) + Pb^{۲+}(aq) & E°(Pd^{۲+}(aq)/Pd(s)) = +۰/۹۸V \\ A^{۲+}(aq) + Pt(s) \rightarrow \text{واکنشی انجام نمی‌شود.} & E°(Pt^{۲+}(aq)/Pt(s)) = +۱/۲V \\ A(s) + Pu^{۳+}(aq) \rightarrow \text{واکنشی انجام نمی‌شود.} & E°(Pu^{۳+}(aq)/Pu(s)) = -۱/۹۷V \end{cases}$$

۱) ۰/۴۴- ۲) ۲/۱۹- ۳) ۰/۳۲+ ۴) ۱/۱۳+

۹۶- در چه تعداد از ترکیب‌های زیر، عدد اکسایش تمام اتم‌های اکسیژن برابر «۲-» نیست؟

$$Na_۲S_۲O_۸ \quad - SO_۳F_۲ \quad - K_۲O_۲ \quad - HOF \quad - RbO_۲$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۷- در یکی از قطب‌های یک سلول الکترولیتی، نیم‌واکنش ($X^{n+} + ne^- \rightarrow X$) انجام می‌شود. کدام نتیجه‌گیری‌ها درست است؟

الف) علامت قطب موردنظر، مثبت است.

ب) نیم‌واکنش از نوع کاهش است و در قطب کاتد انجام می‌شود.

پ) جنس الکترودی که نیم‌واکنش موردنظر در اطراف آن انجام می‌شود، باید از جنس فلز X باشد.

ت) این نیم‌واکنش خودبه‌خودی است.

ث) حالت فیزیکی X^{n+} می‌تواند (aq) و یا (l) باشد.

۱) «الف»، «پ» و «ث» ۲) «ب» و «ت» ۳) «ب» و «پ» ۴) «ب» و «ث»

۹۸- در یک آزمایش تجزیهٔ آب به عنصرهای سازندهٔ آن، از یک کیلوگرم محلول آب‌نمک با غلظت ۲٪ جرمی به‌عنوان الکترولیت استفاده شده است. اگر آزمایش تا زمانی ادامه یابد که غلظت محلول آب‌نمک به ۴٪ جرمی برسد، تفاوت حجم گازهای تولیدشده در شرایط STP به‌تقریب چند لیتر است؟ ($H = ۱, O = ۱۶ g \cdot mol^{-۱}$)

۱) ۴۱۶ ۲) ۳۹۸ ۳) ۳۱۱ ۴) ۲۹۸

۹۹- چند مورد از مطالب بیان‌شده در مورد معادلهٔ کلی واکنش زنگ زدن آهن درست است؟

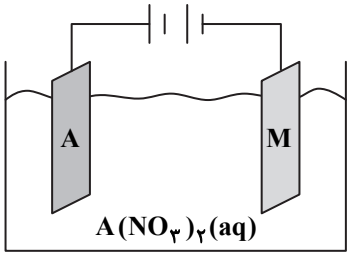
- مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها، سه برابر ضریب استوکیومتری فراوردهٔ واکنش است.
- حالت فیزیکی هر سه واکنش‌دهنده متفاوت است.
- شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در این معادله، با شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در فرایند هال برابر است.
- نیم‌واکنش کاهش در آن با نیم‌واکنش کاهش در سلول سوختی هیدورژن یکسان است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰- با توجه به شکل که طرح ساده‌ای از یک سلول الکترولیتی را نشان می‌دهد کدام مطلب همواره درست است؟



۱) هدف از انجام این فرایند، آبکاری قطعهٔ A با روکش نازکی از M است.

۲) پتانسیل کاهشی استاندارد فلز A باید منفی‌تر از پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M باشد.

۳) با قطع مدار بیرونی، هیچ واکنشی در سلول رخ نمی‌دهد.

۴) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت A به‌سمت M است.

۱۰۱- با توجه به معادله‌های شیمیایی (موازنه‌نشده) داده‌شده، کدام عبارت درست است؟

a) $Fe(s) + HCl(aq) \rightarrow H_2(g) + FeCl_2(aq)$

b) $FeCl_2(aq) + NaOH(aq) \rightarrow Fe(OH)_2(s) + NaCl(aq)$

۱) پس از موازنه، مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ «b»، ۲ برابر مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ «a» است.

۲) شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش «a» طی تولید ۱ مول $FeCl_2$ با شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش «b» طی مصرف شدن ۱ مول $FeCl_2$ برابر است.

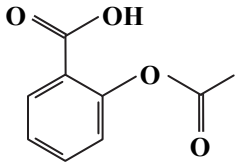
۳) برخلاف واکنش «b» از واکنش «a» می‌توان برای تولید جریان برق استفاده کرد.

۴) واکنش «a» در سلول الکتروشیمیایی گالوانی و واکنش «b» در سلول الکتروشیمیایی الکترولیتی انجام می‌شود.

۱۰۲- در یک سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن طی مدت‌زمانی معین ۷۲۰ میلی‌گرم بخار آب تولید شده است. در این زمان چند مول الکترون از مدار بیرونی سلول گذشته است؟ ($H = 1, O = 16\ g \cdot mol^{-1}$)

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۰۴ ۴) ۰/۰۲

۱۰۳- با توجه به ساختار نشان‌داده‌شده، پاسخ پرسش‌های زیر، به‌ترتیب در کدام گزینه آورده شده است؟



الف) چند کربن با کمترین عدد اکسایش در این مولکول وجود دارد؟

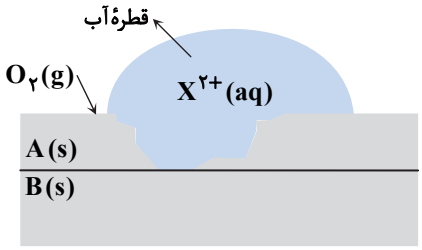
ب) بیشترین عدد اکسایش اتم‌های کربن در این ترکیب چند است؟

پ) مجموع عددهای اکسایش اتم‌های کربن در این مولکول چند است؟

۱) ۱، ۳+، صفر ۲) ۴، ۲+، ۴+

۳) ۱، ۲+، ۴+ ۴) ۴، ۳+، صفر

۱۰۴- شکل روبه‌رو مربوط به قرار گرفتن یک ورقهٔ حلبی در شرایط مناسب خوردگی است. با توجه به شکل، کدام مورد درست عنوان شده است؟



۱) B فلز آهن، A فلز روی و یون‌های X^{2+} کاتیون‌های فلز روی هستند.

۲) A پتانسیل کاهشی استاندارد مثبت‌تری در مقایسه با آهن داشته و یون‌های X^{2+} کاتیون‌های فلز A هستند.

۳) اگر خراش ایجاد شده، فلز A را در تماس با قطرهٔ آب قرار دهد، در این شرایط یون‌های X^{2+} که در اثر اکسایش تولید می‌شوند مربوط به فلز A (پوشاننده) هستند.

۴) A فلز قلع و یون‌های X^{2+} کاتیون‌های حاصل از اکسایش یافتن فلز آهن هستند.

۱۰۵- اگر تیغه‌ای از جنس فلز روی به جرم ۴ گرم در محلولی حاوی یون‌های طلا Au^{3+} قرار داده شود، پس از مبادله $3/01 \times 10^{21}$ الکترون، جرم تیغه به‌تقریب چند گرم است؟ (فرض کنید ۸۰ درصد فلز تولیدشده به تیغه بچسبد. $Zn = 65, Au = 197\ g \cdot mol^{-1}$)

۱) ۴/۱ ۲) ۴/۶ ۳) ۴/۳۳ ۴) ۴/۲۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

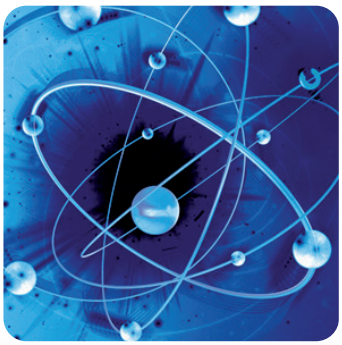
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

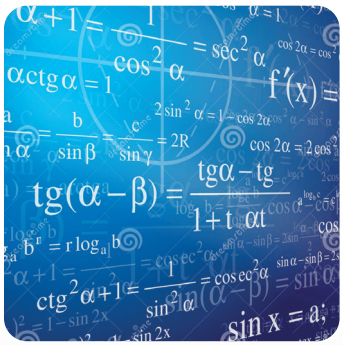
دفترچهٔ پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۲۹دی ۱۴۰۲ (مرحلهٔ ۶)

ویژهٔ داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

گروه آزمایشی علوم ریاضی





سال تحصیلی
۰۲-۰۳

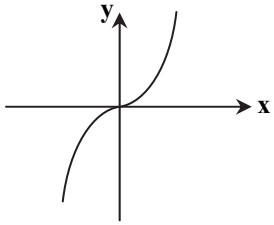
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

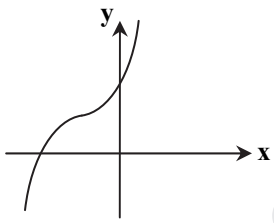
نکته: $(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$, $(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$

نکته: نمودار تابع $y = x^۳$ به‌صورت روبه‌رو است:

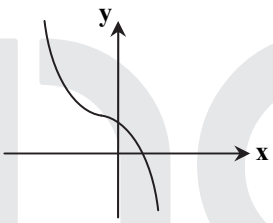


ابتدا هر کدام از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم. دقت کنید که در گزینه‌های ۱ و ۳ ابتدا ضابطه را به‌فرم مکعب کامل نوشته و سپس به‌کمک انتقال رسم می‌کنیم:

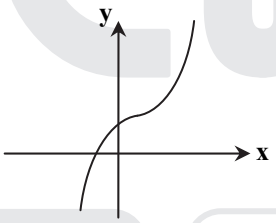
گزینهٔ ۱: $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۳ = (x+۱)^۳ + ۲$



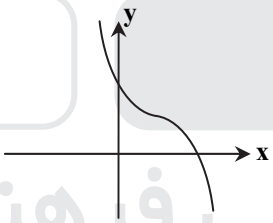
گزینهٔ ۲: $y = -(x+۱)^۳ + ۲$



گزینهٔ ۳: $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x + ۱ = (x-۱)^۳ + ۲$



گزینهٔ ۴: $y = -(x-۱)^۳ + ۲$



بنابراین گزینهٔ ۳ می‌تواند ضابطهٔ مربوط به نمودار رسم شده باشد.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: به‌طور کلی حد هر چندجمله‌ای به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$

نکته: اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + b_۱x + b_۰$ دو چندجمله‌ای باشند، آنگاه:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰}{b_m x^m + b_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + b_۱x + b_۰} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & ; \ n = m \\ ۰ & ; \ m > n \\ \pm\infty & ; \ n > m \end{cases}$$

ابتدا عبارت $۲ - f(x)$ را تشکیل می‌دهیم، داریم:

$$۲ - f(x) = ۲ - \frac{ax^۲ + bx + ۱}{۲x^۲ - ۱} = \frac{۴x^۲ - ۲ - (ax^۲ + bx + ۱)}{۲x^۲ - ۱} = \frac{(۴-a)x^۲ - bx - ۳}{۲x^۲ - ۱}$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} (۲ - f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(۴-a)x^۲ - bx - ۳}{۲x^۲ - ۱} = \frac{۴-a}{۲}$$

طبق فرض این مقدار باید برابر با ۳ باشد، پس:

$$\frac{۴-a}{۲} = ۳ \Rightarrow ۴ - a = ۶ \Rightarrow a = -۲$$

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: $f(x)$:

- k واحد به‌سمت راست ← $f(x-k)$
- k واحد به‌سمت چپ ← $f(x+k)$

$(k>0)$

نکته: $f(x)$:

- k واحد انتقال به بالا ← $f(x)+k$
- k واحد انتقال به پایین ← $f(x)-k$

$(k>0)$

نکته: $f(x)$:

- طول نقاط ضرب‌در k ← $f(\frac{x}{k})$
- طول نقاط تقسیم بر k ← $f(kx)$

$(k>0)$

ترتیب تبدیلات به‌صورت $f(x-3)$، سپس $f(x-3)-2$ و در نهایت $f(2x-3)-2$ است. حال نمودار $y=f(2x-3)-2$ را با نمودار $y=x$ تلاقی می‌دهیم.

$$f(2x-3)-2=x \Rightarrow f(2x-3)=x+2 \Rightarrow (2x-3)^2-(2x-3)+4=x+2 \Rightarrow 4x^2-15x+14=0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } \frac{7}{4}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس‌های ۱ و ۲، فصل ۳)

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

نکته: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌نامیم به‌شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ برقرار باشد.

برای یافتن مجانب افقی تابع f، حد تابع f را در بی‌نهایت پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x)-4}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x)-4}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

بنابراین تابع f دارای دو مجانب افقی $y=1$ و $y=-1$ است.

برای یافتن مجانب قائم تابع f، ریشه‌های مخرج این تابع کسری را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+3x-10=0 \Rightarrow (x+5)(x-2)=0 \Rightarrow x=-5 \text{ یا } x=2$$

$x=-5$ فقط ریشهٔ مخرج کسر است و ریشهٔ صورت کسر نیست، پس حد تابع f وقتی $x\to-5$ نامتناهی بوده و خط $x=-5$ مجانب قائم تابع f است. اما $x=2$ ریشهٔ صورت و مخرج کسر است و حد تابع f وقتی $x\to2$ موجود است.

