

دوازدهم ریاضی



آزمون هدیه ۱۵ دی ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی
گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

عنوان مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه
۲	فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
۳	شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه



آزمون هدیه «۱۵ دی ۱۴۰۲» اختصاصی دوازدهم ریاضی

زنگنه سؤال

مدت زمان کل پاسخ گویی : ۱۲۰ دقیقه

تعداد کل سؤالات: ۸۰ سؤال

شماره سؤال	تعداد سؤال	نام درس
۱-۲۰	۲۰	حسابان ۲
۲۱-۳۰	۱۰	ریاضیات گسسته
۳۱-۴۰	۱۰	هندسه
۴۱-۶۰	۲۰	فیزیک
۶۱-۸۰	۲۰	شیمی
۱-۸۰	۸۰	جمع کل

پدیدآورندگان

نام درس	نام طراحان	اختصاصی
حسابان ۲	کاظم اجلائی-مهرداد استقلالیان-مسعود برملا-شاهین پروازی-سعید تن آرا-سهیل حسن خان پور-عادل حسینی-محمد رضا راسخ علی شهرابی-رضا طاری-سپهر متولی-علیرضا نداف زاده-جهانبخش نیکنام	
هندسه ۳	امیر حسین ابومحبوب-سیدمحمد رضا حسینی فرد-افشین خاصه خان-سوگند روشنی-هومن عقیلی-مهرداد ملوندی	
ریاضیات گسسته	امیر حسین ابومحبوب-فرزاد جوادی-مصطفی دیداری-سوگند روشنی-احمد رضا فلاح	
فیزیک	محمد اسدی-زهره آقامحمدی-امیر حسین برادران-میثم دشتیان-محمد علی عباسی-بهادر کامران-مصطفی کیانی-علیرضا گونه غلامرضا محبی-سید علی میرنوری-سید جلال میری-حسین ناصحی	
شیمی	مجتبی اسدزاده-رئوف اسلام دوست-فرزین بوستانی-مسعود جعفری-محمد رضا جمشیدی-حسن رحمتی کونکده-علی رحیمی علیرضا رضایی سراب-فرزاد رضایی-جهان شاهی بیگباغی-ساجد شیری-مسعود طبرسا-رسول عابدینی زواره-محمد عظیمیان زواره-حسن عیسی زاده-حسن ناصر ثانی	

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین برادران	پارسا عیوض پور
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی سعید خان بابایی	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	زهره آقامحمدی مهدی شریفی	امیر رضا حکمت نیا
ویراستاری رتبه های برتر	سهیل تقی زاده	مهدی خالئی	مهدی خالئی	حسین بصیر ترکبور	احسان پنجه شاهی مهدی سهامی
مسئول درس مستند سازی	عادل حسینی سمیه اسکندری	امیر حسین ابومحبوب سرژ یقیازاریان تبریزی	امیر حسین ابومحبوب سرژ یقیازاریان تبریزی	دانیال راستی احسان صادقی	پارسا عیوض پور امیر حسین مرتضوی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری
حروف نگار	فرزانه فتح اله زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

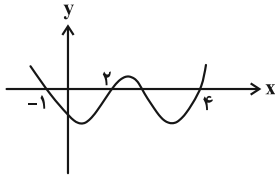
گروه آزمون
بنیاد علمی آموزشی قلمچی «وقف عام»
دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳

وقت پیشنهادی: ۳۵ دقیقه

حسابان ۲: تابع، مثلثات، حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت: صفحه‌های ۱ تا ۶۹

۱- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 2x^5 - x + 3$ بر $x^2 - 3x + 2$ چندجمله‌ای $r(x) = ax + b$ است. $r(-1)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۱۱۸ (۴) -۵۲

۲- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-1)^{|x|}}{f(x) + f(3-x)}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)



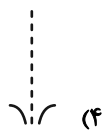
(۱) $-\infty$

(۲) $+\infty$

(۳) صفر

(۴) حد ندارد

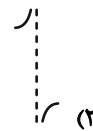
۳- نمودار تابع $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$ در همسایگی $x = 0$ کدام است؟



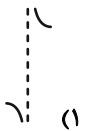
(۴) صفر



(۳) صفر



(۲) صفر



(۱) صفر

۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^3 + ax^2 + bx - 12} = -\infty$ باشد، حاصل $2a + b$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۱

(۲) ۳

(۱) ۲

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1+x}{2-x} \right]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

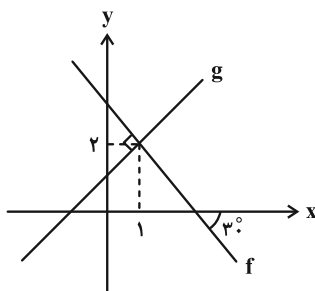
(۴) -۲

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) -۱

(۱) صفر

۶- شکل زیر، نمودار توابع خطی f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



(۱) $-\frac{1}{3}$

(۲) -۱

(۳) $-\frac{1}{9}$

(۴) -۳

۷- شیب تابع خطی f مثبت است. اگر مجانب افقی تابع $g(x) = \frac{3f^{-1}(2x+1)}{f(2x)+1}$ خط $y = \frac{1}{12}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)+x}{f^{-1}(x-1)-x}$

کدام است؟

(۴) ۵

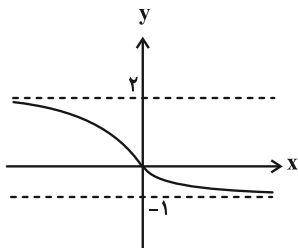
(۳) $\frac{14}{5}$

(۲) $-\frac{42}{5}$

(۱) -۶

محل انجام محاسبات

۸- نمودار تابع f مطابق شکل زیر می باشد. اگر a و b به ترتیب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ باشند، مجانب افقی تابع



کدام است $g(x) = \frac{(1-ax)^3 + (1+bx^3) + (a-b)x^2}{(a+b)(x^2+x)(2-3x)}$ ؟

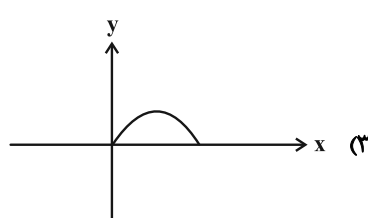
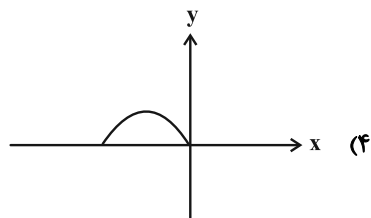
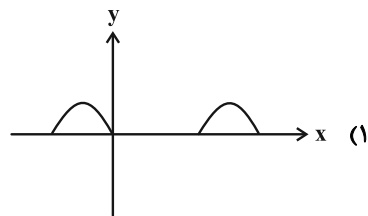
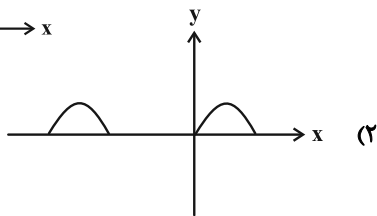
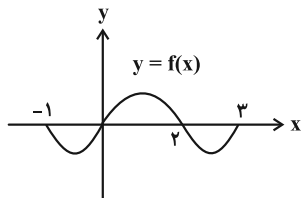
(۱) $y = -1$

(۲) $y = 1$

(۳) $y = 3$

(۴) $y = -3$

۹- با توجه به نمودار تابع f ، نمودار تابع $g(x) = \sqrt{-f(-x)}|f(-x)|$ کدام است؟



۱۰- تابع f چهار صفر دارد و مجموع صفرهای تابع $y = -3f(5-2x)$ برابر $\frac{1}{4}$ باشد، مجموع صفرهای تابع $y = f(\frac{1}{4}x-1)$ کدام است؟

(۴) ۳۸

(۳) ۴۶

(۲) ۱۲

(۱) ۴۲

۱۱- کدام تابع روی دامنه اش یکنوا است؟

(۴) $y = (x+1)(2^x - x^2)$

(۳) $y = (x-1)\sqrt{x}$

(۲) $y = (2^x + 1)\sqrt{x}$

(۱) $y = (x-2)2^x$

۱۲- وضعیت یکنوایی تابع $f(x) = 4^{x-1} - 8^x$ روی $(0, +\infty)$ چگونه است؟

(۲) نزولی

(۱) صعودی

(۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

(۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی

۱۳- تابع $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$ مفروض است. مجموع اعداد صحیحی که در نامعادله $f(f(x)+4) \leq 0$ صدق می کنند، کدام است؟

(۴) ۲۰

(۳) ۱۴

(۲) ۹

(۱) ۵

۱۴- با فرض $\cos 1^\circ = \frac{1}{a}$ ، حاصل $1 - \tan 1^\circ \tan 2^\circ$ بر حسب a کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{3}a^3}{2(2-a)}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}a^3}{2(2-a^2)}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}a^3}{2-a^2}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}a}{2-a^2}$

۱۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{k \cos^2 kx \tan kx}{1 + \tan^2 kx}$ در بازه $[0, \pi]$ فقط سه ریشه دارد. حدود k کدام است؟

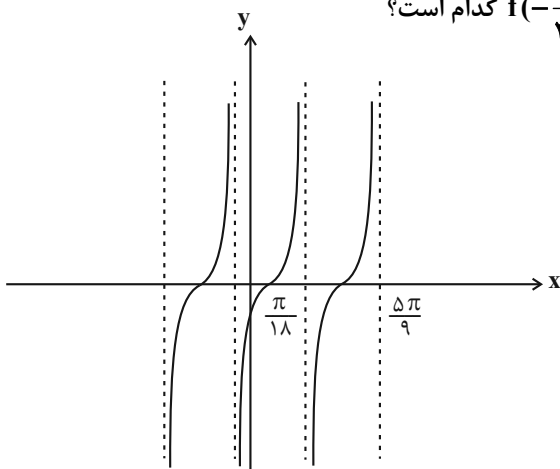
(۱) $-1 \leq k \leq 1, k \neq 0$

(۲) $\frac{1}{2} \leq |k| < \frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{4} < |k| \leq 1$

(۴) $1 \leq k < 2$

۱۶- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax + b)$ است. مقدار $f(-\frac{\pi}{36})$ کدام است؟



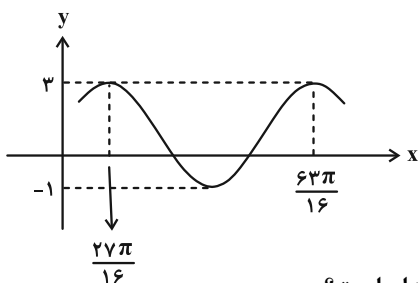
(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۲) $-\sqrt{3}$

(۳) -1

(۴) صفر

۱۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin^2(bx - \frac{3\pi}{4}) + c$ به صورت زیر است. مقدار $f(21\pi)$ کدام است؟



(۱) $1 - \sqrt{3}$

(۲) $1 + \sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) صفر

۱۸- مجموع جواب‌های معادله $1 + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$ که در بازه $[0, \pi]$ واقع اند، کدام است؟

(۴) $\frac{7\pi}{4}$

(۳) $\frac{5\pi}{4}$

(۲) 3π

(۱) $\frac{7\pi}{2}$

۱۹- اگر $f(x) = \frac{2 \cos x - |\cos x|}{3}$ باشد، تعداد جواب‌های معادله $9(f(x))^2 - 1 = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۲۰- تعداد جواب‌های معادله $\cos(\pi \sin(4\pi x)) = \frac{1}{3}$ در بازه $[0, \frac{3}{4}]$ کدام است؟

(۴) ۱۳

(۳) ۱۲

(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

وقت پیشنهادی: ۱۷ دقیقه

هندسه ۳: ماتریس و کاربردها - آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۹ تا ۴۶

۲۱- شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر هر دو محور مختصات و دایره $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 81 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴) ۴۲

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ آن‌گاه با فرض $A^3 - A^2 = mA + nI$ ، حاصل $m+n$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۳ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

۲۳- اگر مجموعه نقاطی از دایره $C(O, 4)$ که از خط d به فاصله x باشند مثلث متساوی‌الاضلاع بسازند، آن‌گاه فاصله مرکز دایره تا خط d چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۴- اگر $AB = \begin{bmatrix} 2 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ و $A^2 = 3A - I$ ، آن‌گاه $A^{-1}B$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 5 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & \\ & 6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 7 & \\ & 7 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & \\ & 4 \end{bmatrix}$

۲۵- یک منحنی از مجموعه نقاطی مانند M تشکیل شده که فاصله M از نقطه $A(1, 2)$ ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله M از نقطه $B(-1, 3)$ است. بیشترین فاصله نقاط این منحنی از خط $L: 3x - 4y = 5$ کدام است؟

- (۱) $5(\sqrt{10} - 1)$ (۲) $5 - \sqrt{10}$ (۳) $\sqrt{10} + 5$ (۴) $\sqrt{10} + 6$

۲۶- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۵ (۳) -۹ (۴) ۱۳

۲۷- طول وتری که دایره به معادله $\frac{37}{4} = (x-1)^2 + (y-1)^2$ روی خط به معادله $6x + 8y - 9 = 0$ جدا می‌کند، چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2b & 3 & 2c \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ و $A \times B$ یک ماتریس قطری باشد، حاصل $a+b+c$ برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۹- دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + 2x = 7$ با دایره C به شعاع $\sqrt{2}$ و مرکز $(2, 3)$ چند مماس مشترک دارند؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 2 & |A| \end{bmatrix}$ و A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، حاصل $|A|(|A|^2 - 1)|A|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{15}{8}$

محل انجام محاسبات

وقت پیشنهادی: ۱۸ دقیقه

ریاضیات گسسته: آشنایی با نظریه اعداد - گراف و مدل سازی: صفحه های ۱ تا ۴۲

۳۱- اگر $100! + 99! + 98! + \dots + 2! + 1! = a$ و $b^4 \mid a$ ، آن گاه باقی مانده تقسیم عدد $1 + b^2 + 11a^2$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۳۲- مجموع ارقام بزرگ ترین عدد سه رقمی مانند x که در معادله $1403 = (x + 15y) \sum_{n=0}^{1402} n!$ صدق می کند، کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۲۰ (۳) ۲۳ (۴) ۲۶