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x|x|-4}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+5)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+5}=\frac{4}{7}$$

پس تابع دارای یک مجانب قائم ($x=-5$) و دو مجانب افقی ($y=1$ و $y=-1$) است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$، مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

راه‌حل اول: با توجه به نکته در هرکدام از گزینه‌ها مقادیر دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم را به‌دست می‌آوریم:

گزینهٔ ۱: دورهٔ تناوب: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ و ماکزیمم: $3+5=8$ و مینیمم: $3-5=-2$

گزینهٔ ۲: دورهٔ تناوب: $\frac{2\pi}{\pi}=2$ و ماکزیمم: $3+5=8$ و مینیمم: $3-5=-2$

گزینهٔ ۳: دورهٔ تناوب: $\frac{2\pi}{\pi}=2$ و ماکزیمم: $5+3=8$ و مینیمم: $5-3=2$

گزینهٔ ۴: دورهٔ تناوب: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ و ماکزیمم: $5+3=8$ و مینیمم: $5-3=2$

با توجه به شروط گفته‌شده در صورت سؤال، فقط گزینهٔ ۴ شرایط را دارد و پاسخ است.

مؤسسه آموزش و پژوهش
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

راه‌حل دوم: فرض کنید $y = c + a\sin bx$ تابع مورد نظر باشد. طبق شروط گفته‌شده در صورت سؤال داریم:

$$\underbrace{T = \frac{2\pi}{|b|}}_{\text{دورهٔ تناوب}} = \frac{1}{2}\underbrace{(c+|a|)}_{\text{ماکزیمم}} = 2\underbrace{(c-|a|)}_{\text{مینیمم}} \Rightarrow c+|a| = 4(c-|a|) \Rightarrow |a| = \frac{3}{5}c$$

با این فرض، فقط گزینه‌های ۳ و ۴ قابل‌قبول‌اند.

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2(c-|a|) = 2(c-\frac{3}{5}c) = \frac{4}{5}c \Rightarrow |b| = \frac{5\pi}{2c}$$

با فرض $c = 5$ نتیجه می‌گیریم $|b| = \frac{\pi}{2}$، پس گزینهٔ ۴ درست است.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که:

$$f(x) = p(x)\cdot q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $p(x)$ کمتر است.

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از $r(x) = f(-\frac{b}{a})$.

طبق نکات چون درجهٔ $R(x)$ از x^2-4 باید کمتر باشد، فرض می‌کنیم $R(x) = ax+b$؛ قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x) = (x^2-4)g(x) + ax + b \quad (1)$$

ریشه‌های x^2-4 یعنی $x=2$ و $x=-2$ را در تساوی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow f(2) = 2a+b \Rightarrow 2a+b=-1 \\ x=-2 \Rightarrow f(-2) = -2a+b \Rightarrow -2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

بنابراین $R(x) = -x+1$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)$ بر $-x+1$ برابر $g(1)$ است.

برای محاسبهٔ $g(1)$، کافی است در تساوی (۱) به‌جای x، عدد یک را جایگزین کنیم، داریم:

$$f(1) = -3g(1) + a + b \Rightarrow -12 = -3g(1) + 0 \Rightarrow g(1) = 4$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۱)

با توجه به نمودار، $f(0) = 8$ است، پس $n = 8$ است.

اگر $\alpha < \beta$ ریشه‌های $f(x) = 0$ باشند، آنگاه ریشه‌های $f(1+\frac{x}{2}) = 0$ به‌صورت $2(\alpha-1)$ و $2(\beta-1)$ است.

(نمودار f یک واحد به چپ منتقل می‌شود و سپس طول نقاط آن دو برابر می‌شود.)

مطابق شکل ریشهٔ کوچک‌تر هر دو معادله، بر هم منطبق‌اند، پس:

$$2(\alpha-1) = \alpha \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 4-2m+8 = 0 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow mn = 48$$

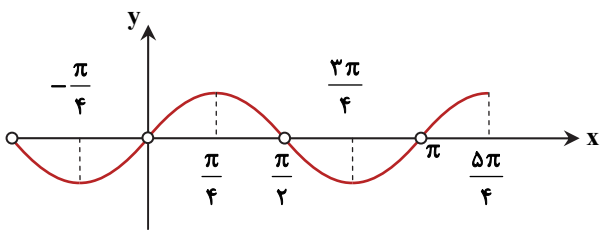
۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

ابتدا ضابطهٔ تابع را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{1}{\frac{\sin x\sin 2x + \cos 2x\cos x}{\cos x\sin 2x}} = \frac{\cos x\times\sin 2x}{\cos(2x-x)} = \frac{\cos x\times\sin 2x}{\cos x} = \sin 2x$$

بنابراین نمودار تابع f با توجه به ضابطهٔ آن به‌صورت روبه‌رو است:



دقت کنید که دامنهٔ تابع f به‌صورت $k \in \mathbb{Z}$ و $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ است. بنابراین روی نمودار نقاط ۰، $\frac{\pi}{2}$، π و... توخالی گذاشته شده است.

این تابع روی بازهٔ $(0, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: دامنهٔ تابع $y=\tan x$ به‌صورت $D=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ است.

می‌دانیم تابع تانژانت در تمامی نقاطی که تعریف نشده است، مجانب قائم دارد. پس مجانب‌های قائم تابع $y=\tan(\frac{\pi x}{3})$ از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\pi x}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{x}{3}=k+\frac{1}{2}\Rightarrow x=3k+\frac{3}{2}\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

به‌ازای مقادیر صحیح k، اعداد $\left\{-\frac{9}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{15}{2}\right\}$ از جواب معادلهٔ فوق در بازهٔ $(-6,10)$ قرار می‌گیرند، پس تابع $y=\tan(\frac{\pi x}{3})$ با دامنهٔ $(-6,10)$ دارای ۵ مجانب قائم به‌صورت روبه‌رو است: $x=-\frac{9}{2},x=-\frac{3}{2},x=\frac{3}{2},x=\frac{9}{2},x=\frac{15}{2}$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x است.

نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

طبق نکات اگر $f(x)$ صعودی باشد، هر دو تابع $-f(x)$ و $f(-x)$ نزولی ولی تابع $-f(-x)$ صعودی خواهد بود. از آنجا که $ab<0$، پس یکی از a و b مثبت و دیگری منفی است.

پس توابع $\underset{-}{ab}f(-x)$ و $\underset{\substack{+\\ \text{یا}\\ -}}{a}f(\underset{\substack{+\\ \text{یا}\\ -}}{b}x)$ و $\underset{\substack{+\\ \text{یا}\\ -}}{a}f(\underset{\substack{+\\ \text{یا}\\ -}}{-b}x)$ صعودی و تابع $\underset{-}{ab}f(x)$ نزولی است.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌نامیم به‌شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ برقرار باشد.

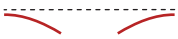
ابتدا مجانب افقی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-10x+1}{6x^2-15x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{6x^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

بنابراین خط $y=\frac{2}{3}$ تنها مجانب افقی این تابع است. با کم کردن $\frac{2}{3}$ از تابع داریم:

$$\frac{4x^2-10x+1}{6x^2-15x+4}-\frac{2}{3}=\frac{3(4x^2-10x+1)-2(6x^2-15x+4)}{3(6x^2-15x+4)}=\frac{-5}{3(6x^2-15x+4)}$$

با توجه به اینکه وقتی $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$، آنگاه $y-\frac{2}{3}$ مقداری منفی است، پس در مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت $y<\frac{2}{3}$ و تابع موردنظر در بی‌نهایت زیر مجانب افقی خود قرار دارد یعنی به‌شکل زیر است:



بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: $\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$ $\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$ $\quad\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$ $\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$

برای اینکه حاصل حد برابر $-\infty$ شود باید مخرج در $x=a$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. مخرج کسر داده‌شده به‌صورت $ax^2+bx+4a=a(x^2+\frac{b}{a}x+4)$ است. قسمت داخل پرانتز باید معادل $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ باشد، یعنی دو چندجمله‌ای $x^2+\frac{b}{a}x+4$ و $x^2-2ax+a^2$ باید متحد باشند، پس داریم:

$$\begin{cases}a^2=4\Rightarrow a=\pm2\\ \frac{b}{a}=-2a\Rightarrow b=-2a^2\xrightarrow{a^2=4}b=-8\end{cases}$$

به‌ازای $a=-2$، صورت و مخرج کسر منفی و حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود، بنابراین قابل‌قبول نیست و فقط مقدار $a=2$ قابل‌قبول است.

در نتیجه داریم: $a+b=2-8=-6$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: دامنهٔ تابع $y=\tan x$ به‌صورت $D=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ است.

نکته: $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{3}$ تابع تعریف‌نشده است و چون اولین نقطهٔ مثبتی است که تابع در آن تعریف نشده است، پس عبارت جلوی tan باید برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد:

$$bx-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{b\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow b=2$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{a}{\frac{1}{\cos^2(2x-\frac{\pi}{6})}}=a\cos^2(2x-\frac{\pi}{6})$$

مطابق شکل ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$a=3$$

در نهایت داریم:

$$f(x)=3\cos^2(2x-\frac{\pi}{6})\Rightarrow f(\frac{5\pi}{3})=3\cos^2(\frac{10\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=3\cos^2\frac{19\pi}{6}=\frac{9}{4}$$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس‌های ۱ و ۲، فصل ۳)

ابتدا وارون توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=nx+2\xrightarrow{\text{وارون}}g^{-1}(x)=\frac{x-2}{n}$$

$$f(x)=2x+m\xrightarrow{\text{وارون}}f^{-1}(x)=\frac{x-m}{2}$$

حال مطابق فرض‌های گفته‌شده داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+m}{\frac{x-2}{n}}=\frac{2}{\frac{1}{n}}=2n\Rightarrow 2n=6\Rightarrow n=3\ ,\ \lim_{x\to3^-}\frac{g(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to3^-}\frac{nx+2}{\frac{x-m}{2}}=-\infty\Rightarrow 3-m=0\Rightarrow m=3$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=2x+3\\g(x)=3x+2\end{cases}\Rightarrow(gof)(2)=g(7)=23$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس‌های ۱ و ۲، فصل ۳)

نکته: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty\qquad\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty\qquad\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$$

نکته: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌نامیم به‌شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$ برقرار باشد.

تابع f دارای یک خط مجانب افقی است، پس فقط یک مجانب قائم دارد.

حالت اول: $x=1$ (ریشهٔ صورت) یکی از ریشه‌های مخرج باشد:

$$x^2+mx+4=0\xrightarrow{x=1}1+m+4=0\Rightarrow m=-5\Rightarrow f(x)=\frac{1-x}{(x-1)(x-4)}=\frac{-1}{x-4}$$

نمودار تابع f اطراف $x=4$ به‌صورت است.

حالت دوم: مخرج ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x^2+mx+4=0\xrightarrow{\Delta=0}m^2-16=0\Rightarrow m=\pm4$$

$$m=4\Rightarrow f(x)=\frac{1-x}{(x+2)^2}\Rightarrow x=-2$$

$$m=-4\Rightarrow f(x)=\frac{1-x}{(x-2)^2}\Rightarrow x=2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

معادله را ساده کرده و برحسب کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = -\sin(2x+\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2}+2x+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}+2x+\frac{\pi}{6} = x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \frac{\pi}{2}+2x+\frac{\pi}{6} = -x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\pi+2k\pi \xrightarrow{k=1} x=\pi \\ x = -\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \xrightarrow{k=1,2,3} x = \frac{5\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{17\pi}{9} \end{cases}$$

بنابراین معادله چهار جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد.

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

تابع در $x=-1$ نقطهٔ توخالی دارد، پس $x=-1$ هم ریشهٔ صورت و هم ریشهٔ مخرج است: $-1+a=0 \Rightarrow a=1$

از طرفی چون یک ریشهٔ مخرج $x=-1$ می‌باشد و مخرج در $x=-2$ دارای انفصال مضاعف است، داریم:

$$(x+1)(x+2)^2 = (x+1)(x^2+4x+4) = x^3+4x^2+4x+x^2+4x+4 = x^3+5x^2+8x+4$$

از متحد قرار دادن عبارت به‌دست‌آمده با مخرج کسر داریم:

$$x^3+5x^2+8x+4 = x^2+bx^2+cx+4 \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=8 \end{cases}$$

$$k = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x^3+5x^2+8x+4} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x+2)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+2)^2} = 1$$

بنابراین:

$$\frac{c+b}{a}+k = \frac{8+5}{1}+1 = 14$$

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: $\tan(\alpha \mp \beta) = \frac{\tan\alpha \mp \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\tan\beta}$

طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$4-4\sin 2x = 1+\sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{5}$$

عبارت $\sin 2x$ را برحسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{1+(\frac{\sin x}{\cos x})^2} = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3\tan^2 x - 10\tan x + 3 = 0 \Rightarrow \tan x = 3 \text{ یا } \frac{1}{3}$$

بنابراین $\tan\alpha = 3$ و $\tan\beta = \frac{1}{3}$ یا $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ و $\tan\beta = 3$، در نتیجه داریم:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{3-\frac{1}{3}}{1+1} = \frac{4}{3} \quad \text{یا} \quad \frac{\frac{1}{3}-3}{1+1} = -\frac{4}{3}$$

پس جواب $\pm\frac{4}{3}$ است.

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۱)

ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-2I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 2I$$

حال از روی رابطهٔ دوم، ماتریس B را به‌دست می‌آوریم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $B = 0+0+2-4 = -2$

مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۳ باشد، در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A|=a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{برحسب سطر اول}$$

(برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

برای محاسبهٔ دترمینان، آن را برحسب سطر دوم بسط می‌دهیم:

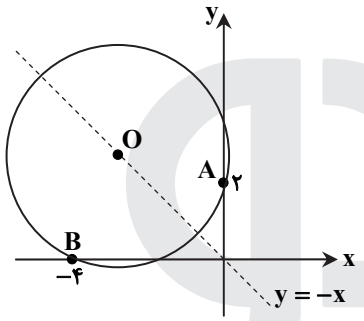
$$\begin{vmatrix} x & 2 & k \\ 0 & x+1 & 0 \\ x+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(x+1)\begin{vmatrix} x & k \\ x+2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x+1)(x-kx-2k)=0$$

یک ریشهٔ این معادله $x=-1$ است. برای اینکه معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید ریشهٔ دیگر آن نیز -1 باشد:

$$x-kx-2k=0 \xrightarrow{x=-1} -1+k-2k=0 \Rightarrow k=-1$$

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی خط $y=-x$ قرار دارد، پس مرکز دایره را به‌صورت $O(\alpha,-\alpha)$ در نظر می‌گیریم:



$$R=OA=OB \;,\; A(0,2) \;,\; B(-4,0)$$

$$\sqrt{(\alpha-0)^2+(2+\alpha)^2}=\sqrt{(\alpha+4)^2+(0+\alpha)^2}$$

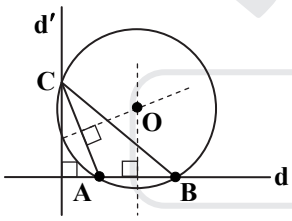
$$\Rightarrow \alpha^2+4+\alpha^2+4\alpha=\alpha^2+8\alpha+16+\alpha^2 \Rightarrow 4+4\alpha=8\alpha+16$$

$$\Rightarrow 4\alpha=-12 \Rightarrow \alpha=-3 \Rightarrow \text{مرکز دایره}: O(-3,3)$$

$$R=OA=\sqrt{(-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۲)

مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث، محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع آن است. مطابق شکل، نقطهٔ O باید روی عمودمنصف AB قرار داشته باشد، پس مکان هندسی نقطهٔ O، عمودمنصف AB است که خطی موازی d' می‌باشد.



۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R عبارت است از: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

نکته: برای تعیین وضعیت دو دایره نسبت به هم ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را تعیین می‌کنیم، سپس طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم و آنگاه طول خط‌المرکزین دو دایره را با مجموع و تفاضل دو شعاع مقایسه می‌کنیم تا براساس جدول زیر، وضعیت دو دایره مشخص شود:

هم‌مرکز	متداخل	مماس داخل	متقاطع	مماس خارج	متخارج
$d=0$	$d<\lvert R-R'\rvert$	$d=\lvert R-R'\rvert$	$\lvert R-R'\rvert<d<R+R'$	$d=R+R'$	$d>R+R'$

طبق نکته وضعیت دو دایره، با محاسبهٔ فاصلهٔ خط‌المرکزین و مقایسهٔ آن با شعاع دو دایره مشخص می‌شود، لذا اولین کار این است که مرکز و شعاع هر دو دایره را به‌دست آوریم:

$$x^2+y^2+2x-2y=10 \Rightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=12 \Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=12 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز } O(-1,1) \\ \text{شعاع } R=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x^2+y^2-4y=12 \Rightarrow x^2+y^2-4y+4=16 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=16 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز } O'(0,2) \\ \text{شعاع } R'=\sqrt{16}=4 \end{cases}$$

حال فاصلهٔ دو مرکز را به‌دست می‌آوریم و آن را با مجموع و تفاضل شعاع‌ها مقایسه می‌کنیم:

$$\text{طول خط‌المرکزین } OO'=\sqrt{(-1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$OO'=\sqrt{2}\simeq 1/4$$

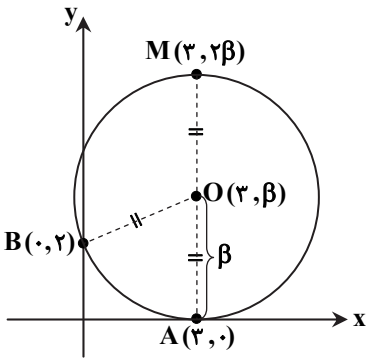
$$R+R'=4+2\sqrt{3}=4+3/4=7/4$$

$$|R-R'|=4-2\sqrt{3}=4-3/4=0/6 \Rightarrow |R-R'|<OO'<R+R' \quad \text{یعنی دو دایره متقاطع‌اند.}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

به شکل روبه‌رو توجه کنید. سؤال از ما عرض نقطهٔ M را می‌خواهد که در واقع دو برابر شعاع دایره است. فاصلهٔ OA را مساوی OB قرار می‌دهیم تا β که همان شعاع دایره هست را به‌دست آوریم:



$$OA = OB$$
$$\beta = \sqrt{۳^۲ + (\beta - ۲)^۲}$$
$$\beta^۲ = ۹ + \beta^۲ + ۴ - ۴\beta$$
$$۴\beta = ۱۳ \Rightarrow \beta = \frac{۱۳}{۴}$$

عرض نقطهٔ M برابر $۲\beta = ۲ \times \frac{۱۳}{۴} = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$ می‌باشد، پس گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۱)

ابتدا $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

حال برای محاسبهٔ سطر اول $A^۳$، کافی است که سطر اول $A^۲$ را در تمام ستون‌های A ضرب کنیم:

$$A^۳ = A^۲ \cdot A = \begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۶ & ۱۲ \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطراول $A^۳ = ۹ + ۶ + ۱۲ = ۲۷$

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: برای ماتریس وارون‌پذیر A داریم:

$$A \cdot A^{-۱} = A^{-۱} \cdot A = I$$
$$A^{-۱} + B^{-۱} = B^{-۱} \cdot A^{-۱}$$

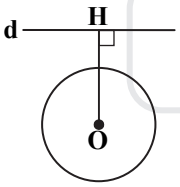
طرفین این تساوی را از سمت راست در A و از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$B(A^{-۱} + B^{-۱})A = B(B^{-۱}A^{-۱})A$$
$$B\underbrace{A^{-۱}A}_{I} + \underbrace{BB^{-۱}}_{I}A = \underbrace{BB^{-۱}}_{I} \cdot \underbrace{A^{-۱}A}_{I} \Rightarrow B + A = I$$

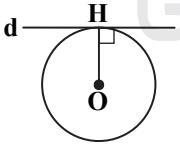
۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

نکتهٔ ۱: خط و دایرهٔ $C(O,R)$ نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

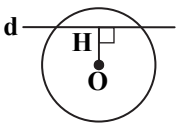
۱) متخارج: در این حالت خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بزرگ‌تر است. $OH > R$



۲) مماس: در این حالت خط و دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارند. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر با شعاع دایره است. $OH = R$



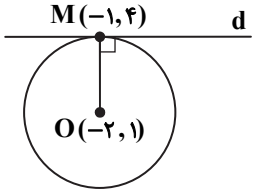
۳) متقاطع: در این حالت خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط کوچک‌تر از شعاع دایره است. $OH < R$



نکتهٔ ۲: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ با دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

نقطهٔ $M(-۱,۴)$ بر دایرهٔ $(x+۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۰$ واقع است. پس طبق شکل داریم:



$$\text{شیب } OM = \frac{۴-۱}{-۱+۲} = ۳ \Rightarrow \text{شیب } d = -\frac{۱}{۳}$$
$$d : y - ۴ = -\frac{۱}{۳}(x+۱) \Rightarrow ۳y - ۱۲ = -x - ۱$$
$$d : ۳y + x = ۱۱$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

حال باید وضعیت خط d را با دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y-1=0$ بیابیم:

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-1=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=6$$

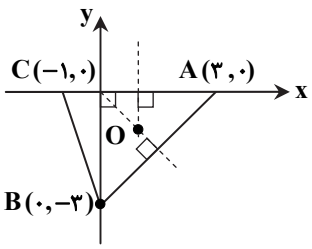
$$O'(1,-2)\ ,\ R=\sqrt{6}\ ,\ d: 3y+x-11=0 \Rightarrow O'H=\frac{|-6+1-11|}{\sqrt{9+1}}=\frac{16}{\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{10}}{10}=\frac{8}{5}\sqrt{10}$$

$\frac{8}{5}\sqrt{10}>\sqrt{6} \Rightarrow O'H>R \Rightarrow$ خط d با دایره متخارج است.

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: معادلهٔ استاندار دایره به مرکز (α,β) و شعاع R به‌صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ است.

مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث، محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع آن است. با توجه به‌شکل، عمودمنصف ضلع AB خط $y=-x$ و عمودمنصف ضلع AC خط $x=\frac{3-1}{2}=1$ است. محل تلاقی این دو خط، مرکز دایره است.



$$\begin{cases} y=-x \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow O(1,-1)\text{ مرکز}\ ,\ A(3,0) \Rightarrow R=OA=\sqrt{(3-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

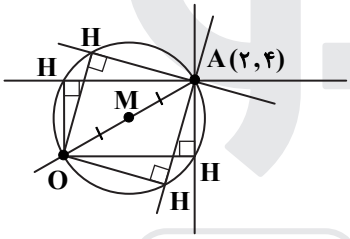
معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y+1)^2=5 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=5 \Rightarrow x^2+y^2-2x+2y=3$

$$x=0 \Rightarrow y^2+2y-3=0 \Rightarrow (y-1)(y+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow (0,1) \\ y=-3 \Rightarrow (0,-3) \end{cases}$$

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: معادلهٔ استاندار دایره به مرکز (α,β) و شعاع R به‌صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ است.

در تمام این عمودها طبق شکل، نقطهٔ H روبه‌رو به پاره‌خط ثابت OA می‌باشد و می‌دانیم همواره زوایای محاطی روبه‌رو به قطر ۹۰° می‌باشند. پس مکان هندسی نقطهٔ H، دایره‌ای به قطر OA می‌باشد. باید معادلهٔ این دایره را بنویسیم:



مرکز دایره: $O(0,0)\ ,\ A(2,4) \Rightarrow M=\frac{O+A}{2}=(1,2)$

$$R=MO=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y-2)^2=5 \Rightarrow x^2+y^2-2x-4y=0$

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکتهٔ ۱: تعداد رئوس (مرتبهٔ) هر گراف را با p و تعداد یال‌های (اندازهٔ) هر گراف را با q نمایش می‌دهیم.

نکتهٔ ۲: در بین درجات رئوس گراف G، کمترین درجه را با δ و بیشترین درجه را با Δ نمایش می‌دهیم.

با توجه به نکات، مقادیر p، q، δ و Δ مطابق شکل گراف، عبارت‌اند از:

$$p=5\ ,\ q=6\ ,\ \delta=2\ ,\ \Delta=3$$

پس باید ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+6=0$ را به‌دست آوریم و داریم:

$$(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2=\delta \\ x-3=0 \Rightarrow x=3=\Delta \end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادله δ و Δ هستند و گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ جواب دارد اگر و تنها اگر $(a,b)\,|\,c$.

نکته: $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m\,|\,a-b$

نکته: $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(m,c)=1} a \overset{m}{\equiv} b$

طبق نکات داریم:

$$(32,12)=4\ ,\ (32,12)\,|\,3n+1 \Rightarrow 4\,|\,3n+1 \Rightarrow 3n+1 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 3n \overset{4}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow 3n \overset{4}{\equiv} -1+4 \Rightarrow 3n \overset{4}{\equiv} 3 \xrightarrow{(3,4)=1} n \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow n=4k+1 \xrightarrow{k=7} n=29$$

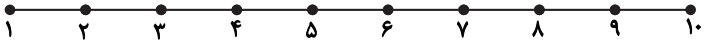
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکتهٔ ۱: گراف P_n، گرافی است که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده است.

نکتهٔ ۲: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v در G، دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u آغاز و به v ختم می‌شود به‌طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. طول مسیر برابر با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر است.

ابتدا با توجه به نکتهٔ ۱ گراف $P_{۱۰}$ را رسم می‌کنیم:



مسیر به‌طول ۱ همان یال‌های گراف است و از آنجایی که $P_{۱۰}$ تعداد ۹ یال دارد، پس ۹ مسیر به‌طول ۱ دارد.

مسیرهای ۱۲۳۴۵۶، ۲۳۴۵۶۷، ۳۴۵۶۷۸، ۴۵۶۷۸۹، ۵۶۷۸۹۱۰ مسیرهای به‌طول ۵ هستند که تعدادشان برابر ۵ است.

پس مجموع تعداد مسیرهای به‌طول ۱ و ۵ برابر $۹+۵=۱۴$ است.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

نکته (قضیهٔ تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a=bq+r$ و $۰\le r<b$.

طبق نکته داریم:

$$۶۳۷=۱۰b+r \Rightarrow r=۶۳۷-۱۰b \xrightarrow{۰\le r<b} ۰\le ۶۳۷-۱۰b<b \Rightarrow \begin{cases} ۰\le ۶۳۷-۱۰b \Rightarrow b\le ۶۳/۷ \\ ۶۳۷-۱۰b<b \Rightarrow b>۵۷/۹ \end{cases}$$

بنابراین $۵۷/۹<b\le ۶۳/۷$ و در نتیجه $b=۵۸,۵۹,۶۰,۶۱,۶۲,۶۳$. پس ۶ مقدار برای b وجود دارد.