۳۳- اگر a و b به ترتیب کوچک ترین و بزرگ ترین عدد سه رقمی بخش پذیر بر ۴ باشند که در تقسیم بر ۳ و ۱۱ باقی مانده ۱ داشته باشند، رقم یکان b^a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۴- اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد که در صورتی که $5 \mid 3k + 1$ ، بتوان نتیجه گرفت $19 + mk + 16k^2 \mid 25$ ، آن گاه مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی دو رقمی که بتوان به جای m قرار داد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۳۵- در گراف ۵ رأسی k - منتظم که k بیشترین مقدار ممکن را دارد، تعداد دورهای به طول ۳ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۳۶- در گراف G از مرتبه ۵، مجموعه های همسایه های باز رئوس a ، b و c هر کدام سه عضو دارند. همچنین $N_G[d] = 3$ و

$N_G[e] = 2$ ؛ چند یال به گراف G اضافه شود تا تبدیل به گراف کامل شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۷- اگر a مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۶ نباشد، باقی مانده تقسیم $a^2 - 3$ بر ۴ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۸- در یک تقسیم، مقسوم ۷ برابر باقی مانده است و خارج قسمت حداکثر مقدار می باشد. تفاضل حداکثر و حداقل مقدار دو رقمی مقسوم کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۳۵ (۳) ۷۰ (۴) ۲۸

۳۹- اگر مرتبه و اندازه گراف G به ترتیب ۷ و ۶ باشد، آن گاه حداقل و حداکثر مقدار ممکن برای δ در گراف \bar{G} کدام است؟

- (۱) صفر و ۴ (۲) صفر و ۳ (۳) ۲ و ۳ (۴) ۲ و ۴

۴۰- معادله هم نهشتی $24 \equiv (11a + 9)x \pmod{5a - 2}$ به پیمانه ۵۲ جواب ندارد. مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۷ (۳) ۱۳ (۴) ۹

محل انجام محاسبات

فیزیک ۳: حرکت بر خط راست / دینامیک و حرکت دایره‌ای / نوسان و موج (ناسر موج و انواع آن): صفحه‌های ۱ تا ۶۹ وقت پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

۴۳- دو متحرک A و B با تندی‌های ثابت، در مبدأ زمان به ترتیب از مکان‌های $x_A = 5\text{m}$ و $x_B = -10\text{m}$ در سوی مثبت محور X عبور می‌کنند. اگر فاصله این دو متحرک از یک دیگر در لحظه $t = 10\text{s}$ برای دومین بار برابر 5m گردد، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، فاصله دو متحرک 20m می‌شود؟

۱۷/۵ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۷/۵ (۱)

۴۴

محل انجام محاسبات

۴۵- متحرک A از حال سکون و از مبدأ مکان با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ در جهت مثبت محور X شروع به حرکت می‌کند. دو ثانیه بعد، متحرک B با سرعت ثابت از مبدأ مکان در همان جهت محور X می‌گذرد. حداکثر تندی متحرک B چند متر بر ثانیه باشد تا از متحرک A سبقت نگیرد؟

۱۲ (۴)

۱۶ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

-۴۶

-۴۷

-۴۸

۴۹- در شرایط خلأ گلوله‌ای را از ارتفاع ۱۲۵ متری سطح زمین رها می‌کنیم. چند ثانیه بعد گلوله دیگری را از همان ارتفاع رها کنیم تا

حداکثر فاصله آن‌ها در طول مسیر ۴۵ متر شود؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۴ (۴)

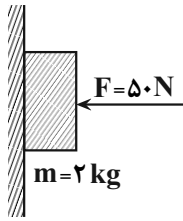
۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

محل انجام محاسبات

۵۰- در شکل زیر، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح قائم برابر $0/5$ و ضریب اصطکاک جنبشی، $0/2$ است. نیرویی که از



طرف سطح دیوار قائم بر جسم وارد می شود، چند نیوتون است؟ $(g = 10 \frac{N}{kg})$

(۱) $10\sqrt{26}$

(۲) $10\sqrt{29}$

(۳) ۵۰

(۴) $20\sqrt{2}$

۵۱- چتربازی به جرم 90 kg از یک بالون به سمت پایین می پرد. در لحظه ای که چتر باز می شود، نیروی مقاومت هوا طبق رابطه $f_D = 36v^2$

تندی چتر باز است) به چتر باز وارد می شود. اگر در لحظه $t_1 = 5s$ ، بزرگی شتاب چتر باز $80 \frac{m}{s^2}$ و در لحظه $t_2 = 25s$ ، با تندی حدی در

حال سقوط باشد، بزرگی شتاب متوسط چتر باز بین این دو لحظه چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

(۴) $0/4$

(۳) $0/3$

(۲) $0/2$

(۱) $0/5$

۵۲- شخصی به جرم 60 kg درون یک آسانسور بر روی ترازویی ایستاده است. آسانسور از حال سکون با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ به سمت

پایین شروع به حرکت می کند و سپس با شتاب ثابت به بزرگی $3 \frac{m}{s^2}$ متوقف می شود. اختلاف بین بیشینه و کمینه اندازه نیرویی

که ترازو نشان می دهد، چند نیوتون است؟ $(g = 10 \frac{N}{kg})$

(۴) ۷۸۰

(۳) ۶۰۰

(۲) ۴۸۰

(۱) ۳۰۰

۵۳- اندازه تکانه جسمی که با سرعت ثابت و در مسیری مستقیم در حال حرکت است $24 \frac{kg \cdot m}{s}$ است. نیروی ثابت \vec{F} در راستای

حرکت جسم و به مدت زمان $2s$ به جسم وارد شده و سرعت جسم را به $\frac{1}{3}$ مقدار اولیه و در خلاف جهت حرکت اولیه آن

می رساند. بزرگی نیروی \vec{F} چند نیوتون است؟

(۴) ۳۲

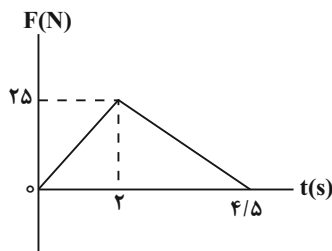
(۳) ۱۶

(۲) ۸

(۱) ۴

۵۴- نمودار نیروی خالص بر حسب زمان برای متحرکی به جرم 2 kg که با سرعت اولیه $5 \frac{m}{s}$ در جهت مثبت محور x شروع به حرکت

می کند، مطابق شکل زیر است. به ترتیب تکانه جسم در لحظه $t = 3s$ و نیروی خالص متوسط وارد بر آن در کل حرکت بر حسب



واحدهای SI کدام است؟

(۱) $12/5 - 35$

(۲) $25 - 35$

(۳) $12/5 - 55$

(۴) $25 - 55$

۵۵- متحرکی به جرم 40g روی یک دایره به شعاع 5cm با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در مدت زمان 5s برابر با $78/5\text{cm}$ باشد، اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر متحرک چند نیوتون است؟ ($\pi = 3/14$)

- (۱) $0/02\pi^2$ (۲) $0/002\pi^2$ (۳) $0/002$ (۴) $0/04\pi^2$

۵۶- وزن جسمی در فاصله R_e از سطح زمین 720 نیوتون است. وزن این جسم روی سطح سیاره‌ای که جرم آن 2 برابر جرم زمین و شعاع آن 3 برابر شعاع زمین است، چند نیوتون است؟ (R_e شعاع زمین است.)

- (۱) 160 (۲) 320 (۳) 810 (۴) 640

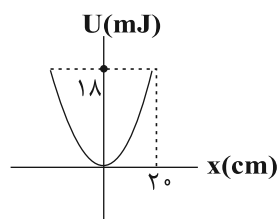
۵۷- در حرکت هماهنگ ساده وزنه - فنری، اگر دامنه نوسان را دو برابر کنیم، بیشینه نیروی وارد بر وزنه و دوره تناوب نوسان‌ها، به ترتیب از راست به چپ چند برابر می‌شوند؟

- (۱) $1/2$ و 1 (۲) $1/2$ و 2 (۳) 1 و 1 (۴) 1 و $\sqrt{2}$

۵۸- هنگامی که اختلاف انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی یک نوسانگر 25mJ است، تندی نوسانگر نصف تندی آن در نقطه تعادل است. اگر جرم نوسانگر 2kg و بیشینه شتاب آن $25\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ باشد، دامنه نوسان نوسانگر چند سانتی‌متر است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) 4

۵۹- در شکل روبرو، نمودار انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم 100g نشان داده شده است. بسامد زاویه‌ای نوسانگر در SI کدام است؟ ($\pi = 3$)



- (۱) $0/5$

- (۲) 3

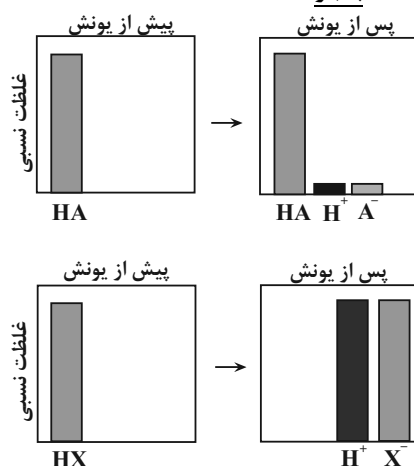
- (۳) 2

- (۴) 9

۶۰- دو آونگ ساده کاملاً مشابه (۱) و (۲) به ترتیب در فاصله‌های $9R_e$ و $4R_e$ از مرکز زمین در حال حرکت هماهنگ ساده هستند. اگر در یک مدت زمان معینی یکی از آونگ‌ها 30 نوسان بیشتر از دیگری انجام دهد، تعداد نوسان‌های آونگی که تندتر نوسان می‌کند، در این مدت کدام است؟ (R_e شعاع زمین است.)

- (۱) 60 (۲) 30 (۳) 24 (۴) 54

۶۶- با توجه به شکل های زیر، همه گزینه ها درست اند، به جز



(۱) اسید HA، نمی تواند یکی از اسیدهای موجود در باران اسیدی یا باران معمولی باشد.

(۲) در شرایط یکسان، رسانایی الکتریکی محلول آبی HX و محلول آبی سولفوریک اسید، یکسان است.

(۳) در دمای اتاق، pH محلول ۰/۱ مولار HA از pH محلول ۰/۱ مولار HX، بیشتر است.

(۴) اسید HX، می تواند HCl یا یکی از اسیدهای موجود در باران اسیدی باشد.

۶۷- در محلول X مولار اسید ضعیف HA، غلظت یون هیدرونیوم برابر با $10^{-2/8}$ مولار و درجه یونش برابر $10^{-1/3}$ می باشد و در محلول Y مولار

اسید ضعیف HY، غلظت یون هیدرونیوم برابر با $10^{-6/4}$ مولار و درجه یونش برابر $10^{-5/6}$ است. نسبت $\frac{X}{Y}$ کدام است؟ ($\log 2 \approx 0/3$)

(۱) $10^{-4/3}$ (۲) 2×10^4 (۳) 2×10^{-5} (۴) $10^{5/8}$

۶۸- کدام موارد از مطالب زیر صحیح اند؟ (کامل ترین گزینه را انتخاب کنید.)

(آ) ورود فاضلاب های صنعتی به محیط زیست سبب تغییر pH می شود.

(ب) میزان رسانایی هر نوع محلولی از ترکیبات یونی بیشتر از محلولی از ترکیبات مولکولی است.

(پ) در شرایط یکسان، هر چه ثابت یونش یک اسید بزرگ تر باشد، قدرت اسیدی آن بیشتر خواهد بود.

(ت) محلول سدیم هیدروکسید غلیظ می تواند رسوب های چربی ایجاد شده در مسیر لوله آب را به ترکیب های محلول در آب تبدیل کند.

(۱) (آ) و (پ) (۲) (ب) و (پ) (۳) (آ)، (ب) و (ت) (۴) (آ) و (ت)

۶۹- به ۱۶۸ گرم محلول بتاس سوزآور با درصد جرمی مشخص، مقداری آب خالص اضافه کرده ایم تا حجم محلول به ۷۵۰ mL برسد،

اگر pH محلول حاصل برابر ۱۲/۷ باشد، غلظت محلول اولیه چند ppm و درصد جرمی آن چقدر است؟

(محلول = 1 g.mL^{-1}) (d) (گزینه ها را به ترتیب از راست به چپ بخوانید.) ($K = 39, O = 16, H = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) $12/5 - 1250$ (۲) $0/1250 - 1250$ (۳) $12/5 - 12500$ (۴) $1/25 - 12500$

۷۰- کدام عبارت درست است؟

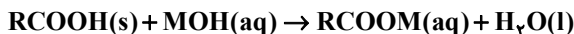
(۱) گل ادریسی در خاک های اسیدی به رنگ آبی و در خاک های بازی به رنگ سرخ شکوفا می شود.

(۲) جوش شیرین یک ماده ضد اسید است که با محلول HCl واکنش داده و تنها فرآورده های آن آب و NaCl می باشد.

(۳) در دمای ثابت با افزایش حجم محلول، حاصل عبارت $[\text{H}^+][\text{OH}^-]$ کاهش می یابد.

(۴) در معادله واکنش NaOH(aq) با HCl(aq) ، یون های $\text{Na}^+(\text{aq})$ و $\text{Cl}^-(\text{aq})$ با یکدیگر واکنش می دهند.

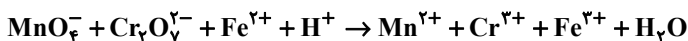
۷۱- جرم مشخصی از اسید چرب با ۷۵ گرم از باز MOH با خلوص ۶۷٪ جرمی و جرم مولی ۴۰ گرم واکنش می‌دهد. آب تشکیل شده می‌تواند ۴/۸ میلی‌لیتر از یک محلول را به ۰/۲۵ غلظت اولیه آن برساند. به تقریب چند درصد از MOH خالص در واکنش شرکت کرده است و اگر باقی‌مانده MOH خالص بتواند ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول HCl را به‌طور کامل خنثی کند، غلظت محلول اسید به تقریب چند گرم بر لیتر است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)



(g) جرم (H = ۱, O = ۱۶, Cl = ۳۵/۵ : g.mol⁻¹) و حجم (mL) آب تولید شده را برابر در نظر بگیرید.)

(۱) ۳۳,۶۴ (۲) ۲۳,۶۴ (۳) ۳۳,۳۶ (۴) ۲۳,۳۶

۷۲- کدام گزینه در مورد واکنش زیر، پس از موازنه درست است؟



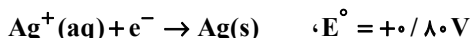
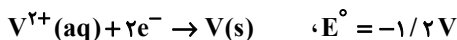
(۱) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت کننده در واکنش برابر ۵۹ است.

(۲) در این واکنش یک گونه اکسنده و دو گونه کاهنده وجود دارد.