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

نکته: $a\mid b \Rightarrow a\mid mb$

نکته: $a\mid b, a\mid c \Rightarrow a\mid b\pm c$

ابتدا از ضابطهٔ داده‌شده، y را برحسب x می‌یابیم.

$$xy+۵y=x^۲-۲ \Rightarrow y(x+۵)=x^۲-۲ \Rightarrow y=\frac{x^۲-۲}{x+۵}$$

برای اینکه جواب‌های معادله طبیعی باشد، در رابطهٔ فوق، باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد:

$$\left.\begin{matrix} x+۵\mid x^۲-۲ \\ x+۵\mid (x+۵)\times x \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۵+x\mid x^۲+۵x-(x^۲-۲) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+۵\mid ۵x+۲ \\ x+۵\mid (x+۵)\times ۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+۵\mid ۵x+۲۵-(۵x+۲) \Rightarrow x+۵\mid ۲۳$$

چون ۲۳ عددی اول است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x+۵=\pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x=-۴ & \text{غ ق ق} \\ x=-۶ & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ x+۵=\pm ۲۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۱۸ \Rightarrow y=\dfrac{۱۸^۲-۲}{۱۸+۵}=۱۴ \quad ✓ \\ x=-۲۸ & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

پس فقط نقطهٔ $(۱۸,۱۴)$ روی منحنی دارای مختصات طبیعی است و گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: اگر عددی بر ۴۴ بخش‌پذیر باشد، بر ۴ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

نکته: به طرفین یا یک طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، می‌توان مضاربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد: $a\overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a\pm mk\overset{m}{\equiv} b\pm mt$

نکته: $\left.\begin{matrix} a\overset{m}{\equiv} b \\ a\overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv} b$ ($[m,n]$ ک.م.م m و n است.)

مشخص است که $۴^{۵۰۰}$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

$$۴^{۵۰۰}\overset{۴}{\equiv} ۰$$

$$۴^۳\overset{۱۱}{\equiv} ۶۴-۵\times ۱۱\overset{۱۱}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\times ۴^۲} ۴^۵\overset{۱۱}{\equiv} ۱۴۴\overset{۱۱}{\equiv} ۱۴۴-۱۱\times ۱۳\overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان }۱۰۰} ۴^{۵۰۰}\overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

با اضافه کردن مضارب پیمانه به‌سمت راست هم‌نهشتی‌ها داریم:

$$\left.\begin{matrix} ۴^{۵۰۰}\overset{۴}{\equiv} ۰+۳\times ۴ \Rightarrow ۴^{۵۰۰}\overset{۴}{\equiv} ۱۲ \\ ۴^{۵۰۰}\overset{۱۱}{\equiv} ۱+۱۱ \Rightarrow ۴^{۵۰۰}\overset{۱۱}{\equiv} ۱۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{[۴,۱۱]=۴۴} ۴^{۵۰۰}\overset{۴۴}{\equiv} ۱۲$$

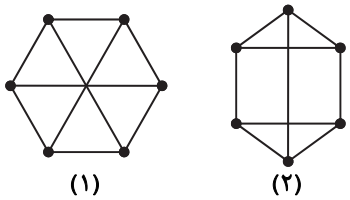
مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: در گراف r–منتظم مرتبهٔ p با اندازهٔ q داریم: $rp = 2q$

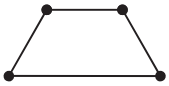
گراف ۳- منتظم است. $\Rightarrow r = 3 \Rightarrow rp = 2q \Rightarrow r\times 6 = 2\times 9$

گراف ۳–منتظم مرتبهٔ ۶ به یکی از شکل‌های زیر است:



(۱) (۲)

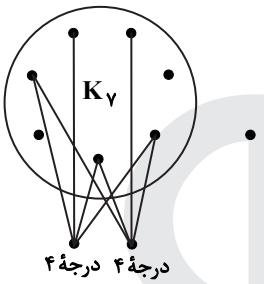
چون دوری به طول ۳ وجود ندارد، بنابراین گراف (۱) قابل‌قبول است.

در این گراف، ۳ دور به‌طول ۴ به‌شکل و ۶ دور به‌طول ۴ به‌شکل  وجود دارد.

پس در کل ۹ دور به‌طول ۴ داریم.

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

برای آنکه با ۱۰ رأس، حداکثر تعداد یال را داشته باشیم، یک رأس را به‌عنوان رأس درجهٔ صفر ($\delta = 0$) کنار گذاشته و ۲ رأس را برای داشتن ۲ رأس درجهٔ ۴ نیز کنار می‌گذاریم و با ۷ رأس دیگر گراف کامل مرتبهٔ ۷ می‌سازیم؛ یعنی $\binom{7}{2} = 21$ یال داریم و سپس با دو رأس دیگر که کنار گذاشته بودیم ۲ رأس درجهٔ ۴ که مجاور نباشند تشکیل داده و هرکدام را به ۴ رأس از ۷ رأس دیگر وصل می‌کنیم، پس:



$$q_{max} = \binom{7}{2} + 4 + 4 = 29$$

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکتهٔ ۱: گراف k– منتظم، گرافی است که درجهٔ همهٔ رئوس آن برابر عدد حسابی k است و روابط زیر در آن برقرار است.

۱) $2q = pk$

۲) $\delta = \Delta = k$

نکتهٔ ۲: گراف کامل گرافی است که همهٔ رئوسش با هم مجاورند و در نتیجه بیشترین تعداد یال ممکن را دارد و روابط زیر در آن برقرار است:

۱) $q = \frac{p(p-1)}{2}$

۲) $\delta = \Delta = p-1$

نکتهٔ ۳ (مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس): فرض کنیم $v \in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردنِ خودِ رأسِ v به $N_G(v)$ «همسایگی بستهٔ رأس v» را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$
$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

با توجه به نکات و مطابق اطلاعات مسئله، داریم:

$$G_1 : 2q = 7p \to q = \frac{7p}{2} \ , \ G_2 : q = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$10 + \frac{7p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \xrightarrow{\times 2} 20 + 7p = p^2 - p \Rightarrow p^2 - 8p - 20 = 0 \Rightarrow (p-10)(p+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -2 & \text{غقق} \\ p = 10 \end{cases}$$

$$p = 10 \Rightarrow \begin{cases} G_2 \text{ درگراف کامل} : \delta = \Delta = 9 \Rightarrow |N_{G_2}(v_1)| = 9 \\ G_1 \text{ منتظم ۷- درگراف} : \delta = \Delta = 7 \Rightarrow |N_{G_1}[v_1]| = 7 + 1 = 8 \end{cases}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$|N_{G_2}(v_1)| - |N_{G_1}[v_1]| = 9 - 8 = 1$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۱)

نکته: اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ زوج باشد، آنگاه a نیز زوج است.

نکته: از هر دو عدد صحیح متوالی یکی زوج و یکی فرد است، در نتیجه حاصل‌ضرب آن‌ها زوج است.

اگر عبارت $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴} = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$ زوج باشد، آنگاه $\frac{n(n+۱)}{۲}$ نیز زوج است. در نتیجه $n(n+۱)$ باید مضرب ۴ باشد و چون n و $n+۱$ دو عدد صحیح متوالی هستند، دو حالت داریم:

۱) $n = ۴k \xrightarrow{۱\le n<۲۰} n = ۴,۸,۱۲,۱۶$

۲) $n+۱ = ۴k \Rightarrow n = ۴k-۱ \xrightarrow{۱\le n<۲۰} n = ۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹$

بنابراین به‌ازای ۹ عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰، عبارت داده‌شده زوج است.

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکتهٔ ۱: در بین درجات رئوس گراف G، کمترین درجه را با δ و بیشترین درجه را با Δ نمایش می‌دهیم.

نکتهٔ ۲ (مکمل یک گراف): مکمل گرافی مانند G که آن را با $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از $\bar{G}$ یک یال است، اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. روابط زیر بین گراف G و مکملش گراف $\bar{G}$ برقرار است:

۱) $q(G)+q(\bar{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲}$ ۲) $deg_G(v)+deg_{\bar{G}}(v) = p-۱$

نکتهٔ ۳: در هر گراف ساده از مرتبهٔ p و ماکزیمم درجهٔ Δ داریم: $\Delta \le p-۱$

با توجه به نکات داریم:

$$\Delta \le ۶-۱ \Rightarrow \Delta \le ۵ \xrightarrow{\delta+\Delta=۶} \begin{cases}\delta=۱\\ \Delta=۵\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}\delta=۲\\ \Delta=۴\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}\delta=۳\\ \Delta=۳\end{cases}$$

حال در هر حالت، ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف مکمل را مشخص کرده و گراف مکمل را طوری رسم می‌کنیم که کمترین یال را داشته باشد.

۱) $\delta_G = ۱ , \Delta_G = ۵ \Rightarrow \delta_{\bar{G}} = ۰ , \Delta_{\bar{G}} = ۴ \Rightarrow$ $q(\bar{G}) = ۴$

۲) $\delta_G = ۲ , \Delta_G = ۴ \Rightarrow \delta_{\bar{G}} = ۱ , \Delta_{\bar{G}} = ۳ \Rightarrow$ $q(\bar{G}) = ۴$

۳) $\delta_G = ۳ , \Delta_G = ۳ \Rightarrow \delta_{\bar{G}} = ۲ , \Delta_{\bar{G}} = ۲ \Rightarrow$ $q(\bar{G}) = ۶$

بنابراین در حالت‌های ۱ و ۲، $\bar{G}$ حداقل تعداد یال‌ها را خواهد داشت که برابر ۴ است.

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

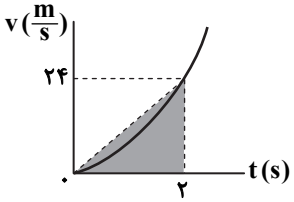
عبارت «الف» نادرست؛ چون همواره سرعت در حال افزایش و دور شدن از صفر است.

عبارت «ب» درست است.

عبارت «پ» درست است:

$$\begin{cases} v_۲ = ۳\times۴+۶\times۲ = ۲۴\frac{m}{s} \\ v_۴ = ۳\times۱۶+۶\times۴ = ۷۲\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۷۲-۲۴}{۲} = ۲۴\frac{m}{s^۲}$$

عبارت «ت» نادرست است؛ چون با توجه به درجه‌دوم بودن معادلهٔ سرعت، نمودار سرعت- زمان آن سهمی و مطابق شکل است. جابه‌جایی متحرک در این مدت کمتر از مساحت مثلث رنگی است:



$$\Delta x = S < \frac{۲\times۲۴}{۲} = ۲۴\,m$$

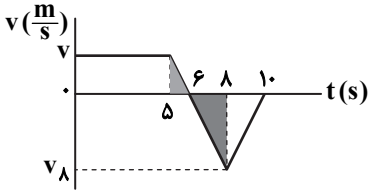
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} < \frac{۲۴}{۲} = ۱۲\frac{m}{s}$$

عبارت «ث» الزاماً درست نیست؛ چون جسم همواره در جهت محور حرکت می‌کند و اگر در لحظهٔ $t = ۰$ در جلوی مبدأ باشد، هرگز از مبدأ عبور نمی‌کند.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی خواهیم داشت:



$$\frac{۱}{۲}=\frac{v}{|v_۸|} \Rightarrow |v_۸|=۲v \Rightarrow v_۸=-۲v$$

$S_۱$: مساحت ذوزنقهٔ بالای محور t $\Rightarrow S_۱=\frac{۵+۶}{۲}\times v=۵/۵\,v$

$S_۲$: مساحت مثلث با قاعدهٔ ۶s تا ۱۰s $\Rightarrow S_۲=\frac{۴\times -۲v}{۲}=-۴v$

حالا جابه‌جایی و مسافت طی‌شده را در مدت ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت می‌یابیم:

$$\ell=S_۱+|S_۲|=۵/۵v+۴v=۹/۵v$$

$$\Delta x=S_۱+S_۲=۵/۵v+(-۴v)=۱/۵v$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{۹/۵v}{۱/۵v}=\frac{۹/۵}{۱/۵}=\frac{۱۹}{۳}$$

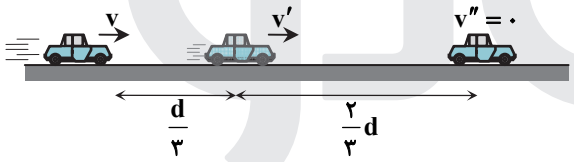
۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$\begin{cases}x_A=۲۰t+۲۰۰\\ x_B=-۱۲(t-۱۵)+۴۰۰\end{cases} \Rightarrow x_{A(۲۰)}-x_{B(۲۰)}=\big[(۲۰\times ۲۰)+۲۰۰\big]-\big[-۱۲(۲۰-۱۵)+۴۰۰\big]=۶۰۰+۶۰-۴۰۰=۲۶۰m$$

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

سهمی بودن نمودار مکان- زمان یعنی حرکت متحرک با شتاب ثابت است، در نتیجه شتاب متوسط در تمام بازه‌ها یکسان است. در بازهٔ زمانی $۰\le t<t_۲$، چون جهت حرکت روی خط راست تغییر می‌کند، مسافت طی‌شدهٔ متحرک بیشتر از جابه‌جایی آن و بنابراین تندی متوسط متحرک بیشتر از بزرگی سرعت متوسط آن است.

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{v'+v''}{۲}=۱۰ \Rightarrow v'=۲۰\frac{m}{s}$$

رابطهٔ (۱) $v''^۲-v'^۲=۲a\times\frac{۲}{۳}d \Rightarrow -۴۰۰=\frac{۴}{۳}ad$

رابطهٔ (۲) $v''^۲-v^۲=۲ad \Rightarrow -v^۲=۲ad$

از تقسیم رابطهٔ (۲) بر رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{-v^۲}{-۴۰۰}=\frac{۲ad}{\frac{۴}{۳}ad}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow v^۲=۶۰۰ \Rightarrow v=۱۰\sqrt{۶}\frac{m}{s}$$

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$v=at+v_۰ \xrightarrow{v(۳s)=۰} ۰=۳a+v_۰ \Rightarrow v_۰=-۳a$$

در بازهٔ زمانی $۳s\le t<۵s$ داریم:

$$\Delta x_{(۳s-۵s)}=\frac{v_{(۳s)}+v_{(۵s)}}{۲}\times t \Rightarrow ۰-(-۸)=\frac{۰+v_{(۵s)}}{۲}\times ۲ \Rightarrow v_{(۵s)}=۸\frac{m}{s}$$

$$v_{(۵s)}=۵a+v_۰=۸ \Rightarrow ۵a+(-۳a)=۸ \Rightarrow a=۴\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v_۰=-۱۲\frac{m}{s}$$

$$v_{(۸s)}=a\times ۸+v_۰=(۴\times ۸)+(-۱۲)=۲۰\frac{m}{s}$$

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$v_{av}=۲۶=\frac{v_B+v_A}{۲} \Rightarrow v_B+v_A=۵۲\frac{m}{s} \quad \text{(۱) رابطهٔ}$$

$$v_B^۲-v_A^۲=۲g\times h_{AB} \Rightarrow v_B^۲-v_A^۲=۲۰\times ۵/۲=۱۰۴ \Rightarrow (v_B-v_A)(v_B+v_A)=۱۰۴ \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} (v_B-v_A)\times ۵۲=۱۰۴$$

$$\Rightarrow v_B-v_A=۲\frac{m}{s} \quad \text{(۲) رابطهٔ}$$

با استفاده از دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}v_B+v_A=۵۲\\ v_B-v_A=۲\end{cases}$$

$$۲v_B=۵۴ \Rightarrow v_B=۲۷\frac{m}{s}$$

$$v_B=gt_B \Rightarrow ۲۷=۱۰t_B \Rightarrow t_B=۲/۷s$$

$$t_{\text{کل}}=۲/۷+۰/۳=۳s$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

حالا ارتفاع h را می‌یابیم:

$$h=\frac{۱}{۲}gt^{۲}=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times(۳)^{۲}=۴۵\,m$$

(جهت مثبت محور را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم.)

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$\begin{cases} y_{۱}=-\frac{۱}{۲}gt^{۲} \\ y_{۲}=-\frac{۱}{۲}g(t-۰/۶)^{۲}-۴/۵ \end{cases} \Rightarrow y_{۱}=y_{۲} \Rightarrow -۵t^{۲}=-۵t^{۲}-۱/۸+۶t-۴/۵$$

$$\Rightarrow ۶t=۶/۳ \Rightarrow t=\frac{۶/۳}{۶}=۱/۰۵\,s \Rightarrow \text{پس از رهایی گلولهٔ دوم}: t'=۱/۰۵-۰/۶=۰/۴۵\,s$$

(جهت مثبت محور را رو به بالا در نظر گرفته‌ایم.)

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

نادرستی گزارهٔ «الف»: در حرکت سقوط آزاد، شتاب ثابت و در تمام لحظه‌ها برابر با g است.

درستی گزارهٔ «ب»: ۲ ثانیهٔ سوم یعنی $۴s<t<۶s$:

$$\begin{cases} v=gt \xrightarrow{t=۴s} v=۱۰\times(۴) \Rightarrow v=۴۰\frac{m}{s} \\ v=gt \xrightarrow{t=۶s} v=۱۰\times(۶) \Rightarrow v=۶۰\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \Delta y=(\frac{v_{(۴s)}+v_{(۶s)}}{۲})\times\Delta t=(\frac{۴۰+۶۰}{۲})(۲)=۱۰۰\,m \Rightarrow \ell=۱۰۰\,m$$

نادرستی گزارهٔ «پ»: به‌دلیل اینکه شتاب ثابت است، در بازه‌های زمانی یکسان، تغییر سرعت برابر است:

$$\Delta v=gt=۱۰\times۲=۲۰\frac{m}{s}$$

درستی گزارهٔ «ت»:

$$s_{av(۰\to۵/۲۸s)}=v_{av(۰\to۵/۲۸s)}=\frac{v_{۰}+v_{(۵/۲۸s)}}{۲}=\frac{۰+۵۲/۸}{۲}=۲۶/۴\frac{m}{s}$$

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ برابر است با:

$$v=at+v_{۰}=(۴\times۵)+(-۵)=۱۵\frac{m}{s}$$

در ۵ ثانیهٔ دوم، شتاب صفر است؛ یعنی تغییر سرعت نداریم؛ بنابراین بیشترین مقدار سرعت $۱۵\frac{m}{s}$ است.

جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ نخست حرکت برابر است با:

$$\Delta x_{(۰\to۵)}=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t=\frac{۱}{۲}\times(۴)\times(۵)^{۲}+(-۵)\times(۵) \Rightarrow \Delta x_{(۰\to۵)}=۲۵\,m$$

جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ دوم را نیز به‌دست می‌آوریم:

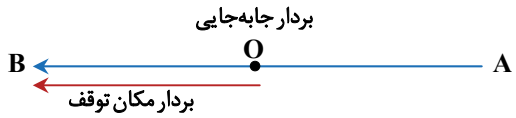
$$\Delta x_{(۵\to۱۰)}=vt=(۱۵)\times(۵)=۷۵\,m$$

بنابراین جابه‌جایی در کل مدت صفر تا ۱۰s برابر با $۱۰۰\,m=۷۵+۲۵$ است:

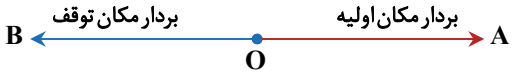
$$x_{(t=۱۰s)}-(-۲۵)=۱۰۰ \Rightarrow x_{(t=۱۰s)}=۷۵\,m$$

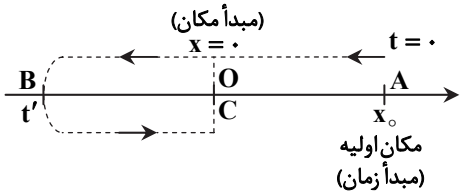
۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

عبارت «الف» نادرست است. بردار جابه‌جایی از نقطهٔ A به B و بردار مکان توقف، زاویهٔ صفر درجه می‌سازند.

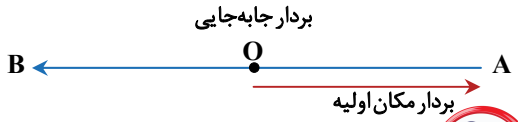


عبارت «ب» درست است. با توجه به مسیر حرکت زاویهٔ بین بردار OA تا OB برابر با ۱۸۰ درجه است.





عبارت «پ» نادرست است. بردار جابه‌جایی از نقطهٔ A به B و بردار مکان اولیه، زاویهٔ ۱۸۰° می‌سازند.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

زمان توقف متحرک B را تعیین می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 5t - 20 \Rightarrow t = 4s$$

۶ ثانیه بعد از توقف متحرک B، برای این متحرک ۱۰ ثانیه سپری شده است. از آنجا که متحرک B دو ثانیه دیرتر از متحرک A حرکت کرده، کل زمان حرکت متحرک A برابر با ۱۲ ثانیه است. با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$x_A - x_B = \left[\frac{1}{2}\times(2)\times(12)^2\right] - \left[\frac{1}{2}\times(5)\times(10)^2 + (-20)\times(10) + (-20)\right] = 144 - 30 = 114\,m$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نادرستی گزارهٔ «الف»: مقاومت هوا تا قبل از باز کردن چتر، افزایش و شتاب کاهش می‌یابد.

نادرستی گزارهٔ «ب»: تا قبل از باز کردن چتر، تندی چترباز در حال افزایش است.

درستی گزارهٔ «پ»: بعد از باز کردن چتر، نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت mg و بزرگ‌تر از mg است؛ بنابراین برایند نیروها و شتاب چترباز روبه بالا است. با توجه به اینکه سرعت چترباز روبه پایین است، حرکت آن کندشونده خواهد بود.

درستی گزارهٔ «ت»: در لحظهٔ باز کردن چتر، مقاومت هوا $1140\,N$ است.

$f_D = 1140\,N$

$mg = 600\,N$

$$F_{net} = f_D - mg = ma \Rightarrow 1140 - 600 = 60a \Rightarrow a = 9\frac{m}{s^2}$$

حرکت کندشونده است و به‌تدریج تندی و در نتیجه اندازهٔ مقاومت هوا، کاهش می‌یابد تا حدی که مقاومت هوا با mg برابر می‌شود و شتاب به صفر و تندی به مقدار ثابت تندی حدی می‌رسد. پس از لحظهٔ باز کردن چتر تا لحظهٔ رسیدن به تندی حدی، بزرگی مقاومت هوا از $1140\,N$ به $600\,N$ می‌رسد، یعنی $540\,N$ کاهش می‌یابد.

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$v = a_1 t$$

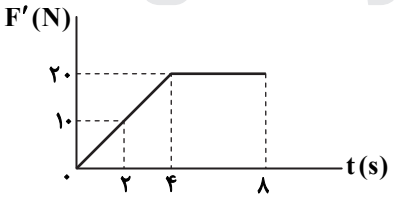
$$0 = a_2 t' + v = 2a_2 t + v \xrightarrow{v=a_1 t} a_1 t = -2a_2 t \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}a_1$$

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma_1 \Rightarrow T_1 = m(g - a_1) \\ mg - T_2 = ma_2 = -\dfrac{ma_1}{2} \Rightarrow T_2 = m\left(g + \dfrac{a_1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{3}{2}ma_1 \Rightarrow 30 = \frac{15a_1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4\dfrac{m}{s^2} \\ a_2 = -2\dfrac{m}{s^2} \end{cases}$$

بنابراین بزرگی نیروی کشش طناب در مرحلهٔ تندشونده (از t_1 تا t_2) برابر است با:

$$T_1 = m(g - a_1) = 5\times(10 - 4) = 30\,N$$

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی ۱۰ نیوتون است و تا لحظهٔ $t = 2s$ که نیروی F' از صفر به $10\,N$ می‌رسد، جسم ساکن است و پس از آن جسم به راه می‌افتد.

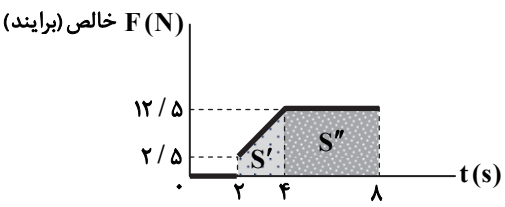
$$f_{s,max} = \mu_s \times F_N \xrightarrow{F_N = mg} \mu_s mg = 0/2\times 50 = 10\,N$$

$$f_k = \mu_k \times mg = 0/15\times 50 = 7/5\,N$$

$t = 2s$ لحظهٔ خالص در $F = F' - f_{s,max} = 0$

خالص پس از راه افتادن $F = F' - f_k = 10 - 7/5 = 2/5\,N$

$t = 4s$ لحظهٔ خالص در $F = F' - f_k = 20 - 7/5 = 12/5\,N$



$$S' = \frac{2/5 + 12/5}{2}\times 2 = 15\,N\cdot s$$

$$S'' = 4\times 12/5 = 50\,N\cdot s$$

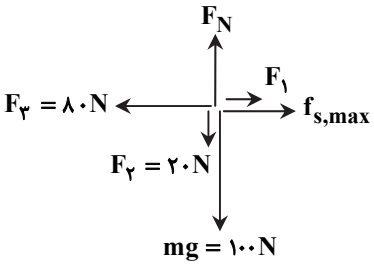
$$\Delta p = S = 50 + 15 = 65\,N\cdot s$$

$$\Delta p = m(v - 0) \Rightarrow 65 = 5v \Rightarrow v = 13\frac{m}{s}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

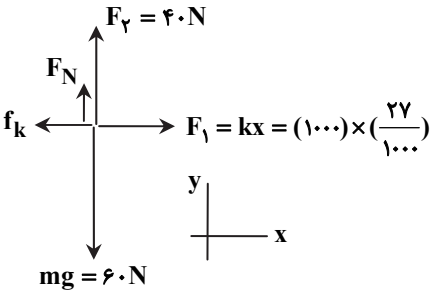
برای اینکه $\vec{F}_1$ کمترین مقدار باشد، $\vec{f}_{s,max}$ باید هم‌جهت با $\vec{F}_1$ باشد؛ یعنی جعبه در آستانهٔ حرکت به‌طرف چپ باشد.



$$F_N = 20 + 100 = 120\,N \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s \cdot F_N = (\frac{1}{2}) \times (120) = 60\,N$$

$$F_3 = F_1 + f_{s,max} \Rightarrow 80 = F_1 + 60 \Rightarrow F_1 = 20\,N$$

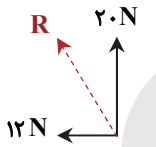
۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_N + F_2 = mg \Rightarrow F_N + 40 = 60 \Rightarrow F_N = 20\,N$$

$$F_{net,x} = ma \Rightarrow F_1 - f_k = ma \Rightarrow 27 - f_k = (6) \times (2/5) \Rightarrow f_k = 12\,N$$

بزرگی نیروی سطح بر جعبه برابر است با:



$$R = \sqrt{20^2 + 12^2} = 4\sqrt{34}\,N$$

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$v = r(\frac{2\pi}{T}) \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = (\frac{r_A}{r_B}) \times (\frac{T_B}{T_A}) = (4) \times (\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$$

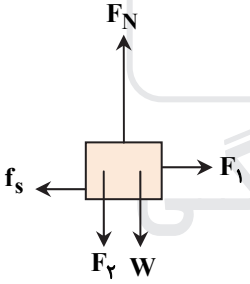
$$p = mv \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = (\frac{m_A}{m_B}) \times (\frac{v_A}{v_B}) \Rightarrow 2 = (\frac{m_A}{m_B}) \times (\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = 4$$

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_N = W + F_2 \Rightarrow F_N = 200\,N$$

$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_1 = f_s \Rightarrow f_s = 50\,N$$

$$f_s \le \mu_s F_N \Rightarrow 50 \le 200\mu_s \Rightarrow \frac{1}{4} \le \mu_s \Rightarrow$$ جملهٔ «الف» درست است.