(۳) تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز، $\frac{5}{3}$ برابر تغییر عدد اکسایش هر اتم کروم است.

(۴) اتم‌های هیدروژن و اکسیژن در این واکنش اکسایش یافته‌اند.

۷۳- با توجه به مقدار E° نیم‌واکنش‌های زیر، کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟



(آ) $\text{V}^{2+}(\text{aq})$ ، اکسنده‌ای قوی‌تر از $\text{Ag}^+(\text{aq})$ است.

(ب) در شرایط یکسان، تبدیل $\text{V}^{2+}(\text{aq})$ به V(s) ، آسان‌تر از تبدیل $\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$ به Pb(s) است.

(پ) سلول گالوانی «سرب - نقره» از E° سلول گالوانی «وانادیم - سرب» کوچک‌تر است.

(ت) واکنش: $2\text{Ag}^+(\text{aq}) + \text{Pb(s)} \rightarrow \text{Pb}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{Ag(s)}$ ، در یک سلول گالوانی به‌طور طبیعی (خودبه‌خودی) پیش می‌رود.

(۱) پ، ت (۲) آ، ت (۳) ب، پ، ت (۴) آ، ب، پ

۷۴- در سلول گالوانی X - Cu (X می‌تواند فلزی از جنس آهن، روی یا منیزیم باشد). نسبت تقریبی بیش‌ترین ولتاژ سلول به کم‌ترین ولتاژ کدام است و در شرایط یکسان بیش‌ترین کاهش جرم برای تیغه آندی در سلول متعلق به کدام فلز است؟

(به ترتیب از راست به چپ) (Fe = ۵۶, Zn = ۶۵, Mg = ۲۴ : g.mol⁻¹)

نیم‌واکنش کاهش	E° (V)
$\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu(s)}$	+۰/۳۴
$\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Fe(s)}$	-۰/۴۴
$\text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Zn(s)}$	-۰/۷۶
$\text{Mg}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Mg(s)}$	-۲/۳۷

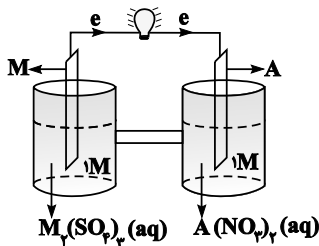
(۱) ۳/۴۷ - منیزیم

(۲) ۶/۹۴ - روی

(۳) ۳/۴۷ - روی

(۴) ۶/۹۴ - منیزیم

۷۵- با توجه به شکل زیر (سلول $M-A$)، چه تعداد از عبارات‌های زیر درست هستند؟ (جرم مولی M برابر ۲۷ گرم بر مول است).



- (آ) تیغه M قطب منفی (آند) و تیغه A قطب مثبت (کاتد) سلول را تشکیل می‌دهد.
 (ب) با گذشت زمان غلظت M^{3+} افزایش یافته و غلظت A^{2+} کاهش می‌یابد.
 (پ) طبق قانون پایستگی جرم، تغییر جرم آند با تغییر جرم کاتد برابر است.
 (ت) برای تداوم جریان، یون‌های نیترات از طریق دیواره متخلخل از نیم‌سلول کاتدی به نیم‌سلول آندی مهاجرت می‌کنند.
 (ث) به هنگام مبادله $18/06 \times 10^{21}$ الکترون، ۲۷۰ میلی‌گرم از جرم تیغه M کاسته می‌شود.

(۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱) ۵

۷۶- با مصرف الکترون‌های آزاد شده از اکسایش چند گرم فلز در نیم‌واکنش آندی واکنش $Al + Cu^{2+} \rightarrow Al^{3+} + Cu$ ، در نیم‌واکنش کاتدی برقکافت آب، ۲/۲۴ لیتر گاز هیدروژن در شرایط STP آزاد می‌شود و در واکنش اکسایش - کاهش داده شده چند

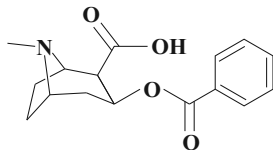
مول فلز تولید می‌شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید و $Al = 27, Cu = 64: g.mol^{-1}$)

(۴) ۰/۲، ۱/۸ (۳) ۰/۲، ۳/۶ (۲) ۰/۱، ۱/۸ (۱) ۰/۱، ۳/۶

۷۷- کدام مطلب درباره سلول گالوانی و سلول الکترولیتی درست است؟

- (۱) در سلول گالوانی، الکتروود آند، قطب مثبت است.
 (۲) در سلول گالوانی، قطب منفی آند و در سلول الکترولیتی قطب مثبت آند است و در هر دو سلول، کاتیون‌ها به سمت کاتد می‌روند.
 (۳) در سلول الکترولیتی، در قطب منفی، اکسایش انجام شده و از جرم تیغه فلزی کاسته می‌شود.
 (۴) در سلول الکترولیتی، قطب منفی و در سلول گالوانی، آند محل تشکیل اتم از یون است.

۷۸- با توجه به ساختار مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



- (۱) مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن و اتم‌های اکسیژن برابر است.
 (۲) تمام اتم‌های کربن این مولکول، می‌توانند در واکنش‌های اکسایش - کاهش نقش اکسنده یا کاهنده را ایفا کنند.
 (۳) اختلاف عدد اکسایش دو اتم با بیش‌ترین و کم‌ترین عدد اکسایش، برابر تعداد اتم‌های کربن با عدد اکسایش (-۱) است.
 (۴) بیش‌تر از نصف کل تعداد اتم‌های این مولکول را اتم‌های هیدروژن تشکیل می‌دهد.

۷۹- کدام موارد از مطالب بیان شده زیر درست‌اند؟ (کامل‌ترین گزینه را انتخاب کنید).

(آ) در نیم‌واکنش اکسایش آهن سفید، Zn کاهنده است.

- (ب) فرایند آبکاری در سلول الکترولیتی انجام می‌شود و جسم آبکاری‌شونده به قطب مثبت باتری متصل می‌گردد.
 (پ) نسبت عدد اکسایش اتم نیتروژن در نیترواسید به عدد اکسایش اتم نیتروژن در نیتریک‌اسید، برابر ۰/۶ است.
 (ت) در سلول گالوانی $A-B$ ، جهت حرکت الکترون‌ها از سمت A به سوی B است، بنابراین E_A° بزرگ‌تر از E_B° است.

(۱) آ، ب، پ (۲) آ، پ (۳) ب، ت (۴) پ، ت

۸۰- در آبکاری یک قاشق آهنی ۲۴ گرمی توسط روکشی از نقره، از ۵ لیتر محلول ۰/۸ مولار نقره نیترات استفاده شده است. اگر در پایان فرایند ۳٪ به جرم قاشق اضافه شده باشد؛ به‌ترتیب تعداد الکترون‌های عبوری از مدار الکتریکی و تعداد کاتیون‌های $Ag^+(aq)$

باقی‌مانده در محلول کدام است؟ ($Ag = 108 g.mol^{-1}$ و آند از جنس نقره است).

(۲) $4 \times 10^{21} - 2/408 \times 10^{24}$ (۱) $1/8 \times 10^{22} - 4/816 \times 10^{23}$

(۴) $1/8 \times 10^{22} - 2/408 \times 10^{24}$ (۳) $4 \times 10^{21} - 4/816 \times 10^{23}$



آزمون هدیۀ ۱۵ دی ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

دفترچه پاسخ

نام درس	نام طراحان	
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلائی-مهرداد استقلالیان-مسعود برملا-شاهین پروازی-سعید تن آرا-سهیل حسن خان پور-عادل حسینی-محمد رضا راسخ علی شهرابی-رضا طاری-سپهر متولی-علیرضا نداف زاده-جهانبخش نیکنام
	هندسه ۳	امیر حسین ابومحبوب-سیدمحمد رضا حسینی فرد-افشین خاصه خان-سوگند روشنی-هومن عقیلی-مهرداد ملوندی
	ریاضیات گسسته	امیر حسین ابومحبوب-فرزاد جوادی-مصطفی دیداری-سوگند روشنی-احمد رضا فلاح
	فیزیک	محمد اسدی-زهره آقامحمدی-امیر حسین برادران-میثم دشتیان-محمد علی عباسی-بهادر کامران-مصطفی کیانی-علیرضا گونه غلامرضا محبی-سیدعلی میرنوری-سیدجلال میری-حسین ناصحی
	شیمی	مجتبی اسدزاده-رنوف اسلام دوست-فرزین بوستانی-مسعود جعفری-محمد رضا جمشیدی-حسن رحمتی کوکنده-علی رحیمی علیرضا رضایی سراب-فرزاد رضایی-جهان شاهی بیگباغی-ساجد شیری-مسعود طبرسا-رسول عابدینی زواره-محمد عظیمیان زواره حسن عیسی زاده-حسن ناصری نائی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین برادران	پارسا عیوض پور
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی سعید خان بابایی	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	زهره آقامحمدی مهدی شریفی	امیر رضا حکمت نیا
بازبینی نهایی رتبه های برتر	سهیل تقی زاده	مهید خالئی	مهید خالئی	حسین بصیر ترکمبور	احسان پنجه شاهی مهدی سهامی
مسئول درس	عادل حسینی	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین ابومحبوب	دانیال راستی	پارسا عیوض پور
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	امیر حسین مرتضوی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف نگار	فرزانه فتح اله زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزش قلمچی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳



حسابان ۲

گزینه «۳» -۱

(عادل مسینی)

رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$2x^5 - x + 3 = (x-1)(x-2)q(x) + ax + b$$

$x = 1$ و $x = 2$ را جای گذاری می کنیم:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 65 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = 61, b = -57$$

پس $r(x) = 61x - 57$ و $r(-1) = -118$ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه های ۱۹ و ۲۰)

گزینه «۲» -۲

(رضا طاری)

باید حد راست و چپ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(-1)^{|x|}}{f(x) + f(3-x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(-1)^{|4^-|}}{f(4^-) + f(3-4^-)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(-1)^3}{0^- + f(-1)^+} = \frac{-1}{0^- + 0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(-1)^{|x|}}{f(x) + f(3-x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(-1)^{|4^+|}}{f(4^+) + f(3-4^+)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(-1)^4}{0^+ + f(-1)^-} = \frac{1}{0^+ + 0^+} = +\infty$$

بنابراین حد عبارت داده شده برابر $+\infty$ است.

(حسابان ۲- فرهای نامتناهی- هر در بی نهایت: صفحه های ۳۸ تا ۵۵)

گزینه «۳» -۳

(مسعود برملا)

حدهای چپ و راست تابع را در $x = 0$ حساب می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - (1^-)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - (1^-)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

نمودار گزینه «۳» این ویژگی ها را دارد.

(حسابان ۲- فرهای نامتناهی- هر در بی نهایت: صفحه های ۳۸ تا ۵۵)

گزینه «۱» -۴

(سپهر حسن خان پور)

چون حاصل حد برابر $-\infty$ شده است، قطعاً $x = 2$ ریشه منجر است و چون حد چپ و راست تابع در $x = 2$ هم علامت شده، ریشه $x = 2$ قطعاً مضاعف خواهد بود.

$$x^3 + ax^2 + bx - 12 = (x-2)^2(x-c)$$

$$= (x^2 - 4x + 4)(x-c) = x^3 + (-4-c)x^2 + (4+4c)x - 4c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4c = -12 \Rightarrow c = 3 \\ b = 4 + 4c \Rightarrow b = 16 \\ a = -4 - c \Rightarrow a = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b + 2a = 16 - 14 = 2$$

(حسابان ۲- فرهای نامتناهی- هر در بی نهایت: صفحه های ۳۸ تا ۵۵)

گزینه «۴» -۵

(مسعود برملا)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1+x}{2-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+1}{-(x-2)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-2+3}{-(x-2)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-1 - \frac{3}{x-2} \right] = [-1 - 0^+] = -1$$

$$= [(-1)^-] = -2$$

(حسابان ۲- فرهای نامتناهی- هر در بی نهایت: صفحه های ۶۱ تا ۶۶)

گزینه «۱» -۶

(محمدرضا راسخ)

با استفاده از نمودار ضابطه توابع f و g را می نویسیم:

تابع f یک تابع خطی است و نمودار آن با جهت مثبت محور x ها زاویه

15° می سازد. بنابراین شیب آن برابر $\tan(15^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ است. داریم:

$$f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(1,2) \in f} 2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$$

حال نمودار تابع g بر نمودار تابع f عمود است. بنابراین نسبت شیب خط آن عکس و قرینه شیب خط نمودار تابع f است. داریم:

$$g(x) = \sqrt{3}x + b' \xrightarrow{(1,2) \in g} 2 = \sqrt{3} + b' \Rightarrow b' = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}$$

حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{همارزی بتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}{\sqrt{3}x} = -\frac{1}{3}$$

(حسابان ۲- فرهای نامتناهی- هر در بی نهایت: صفحه های ۶۱ تا ۶۶)

گزینه «۲» -۷

(سپهر متولی)

ضابطه تابع f را $f(x) = mx + h$ که $m > 0$ است، در نظر می گیریم.