جملهٔ «ب» نادرست است. اگر F_2 را زیاد کنیم، F_N زیاد می‌شود اما f_s تغییر نمی‌کند و جسم همچنان ساکن می‌ماند.

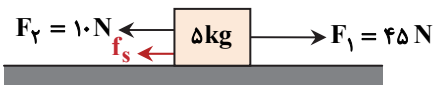
جملهٔ «پ» هم نادرست است. اگر F_1 را زیاد کنیم و باز هم وزنه ساکن بماند، f_s زیاد می‌شود اما اگر وزنه حرکت کند ممکن است اصطکاک کم شده باشد. مثلاً فرض کنید در حالت اول، وزنه در آستانهٔ لغزیدن باشد ($f_s = f_{s,max}$) و ما F_1 را زیاد کنیم که در این حالت جسم حرکت می‌کند و اصطکاک برابر f_k می‌شود که از $f_{s,max}$ کمتر است.

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$p = \sqrt{36^2 + 48^2} = 12\sqrt{3^2 + 4^2} = 12 \times 5 = 60\,\frac{kg \cdot m}{s}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow 120 = \frac{60 \times 60}{2m} \Rightarrow m = \frac{60 \times 60}{240} = 15\,kg$$

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_N = mg = 50\,N \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s F_N = 0/8 \times 50 = 40\,N$$

در مدت $t = 0$ تا $t = 4s$ داریم:

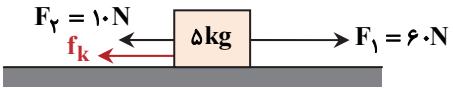
$$F_1 - F_2 = 45 - 10 = 35\,N < f_{s,max} \Rightarrow F_{net} = 0$$ و وزنه ساکن است

در مدت $t = 4s$ تا $t = 10s$ داریم:

$$F_1 - F_2 = 60 - 10 = 50\,N > f_{s,max}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

بنابراین وزنه حرکت می‌کند و اصطکاک از نوع جنبشی (f_k) می‌شود:



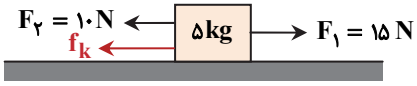
$$f_k = \mu_k F_N = ۰/۶ \times ۵۰ = ۳۰N$$

$$F_{net} = ۶۰ - ۱۰ - ۳۰ = ۲۰N$$

$$F_{net} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \Rightarrow ۲۰ \times ۶ = ۵(v - ۰) \Rightarrow v = ۲۴ \frac{m}{s}$$

سرعت متحرک در $t = ۱۰s$ برابر $+۲۴ \frac{m}{s}$ می‌شود.

در مدت $t = ۱۰s$ تا $t = ۱۲s$ داریم:



$$F'_{net} = ۱۵ - ۱۰ - ۳۰ = -۲۵ N$$

$$F'_{net} \cdot \Delta t = m\Delta v' \Rightarrow -۲۵ \times ۲ = ۵(v' - ۲۴) \Rightarrow v' = ۱۴ \frac{m}{s}$$

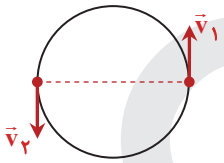
۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جسم در مدت ۶۰ ثانیه ۱۰ دور می‌گردد، پس مدت‌زمان هر دور گردش آن ۶ ثانیه است.

$$T = \frac{۶۰}{۱۰} = ۶s$$

$$v = \frac{۲\pi r}{T} = \frac{۲\pi \times ۵}{۶} = \frac{۵\pi}{۳} \frac{m}{s}$$

بردار سرعت مماس بر دایره و بزرگی آن ثابت است. با توجه به شکل روبه‌رو، $\vec{v}_۲$ و $\vec{v}_۱$ قرینهٔ هم هستند.



$$\Delta\vec{p} = m \cdot \Delta\vec{v} = m(\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱) = m(\vec{v}_۲ - (-\vec{v}_۲)) = ۲m\vec{v}_۲$$

$$|\Delta\vec{p}| = ۲m|\vec{v}| = ۲ \times ۶ \times \frac{۵\pi}{۳} = ۲۰\pi \frac{kg \cdot m}{s}$$

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

تکانه (p) یک تابع درجهٔ ۲ از زمان است که رأس سهمی در $t = ۲s$ است و مقدار تابع در رأس سهمی ۴۸ واحد SI است. معادلهٔ چنین تابعی به‌صورت $p = a(t-۲)^۲ + ۴۸$ است. با توجه به اینکه $p(۶) = ۰$ است، خواهیم داشت:

$$a(۶-۲)^۲ + ۴۸ = ۰ \Rightarrow ۱۶a = -۴۸ \Rightarrow a = -۳$$

پس معادلهٔ تکانه- زمان به‌صورت روبه‌رو می‌شود:

$$p(t) = -۳(t-۲)^۲ + ۴۸$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(۵) - p(۰)}{۵ - ۰} = \frac{-۳(۵-۲)^۲ + ۳(۰-۲)^۲}{۵} = \frac{-۳ \times ۹ + ۳ \times ۴}{۵} = -۳N \Rightarrow |F_{av}| = ۳N$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در یک پیچ مسطح و افقی، نیروی مرکزگرا همان اصطکاک ایستایی است که در امتداد عرض اتومبیل بر چرخ‌ها وارد می‌شود و نیروی عمود بر سطح (F_N) هم‌اندازهٔ وزن اتومبیل است.

$$F_N = mg \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s mg$$

بیشترین تندی برای آنکه اتومبیل در پیچ نلغزد، در حالتی است که مقدار اصطکاک $f_{s,max}$ شود.

$$f_s = \frac{mv^۲}{R} \Rightarrow \frac{mv_{max}^۲}{R} = \mu_s mg \Rightarrow \mu_s = \frac{v_{max}^۲}{Rg} = \frac{۲۰ \times ۲۰}{۵۰ \times ۱۰} = ۰/۸$$

توجه: $۳۶ \frac{km}{h} = ۱۰ \frac{m}{s}$ و $۷۲ \frac{km}{h} = ۲۰ \frac{m}{s}$ است.

وقتی اتومبیل با تندی $۱۰ \frac{m}{s}$ پیچ را طی می‌کند، نمی‌لغزد و f_s برابر نیروی مرکزگرا می‌شود:

$$f_s = \frac{mv^۲}{R} = \frac{۲ \times ۱۰^۳ \times ۱۰^۲}{۵۰} = ۴۰۰۰N$$

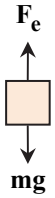
۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$\frac{g'}{g} = (\frac{r}{r'})^۲ = (\frac{R_e + h}{R_e + h'})^۲ \Rightarrow \frac{g'}{g} = (\frac{۶۴۰۰ + ۲۴۰۰}{۶۴۰۰ + ۱۶۰۰})^۲ = ۱/۲۱$$

بزرگی شتاب گرانشی تلسکوپ ۲۱ درصد افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



وقتی شتاب $۳\frac{m}{s^۲}$ روبه بالا باشد: $F_{e_۱} - mg = ma_۱ \Rightarrow F_{e_۱} = m(g+a_۱) = m(۱۰+۳) = ۱۳m = ۱۳\times۸ = ۱۰۴N$

وقتی شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ روبه پایین باشد: $mg - F_{e_۲} = ma_۲ \Rightarrow F_{e_۲} = m(g-a_۲) = m(۱۰-۲) = ۸m = ۸\times۸ = ۶۴N$

وقتی وزنه در حال سکون باشد، نیروی خالص وارد بر آن صفر است و بزرگی نیروی فنر با بزرگی وزن وزنه برابر است:

$F_e - mg = ۰ \Rightarrow F_e = ۱۰m = ۸۰N$

در حالت اول نیروی فنر، $۱۰۴N$ و در حالت دوم، $۶۴N$ و طول فنر در دو حالت $۶۸cm$ و $۶۴cm$ بود. حالا نیروی فنر $۸۰N$ است. طبق رابطهٔ $F_e = kx$ می‌توانیم تناسب روبه‌رو را بنویسیم.

$$\frac{۱۰۴-۶۴ \mid ۶۸-۶۴}{۱۰۴-۸۰ \mid ۶۸-\ell} \Rightarrow \frac{۴۰}{۲۴} = \frac{۴}{۶۸-\ell} \Rightarrow ۶۸-\ell = ۲/۴ \Rightarrow \ell = ۶۵/۶cm$$

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

تندی در وضع تعادل $v_{max} = A\omega$ است، پس باید ω و A را حساب کنیم. همچنین توجه کنید در هر دوره، دو بار شتاب صفر می‌شود (دو بار متحرک از وضع تعادل عبور می‌کند.). بنابراین هر دقیقه برابر با ۳۰۰ دوره است.

$$۳۰۰T = ۶۰ \Rightarrow T = \frac{۱}{۵}s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} = ۱۰\pi\frac{rad}{s}$$

طول مسیر حرکت $۲A$ است. $\Rightarrow A = ۴\div۲ = ۲cm = ۰/۰۲m$

$$v_{max} = A\omega = \frac{۲}{۱۰۰}\times۱۰\pi = \frac{\pi}{۵}\frac{m}{s}$$

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

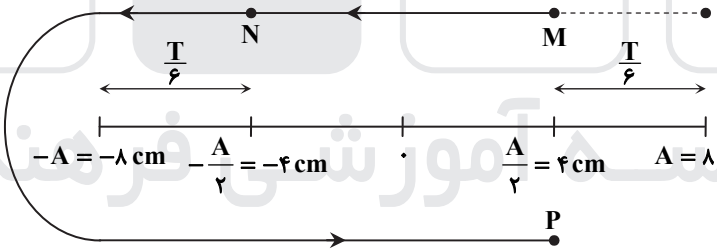
نوسانگر بر روی پاره‌خط به‌طول $۱۶cm$ نوسان می‌کند. بنابراین دامنهٔ نوسان برابر است با:

$$A = \frac{۱۶}{۲} = ۸cm$$

مکان‌های $x_۱ = +۴cm$ و $x_۲ = -۴cm$ را برحسب دامنهٔ نوسان به‌دست آورده و سپس زمان متناظر با آن‌ها را بر روی نمودار زیر مشخص می‌کنیم:

$$x_۱ = +۴cm \Rightarrow \frac{x_۱}{A} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x_۱ = \frac{A}{۲} \Rightarrow t_۱ = \frac{T}{۶}$$

$$x_۲ = -۴cm \Rightarrow \frac{x_۲}{A} = \frac{-۴}{۸} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x_۲ = -\frac{A}{۲} \Rightarrow t_۲ = \frac{T}{۲} - \frac{T}{۶} = \frac{T}{۳}$$



با توجه به نمودار بالا، مدت‌زمان لازم برای آنکه نوسانگر (لدون تغییر جهت) از مکان $x_۱ = +۴cm$ به مکان $x_۲ = -۴cm$ برود، یعنی مسیر MN را بپیماید، برابر است با:

$$\Delta t_{MN} = t_۲ - t_۱ = \frac{T}{۳} - \frac{T}{۶} = \frac{T}{۶}$$

همچنین مدت‌زمان لازم برای آنکه نوسانگر با یک تغییر جهت از مکان $x_۲ = -۴cm$ به مکان $x_۱ = +۴cm$ برود؛ یعنی مسیر NP را بپیماید، برابر است با:

$$\Delta t_{MN} = \frac{T}{۶} + \frac{T}{۶} + \Delta t_{MN} = \frac{T}{۶} + \frac{T}{۶} + \frac{T}{۶} = \frac{۳T}{۶} = \frac{T}{۲}$$

از طرفی با توجه به فرض تست داریم:

$$\Delta t_{NP} - \Delta t_{MN} = \frac{۸}{۳}s \Rightarrow \frac{T}{۲} - \frac{T}{۶} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \frac{T}{۳} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow T = ۸s$$

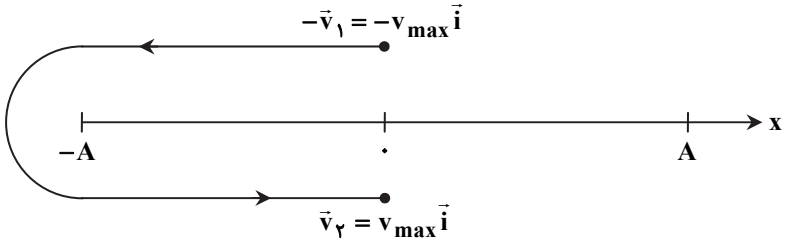
و در پایان بیشینهٔ تندی نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{max} = A\omega = A\times\frac{۲\pi}{T} = ۸\times\frac{۲\pi}{۸} = ۲\pi\frac{cm}{s}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

تندی نوسانگر هماهنگ ساده به هنگام عبور از نقطهٔ تعادل، بیشینه است و اندازهٔ آن $v_{max} = A\omega$ می‌باشد. بنابراین سرعت نوسانگر به هنگام دو عبور متوالی از نقطهٔ تعادل با در نظر گرفتن جهت حرکت نوسانگر، مطابق نمودار زیر است:



در نتیجه، شتاب متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی دو عبور متوالی از مبدأ برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_{max}\vec{i} - (-v_{max}\vec{i})}{\frac{T}{2}} = \frac{v_{max}\vec{i} + v_{max}\vec{i}}{\frac{T}{2}} = \frac{2v_{max}\vec{i}}{\frac{T}{2}} = \frac{4}{T}v_{max}\vec{i} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{4}{T}v_{max} = \frac{4}{\frac{2\pi}{\omega}} \times (A\omega)$$

$$= \frac{2}{\pi}A\omega^2$$

از طرفی شتاب بیشینهٔ نوسانگر در این بازهٔ زمانی به هنگام عبور نوسانگر از نقطهٔ بازگشت ($x = -A$) اتفاق می‌افتد که اندازه‌اش برابر است با:

$$|\vec{a}_{max}| = \omega^2 A$$

در پایان، برای محاسبهٔ خواستهٔ سؤال داریم:

$$\frac{|\vec{a}_{av}|}{|\vec{a}_{max}|} = \frac{\frac{2}{\pi}A\omega^2}{\omega^2 A} = \frac{2}{\pi}$$

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

دورهٔ تناوب نوسان‌کنندهٔ وزنه- فنر، ۲ برابر دورهٔ تناوب آونگ ساده است. بنابراین:

$$T_{\text{وزنه-فنر}} = 2T_{\text{آونگ}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{4L}{g} \Rightarrow \frac{mg}{k} = 4L \quad (1)$$

با کاهش ۲۵ درصدی جرم متصل به فنر داریم:

$$m' = m - \frac{25}{100}m = \frac{75}{100}m = \frac{3}{4}m$$

در این حالت دورهٔ تناوب نوسان‌کنندهٔ وزنه- فنر برابر است با:

$$T'_{\text{وزنه-فنر}} = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}$$

با تغییر طول آونگ ساده به مقدار L'، دورهٔ تناوب آونگ ساده برابر خواهد شد با:

$$T'_{\text{آونگ}} = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$$

چون در این حالت دورهٔ تناوب دو نوسان‌کننده با یکدیگر برابر می‌شود، داریم:

$$T'_{\text{وزنه-فنر}} = T'_{\text{آونگ}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}} = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \Rightarrow \frac{3m}{4k} = \frac{L'}{g} \Rightarrow L' = \frac{3mg}{4k} = \frac{3}{4} \times \frac{mg}{k} \xrightarrow{(1)} L' = \frac{3}{4} \times (4L) = 3L$$

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

انرژی مکانیکی وزنه- فنر برابر است با:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \times 0/5 \times (10)^2 \times (0/6)^2 = 0/25 \times 100 \times 0/36 = 9J$$

از طرفی با توجه به نمودار داده‌شده، داریم:

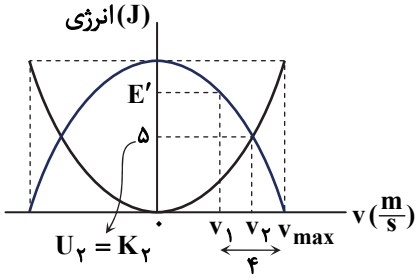
$$E = K + U \Rightarrow E = P + 3/5P = 4/5P \Rightarrow 9 = 4/5P \Rightarrow P = 2$$

در نتیجه تندی وزنه، هنگامی که انرژی جنبشی آن $2P$ است، برابر است با:

$$K = 2P = 2 \times 2 = 4J \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 0/5v^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{4}v^2 = 4 \Rightarrow v^2 = 16 \Rightarrow v = 4\frac{m}{s}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)



قانون پایستگی انرژی مکانیکی را برای نقطهٔ ۲ می‌نویسیم:

$$E = U_2 + K_2 \Rightarrow E = 5 + 5 = 10J$$

$$E = K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} \times 0/2 \times v_{max}^2$$

$$\Rightarrow v_{max}^2 = 100 \Rightarrow v_{max} = 10\frac{m}{s}$$

از طرفی با توجه به نمودار، در نقطهٔ (۱) داریم:

$$v_{max} - v_1 = 4 \Rightarrow 10 - v_1 = 4 \Rightarrow v_1 = 6\frac{m}{s}$$

اکنون می‌توان با محاسبهٔ انرژی جنبشی نوسانگر در نقطهٔ ۱ و معلوم بودن مقدار انرژی مکانیکی، انرژی پتانسیل نوسانگر در نقطهٔ ۱ را که برابر E' است، محاسبه نمود:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 0/2 \times (6)^2 = 0/1 \times 36 = 3/6J$$

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow 10 = 3/6 + U_1 \Rightarrow U_1 = 6/4J \Rightarrow E' = 6/4J$$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

در حالت اول داریم:

$$x = A\cos\omega t = 0/02\cos(10\pi t) \Rightarrow \omega = 10\pi\frac{rad}{s}$$

در حالت دوم که بسامد ۱۰ هرتز می‌شود:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10 = 20\pi\frac{rad}{s}$$

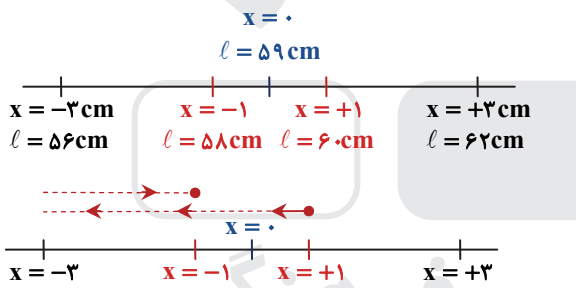
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{m_1}{m_2}} \Rightarrow \frac{20\pi}{10\pi} = \sqrt{\frac{9k}{k} \times \frac{m}{m+800}}$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{9m}{m+800}} \Rightarrow 4(m+800) = 9m \Rightarrow 5m = 4 \times 800 \Rightarrow m = \frac{4 \times 800}{5} \Rightarrow m = 640g$$

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

وضع تعادل در وسط مسیر حرکت است یعنی در وضع تعادل، طول فنر برابر با میانگین ۶۲ و ۵۶ سانتی‌متر است:

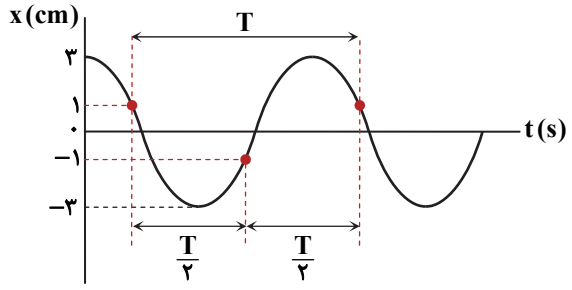
$$\ell_{\text{تعادل}} = \frac{62+56}{2} = 59cm$$



دامنه نصف طول مسیر است:

$$A = \frac{62-56}{2} = 3cm$$

هر زمان نوسانگر به وضع تعادل نزدیک می‌شود، حرکت تندشونده است و هرگاه از وضع تعادل دور می‌شود، حرکت کندشونده است. پس مدت‌زمان مورد نظر مربوط به حرکت روبه‌رو است و مقدار آن $\frac{T}{2}$ است.



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{0/4}} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}\frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\sqrt{10}} = 0/2s$$

$$\Delta t = \frac{T}{2} = 0/1s$$

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

در ۶۰ ثانیه، ۵۰ نوسان انجام می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$T = \frac{60}{50} = \frac{6}{5}s$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 L}{g} \Rightarrow T^2 = 4L \Rightarrow \frac{36}{25} = 4L \Rightarrow L = \frac{9}{25}m = 0/36m = 36cm$$

در حالت دوم $f = 1Hz$ است:

$$T = \frac{1}{f} = 1s \Rightarrow 1^2 = 4L \Rightarrow L = \frac{1}{4}m = 25cm$$

طول آونگ از $36cm$ به $25cm$ می‌رسد؛ یعنی $11cm$ کم می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

فقط عبارت «پ» نادرست است. استرها پیوند هیدروژنی تشکیل نمی‌دهند. شکل «الف» اسید چرب و شکل «ب» استر سنگین را نشان می‌دهد و مخلوط این دو چربی‌ها را می‌سازند.

بخش (۱) هر دو مولکول زنجیرهٔ هیدروکربنی را نشان می‌دهد که بخش ناقطبی است در هر دو شکل این بخش بر بخش قطبی غلبه دارد و نیروهای غالب هر دو مولکول واندروالس می‌باشد.

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جملهٔ اول درست است:

$$RCOONa$$

$$\underbrace{C_nH_{2n+1}}_{R}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-Na \quad \text{یا} \quad C_{16}H_{33}COONa \quad \text{یا} \quad C_{17}H_{33}O_2Na$$

جملهٔ دوم نادرست است. ساختار داده‌شده یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است که در آب سخت نیز پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کند.

جملهٔ سوم درست است. مواد موردنیاز از منابع نفتی و در پتروشیمی‌ها تأمین می‌شوند.

جملهٔ چهارم درست است.

$$C_nH_{2n}O_2 \Rightarrow \frac{\text{جرم C}}{\text{جرم H}}=\frac{12n}{2n}=6$$

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

هر مول استر بلندزنجیر با ۳ مول $NaOH$ واکنش می‌دهد.

$$\Rightarrow 4\times 0/8\times 3=9/6\,mol \text{ لازم است. } NaOH$$

$$pH=13/7 \Rightarrow pOH=0/3 \Rightarrow [OH^-]=10^{-0/3}=\frac{1}{2}=M\cdot\underset{\downarrow}{\alpha}{}_{1} \Rightarrow M=0/5\,\frac{mol}{L}$$

$$0/5\times V=9/6 \Rightarrow V=19/2\,L$$

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

ابتدا مقدار مول‌های Ca^{2+} را در نمونه آب به‌دست می‌آوریم:

$$x\,mol=100\,mL\times\frac{1\,L}{1000\,mL}\times\frac{0/3\,mol\,Ca^{2+}}{1\,L}=0/03\,mol\,Ca^{2+}$$

$$x\,g\,Na_3PO_4=0/03\,mol\,Ca^{2+}\times\frac{2\,mol\,Na_3PO_4}{3\,mol\,Ca^{2+}}\times\frac{164\,g}{1\,mol\,Na_3PO_4}=3/28\,g\,Na_3PO_4$$

۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

با توجه به جدول کتاب درسی بیشترین میزان پاک‌کنندگی که در طی آن درصد لکه باقی‌مانده به صفر می‌رسد مربوط به حالت D و کمترین میزان پاک‌کنندگی که درصد لکه باقی‌مانده برابر ۲۵ درصد است مربوط به حالت B می‌باشد.

در حالت‌های A و C درصد لکهٔ باقی‌مانده با هم برابر و معادل ۱۵ درصد می‌باشد.

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$x\,mol\,SO_3=400\,g\,SO_3\times\frac{1\,mol\,SO_3}{80\,g\,SO_3}=5\,mol\,SO_3$$

$$x\,mol\,N_2O_5=216\,g\,N_2O_5\times\frac{1\,mol\,N_2O_5}{108\,g\,N_2O_5}=2\,mol\,N_2O_5$$

$$SO_3(g)+H_2O(l)\rightarrow 2H^+(aq)+SO_4^{2-}(aq)$$

$$N_2O_5(s)+H_2O(l)\rightarrow 2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)$$

۵ مول SO_3 مطابق معادلهٔ فوق ۱۰ مول H^+ و ۲ مول N_2O_5 مطابق معادلهٔ فوق ۴ مول H^+ و در مجموع ۱۴ مول H^+ یا یون هیدرونیوم تولید می‌کنند:

$$x\,H_3O^+=14\,mol\,H_3O^+\times\frac{6/02\times10^{23}\,H_3O^+}{1\,mol\,H_3O^+}=8/42\times10^{24}\,H_3O^+$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$pH = ۱۲/۲۳$

$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱۲/۲۳} = ۱۰^{-۱۳} \times ۱۰^{۰/۷۷} = ۶ \times ۱۰^{-۱۳}$

$(\log ۶ = \log(۲ \times ۳) = \log ۲ + \log ۳ = ۰/۳۰ + ۰/۴۷ = ۰/۷۷)$

$[H^+] \cdot [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۶ \times ۱۰^{-۱۳}} = ۱/۶ \times ۱۰^{-۲} mol \cdot L^{-۱}$

$Ba(OH)_۲ \rightarrow Ba^{۲+} + ۲OH^-$

$[Ba(OH)_۲] = \frac{۱}{۲}[OH^-] \Rightarrow [Ba(OH)_۲] = ۸ \times ۱۰^{-۳} mol \cdot L^{-۱}$

$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{۱/۶ \times ۱۰^{-۲}}{۶ \times ۱۰^{-۱۳}} \simeq ۲/۶ \times ۱۰^{۱۰}$

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

عبارت‌های «اول»، «دوم» و «چهارم» درست هستند.

$\frac{[H^+]}{[OH^-]} = ۱۰^{۶} \Rightarrow [H^+]^۲ = ۱۰^{-۸} \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۴} \Rightarrow pH = ۴$

pH، ۳ واحد کمتر از pH آب خالص در دمای اتاق است.

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

واکنش موازنه‌شده:

$Mg(OH)_۲(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$

$x\,g\,Mg(OH)_۲ = ۵۰۰\,mL\,HCl \times \frac{۱\,L\,HCl}{۱۰۰۰\,mL\,HCl} \times \frac{۰/۵\,mol\,HCl}{۱\,L\,HCl} \times \frac{۱\,mol\,Mg(OH)_۲}{۲\,mol\,HCl} \times \frac{۵۸\,g\,Mg(OH)_۲}{۱\,mol\,Mg(OH)_۲} = ۷/۲۵\,g\,Mg(OH)_۲$

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

در محلول HX: $pH = ۱ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱} = ۰/۱ mol \cdot L^{-۱}$

$K_a = \frac{[H^+] \cdot [A^-]}{[HA]} \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۵} = \frac{۰/۱ \times [A^-]}{۱}$

$[A^-] = \frac{۲ \times ۱۰^{-۵}}{۰/۱} = ۲ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱}$

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

پاک‌کننده‌های خورنده با آلاینده‌ها هم واکنش و هم برهم‌کنش دارند.