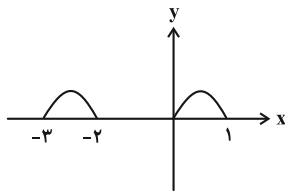
در نتیجه $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{h}{m}$ است.



$$g(x) = \sqrt{-f(-x)} |f(-x)|$$

$$\xrightarrow{f(-x) \leq 0} g(x) = \sqrt{f^2(-x)} = |f(-x)|$$

با توجه به دامنه تابع g ، نمودار نهایی به صورت زیر است:



(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۳)

(معمردضا، پاسخ)

۱- گزینه «۳»

فرض می‌کنیم x_1, x_2, x_3, x_4 صفرهای تابع f باشند. در نتیجه صفرهای تابع $y = -3f(5-2x)$ به صورت

$$\frac{5-x_1}{2}, \dots, \frac{5-x_4}{2}$$

می‌باشد. حال داریم:

$$\frac{5-x_1}{2} + \frac{5-x_2}{2} + \frac{5-x_3}{2} + \frac{5-x_4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 10 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

حال برای صفرهای تابع $y = f(\frac{1}{2}x - 1)$ داریم:

$$2(x_1 + 1) + 2(x_2 + 1) + 2(x_3 + 1) + 2(x_4 + 1)$$

$$= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_4) + 8 = 2(19) + 8 = 46$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۳)

(سعیر تن آرا)

۱۱- گزینه «۲»

می‌دانیم حاصل ضرب دو تابع صعودی با مقادیر مثبت، تابعی صعودی است. در

گزینه «۲» توابع $y = \sqrt{x}$ و $y = 2^x + 1$ هر دو صعودی با مقادیر مثبت هستند و حاصل ضرب آن‌ها نیز صعودی می‌باشد؛ لذا این تابع یکتوا می‌باشد.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

(کاکم ایلالی)

۱۲- گزینه «۲»

$$f(x) = 4^{x-1} - 8^x = 4^x \left(\frac{1}{4} - 2^x\right) = -4^x(2^x - \frac{1}{4})$$

اگر فرض کنیم $g(x) = 4^x$ و $h(x) = 2^x - \frac{1}{4}$ آن‌گاه توابع g و h

روی $(0, +\infty)$ مثبت و اکیداً صعودی‌اند. پس تابع $g \times h$ روی این بازه

اکیداً صعودی است. از طرف دیگر:

بنابراین f روی بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{m}(2x+1) - \frac{h}{m}}{m(2x) + h + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{m}x}{2mx} = \frac{2}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = 36 \xrightarrow{m>0} m = 6$$

پس ضابطه تابع f و f^{-1} به ترتیب $f(x) = 6x + h$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x - \frac{h}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) + x}{f^{-1}(x-1) - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6(x+1) + h + x}{\frac{1}{6}(x-1) - \frac{h}{6} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x}{-\frac{5}{6}x} = -\frac{42}{5}$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی- هر در بی‌نهایت: صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

(سپهر متولی)

۸- گزینه «۳»

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$g(x) = \frac{(1-2x)^3 + (1-x^3) + 3x^2}{(1)(x^2 + x)(-3x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2x)^3 + (1-x^3) + 3x^2}{(x^2 + x)(-3x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 6x + 12x^2 - 8x^3 + 1 - x^3 + 3x^2}{-3x^3 + 2x^2 - 3x^2 + 2x}$$

$$\xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x^3}{-3x^3} = 3$$

پس خط $y = 3$ مجانب افقی تابع $g(x)$ می‌باشد.

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی- هر در بی‌نهایت: صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

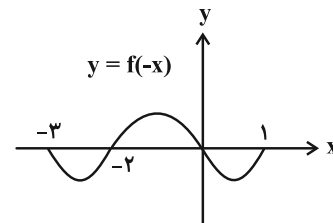
(شاهین پروازی)

۹- گزینه «۲»

با توجه به دامنه تابع f ، ابتدا دامنه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$D_g : -f(-x) |f(-x)| \geq 0 \Rightarrow -f(-x) \geq 0 \Rightarrow f(-x) \leq 0$$

با رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ محدوده نامثبت را در نظر می‌گیریم:



$$f(-x) \leq 0 \Rightarrow D_g = [-3, -2] \cup [0, 1]$$

حال ضابطه آن را ساده می‌کنیم:



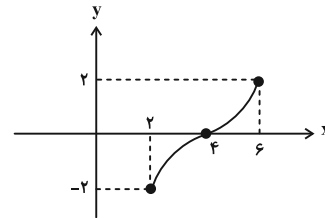
۱۳- گزینه «۲»

(جوابش نیکنام)

$$f(x) = \sqrt{x-2} + (-\sqrt{6-x})$$

$$D_f = [2, 6] \quad (1)$$

تابع f مجموع دو تابع اکیداً صعودی است پس، اکیداً صعودی است و نمودار آن به صورت تقریبی شبیه شکل زیر است:



ابتدا دامنه تابع $y = f(f(x) + 4)$ را حساب می‌کنیم:

$$2 \leq f(x) + 4 \leq 6 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow 2 \leq x \leq 6 \quad (2)$$

و حال نامعادله را حل می‌کنیم:

$$f(f(x) + 4) \leq 0 \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f} f(x) + 4 \leq 4$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [2, 4] \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} x \in [2, 4]$$

این بازه شامل سه عدد صحیح ۲، ۳ و ۴ است که مجموع آن‌ها برابر ۹ است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۴- گزینه «۳»

(شاهین پروازی)

ابتدا خواسته مسئله را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$1 - \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ = 1 - \frac{\sin 1^\circ \sin 2^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}$$

$$= \frac{\cos 1^\circ \cos 2^\circ - \sin 1^\circ \sin 2^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}$$

$$= \frac{\cos(1^\circ + 2^\circ)}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} = \frac{\cos 3^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}$$

با توجه به فرمول $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ داریم:

$$\frac{\cos 3^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{a} \left(2 \left(\frac{1}{a^2} \right) - 1 \right)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{a^3} - \frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2(2-a^2)}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه ۴۲)

۱۵- گزینه «۲»

(عارل مسینی)

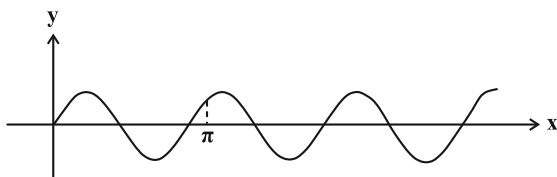
ابتدا ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{k \cos 2kx \frac{\sin kx}{\cos kx}}{\cos^2 kx} = k \sin kx \cos kx \cos 2kx$$

$$= \frac{k}{2} \sin 2kx \cos 2kx \Rightarrow f(x) = \frac{k}{4} \sin 4kx$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid kx = n\pi + \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

بدیهی است که $k \neq 0$ است. حال اگر $k > 0$ باشد، نمودار تابع باید به صورت زیر باشد:



در این حالت π از یک دوره تناوب بزرگ‌تر و از $\frac{3}{2}\pi$ دوره تناوب کوچک‌تر

است. دقت کنید که برای $k < 0$ هم همین استدلال درست است، پس داریم:

$$T \leq \pi < \frac{3T}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2|k|} \leq \pi < \frac{3\pi}{4|k|} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq |k| < \frac{3}{4}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۶- گزینه «۳»

(علی شهرابی)

فاصله دو نقطه به طول‌های $\frac{\pi}{18}$ و $\frac{5\pi}{9}$ برابر با $1/5$ دوره تناوب است.

$$\frac{3}{2}T = \frac{5\pi}{9} - \frac{\pi}{18} \Rightarrow \frac{3}{2}T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

از طرفی دوره تناوب تابع $f(x) = \tan(ax + b)$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است و چون

نمودار داده شده اکیداً صعودی است، a باید مثبت باشد، پس داریم:

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = 3$$

تا اینجا ضابطه تابع به صورت $f(x) = \tan(3x + b)$ شد. مقدار تابع به

ازای $x = \frac{\pi}{18}$ صفر است.

$$f\left(\frac{\pi}{18}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} + b\right) = 0 \xrightarrow{\text{اولین‌دیده مثبت است}} \frac{\pi}{6} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{\pi}{6}$$

البته برای b ، تمام مقادیر $k\pi - \frac{\pi}{6}$ را می‌توان در نظر گرفت.

$$\Rightarrow f(x) = \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{36}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)



۱۷ - گزینه «۱»

(علیرضا نرافزاره)

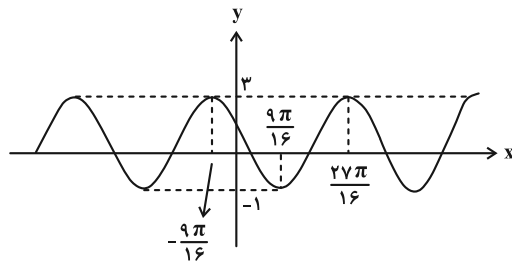
ابتدا ضابطه تابع را ساده تر می نویسیم:

$$f(x) = a \left(\frac{1 - \cos 2(bx - \frac{2\pi}{4})}{2} \right) + c$$

$$= -\frac{a}{2} \cos(2bx - \frac{2\pi}{2}) + \frac{a}{2} + c \Rightarrow f(x) = \frac{a}{2} \sin 2bx + \frac{a}{2} + c$$

دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{62\pi}{16} - \frac{27\pi}{16} = \frac{9\pi}{4}$ است، پس نمودار کامل

شده تابع به صورت زیر است:



و داریم: $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{9\pi}{4} \Rightarrow |b| = \frac{4}{9} \Rightarrow b = \pm \frac{4}{9}$

بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع هم به ترتیب ۳ و -۱ است:

$$\begin{cases} y_{\max} = \frac{|a|}{2} + \frac{a}{2} + c = 3 \\ y_{\min} = -\frac{|a|}{2} + \frac{a}{2} + c = -1 \end{cases}$$

در $x=0$ تابع f نزولی است، پس a و b غیر هم علامت اند، یعنی اگر

$a=4$ باشد، $a=4$ باشد، $b=-\frac{4}{9}$ و اگر $a=-4$ باشد، $b=\frac{4}{9}$ است. در نهایت

داریم: $f(x) = 1 - 2 \sin \frac{4}{9} x$

$$\Rightarrow f(2\pi) = 1 - 2 \sin \frac{4}{9} (2\pi) = 1 - 2 \sin \frac{8\pi}{9}$$

$$= 1 - 2 \sin \frac{\pi}{9} = 1 - \sqrt{3}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه های ۲۳ تا ۲۹)

۱۸ - گزینه «۴»

(علیرضا نرافزاره)

$$\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

جواب های بازه $[0, \pi]$ عبارتند از صفر، $\frac{2\pi}{4}$ و π که مجموع آنها برابر

است. $\frac{7\pi}{4}$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه های ۳۵ تا ۴۴)

۱۹ - گزینه «۲»

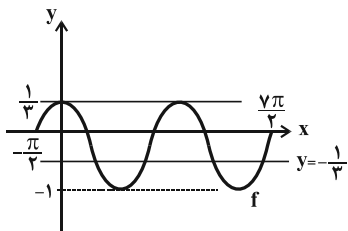
(میانپیش نیکنام)

$$9f^2(x) - 1 = 0 \Rightarrow f(x) = \pm \frac{1}{3}$$

برای تعیین تعداد جوابهای معادله فوق، کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودار

f و خطوط $y = \pm \frac{1}{3}$ را تعیین کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{3} & ; \cos x \geq 0 \\ \cos x & ; \cos x < 0 \end{cases}$$



مطابق شکل فوق، خط $y = \frac{1}{3}$ نمودار را در دو نقطه و خط $y = -\frac{1}{3}$ نمودار

را در ۴ نقطه قطع می کند. پس در مجموع در ۶ نقطه تلاقی دارند.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه های ۳۵ تا ۴۴)

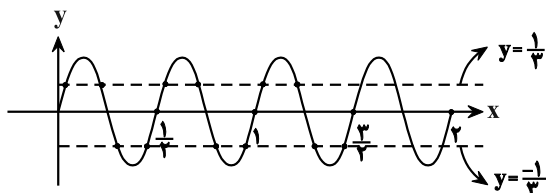
۲۰ - گزینه «۳»

(مهرزاد استقلالیان)

$$\cos(\pi \sin(4\pi x)) = \cos \frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow \pi \sin(4\pi x) = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin 4\pi x = 2k \pm \frac{1}{3} \quad \begin{matrix} -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \\ \text{فقط } k=0 \end{matrix} \Rightarrow \sin 4\pi x = \pm \frac{1}{3}$$

$$y = \sin 4\pi x, T = \frac{2\pi}{|4\pi|} = \frac{1}{2}$$



(مسئله ۲- مثلثات: صفحه های ۳۵ تا ۴۴)



هندسه ۳

گزینه ۳» ۲۱-

(سیرممد رضا حسینی فردر)

دایره $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 81 = 0$ به مرکز $O(6, 7)$ و شعاع $R = 2$ است. دایره مورد نظر باید در ناحیه اول بر هر دو محور مختصات مماس باشد. بنابراین $O'(\alpha, \alpha)$ مرکز آن و $R' = \alpha$ شعاع آن است. اگر دو دایره مماس خارج باشند، داریم:

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 6)^2 + (\alpha - 7)^2} = 2 + \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 30\alpha + 81 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha = 27 \end{cases}$$

پس شعاع بزرگ‌ترین دایره برابر ۲۷ است.

توجه: در حالتی که دو دایره را مماس داخل بگیریم، مقادیر α برابر $11 \pm 2\sqrt{10}$ به دست می‌آید که بزرگ‌ترین دایره نیستند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

گزینه ۱» ۲۲-

(سیرممد رضا حسینی فردر)

روش اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 85 \\ 17 & 38 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - A^2 = mA + nI$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 38 & 85 \\ 17 & 38 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 5m \\ m & 2m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 29 & 65 \\ 13 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+n & 5m \\ m & 2m+n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ 2m + n = 29 \Rightarrow 26 + n = 29 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

$$m + n = 13 + 3 = 16$$

روش دوم: طبق رابطه کیلی - همیتون داریم:

$$A^2 = (2+2)A - (4-5)I \Rightarrow A^2 = 4A + I$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = (4A + I) \times A$$

$$= 4A^2 + A = 4(4A + I) + A = 17A + 4I$$

$$\Rightarrow A^3 - A^2 = (17A + 4I) - (4A + I) = 13A + 3I$$

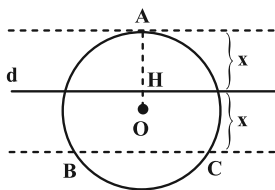
$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow m + n = 16$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

گزینه ۱» ۲۳-

(سیرممد رضا حسینی فردر)

مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله x باشند دو خط موازی با d در دو طرف آن است. در حالتی که یکی از این خطها مماس بر دایره باشد، سه نقطه به دست می‌آید.



مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و ارتفاع آن برابر $2x$ است.

مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها یا در مثلث متساوی‌الاضلاع، همان نقطه همرسی میانه‌ها است، پس داریم:

$$OA = \frac{2}{3}h_a \Rightarrow R = \frac{2}{3}(2x) \Rightarrow x = \frac{3}{4}R = 3$$

$$\Rightarrow OH = R - x = 4 - 3 = 1$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۸)

گزینه ۳» ۲۴-

(سیرممد رضا حسینی فردر)

با توجه به رابطه $A^2 = 3A - I$ داریم:

$$A^2 = 3A - I \xrightarrow{A^{-1} \times} A = 3I - A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = 3I - A$$

$$\Rightarrow A^{-1}B = 3B - AB = 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

تذکر: دقت کنید که A ماتریسی از مرتبه 2×2 است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

گزینه ۴» ۲۵-

(سوکندر روشنی)

طبق توضیحات داده شده ابتدا معادله منحنی گفته شده را به دست می‌آوریم:

$$M(x, y)$$

$$|MA| = \sqrt{2} |MB|$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$



۲۸- گزینه «۱»

(انگشین فاصه‌فان)

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2b & 3 & 2c \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

درایه سطر دوم و ستون اول $2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1$

درایه سطر دوم و ستون سوم $2c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1$

درایه سطر اول و ستون دوم $-a + 3 + b = 0 \Rightarrow a = 2$

$a + b + c = 2$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۷ تا ۲۱)

۲۹- گزینه «۲»

(مهرراز ملونری)

معادله دایره داده شده را به صورت $(x+1)^2 + y^2 = 8$ بازنویسی

می‌کنیم. نقطه $W' = (-1, 0)$ مرکز این دایره و شعاع آن برابر

$R' = 2\sqrt{2}$ است. طبق فرض مرکز و شعاع دایره C هم $W = (2, 3)$

و $R = \sqrt{2}$ است. داریم:

طول خط‌المركزین $WW' = \sqrt{(2+1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

چون $WW' = R + R'$ ، پس دو دایره C و C' مماس بیرون بوده و ۳

مماس مشترک دارند که ۲ تای آن‌ها مماس مشترک خارجی و یکی مماس

مشترک داخلی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

۳۰- گزینه «۴»

(امیرمسین ابومیبوب)

$$A = \begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 2 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2|A|^2 - 2|A|$$

$\Rightarrow 2|A|^2 - 3|A| = 0 \Rightarrow |A|(2|A| - 3) = 0$

غق ق $\begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = \frac{3}{2} \end{cases}$

$(|A|^2 - 1)|A| = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ معادله دایره است.

$\begin{cases} O(-3, 4) \\ R = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64 - 60} = \sqrt{10} \end{cases}$

فاصله مرکز دایره تا خط $OH = \frac{|-9 - 16 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{30}{5} = 6$

در نتیجه خط L خارج دایره است و بیشترین فاصله نقاط روی دایره از خط

L برابر $OH + R$ است. $\Rightarrow \sqrt{10} + 6$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۲۶- گزینه «۳»

(انگشین فاصه‌فان)

اگر $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه داریم:

$BAC = D \Rightarrow A = B^{-1}DC^{-1}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 12 & -21 \\ -17 & 30 \end{bmatrix}$

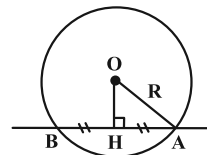
$12 - 21 = -9$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۲۷- گزینه «۲»

(هومن عقیلی)

مختصات مرکز دایره $O(1, 1)$ و شعاع آن $R = \frac{\sqrt{37}}{2}$ است.



$OH = \frac{|6 + 8 - 9|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{1}{2}$

$HA = \sqrt{\frac{37}{4} - \frac{1}{4}} = 3 \Rightarrow AB = 2 \times 3 = 6$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)



ریاضیات گسسته

۳۱- گزینه «۱»

(مفقی دیداری)

اگر $n \geq 2$ آن گاه $n!$ زوج است پس a عددی فرد است. b^4 مقسوم علیه عدد فرد a است پس b^4 فرد و در نتیجه b هم فرد است. باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر ۱ است. پس داریم:

$$11a^2 + b^2 + 1 \equiv 11(1) + (1) + 1 \equiv 13 \equiv 5$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۵ تا ۲۱)

۳۲- گزینه «۲»

(سوکندر روشنی)

طرفین معادله را هم نهشت به پیمانه ۱۵ می گیریم:

$$\sum_{n=0}^{1402} n! x \equiv 1403 \pmod{15}$$

$$(0! + 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + \dots + 1402!) x \equiv 1403 \pmod{15}$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 8 \pmod{(4,15)=1} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow x = 15k + 2$$

به ازای $k = 66$ بزرگ ترین مقدار سه رقمی x به دست می آید:

$$x_{\max} = 992 \Rightarrow 9 + 9 + 2 = 20$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۲۴ و ۲۵)

۳۳- گزینه «۲»

(سوکندر روشنی)

$$\left. \begin{matrix} a \equiv 1 \\ 11 \\ a \equiv 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a \equiv 1 \equiv -32 \\ 4 \\ a \equiv 0 \equiv -32 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 132 & 132 \\ a \equiv -32 \equiv 100 \end{matrix}$$

$$a = 132k + 100 \begin{cases} \text{کوچک ترین عدد ۳ رقمی} \\ k=0 \end{cases} \rightarrow a = 100$$

$$\begin{cases} \text{بزرگ ترین عدد ۳ رقمی} \\ k=6 \end{cases} \rightarrow b = 892$$

رقم یکان b^a برابر است با: $892^{100} \equiv 2^4 \equiv 6$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۸ تا ۲۲)

۳۴- گزینه «۳»

(سوکندر روشنی)

$$5 \mid 3k + 1 \begin{cases} \xrightarrow{\text{توان } 2} 25 \mid 9k^2 + 6k + 1 \\ \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 15k + 5 \end{cases}$$

$$\frac{25 \mid 9k^2 + 21k + 6}{25 \mid 25k^2 + 25k + 25} \text{ بدیهی}$$

$$\frac{25 \mid 16k^2 + 4k + 19}{25 \mid 25k}$$

$$\frac{25 \mid 16k^2 + 29k + 19}{25 \mid 16k^2 + 29k + 19}$$

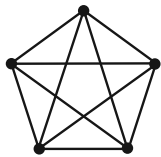
مجموع ارقام: $2 + 9 = 11$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۹ تا ۱۲)

۳۵- گزینه «۱»

(غرزاد یواری)

گراف پنج رأسی منتظم که در آن درجات رئوس، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد مطابق شکل زیر به صورت گراف کامل K_5 می باشد (یعنی G گرافی است از مرتبه ۵ که ۴- منتظم است).



می دانیم در گراف کامل K_p از مرتبه p تعداد دورهای به طول m برابر

$$\binom{p}{m} \frac{(m-1)!}{2} \text{ است با:}$$

بنابراین داریم:

$$K_5 \text{ در } 3 \text{ در } \binom{5}{3} \frac{(3-1)!}{2} = 10 \times 1 = 10$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه های ۳۵ تا ۳۸)

۳۶- گزینه «۳»

(غرزاد یواری)

براساس اطلاعات داده شده درجات رئوس گراف G به صورت ۱, ۲, ۳, ۳, ۳ خواهد بود.

$$\sum_{i=1}^5 \deg(v_i) = 3(3) + 2 + 1 = 2q \Rightarrow q(G) = 6$$

می خواهیم با G یک گراف کامل K_5 بسازیم:



پس تفاضل حداکثر و حداقل مقدار دو رقمی مقسوم ۳۵ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۳۹- گزینه «۱» (امیرمسین ایومیبوب)

ابتدا تعداد یال‌های گراف \bar{G} را به دست می‌آوریم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 6 + q(\bar{G}) = \frac{7 \times 6}{2}$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) = 21 - 6 = 15$$

اگر گراف \bar{G} شامل یک گراف K_6 و یک رأس تنها باشد، آن‌گاه

$\delta = 0$ است. برای به دست آوردن حداکثر مقدار δ از رابطه زیر استفاده

می‌کنیم:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \Rightarrow \delta \leq \frac{2 \times 15}{7} \Rightarrow \delta_{\max} = 4$$

بنابراین حداقل و حداکثر مقدار δ ، به ترتیب برابر صفر و ۴ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴۰- گزینه «۴» (مصطفی دبداری)

شرط وجود جواب معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ این است که $(a, m) | b$ ؛

چون معادله جواب ندارد $24 | (11a + 9, 5a - 2)$.

اگر $d = (11a + 9, 5a - 2)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d | 11a + 9 \xrightarrow{\times 5} d | 55a + 45 \\ d | 5a - 2 \xrightarrow{\times 11} d | 55a - 22 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 67 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 67$$

اگر $d = 1$ باشد معادله جواب پیدا می‌کند پس باید $d = 67$ باشد.

$$67 | 5a - 2 \Rightarrow 5a - 2 \equiv 0 \pmod{67} \Rightarrow 5a \equiv 2 - 67 = -65$$

$$\xrightarrow{+5} a \equiv -13 \pmod{67} \Rightarrow a = 67k - 13 \quad (5, 67) = 1$$

$$\xrightarrow{k=1} a = 67 - 13 = 54 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

$$q(K_5) = \binom{5}{2} = 10$$

پس می‌بایست ۴ یال دیگر به G اضافه کنیم تا تبدیل به K_5 شود.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۰)

۳۷- گزینه «۲» (فرزاد یواری)

روش اول: a مضرب ۳ است اما مضرب ۶ نیست (یعنی مضرب ۲ نیست).

پس a به فرم $2(2k+1)$ می‌باشد.

$$a = 2k + 3 \xrightarrow{\text{توان } 2}$$

$$a^2 = 4k^2 + 12k + 9 = 4(4k^2 + 9k + 2) + 1$$

$$a^2 = 4q + 1 \Rightarrow a^2 - 3 = 4q - 2 \Rightarrow a^2 - 3 = 4q - 4 + 4 - 2$$

$$a^2 - 3 = 4(q-1) + 2 \Rightarrow a^2 - 3 = 4q' + 2 \Rightarrow r = 2$$

روش دوم: چون a مضرب ۳ است و زوج نیست نتیجه می‌گیریم a فرد

است بنابراین a^2 به صورت $4q + 1$ می‌باشد. به عبارت دیگر a^2 را

می‌توان به صورت $4(2q) + 1$ نوشت:

$$a^2 = 4(2q) + 1 \Rightarrow a^2 = 4q' + 1 \Rightarrow a^2 - 3 = 4q' - 2$$

$$\Rightarrow a^2 - 3 = 4q'' + 2 \Rightarrow r = 2$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۳۸- گزینه «۲» (امد رضا فلاح)

$$a = bq + r \xrightarrow{a=7r} 7r = bq + r \Rightarrow 6r = bq \quad (1)$$

می‌دانیم:

$$r < b \xrightarrow{\times 6} 6r < 6b \Rightarrow bq < 6b \Rightarrow q < 6 \Rightarrow q_{\max} = 5$$

$$(1) \quad 6r = bq \xrightarrow{q=5} 6r = 5b \quad (2)$$

یعنی r مضرب ۵ است. $5 | 6r \Rightarrow 5 | r$
یعنی b مضرب ۶ است. $6 | 5b \Rightarrow 6 | b$

$$r = 5 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a_{\min} = 7r = 35 \quad \checkmark$$

$$r = 10 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow a_{\max} = 7r = 70 \quad \checkmark$$

$$r = 15 \Rightarrow b = 18 \Rightarrow a = 105 \quad \times$$



فیزیک ۳

گزینه ۳ - ۴۱

(سید علی میرنوری)

با توجه به این که نمودار $v-t$ بین دو لحظه $t=6s$ و $t=8s$ ، یک خط با شیب ثابت است، شتاب متحرک در تمام لحظه‌های متعلق به این بازه زمانی، با شیب این خط برابر است. یعنی:

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{35-20}{8-6} = \frac{15}{2} \frac{m}{s^2}$$

چون لحظه $t_1 = 7s$ مربوط به این بازه زمانی است، لذا $a_{t=7s} = \frac{15}{2} \frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

به همین ترتیب، برای تعیین بزرگی شتاب در لحظه $t_2 = 13s$ که بین بازه زمانی $t=8s$ تا $t=14s$ است، داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{0-35}{14-8} = \frac{-35}{6} \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{t=13s}| = \frac{35}{6} \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{|a_{t=7s}|}{|a_{t=13s}|} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{35}{6}} = \frac{9}{7}$$

در نهایت داریم:

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲، ۱۶ و ۱۷)

گزینه ۴ - ۴۲

(امیرحسین برادران)

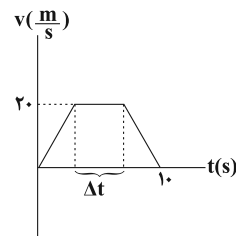
مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است. با توجه به نمودار، مدت زمانی که حرکت متحرک یکنواخت است را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \Delta x = S = v_{av} \Delta t = 15 \times 10 = 150 \text{ m}$$

$$S = \frac{(10 + \Delta t) \times 20}{2} \Rightarrow (10 + \Delta t) 10 = 150 \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ s}$$

اکنون با توجه به رابطه جابه‌جایی در حرکت یکنواخت داریم:

$$\Delta x' = v \Delta t = 20 \times 5 = 100 \text{ m}$$



(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

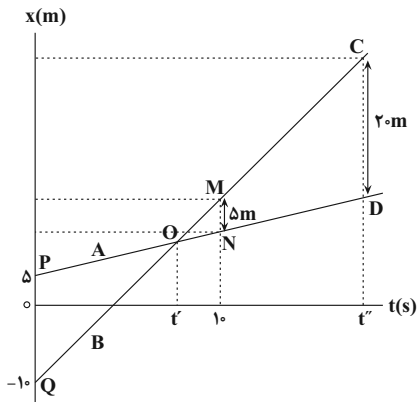
گزینه ۴ - ۴۳

(امیرحسین برادران)

روش اول: ابتدا، مطابق شکل زیر، نمودار مکان - زمان دو متحرک را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سپس با توجه به تشابه مثلث‌های MNO و OPQ ، لحظه t' که متحرک B از کنار متحرک A می‌گذرد را می‌یابیم:

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{t'}{10-t'} \Rightarrow \frac{PQ=15m}{MN=5m} \rightarrow \frac{15}{5} = \frac{t'}{10-t'} \Rightarrow 3 = \frac{t'}{10-t'}$$

$$\Rightarrow 30 - 3t' = t' \Rightarrow 30 = 4t' \Rightarrow t' = 7.5 \text{ s}$$



اکنون، با استفاده از تشابه مثلث‌های OPQ و CDO ، لحظه t'' را که فاصله دو متحرک از یکدیگر برابر 20 m است، می‌یابیم:

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{t'}{t''-t'} \Rightarrow \frac{15}{20} = \frac{7.5}{t''-7.5} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{7.5}{t''-7.5} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{t''-7.5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{t''-7.5} \Rightarrow t''-7.5 = 10 \Rightarrow t'' = 17.5 \text{ s}$$

روش دوم: با نوشتن معادله مکان - زمان برای دو متحرک داریم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t + 5 \\ x_B = v_B t - 10 \end{cases} \Rightarrow x_B - x_A = (v_B - v_A)t - 15$$

$$\frac{x_B - x_A = 20 \text{ m}}{t = 10 \text{ s}} \Rightarrow 20 = (v_B - v_A) \times 10 - 15 \Rightarrow v_B - v_A = \frac{35}{5} = 7 \frac{m}{s}$$

$$x_B - x_A = (v_B - v_A)t - 15 \Rightarrow \frac{x_B - x_A = 20 \text{ m}}{v_B - v_A = 7 \frac{m}{s}} \Rightarrow t = \frac{35}{7} = 5 \text{ s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

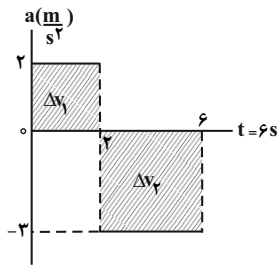
گزینه ۴ - ۴۴

(علیرضا کونه)

گزینه «۱»: نادرست است. تندی متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 در حال افزایش و از لحظه t_1 تا لحظه t_2 در حال کاهش است.

گزینه «۲»: نادرست است. متحرک در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعت آن صفر شده و علامت سرعت تغییر کند. می‌بینیم در لحظه t_1 ، علامت سرعت تغییر نکرده (از صفر تا t_2 سرعت منفی است) و اندازه آن نیز صفر نشده است.

گزینه «۳»: نادرست است. در بازه زمانی صفر تا t_1 ، اندازه سرعت در جهت منفی در حال افزایش است. بنابراین، حرکت تندشونده می‌باشد. در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، اندازه سرعت در جهت منفی در حال کاهش است، لذا حرکت کندشونده است؛ در نتیجه، در مجموع، حرکت، ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است.



$$v_2 = v_0 + \Delta v_1 \quad \frac{\Delta v_1 = 2 \times 2 = 4 \frac{m}{s}}{v_0 = -10 \frac{m}{s}}$$

$$v_2 = -10 + 4 = -6 \frac{m}{s}$$

$$v_6 = v_2 + \Delta v_2 \quad \frac{\Delta v_2 = -3 \times (6-2) = -12 \frac{m}{s}}{v_6 = -6 + (-12) = -18 \frac{m}{s}}$$

$$v_6 = -6 + (-12) = -18 \frac{m}{s}$$

اکنون شتاب متوسط را پیدا می‌کنیم:

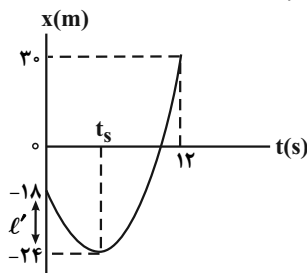
$$a_{av} = \frac{v_{6s} - v_0}{\Delta t} \quad \frac{\Delta t = 6 - 0 = 6s}{a_{av} = \frac{-18 - (-10)}{6} = -\frac{4}{3} \frac{m}{s^2}}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰)

(امیرمسین برادران)

گزینه «۴» ۴۷

اگر مسافت طی شده توسط متحرک را از لحظه شروع حرکت تا لحظه تغییر جهت برابر l' در نظر بگیریم، با توجه به رابطه‌های تندى و سرعت متوسط داریم:



$$\text{مسافت طی شده} = l = l' + l' + 18 + 30 \Rightarrow l = 48 + 2l'$$

$$\text{جابه‌جایی} = \Delta x = x_2 - x_1 = 30 - (-18) \Rightarrow \Delta x = 48m$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \quad \frac{\Delta t = 12s}{s_{av} = \frac{48 + 2l'}{12} = 4 + \frac{l'}{6}}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{48}{12} = 4 \frac{m}{s}$$

از طرف دیگر داریم:

$$s_{av} - v_{av} = 1 \Rightarrow 4 + \frac{l'}{6} - 4 = 1 \Rightarrow \frac{l'}{6} = 1 \Rightarrow l' = 6m$$

با محاسبه l' ، مکان متحرک در لحظه t_s برابر $t_s = -18 - 6 = -24m$ است. بنابراین با نوشتن معادله مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت بین دو

لحظه (صفر تا t_s) و (t_s تا $t = 12s$)، شتاب متحرک و به دنبال آن v_{12} را می‌یابیم. برای سادگی در محاسبه $x = -24m$ را مبدأ مکان و t_s را مبدأ زمان در نظر می‌گیریم. در این حالت $v_s = 0$ به عنوان سرعت اولیه محسوب می‌شود.

گزینه «۴» درست است. با توجه به رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ و $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ چون در بازه زمانی صفر تا t_1 ، $\Delta v < 0$ و همچنین $\Delta x < 0$ است، لذا $a_{av} < 0$ و $v_{av} < 0$ هستند. یعنی بردار شتاب متوسط و بردار سرعت متوسط، هم‌جهت‌اند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

گزینه «۳» ۴۵ (امیرمسین برادران)

مبدأ زمان را در لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند در نظر می‌گیریم و معادله حرکت هر دو متحرک را می‌نویسیم. به همین منظور لازم است، سرعت متحرک A و مکان آن را بعد از دو ثانیه بیابیم که این دو سرعت اولیه و مکان اولیه متحرک A محسوب می‌شوند.

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \begin{matrix} x_0 = 0, v_0 = 0 \\ a = 4 \frac{m}{s^2}, t = 2s \end{matrix}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \times 4 \times 2^2 + 0 + 0 \Rightarrow x_A = 8m$$

$$v_A = a_A t + v_{0A} = 4 \times 2 + 0 \Rightarrow v_A = 8 \frac{m}{s}$$

در لحظه‌ای که متحرک B شروع به حرکت می‌کند، برای متحرک A

$$v_{0A} = 8 \frac{m}{s} \text{ و } x_{0B} = 8m \text{ است. بنابراین معادله حرکت آن برابر است با:}$$

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_A = \frac{1}{2} \times 4t^2 + 8t + 8$$

$$\Rightarrow x_A = 2t^2 + 8t + 8$$

اکنون معادله حرکت متحرک B را می‌نویسیم. چون سرعت متحرک B ثابت

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B}=0} x_B = v_B t \text{ است؛ داریم:}$$

چون در لحظه‌ای که متحرک A به متحرک B می‌رسد، مکان آنها یکسان است، معادلات آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم و v_B را می‌یابیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 2t^2 + 8t + 8 = v_B t \Rightarrow 2t^2 + 8t - v_B t + 8 = 0$$

$$2t^2 + (8 - v_B)t + 8 = 0$$

چون حداکثر تندى متحرک B خواسته شده است، این معادله باید یک جواب داشته باشد. بنابراین باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow (8 - v_B)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0 \Rightarrow (8 - v_B)^2 = 64$$

$$\Rightarrow 8 - v_B = \pm 8 \Rightarrow (-) \Rightarrow v_B = 16 \frac{m}{s}, (+) \Rightarrow v_B = 0 \text{ غ. ق. ق.}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰)

گزینه «۱» ۴۶ (مصطفی کیانی)

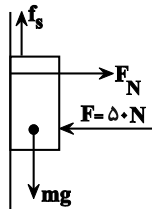
می‌دانیم، سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان برابر Δv است بنابراین با توجه به شکل زیر و استفاده از سطح زیر نمودار $a-t$ ، ابتدا سرعت در لحظه $t = 6s$ را می‌یابیم:



۵۰- گزینه «۲»

(مصطفی کیانی)

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم نموده و سپس بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح دیوار قائم را می‌یابیم و نیروی وزن جسم را با آن مقایسه می‌کنیم. اگر $mg > f_{s,max}$ باشد، جسم حرکت می‌کند و باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنیم؛ در غیر این صورت جسم ساکن می‌ماند و $f_s = mg$ خواهد بود. دقت کنید، چون جسم در راستای افقی ساکن است، $F_N = F = 50\text{N}$ می‌باشد.



$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s = 0.5} \xrightarrow{F_N = 50\text{N}} f_{s,max} = 0.5 \times 50 = 25\text{N}$$

چون $mg = 20\text{N} < f_{s,max} = 25\text{N}$ است، جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین $f_s = mg = 2 \times 10 = 20\text{N}$ است. با توجه به این که نیروی سطح برآیند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک می‌باشد، می‌توان نوشت:

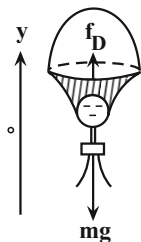
$$R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2} \xrightarrow{f_s = 20\text{N}} \xrightarrow{F_N = 50\text{N}} R = \sqrt{400 + 2500} = \sqrt{2900} = \sqrt{100 \times 29} \Rightarrow R = 10\sqrt{29}\text{N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۲)

۵۱- گزینه «۱»

(امیرمسین برادران)

ابتدا نیروهای وارد بر چترباز را رسم نموده و سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون، تندی چترباز را در لحظه t_1 می‌یابیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow f_D - mg = ma \xrightarrow{f_D = 36v^2, m = 90\text{kg}} \xrightarrow{a = 8 \frac{m}{s^2}, g = 10 \frac{m}{s^2}}$$

$$36v_1^2 - 90 \times 10 = 90 \times 8 \Rightarrow 36v_1^2 = 90 \times 18$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{90 \times 18}{36} = \frac{900}{4} \Rightarrow v_1 = \frac{30}{2} = 15 \frac{m}{s}$$

اکنون تندی حدی چترباز را می‌یابیم. چون در حالت تندی حدی نیروی خالص وارد بر چترباز صفر است، می‌توان نوشت:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow f_D - mg = 0 \Rightarrow f_D = mg$$

$$\Rightarrow 36v_2^2 = 90 \times 10 \Rightarrow v_2^2 = \frac{900}{36} \Rightarrow v_2 = \frac{30}{6} = 5 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_s t \Rightarrow \begin{cases} 6 = \frac{1}{2}at_s^2 + 0 \\ 30 + 24 = \frac{1}{2}a \times (12 - t_s)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{54} = \frac{\frac{1}{2}at_s^2}{\frac{1}{2}a(12-t_s)^2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{t_s^2}{(12-t_s)^2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{t_s}{12-t_s} \Rightarrow t_s = 3\text{s}$$

$$6 = \frac{1}{2}at_s^2 \xrightarrow{t_s = 3\text{s}} 6 = \frac{1}{2}a \times 9 \Rightarrow a = \frac{4}{3} \frac{m}{s^2}$$

در آخر سرعت متحرک در لحظه $t = 12\text{s}$ برابر است با:

$$v_{12} = a(12 - t_s) + v_s \xrightarrow{v_s = 0} v_{12} = \frac{4}{3} \times (12 - 3) \Rightarrow v_{12} = 12 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰)

۴۸- گزینه «۱»

(میثم شتیان)

با داشتن a ، v_0 و v از معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) استفاده می‌کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v_0 = 0, v = 16 \frac{m}{s}} \xrightarrow{a = 4 \frac{m}{s^2}} 16^2 - 0 = 2 \times 4 \times \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = 32\text{m} \xrightarrow{x_0 = 0} x = 32\text{m}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

۴۹- گزینه «۱»

(بهادر کامران)

زمان رسیدن گلوله اول به زمین از رابطه زیر محاسبه می‌شود: (جهت مثبت را بالا در نظر می‌گیریم).

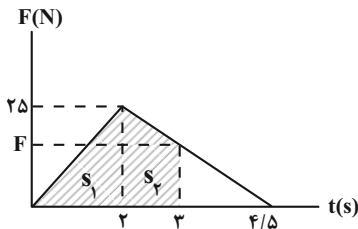
$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_s t \Rightarrow -125 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5\text{s}$$

حداکثر فاصله دو گلوله هنگام رسیدن گلوله اول به زمین اتفاق می‌افتد، بنابراین اگر حداکثر فاصله دو گلوله از هم ۴۵ متر باشد، گلوله دوم بایستی ارتفاعی معادل $125 - 45 = 80$ متر را طی کرده باشد. زمان لازم برای پیمودن این فاصله برابر است با:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_s t \Rightarrow -80 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4\text{s}$$

بنابراین اختلاف زمان حرکت آن‌ها $5 - 4 = 1\text{s}$ می‌باشد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰)



$$\Delta p = s_1 + s_2 \Rightarrow \Delta p = \left(\frac{25 \times 2}{2}\right) + \left(\frac{25 + 15}{2} \times 1\right) \Rightarrow \Delta p = 45 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_0 = mv_0 = 2 \times 5 \Rightarrow p_0 = 10 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta p = p_3 - p_0 \Rightarrow 45 = p_3 - 10 \Rightarrow p_3 = 55 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

اکنون برای محاسبه نیروی خالص متوسط در کل زمان حرکت، ابتدا تغییرات تکانه را در کل زمان حرکت از مساحت زیر نمودار محاسبه کرده و سپس با

استفاده از رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ را به دست می آوریم:

$$\Delta p_{\text{کل}} = \frac{25 \times 4}{2} \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F_{av} = \frac{25 \times 4 / 2}{4 / 5} \Rightarrow F_{av} = 12.5 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره ای، صفحه های ۳۸ تا ۴۱)

(مهم اسری)

۵۵- گزینه «۲»

ابتدا محیط دایره را به دست می آوریم:

$$P = 2\pi r \frac{r = \Delta cm}{\pi = 3.14} \Rightarrow P = 2 \times 2 / 1.4 \times 5 = 31 / 4 \text{ cm}$$

اکنون تعداد دورهایی که متحرک پیموده است را محاسبه می کنیم:

$$\text{دور} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{محیط دایره}} = \frac{78 / 5}{31 / 4} = 2 / 5$$

با توجه به این که متحرک در مدت زمان ۵ ثانیه، ۲/۵ دور را پیموده است، بنابراین، دوره حرکت متحرک برابر است با:

$$T = \frac{5}{2/5} = 2s \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

مطابق رابطه اندازه نیروی مرکزگرا در حرکت دایره ای یکنواخت داریم:

$$F_r = mr\omega^2 \xrightarrow{r = \Delta cm = 0.05m, m = 40g = 0.04kg} \omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

$$F_r = 0.04 \times 0.05 \times \pi^2 = 0.002\pi^2 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره ای، صفحه های ۳۸ تا ۵۲)

(مسین ناصبی)

۵۶- گزینه «۴»

نسبت وزن جسم برابر با نسبت شتاب گرانشی در محل جسم است.

$$W = mg \Rightarrow \frac{W'}{W} = \frac{g'}{g}$$

در آخر با استفاده از رابطه شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow{t_1 = 5s, t_2 = 25s} a_{av} = \frac{5 - 15}{25 - 5} = -0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره ای، صفحه های ۳۶ و ۳۷)

(امیرمسین برادران)

۵۲- گزینه «۱»

بیشینه نیرویی که ترازو نشان می دهد مربوط به حالتی است که حرکت آسانسور کندشونده است و کمینه نیرویی که ترازو نشان می دهد مربوط به حالتی است که حرکت آسانسور تندشونده است.

$$F_N = m(g + a) \begin{cases} \text{حرکت تندشونده به سمت پایین} \rightarrow F_N = m(g - a) \text{ (I)} \\ \text{حرکت کندشونده به سمت پایین} \rightarrow F_N = m(g + a') \text{ (II)} \end{cases}$$

$$(I), (II) \rightarrow F'_N - F_N = m(g + a') - m(g - a)$$

$$\Rightarrow F'_N - F_N = m(a + a')$$

$$\xrightarrow{a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, m = 60 \text{ kg}} F'_N - F_N = 60(2 + 2) = 240 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره ای، صفحه های ۳۷ و ۳۸)

(مهم علی عباسی)

۵۳- گزینه «۳»

طبق رابطه $\vec{p} = m\vec{v}$ ، اندازه تکانه و سرعت متناسب با هم هستند و جهت آن ها یکسان است.

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 \Rightarrow \vec{p}_2 = -\frac{1}{3}\vec{p}_1$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -\frac{1}{3}\vec{p}_1 - \vec{p}_1 = -\frac{4}{3}\vec{p}_1$$

$$|\vec{F}| = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t} = \frac{\frac{4}{3}|\vec{p}_1|}{2} = \frac{4 \times 24}{2} = 16 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره ای، صفحه های ۳۸ تا ۴۱)

(زهره آقاممیری)

۵۴- گزینه «۳»

ابتدا نیروی خالص وارد بر متحرک را در لحظه $t = 3s$ می یابیم. مطابق شکل، با توجه به ثابت بودن شیب خط در بازه زمانی ۲s تا ۴/۵s و با استفاده از تشابه مثلث ها داریم:

$$\frac{25}{4/5 - 2} = \frac{F}{4/5 - 3} \Rightarrow \frac{25}{2/5} = \frac{F}{1/5} \Rightarrow F = 15 \text{ N}$$

از طرف دیگر، با توجه به این که، مساحت زیر نمودار نیرو - زمان برابر تغییرات تکانه است، تغییرات تکانه راتا لحظه $t = 3s$ محاسبه می کنیم و سپس تکانه متحرک را در لحظه $t = 3s$ می یابیم:



با توجه به رابطه شتاب گرانش داریم:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{R'^2}{R^2} \frac{M}{M'} \quad R' = 2R_e, M' = 2M_e \rightarrow$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{2M_e}{(2R_e)^2} = \frac{1}{2} \quad \frac{W'}{W} = \frac{g'}{g} \rightarrow$$

$$\Rightarrow W' = 720 \times \frac{1}{2} = 360 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- رینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶)

۵۷- گزینه «۲»

(مصطفی کیانی)

بنا به رابطه $F_{\max} = kA = m\omega^2 A$ ، بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر با دامنه نوسان نسبت مستقیم دارد. بنابراین، اگر دامنه نوسان ۲ برابر شود، بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر نیز دو برابر خواهد شد.

$$F_{\max} = kA \xrightarrow{k=\text{ثابت}} \frac{F'_{\max}}{F_{\max}} = \frac{A'}{A} \quad A' = 2A \rightarrow \frac{F'_{\max}}{F_{\max}} = \frac{2A}{A}$$

$$\frac{F'_{\max}}{F_{\max}} = 2$$

برای دوره تناوب، سامانه جرم - فنر، بنا به رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ، دوره تناوب به دامنه بستگی ندارد؛ بنابراین، با تغییر دامنه نوسان، دوره تناوب تغییر نخواهد کرد.

(فیزیک ۳- نوسان و موج، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۵۸- گزینه «۲»

(مصطفی کیانی)

ابتدا باید انرژی کل نوسانگر را بیابیم. با توجه به این که در نقطه تعادل تندی نوسانگر بیشینه و $K_{\max} = E$ است، می‌توان نوشت:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{m=\text{ثابت}} \frac{K_{\max}}{K} = \left(\frac{v_{\max}}{v}\right)^2 \quad \frac{K_{\max}=E}{v=\frac{1}{2}v_{\max}}$$

$$\frac{E}{K} = \left(\frac{v_{\max}}{\frac{1}{2}v_{\max}}\right)^2 \Rightarrow \frac{E}{K} = 4 \Rightarrow K = \frac{1}{4}E$$

از طرف دیگر $E = K + U$ و $U - K = 25 \text{ mJ}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$E = K + U \xrightarrow{U=K+25} E = K + K + 25$$

$$\Rightarrow E = 2K + 25 \xrightarrow{K=\frac{1}{4}E} \Rightarrow$$

$$E = 2 \times \frac{1}{4}E + 25 \Rightarrow E - \frac{1}{2}E = 25 \Rightarrow \frac{1}{2}E = 25 \Rightarrow E = 50 \text{ mJ}$$

در آخر با استفاده از رابطه $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ و با توجه به این که

$a_{\max} = \omega^2 A$ است، به صورت زیر A را می‌یابیم:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A \times A \xrightarrow{\omega^2 A = a_{\max}} E = \frac{1}{2}m a_{\max} \times A$$

$$\frac{E = 50 \text{ mJ} = 50 \times 10^{-3} \text{ J}}{a_{\max} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, m = 0.2 \text{ kg}} \rightarrow 50 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} \times 25 \times A$$

$$\Rightarrow A = 2 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow A = 2 \text{ cm}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج، صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۵۹- گزینه «۲»

(سید لیلال میری)

با توجه به نمودار

$$\begin{cases} A = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m} \\ U_{\max} = 18 \times 10^{-3} \text{ J} \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \\ m = 0.1 \text{ kg} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 0.1 \times \omega^2 \times 0.04$$

$$\omega^2 = 9 \Rightarrow \omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج، صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۶۰- گزینه «۴»

(غلامرضا ممینی)

می‌دانیم دوره تناوب یک نوسانگر هماهنگ ساده از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست

می‌آید و تعداد نوسان‌ها در مدت زمان t برابر $N = \frac{t}{T}$ است، از طرفی، چون دو

نوسانگر در فاصله‌های r_1 و r_2 از مرکز زمین قرار دارند، داریم:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \quad \frac{g_1 = (r_2/r_1)^2}{g_2} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad r_2 = 4R_e \rightarrow r_1 = 9R_e$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{4R_e}{9R_e} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{9}$$

اکنون برای به دست آوردن رابطه بین نوسان‌های دو آونگ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$T = \frac{t}{N} \quad t=\text{ثابت} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow N_1 = \frac{4}{9}N_2$$

با توجه به این $T_2 < T_1$ است، آونگ دوم تندتر نوسان می‌کند، و تعداد نوسان‌های آن در یک بازه زمانی معین، بیشتر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$N_2 - N_1 = 30 \xrightarrow{N_1 = \frac{4}{9}N_2} N_2 - \frac{4}{9}N_2 = 30$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}N_2 = 30 \Rightarrow N_2 = 54$$

می‌بینیم، تعداد نوسان‌های آونگ تندتر (آونگ با دوره کم‌تر) $N_2 = 54$ است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج، صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)



شیمی ۳

گزینه «۴» ۶۱-

(معاون شاهی بیکباغی)

همة عبارت‌ها درست هستند.

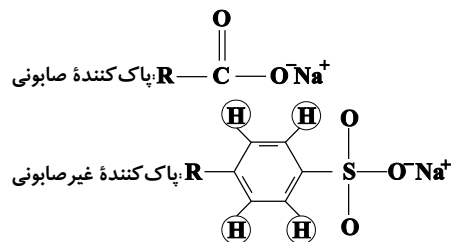
بررسی عبارت‌ها:

عبارت (اول): با توجه به متن کتاب در صفحه ۳ صحیح است.

عبارت (دوم): بنزین (C_8H_{18}) و وازلین ($C_{25}H_{52}$) هر دو ناقطبی هستند ولی اوره ($CO(NH_2)_2$) قطبی است.

عبارت (سوم): مخلوط آب، صابون و روغن، یک مخلوط ناهمگن و پایدار است (همان کلوئید).

عبارت (چهارم): با توجه به ساختارهای زیر صحیح است:



(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۷ تا ۱۰)

گزینه «۳» ۶۲-

(علی رحیمی)

بررسی گزینه نادرست:

نیروی بین مولکولی میان لکه‌های چربی و صابون از نوع وان‌دروالسی (ناقطبی - ناقطبی) است. در حالی که نیروی بین مولکولی میان اتانول و آب از نوع هیدروژنی می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

گزینه «۳» ۶۳-

(حسن ناصری ثانی)

فقط مورد چهارم نادرست است.

بررسی موارد:

مورد اول: مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید، همانند سفیدکننده‌ها با آلاینده‌ها واکنش می‌دهد، بنابراین یک پاک‌کننده خورنده به‌شمار می‌آید.

مورد دوم: صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی براساس برهم‌کنش میان ذره‌ها عمل می‌کنند؛ اما پاک‌کننده‌های خورنده افزون بر این برهم‌کنش‌ها، با آلاینده‌ها واکنش هم می‌دهند.

مورد سوم: از آن‌جا که مولکول‌های تشکیل‌دهنده اوره و عسل دارای اتم H متصل به یکی از اتم‌های N و O هستند، بنابراین هر دو می‌توانند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کنند.

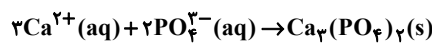
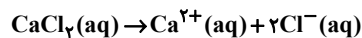
مورد چهارم: شواهد بسیاری در تاریخ علم وجود دارد که نشان می‌دهند پیش از آن که ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۴ تا ۱۴)

گزینه «۲» ۶۴-

(حسن رهنمی کوکندره)

با توجه به این که غلظت یون کلرید برابر ۱۴۲۰۰ ppm می‌باشد، یعنی در یک لیتر از این محلول ۱۴۲۰۰ میلی‌گرم یون Cl^- وجود دارد. با توجه به واکنش‌های موازنه شده زیر می‌توان نوشت:



$$? g PO_4^{3-} = 14200 \times 10^{-3} g Cl^- \times \frac{1 mol Cl^-}{35.5 g Cl^-} \times \frac{1 mol Ca^{2+}}{2 mol Cl^-}$$

$$\times \frac{2 mol PO_4^{3-}}{3 mol Ca^{2+}} \times \frac{95 g PO_4^{3-}}{1 mol PO_4^{3-}} \approx 12.67 g PO_4^{3-}$$

$$\text{درصد جرمی یون فسفات} = \frac{12.67}{200} \times 100 \approx 6.33\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۸، ۹ و ۱۲)

گزینه «۳» ۶۵-

(مسعود جعفری)

ابتدا تعداد مول اولیه HCl را به دست می‌آوریم:

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} \Rightarrow [H^+] = 10^{-0.3} = \frac{1}{10^{0.3}}$$

$$= \frac{1}{2} = 0.5 mol.L^{-1} \Rightarrow [H^+] = 0.5 mol.L^{-1}$$

$$mol(H^+) = [H^+] \times V = 0.5 \times \frac{400}{1000} = 0.2 mol H^+$$

مقداری از این $0.2 mol H^+$ (یا همان $0.2 mol HCl$) وارد واکنش با کلسیم کربنات می‌شود و بقیه آن در محلول باقی می‌ماند. با توجه به اطلاعاتی

که از محلول باریم هیدروکسید داریم، می‌توانیم تعداد مول H^+ باقی‌مانده در محلول را محاسبه کنیم. ابتدا pH محلول باریم هیدروکسید را به دست می‌آوریم:

$$M_{Ba(OH)_2} = \frac{n(mol)}{V(L)} = \frac{5/13 g Ba(OH)_2 \times \frac{1 mol Ba(OH)_2}{171 g Ba(OH)_2}}{1L}$$

$$= 0.3 mol.L^{-1}$$

$$[OH^-] = n.M_{Ba(OH)_2} = 2 \times 0.3 = 0.6 mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow pOH = -\log[OH^-] = -\log(6 \times 10^{-2}) = 2 - 0.3 = 1.7$$

$$\Rightarrow pH_{Ba(OH)_2} = 14 - 1.7 = 12.3$$

$$\frac{pH_{HCl \text{ مانده}}}{pH_{Ba(OH)_2}} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{x}{12.3} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 0.8$$

$$0.8 = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-0.8}$$



(معمّر رضا جمشیری)

۶۹- گزینه «۴»

ابتدا $[H^+]$ و سپس $[OH^-]$ را در محلول نهایی محاسبه می‌کنیم:

$$10^{-pH} = [H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-12/7} = 2 \times 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = 5 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[KOH] = [OH^-] = 5 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

باز قوی

شمار مول KOH حل شده برابر است با:

$$? \text{ mol KOH} = 0.75 \text{ L} \times 5 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} = 0.375 \text{ mol KOH}$$

$$? \text{ g KOH} = 0.375 \times 56 = 21 \text{ g KOH}$$

در نهایت با توجه به تعریف ppm داریم:

$$\text{ppm} = \frac{21}{168} \times 10^6 = 12500$$

$$\text{جرمی} = \text{ppm} \times 10^{-4} = 1.25$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

(علیرضا رضایی سراب)

۷۰- گزینه «۱»

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۲»: فرآورده‌های واکنش جوش شیرین با محلول HCl عبارت‌اند از: $NaCl(aq)$ ، $CO_2(g)$ و $H_2O(l)$.

گزینه «۳»: در دمای ثابت حاصل $[H^+] \times [OH^-]$ در محلول‌های آبی برابر مقداری ثابت است.

گزینه «۴»: در این واکنش، یون‌های $Na^+(aq)$ و $Cl^-(aq)$ دست‌نخورده باقی می‌مانند. (یون‌های تماشاگر یا ناظر)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۲۶، ۲۷، ۳۰ تا ۳۲ و ۳۴)

(سراسری ریاضی ۹۹)

۷۱- گزینه «۱»

$$\frac{\text{غلظت محلول اولیه}}{\text{غلظت محلول ثانویه}} = \frac{4}{1} = \frac{\frac{x \text{ mol}}{4/8 \times 10^{-3} \text{ L}}}{\frac{x \text{ mol}}{(4/8 + y) \times 10^{-3} \text{ L}}} \Rightarrow 4 = \frac{4/8 + y}{4/8}$$

$$\Rightarrow y = 14/4 \text{ g H}_2\text{O}$$

$$\text{خالص MOH} = 75 \text{ g MOH} \times \frac{67 \text{ g MOH}}{100 \text{ g MOH}} = 50.25 \text{ g}$$

$$\text{جرم MOH مصرف شده} = 14/4 \text{ g H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{O}}{18 \text{ g H}_2\text{O}}$$

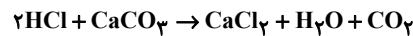
$$\times \frac{1 \text{ mol MOH}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{4 \text{ g MOH}}{1 \text{ mol MOH}} = 32 \text{ g MOH}$$

$$\Rightarrow \text{درصد MOH مصرف شده} = \frac{32 \text{ g}}{50.25 \text{ g}} \times 100 \approx 64\%$$

$$= 10^{-2} \times 10^{1/2} = 10^{-2} \times (10^{1/3})^4 = 16 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{mol } H^+ = 16 \times 10^{-2} \times 0.04 = 0.064 \text{ mol}$$

در نتیجه 0.064 mol HCl با کلسیم کربنات واکنش می‌دهد. معادله این واکنش به صورت زیر می‌باشد:



$$20 \text{ g CaCO}_3 \times \frac{P}{100} \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{100 \text{ g CaCO}_3} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol CaCO}_3}$$

$$= 0.136 \text{ mol HCl} \Rightarrow P = 34\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

(معمّر عظیمیان زواره)

۶۶- گزینه «۲»

HX یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار و H_2SO_4 یک اسید قوی ۲

پروتون‌دار است. پس در شرایط یکسان، رسانایی الکتریکی متفاوتی دارند.

بررسی گزینه‌های درست:

گزینه «۱»: در باران اسیدی و باران معمولی به ترتیب (HNO_3) و (H_2CO_3) وجود دارد. به بیانی دیگر در آن‌ها اسید ضعیف تک‌پروتون‌دار وجود ندارد.

گزینه «۳»: زیرا غلظت یون هیدرونیوم در محلول HA کمتر است.

گزینه «۴»: HNO_3 اسید قوی تک‌پروتون‌دار در باران اسیدی است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه ۱۸)

(مسعود طبرسا)

۶۷- گزینه «۲»

در اسیدهای ضعیف تک‌پروتون‌دار رابطه $[H^+] = M\alpha$ برقرار است.

$$[H^+] = M\alpha \Rightarrow 10^{-2/8} = M_{HA} \times 10^{-1/3}$$

$$\Rightarrow M_{HA} = \frac{10^{-2/8}}{10^{-1/3}} = 10^{-1/5} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[H^+] = M\alpha \Rightarrow 10^{-6/4} = M_{HY} \times 10^{-0/6}$$

$$\Rightarrow M_{HY} = \frac{10^{-6/4}}{10^{-0/6}} = 10^{-5/8} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{M_{HA}}{M_{HY}} = \frac{X}{Y} = \frac{10^{-1/5}}{10^{-5/8}} = 10^{4/3} = 10^{1.33} = 10^1 \times 10^{0.33} = 2 \times 10^1$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

(فرزین بوستانی)

۶۸- گزینه «۳»

تنها مورد «ب» نادرست است.

بررسی مورد (ب): این گزاره در صورتی درست است که فرض کنیم مولکول‌ها هیچ یونشی در محلول ندارند در حالی که این طور نیست.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴، ۱۶ تا ۱۸ و ۲۳)

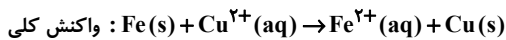


۷۲- گزینه «۳»

(غریز از ریاضی)

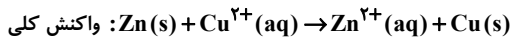
بخش اول: با قرار دادن X در هر سه حالت، سه سلول گالوانی به صورت زیر خواهیم داشت:

X = Fe سلول گالوانی Fe - Cu



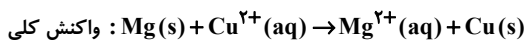
$$\text{emf} = E^{\circ} = E^{\circ}(\text{آند}) - E^{\circ}(\text{کاتد}) = (+0 / ۳۴) - (-0 / ۴۴) = 0 / ۷۸ \text{ V}$$

X = Zn سلول گالوانی Zn - Cu



$$\text{emf} = E^{\circ} = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) = (+0 / ۳۴) - (-0 / ۷۶) = 1 / ۱۷ \text{ V}$$

X = Mg سلول گالوانی Mg - Cu



$$\text{emf} = E^{\circ} = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) = (+0 / ۳۴) - (-۲ / ۳۷) = ۲ / ۷۱ \text{ V}$$

$$\frac{\text{emf}(\text{max})}{\text{emf}(\text{min})} = \frac{۲ / ۷۱}{۰ / ۷۸} = ۳ / ۴۷$$

بخش دوم:

چون شرایط برابر است، به ازای مصرف ۱ مول Cu^{2+} جرم X هم به اندازه ۱ مول کاهش می یابد که برای فلز روی بیشترین مقدار کاهش را خواهد داشت؛ چون بیشترین جرم مولی را دارد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۴۴ تا ۴۹)

$$? \text{gHCl} = ۱۸ / ۲۵ \text{gMOH} \times \frac{۱ \text{molMOH}}{۴۰ \text{gMOH}}$$

$$\times \frac{۱ \text{molHCl}}{۱ \text{molMOH}} \times \frac{۳۶ / ۵ \text{gHCl}}{۱ \text{molHCl}} \approx ۱۶ / ۷ \text{gHCl}$$

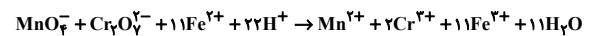
$$\text{HCl غلظت} = \frac{۱۶ / ۷ \text{gHCl}}{۰ / ۵ \text{L}} \approx ۳۳ \text{g.L}^{-۱}$$

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تندرستی؛ صفحه ۳۱)

۷۲- گزینه «۳»

(مقتبی اسرارده)

واکنش موازنه شده به صورت زیر است:



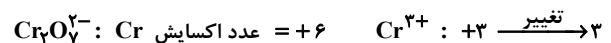
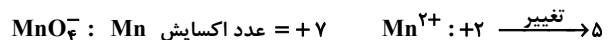
بررسی گزینه ها:

گزینه «۱»: مجموع ضرایب برابر ۶۰ است.

گزینه «۲»: دو گونه اکسند $(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}, \text{MnO}_4^-)$ و یک گونه کاهنده (Fe^{2+})

داریم

گزینه «۳»:



گزینه «۴»: عدد اکسایش H و O در این واکنش تغییری نکرده است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۵۲ و ۵۳)

۷۳- گزینه «۱»

(سراسری خارج از کشور تهری ۹۹)

عبارت (آ): هر چه E° یک نیم واکنش کاهش بیشتر باشد، گونه سمت راست کاهنده ضعیف تر و گونه سمت چپ اکسنده قوی تر است.

$V > Ag$: مقایسه کاهندگی

$Ag^+ > V^{2+}$: مقایسه اکسندگی

عبارت (ب): E° کاهشی و انادیم از سرب کمتر است؛ یعنی V کاهنده تر بوده و تمایل بیشتری برای تبدیل شدن به کاتیون خود را دارد.

عبارت (پ):

$$E^{\circ}(\text{Pb-Ag}) = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) =$$

$$E^{\circ}(\text{Ag}^+/\text{Ag}) - E^{\circ}(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}) = 0 / ۹۳ \text{ V}$$

$$E^{\circ}(\text{V-Pb}) = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) =$$

$$E^{\circ}(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}) - E^{\circ}(\text{V}^{2+}/\text{V}) = 1 / ۰۷ \text{ V}$$

عبارت (ت): Pb به دلیل E° کاهش کمتر، از نقره کاهنده تر بوده و فلز

فعال تر است. بنابراین می تواند با یون های Ag^+ واکنش دهد. (در واکنش های خودبه خودی همیشه اتم فلز فعال تر در سمت واکنش دهنده و اتم فلز پایدارتر در سمت فراورده قرار دارد).

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۴۴ تا ۴۹)

۷۵- گزینه «۲»

(حسن عیسی زاده)

به جز قسمت (پ) بقیه موارد درست اند.

با توجه به اینکه جهت حرکت الکترون از سمت آند به سمت کاتد است، پس M آند (قطب منفی) و A کاتد (قطب مثبت) سلول است. بنابراین:

(ب) با تبدیل اتم های M به M^{3+} ، غلظت M^{3+} در اطراف آند افزایش می یابد و غلظت A^{2+} به دلیل کاهش یون های A^{2+} کاهش می یابد.

(پ) مطابق قانون پایستگی جرم، تغییر جرم دو سمت معادله با هم برابر است در حالی که آند و کاتد هر کدام تنها بخشی از یک سمت معادله هستند.

(ت) آنیون های نیترات از سمت نیم سلول کاتدی با گذر از دیواره متخلخل به نیم سلول آندی جابه جا می شوند.

(ث) مطابق نیم واکنش $\text{M} \rightarrow \text{M}^{3+} + ۳\text{e}^-$ ، جرم M مصرف شده برابر است با:

$$? \text{mgM} = ۱۸ / ۰۶ \times ۱۰^{-۲} \text{e}^- \times \frac{۱ \text{mole}^-}{۶ / ۰۲ \times ۱۰^{-۲} \text{e}^-} \times \frac{۱ \text{molM}}{۳ \text{mole}^-}$$

$$\times \frac{۲۷ \text{gM}}{۱ \text{molM}} \times \frac{۱۰^{-۳} \text{mg}}{۱ \text{g}} = ۲۷۰ \text{mgM}$$

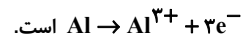
(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۴۴ تا ۴۶)



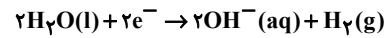
۷۶- گزینه «۲»

(رسول عابدینی زواره)

نیم واکنش آندی در واکنش اکسایش - کاهش داده شده به صورت



نیم واکنش کاتدی برکافت آب:



محاسبه شمار مول های الکترون مصرف شده در نیم واکنش کاتدی برکافت آب:

$$? \text{mole}^{-} = 2 / 22 \text{L H}_2 \times \frac{1 \text{mol H}_2}{22 / 4 \text{L H}_2} \times \frac{2 \text{mole}^{-}}{1 \text{mol H}_2} = 0 / 2 \text{mole}^{-}$$

$$? \text{g Al} = 0 / 2 \text{mole}^{-} \times \frac{1 \text{mol Al}}{3 \text{mole}^{-}} \times \frac{27 \text{g Al}}{1 \text{mol Al}} = 1 / 8 \text{g Al}$$



$$? \text{mol Cu} = 0 / 2 \text{mole}^{-} \times \frac{1 \text{mol Cu}}{2 \text{mole}^{-}} = 0 / 1 \text{mol Cu}$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۳۰ تا ۴۲ و ۵۴)

۷۷- گزینه «۲»

(سراسری داخل کشور تجربی ۹۹)

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه «۱»: در سلول گالوانی، الکتروود آند، قطب منفی است.

گزینه «۳»: در سلول الکتروولیتی در قطب منفی یا کاتد، کاهش انجام می شود.

گزینه «۴»: در سلول گالوانی در کاتد، اتم های فلزی از یون ها تشکیل می شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۴۵، ۴۶، ۵۴ و ۵۵)

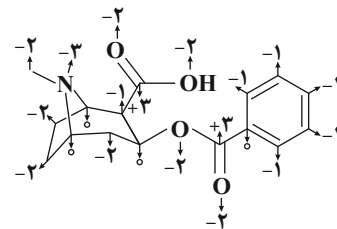
۷۸- گزینه «۴»

(سایر شیری)

بررسی گزینه ها:

گزینه «۱»: با توجه به شکل زیر، مجموع اعداد اکسایش اتم های کربن و

مجموع اعداد اکسایش اتم های اکسیژن برابر ۸- است.



گزینه «۲»: هیچ کدام از اتم های کربن دارای بیش ترین (+۴) یا کم ترین (-۴)

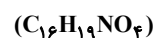
عدد اکسایش ممکن خود نیستند. پس قابلیت اکسایش و کاهش یافتن را دارند.

$$+3 - (-3) = 6$$

گزینه «۳»:

عدد ۶ → تعداد کربن های (-۱)

گزینه «۴»: با توجه به فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر، اشتباه است.



(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۵۲ و ۵۳)

۷۹- گزینه «۲»

(رسول عابدینی زواره)

بررسی درستی یا نادرستی موارد:

(آ) نیم واکنش اکسایش آهن سفید به صورت $\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^{-}$ است که در آن Zn اکسایش یافته و بنابراین کاهشنده است.

(ب) آبکاری در سلول الکتروولیتی انجام می شود و جسم آبکاری شونده به قطب منفی باتری متصل می شود.

(پ) عدد اکسایش N در نیترواسید (HNO_3) و نیتریک اسید (HNO_2),

به ترتیب برابر +۳ و +۵ می باشد که نسبت آن $\frac{3}{5}$ یا $\frac{۰}{۶}$ است.



(ت) در سلول گالوانی A - B، جهت حرکت الکترون ها از A به سمت B

است، یعنی A آند بوده و E° آن کوچک تر است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۴۲ تا ۶۰)

۸۰- گزینه «۲»

(رئوف اسلام دوست)

ابتدا جرم فلز نقره مصرف شده را به دست می آوریم:

$$3 = \frac{X}{24} \times 100 \Rightarrow X = 0 / 72 \text{g Ag}$$

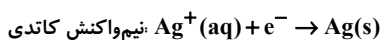
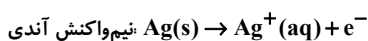
سپس با استفاده از نیم واکنش آندی $\text{Ag}(\text{s}) \rightarrow \text{Ag}^{+}(\text{aq}) + \text{e}^{-}$ ، تعداد

الکترون های عبوری از مدار را به دست می آوریم:

$$? \text{e}^{-} = 0 / 72 \text{g Ag} \times \frac{1 \text{mol Ag}}{108 \text{g Ag}} \times \frac{1 \text{mole}^{-}}{1 \text{mol Ag}} \times \frac{6 / 02 \times 10^{23} \text{e}^{-}}{1 \text{mole}^{-}}$$

$$\simeq 4 \times 10^{21} \text{e}^{-}$$

حال با توجه به نیم واکنش های آندی و کاتدی:



می توان دریافت که تعداد کاتیون های $\text{Ag}^{+}(\text{aq})$ موجود در محلول ثابت

می ماند:

$$? \text{Ag}^{+} = 5 \text{L محلول} \times \frac{0 / 1 \text{mol AgNO}_3}{1 \text{L محلول}} \times \frac{1 \text{mol Ag}^{+}}{1 \text{mol AgNO}_3}$$

$$\times \frac{6 / 02 \times 10^{23} \text{Ag}^{+}}{1 \text{mol Ag}^{+}} = 2 / 408 \times 10^{24} \text{Ag}^{+}$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۶۰ و ۶۲)