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$HCN \rightleftharpoons H^+ + CN^-$

$K_a = \frac{[H^+]_۱^۲}{M_۱} = \frac{[H^+]_۲^۲}{\frac{۱}{۵}M_۱} \Rightarrow [H^+]_۱ = \sqrt{۵}[H^+]_۲ \Rightarrow pH_۱ = pH_۲ - \frac{۱}{۲}\log ۵ \Rightarrow pH_۱ = pH_۲ - ۰/۳۵$

$\Rightarrow pH_۲ = pH_۱ + ۰/۳۵$

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$Fe + ۲HCl \rightarrow FeCl_۲ + H_۲$

$mol\,HCl\,\text{اولیه} = ۱\frac{mol}{L} \times ۵L = ۵\,mol$

$\frac{۲/۳۵}{۱} = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۴/۷\,mol\,HCl\,\text{مصرفی}$

$\Rightarrow HCl\,\text{باقی‌مانده} = ۰/۳\,mol \Rightarrow [HCl]_{\text{باقی‌مانده}} = \frac{۰/۳\,mol}{۵\,L} = ۰/۰۶ = [H^+]$

$\Rightarrow pH = -\log ۰/۰۶ = ۲ - \log ۳ - \log ۲ = ۱/۲ \Rightarrow t = \frac{۱/۲}{۰/۳} \times ۱۰ = ۴۰\,\text{ثانیه}$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

واکنش اسید معده و جوش شیرین به شرح روبه‌رو است: $NaHCO_3(aq)+HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$

و محصول سوم واکنش، کربن دی‌اکسید است.

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$HNO_3 : M = 0/01 \Rightarrow [H^+] = 0/01 \Rightarrow pH = 2$

$HA\,(\text{مولار } 0/1) : pH = 4 \Rightarrow [H^+] = 10^{-4} \Rightarrow 10^{-4} = \alpha_1 \times 0/1 \Rightarrow \alpha_1 = 10^{-3}$

K_a ثابت است. $\Rightarrow K_{a_1} = K_{a_2}$

$\alpha_1 < 0/05 \Rightarrow K_a = M\alpha^2 \Rightarrow M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2$

$(10^{-3})^2 \times 0/1 = \alpha_2^2 \times 0/001 \Rightarrow \alpha_2 = 0/01$

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

با توجه به شرایط توصیف‌شده، قدرت کاهندگی سه فلز به‌صورت $M > X > D$ است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) قدرت کاهندگی فلز X بیشتر از قدرت کاهندگی فلز D ولی کمتر از فلز M است.

۳) کاتیون‌های فلز M در مقایسه با کاتیون‌های فلز X اکسنده‌های ضعیف‌تری هستند.

۴) اگر نیم‌سلول‌های استاندارد فلزهای M و X برای تشکیل سلول الکتروشیمیایی گالوانی به یکدیگر متصل شوند، الکترود M قطب منفی سلول را تشکیل می‌دهد.

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

$CH_4 + 2H_2O \rightarrow CO_2 + 8H^+ + 8e^- : \frac{1+8+8}{2} = 8/5$

$CH_3OH + H_2O \rightarrow CO_2 + 6H^+ + 6e^- : \frac{1+6+6}{1} = 13$

$C_2H_6 + 4H_2O \rightarrow 2CO_2 + 14H^+ + 14e^- : \frac{2+14+14}{4} = 7/5$

$C_2H_5OH + 3H_2O \rightarrow 2CO_2 + 12H^+ + 12e^- : \frac{2+12+12}{3} = 8/6$

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مس، مقداری مثبت و پتانسیل SHE برابر صفر است. بنابراین:

الف) درست؛ SHE در برابر مس نقش آند را دارد و الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد جریان می‌یابند.

ب) نادرست؛ در نیم‌سلول SHE، گاز هیدروژن به $H^+(aq)$ تبدیل می‌شود و غلظت H^+ افزایش می‌یابد که به اشتباه بیان شده است که pH افزایش می‌یابد.

پ) درست

$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = E^\circ_{\text{مس}} - \text{صفر} = E^\circ_{\text{مس}}$

ت) نادرست؛ جرم الکترود پلاتین به‌کار رفته در SHE همواره ثابت است.

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

با توجه به جهت حرکت آنیون‌ها در می‌یابیم که نیم‌سلول آهن، نیم‌سلول آندی است. معادلهٔ کلی واکنش به‌صورت زیر است:

$Fe(s) + Pb^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Pb(s) \sim 2e^-$

$\frac{?\,g}{56g} = \frac{0/25\,mol}{2\,mol} \Rightarrow ? = 7$

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا چهار پتانسیل داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{cases} Pt^{2+} + 2e^- \rightarrow Pt & E^\circ = +1/2V \\ Pd^{2+} + 2e^- \rightarrow Pd & E^\circ = +0/98V \\ Pb^{2+} + 2e^- \rightarrow Pb & E^\circ = -0/13V \\ Pu^{3+} + 3e^- \rightarrow Pu & E^\circ = -1/97V \end{cases}$$

با توجه به واکنش اول در می‌یابیم که قدرت کاهندگی A از Pd بیشتر است، پس پتانسیل آن باید کمتر از $+0/98$ ولت باشد. با توجه به واکنش دوم در می‌یابیم که قدرت کاهندگی A از Pb کمتر است، پس پتانسیل آن باید بیشتر از $-0/13V$ باشد. با توجه به اعداد پیشنهادی در گزینه‌ها پتانسیل $+0/32V$ بین دو پتانسیل $-0/13V$ و $+0/98V$ قرار دارد.

مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا فرض می‌کنیم که عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن برابر « ۲− » است که در صورت درست بودن این فرض باید عدد اکسایش سایر اتم‌ها منطقی باشد، در غیر این صورت عدد اکسایش یک یا چند اتم اکسیژن در ترکیب موردنظر برابر « ۲− » نبوده است.

$Na_2S_2O_8 : 2(+1)+2S+8(-2)=0 \Rightarrow S=+7$

عدد اکسایش ۷+ برای S قابل‌قبول نیست ($S \leq 6$) پس تمام اتم‌های اکسیژن در این ترکیب عدد اکسایش « ۲− » ندارند.

$SO_2F_2 : S+3(-2)+2(-1)=0 \Rightarrow S=+8$

عدد اکسایش ۸+ برای S قابل‌قبول نیست. ($S \leq 6$)

$K_2O_2 : 2K+2(-2)=0 \Rightarrow K=+2$

عدد اکسایش ۲+ برای K قابل‌قبول نیست. ($K=+1$ یا $K=0$)

$HOF : H+(-2)+(-1)=0 \Rightarrow H=+3$

عدد اکسایش ۳+ برای H قابل‌قبول نیست.

$RbO_2 : Rb+2(-2)=0 \Rightarrow Rb=+4$

عدد اکسایش ۴+ برای Rb قابل‌قبول نیست. ($Rb=+1$ یا $Rb=0$)

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

الف) نادرست؛ نیم‌واکنش کاهش در سلول الکترولیتی در کاتد انجام می‌شود که قطب منفی است.

ب) درست

پ) نادرست؛ جنس الکترودها در سلول الکترولیتی می‌تواند از جنس گرافیت باشد.

ت) نادرست؛ واکنش‌ها در سلول الکترولیتی، غیرخودبه‌خودی هستند.

ث) درست

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

افزایش غلظت محلول الکترولیت ناشی از تجزیهٔ آب به گازهای هیدروژن و اکسیژن و در نتیجه کاهش مقدار حلال است.

$2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g)+O_2(g)$

$\%2=\frac{?\,g\ \text{نمک}}{1000\,g\ \text{محلول}} \Rightarrow ?=20\,g$

$\%4=\frac{20\,g\ \text{نمک}}{?\,g\ \text{محلول}} \Rightarrow ?=500$

پس جرم آب تجزیه‌شده برابر است با:

$1000-500=500\,g$

تفاوت حجم گازها براساس معادلهٔ واکنش برابر یک مول و ۲۲/۴ لیتر است:

$\frac{500\,g}{2\times 18\,g}=\frac{?\,L}{22/4\,L} \Rightarrow ?\simeq 311/1$

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

معادلهٔ کلی موازنه‌شده زنگ زدن آهن به‌صورت زیر است:

$4Fe(s)+6H_2O(l)+3O_2(g) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$

مورد اول: نادرست؛ زیرا:

$\frac{4+6+3}{4} \neq 3$

مورد دوم: درست

مورد سوم: درست؛ شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در این واکنش برابر ۱۲ است. معادله مربوط به فرایند هال به‌صورت زیر است.

$2Al_2O_3+3C \rightarrow 4Al+3CO_2$

شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در این واکنش نیز برابر ۱۲ است.

مورد چهارم: نادرست؛ نیم‌واکنش کاهش در فرایند زنگ زدن آهن چنین است:

$O_2(g)+2H_2O(l)+4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

معادلهٔ نیم‌واکنش کاهش در سلول سوختی هیدروژن چنین است:

$O_2(g)+4H^+(aq)+4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$

مؤسسه آموزشی فرهنگی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱) نادرست؛ هدف از انجام این فرایند آبکاری قطعه M با روکش نازکی از فلز A است.

۲) نادرست؛ در فرایند آبکاری پتانسیل کاهشی استاندارد الکترودها مهم نیست و هر الکترودی که به قطب مثبت باتری متصل است را آند می‌نامند.

۳) نادرست؛ اگر پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M منفی‌تر از فلز A باشد، آنگاه با قطع مدار بیرونی میان تیغهٔ M و محلول $A^{2+}(aq)$ واکنش رخ می‌دهد.

۴) درست؛ جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی همواره چه در سلول گالوانی و چه در سلول الکترولیتی از آند به کاتد است. در سلول الکترولیتی آند قطب مثبت است و به قطب مثبت باتری متصل می‌شود.

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

$$a)\ Fe(s)+2HCl(aq) \rightarrow H_2(g)+FeCl_2(aq)$$

$$b)\ FeCl_2(aq)+2NaOH(aq) \rightarrow Fe(OH)_2(s)+2NaCl(aq)$$

واکنش «a» با تغییر عدد اکسایش و مبادلهٔ الکترون همراه بوده و الکتروشیمیایی است ولی طی واکنش «b» عدد اکسایش تغییر نمی‌کند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) پس از موازنه، مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ «b»، ۶ و مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ «a» برابر ۵ است.

۲) طی واکنش «b» الکترونی مبادله نمی‌شود.

۴) واکنش «a» را می‌توان در سلول الکتروشیمیایی گالوانی انجام داد ولی واکنش «b» الکتروشیمیایی نیست.

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

با توجه به معادلهٔ واکنش انجام‌شده در سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن ($2H_2(g)+O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$) به‌ازای تولید شدن ۲ مول آب، ۴ مول الکترون از مدار بیرونی سلول عبور می‌کند:

$$720\,mg\,H_2O \times \frac{1\,g}{1000\,mg} \times \frac{1\,mol\,H_2O}{18\,g\,H_2O} \times \frac{4\,mol\,e^-}{2\,mol\,H_2O} = 0/08\,mol\,e^-$$

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

هرچه شمار اتم‌های اکسیژن متصل‌شده به اتم کربن بیشتر باشد، عدد اکسایش مثبت‌تر و هرچه شمار اتم‌های هیدروژن بیشتری به آن متصل باشد، عدد اکسایش منفی‌تری دارد.

در این مولکول یک اتم کربن با عدد اکسایش -3 وجود دارد. (به ۳ اتم هیدروژن متصل است.)

بیشترین عدد اکسایش اتم کربن در این مولکول $+3$ است و ۲ اتم با این عدد اکسایش وجود دارد. (کربن‌هایی که به دو اتم اکسیژن متصل هستند.)

مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در این مولکول صفر است:

$$C_9H_8O_4 \rightarrow 9C+8\overset{+1}{H}+4\overset{-2}{O}=0 \Rightarrow 9C=0$$

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

حلبی ورقهٔ آهنی پوشانده شده با لایهٔ نازکی از فلز قلع است و در صورت ایجاد خراشی عمیق در سطح آن و قرار گرفتن آن در شرایط مناسب، آهن خورده شده و قلع سالم می‌ماند؛ پس A فلز قلع، B فلز آهن و یون‌های X^{2+} مربوط به فلز آهن هستند.

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

معادلهٔ واکنش انجام‌شده به‌صورت زیر است که با توجه به ضرایب مولی مواد طی این واکنش ۶ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$3Zn(s)+2Au^{3+}(aq) \rightarrow 3Zn^{2+}(aq)+2Au(s)$$

جرم فلز روی مصرف‌شده و جرم فلز طلای تولیدشده:

$$3/01\times10^{21}\,e \times \frac{1\,mol\,e}{6/02\times10^{23}\,e} \times \frac{3\,mol\,Zn}{6\,mol\,e} \times \frac{65\,g\,Zn}{1\,mol\,Zn} = 0/1625\,g\,Zn$$

$$3/01\times10^{21}\,e \times \frac{1\,mol\,e}{6/02\times10^{23}\,e} \times \frac{2\,mol\,Au}{6\,mol\,e} \times \frac{197\,g\,Au}{1\,mol\,Au} = 0/3283\,g\,Au$$

و ۸۰ درصد از فلز طلای تولیدشده (۰/۲۶۲۷ گرم) به تیغهٔ روی می‌چسبد. پس جرم تیغه به‌طور تقریبی به اندازهٔ ۰/۱ گرم افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir