

آزمون آزمایشی ۲۰ تیر ۱۴۰۴

(جایگزین تاریخ ۳۰ خرداد ۱۴۰۴)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

A

دفترچه شماره ۱

وقت پیشنهادی	تا شماره	از شماره	تعداد پرسش	مواد امتحانی
۷۰ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات
مدت پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه		تعداد کل پرسش‌ها: ۴۰		



دانش آموز گرامی، با اسکن تصویر روبه‌رو و یا مراجعه به کانال @gozine2 در تلگرام و ایتا می‌توانید پاسخ تشریحی آزمون را دریافت کنید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه دو، آزمونک‌ها، رفع اشکال هوشمند، دفترچه پاسخ تشریحی و آرشیو آزمون‌های گزینه دو، با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید.
در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است.
در ثبت نام انفرادی و مدرسه‌ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

۱- در یک دنباله هندسی افزایشی، مجموع ۹ جمله اول دنباله ۹۱ برابر مجموع جملات اول، چهارم و هفتم است. جمله پنجم این دنباله چند برابر جمله سوم آن است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۹ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۰

۲- با فرض $0 < x < 1$ ، اگر $\frac{x^2}{x^4+1} = 0/1$ حاصل $\frac{x^6 + \sqrt{2}x^3 - 1}{x^3}$ کدام است؟

- (۱) $-23\sqrt{2}$ (۲) $23\sqrt{2}$ (۳) $-21\sqrt{2}$ (۴) $-19\sqrt{2}$

۳- برای دو مجموعه ناتهی A و B داریم $(A - B') \cup (B' - A') \cup (A' - B') = A$. کدام مجموعه ممکن است تهی نباشد؟

(۱) $B^2 - A \times B$ (۲) $A \times B - B \times A$

(۳) $B \times A - A^2$ (۴) $B^2 - A^2$

۴- ارزش گزاره $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \wedge r)]$ نادرست است. احتمال اینکه گزاره q درست باشد، چقدر است؟

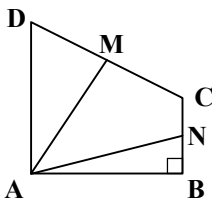
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^4 \beta^2 + 8\alpha^3 + 32\beta^2}{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۳۲۰

۶- در دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD، می‌دانیم $AB = AD = 2BC$. همچنین نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع CD و BC هستند. اگر

$AM = \sqrt{52}$ ، فاصله نقطه M از ضلع AN کدام است؟



(۱) $\frac{20}{\sqrt{13}}$

(۲) $\frac{21}{\sqrt{17}}$

(۳) $\frac{20}{\sqrt{17}}$

(۴) $\frac{21}{\sqrt{13}}$

۷- توابع $f(x) = \left[\frac{4x^2 + 3}{x^2 + 1} \right]$ و $g(x) = \frac{2}{\sqrt{mx^2 - mx + 26}}$ با دامنه \mathbb{R} مفروض‌اند. اگر بیشترین مقدار تابع $f \times g$ برابر $1/2$ باشد، مقدار

$\left[-\frac{2}{3}m \right]$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

محل انجام محاسبات:

۸- تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ |x| & x > -1 \end{cases}$ مفروض است. مجموع جواب‌های معادله $(f \circ f)(2x) = 0$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) صفر

۹- نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{2x-b}$ وارون خود را در نقطه $A(2,0)$ قطع می‌کند. مقدار $(f^{-1} \circ f)(2a)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) ۴

۱۰- اگر $\log_4 4 \log_5 2 = \left| \frac{\log_4 4}{\log_2 5} \log_5 2 \right|$ مقدار $\log_{\sqrt{3}}(4x-5)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۱۱- اگر $\sin 2\alpha > 3 \sin \alpha$ و $\frac{3 \sin \alpha - 1}{\cos \alpha} > 0$ ، انتهای کمان روبه‌ور به زاویه α در کدام ربع قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۲- حاصل کسر $A = \frac{\sin 105^\circ + \cos 255^\circ}{\sin(-525^\circ) + \cos 195^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

۱۳- معادله مثلثاتی $\frac{\tan x + \tan^3 x}{1 - \tan x \tan^3 x} = \cot 2x$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b - \cos(a\sqrt{x})}{a \sin x} = b^2$ مقدار $a + 2b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۴

۱۵- شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{(x-a)(x^2+1)}{(ax-m)(mx^2-2mx+2n)}$ را در اطراف خط $x = a$ نمایش می‌دهد. اگر $y = 1$ مجانب افقی تابع باشد،

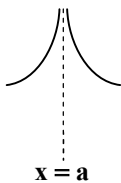
مقدار $f\left(\frac{6n}{m+a}\right)$ کدام است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۳

(۳) ۱۷

(۴) ۱۲



محل انجام محاسبات:

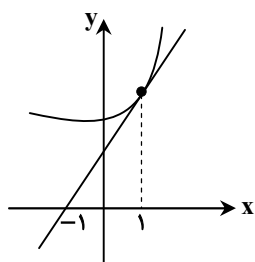
۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{4})^-} \frac{\tan 2x}{[4x - 3\pi]}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{2}$

۱۷- توابع $f(x) = \frac{|9-6x|-3}{\cos^2 x - 1}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \cot^2 x}{\sin^2 x}$ مفروض‌اند. مقدار $f'(\frac{\pi}{4}) + g'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) -۱۶ (۳) $8\sqrt{2}$ (۴) $-8\sqrt{2}$

۱۸- در شکل زیر، نمودار تابع f و خط مماس بر آن در $x = 1$ رسم شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 1} = k$ مقدار k کدام است؟



(۱) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{4}{3}$

۱۹- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x^2 - 4) + 2$ مفروض است. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ مینیمم نسبی تابع f باشد، مقدار $\alpha^2 + \beta$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) صفر

۲۰- مجموع عرض‌های نقاط عطف تابع $f(x) = x^3 - 6x|x| + 10$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) -۲۰ (۴) -۳۲

۲۱- حداقل مقدار انحراف معیار دسته‌های چهارتایی از اعداد اول کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{59}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{59}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{57}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{57}}{4}$

۲۲- در جعبه A تعداد ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی، در جعبه B تعداد ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در جعبه C تعداد ۴ مهره قرمز و ۱ مهره آبی وجود دارد. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. این مهره از هر رنگ که باشد، آن را درون جعبه دیگری که از آن رنگ تعداد بیشتری دارد، قرار داده و اینک از این جعبه یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره آبی باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{45}$ (۲) $\frac{31}{90}$ (۳) $\frac{37}{90}$ (۴) $\frac{17}{45}$

محل انجام محاسبات:

۲۳- از نقطه M واقع در داخل زاویه حاده xOy ، عمودهایی بر اضلاع زاویه رسم می‌کنیم و این عمودها را از سمت M امتداد می‌دهیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کنند. در این صورت:

(۱) O روی عمود منصف AB است.

(۲) امتداد OM از وسط AB می‌گذرد.

(۳) امتداد OM بر AB عمود است.

(۴) مثلث OAB متساوی‌الساقین است.

۲۴- اگر مجموع تعداد قطرهای متمایز رسم شده از سه رأس متوالی یک n ضلعی محدب، برابر ۲۳ باشد، مجموع تعداد کل قطرهای n ضلعی کدام است؟

(۱) ۴۴

(۲) ۳۵

(۳) ۵۴

(۴) ۶۵

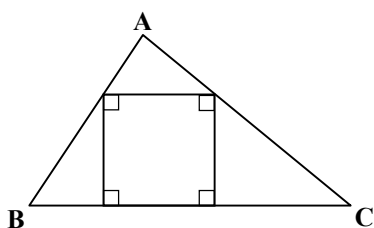
۲۵- در شکل زیر طول ضلع مربع برابر $\frac{1}{3}$ و مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ است. اندازه ضلع BC کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۶

(۳) ۱۰

(۴) ۸



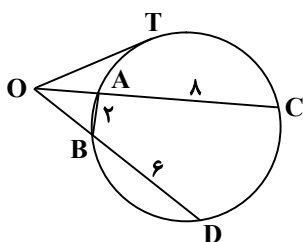
۲۶- در شکل زیر، طول مماس OT برابر ۴ است. محیط مثلث OAB کدام است؟

(۱) ۴

(۲) $4\sqrt{2}$

(۳) ۶

(۴) $6\sqrt{2}$



۲۷- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{B} = 80^\circ$ است. در بازتاب نسبت به خطی که از وسط اضلاع AB و AC می‌گذرد $S(C) = C'$ است. زاویه

\hat{BAC}' کدام است؟

(۱) 90°

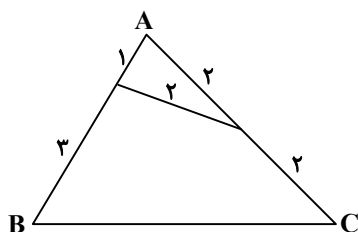
(۲) 100°

(۳) 110°

(۴) 120°

محل انجام محاسبات:

۲۸- در شکل زیر، نسبت طول قطرهای چهارضلعی کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

(۴) ۱

۲۹- به ازای چند مقدار k ، دستگاه معادلات $\begin{cases} 5kx + 6y = 2 \\ 5x + (k-1)y = k \end{cases}$ فاقد جواب است؟

(۴) بی شمار

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

۳۰- A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ هستند به طوری که $A + B = kI$. اگر مجموع درایه‌های ماتریس $(A^2 + kB + AB)^3$ برابر ۱۹۲ باشد، k کدام می‌تواند باشد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۳۱- در یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' ، دایره‌ای به قطر FF' ، بیضی را در نقطه M قطع کرده است. اگر $\hat{MOF} = 60^\circ$ باشد، طول MF' کدام است؟

(۴) $2a - \frac{c}{2}$

(۳) $2a - c$

(۲) $a + \frac{c}{2}$

(۱) $a - c$

۳۲- نقاط $O(x_1, y_1)$ و $O'(x_2, y_2)$ مراکز دو دایره به شعاع ۵ می‌باشند که از نقاط $M(-3, 3)$ و $N(1, -1)$ می‌گذرند. $x_1 + x_2$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) -۴

(۲) ۱

(۱) -۲

۳۳- حجم متوازی‌السطوح بناشده بر سه بردار $\vec{i} + \vec{j}$ ، $\vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{k} + \vec{i}$ از لحاظ عددی چند برابر مساحت کل این متوازی‌السطوح است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

۳۴- اگر $\left[\frac{4}{6}, \frac{5}{4} \right]$ بازه برآورد میانگین با اطمینان ۹۵ درصد برای یک نمونه ۱۰۰ تایی باشد که در آن انحراف معیار جامعه و نمونه با هم برابر است، ضریب تغییرات نمونه کدام است؟

(۴) 0.5

(۳) 0.4

(۲) 0.3

(۱) 0.2

۳۵- معادله $\sqrt{x_1 + x_2 + x_3} + 0.5x_4 = 6$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

(۲) ۹

(۱) ۸

۳۶- با حذف یک یال از گراف k -منتظم G ، حاصل ضرب درجات گراف حاصل برابر ۳۲۴ شده است. گراف G چند زیرگراف به شکل C_3 دارد؟

(۴) صفر یا ۲

(۳) صفر یا ۱ یا ۲

(۲) صفر یا ۱

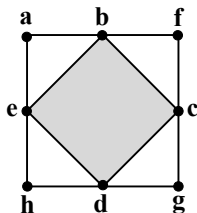
(۱) ۲ یا ۱

محل انجام محاسبات:

۳۷- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۶، خارج قسمت و باقی مانده به ترتیب q و r هستند. اگر داشته باشیم $r + q = ۲۳$ و باقی مانده تقسیم $a + ۱۵$ بر ۷۵ برابر ۸ باشد، چند مقدار متمایز برای r وجود دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۳

۳۸- چه تعداد از زیرمجموعه‌های مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ ، مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای گراف شکل زیر هستند؟



(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۲

(۴) ۳

۳۹- با ارقام ۱ و ۲ چند عدد یازده رقمی می‌توان ساخت که بر ۶ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۳۳۱ (۲) ۳۴۱ (۳) ۲۹۴ (۴) ۲۹۸

۴۰- از بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵۱ حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا یقین داشته باشیم در بین آن‌ها حداقل ۲ عدد وجود دارد به طوری که یکی دو برابر دیگری است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۳۵ (۳) ۳۶ (۴) ۳۳

محل انجام محاسبات:

اسامی هیأت علمی آزمون‌های ویژه داوطلبان کنکور ۱۴۰۴ گروه علوم ریاضی

مدیرگروه	عنوان درس	مسئول درس	طراحان	دستیار مسئول درس
سید شاکری سید امیرمحمد	حسابان و ریاضی پایه	علی افضل زاده	حسین شفیع زاده- ایمان اردستانی	عباس سعیدی- امین کبیری
	هندسه	سعید اکبرزاده	سید محسن میراسلامی- علی نعمت	هادی کاظم نژاد
	ریاضیات گسسته	سعید اکبرزاده	علیرضا شریف خطیبی- امیدرضا پورحسینی	فرهاد فرزانی
محمد کشانی محمد حسین	فیزیک	منصور داوودوندی	علی نعیمی- بهمن شاهمرادی- احمد رضوانی جمال خم‌خاجی- احمد مصلاهی	ساناز دریکوندی
	شیمی	شهرام شاه پرویزی	ماشاءالله سلیمانی- بهنام ابراهیم پور- شهرام شاه پرویزی مهرداد ملاصالحی- محمد علی توسلی فر- محمد احمدی	-

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمد رضا محمد هاشمی	معاون تولید محتوا: علی الفتی
--	------------------------------

آزمون آزمایشی ۲۰ تیر ۱۴۰۴

(جایگزین تاریخ ۳۰ خرداد ۱۴۰۴)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

A

دفترچه شماره ۲

وقت پیشنهادی	تا شماره	از شماره	تعداد پرسش	مواد امتحانی
۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
۳۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
مدت پاسخ‌گویی: ۷۵ دقیقه		تعداد کل پرسش‌ها: ۶۵		



دانش آموز گرامی، با اسکن تصویر روبه‌رو و یا مراجعه به کانال @gozine2 در تلگرام و ایتا می‌توانید پاسخ تشریحی آزمون را دریافت کنید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه دو، آزمونک‌ها، رفع اشکال هوشمند، دفترچه پاسخ تشریحی و آرشیو آزمون‌های گزینه دو، با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید.
در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است.
در ثبت نام انفرادی و مدرسه‌ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

۴۱- چند مورد از عبارتهای زیر صحیح هستند؟

(الف) فلزها، نمکها، یخ و شیشه جزء جامدهای بلورین هستند.

(ب) فاصله ذرات سازنده جامد در حد آنگستروم و فاصله ذرات مایع در حد نانومتر است.

(پ) قطرههایی که آزادانه سقوط می کنند تقریباً کروی هستند.

(ت) افزایش دما باعث افزایش نیروی هم چسبی مایع می شود.

(ث) آب سطح شیشه را خیس می کند، چون نیروی دگر چسبی بین آب و شیشه بیشتر از نیروی هم چسبی بین مولکولهای آب است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۲- افزایش دما باعث کاهش مقاومت می شود و در مقاومت های نوری (LDR) با افزایش شدت نور، مقاومت می یابد.

(۱) نیم رسانا- افزایش (۲) رسانا- کاهش (۳) نیم رسانا- کاهش (۴) رسانا- افزایش

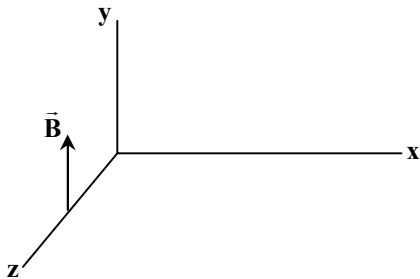
۴۳- هسته پرتوزای X با گسیل ۳ ذره آلفا و ۴ پرتو گاما به هسته Y تبدیل می شود. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

(۱) اختلاف عدد جرمی X و Y برابر ۲ است. (۲) اختلاف تعداد نوترون های X و Y برابر ۶ است.

(۳) اختلاف عدد جرمی X و Y برابر ۶ است. (۴) اختلاف تعداد نوترون های X و Y برابر ۲ است.

۴۴- میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در یک لحظه در نقطه M مطابق شکل زیر است. جهت میدان الکتریکی و جهت پیشروی موج

در نقطه M در این لحظه به ترتیب از راست به چپ مطابق کدام گزینه می تواند باشد؟



(۱) $-x$ و $+z$

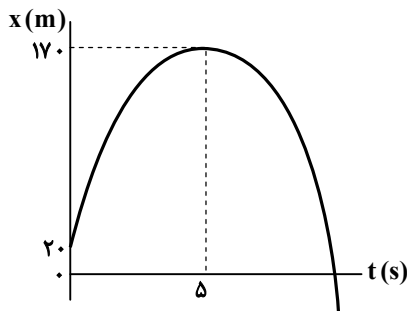
(۲) $+x$ و $+z$

(۳) $+x$ و $+z$

(۴) $-x$ و $-z$

۴۵- نمودار مکان-زمان یک حرکت با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم مطابق شکل مقابل است. مسافت طی شده در ۴ ثانیه دوم ($t = 4s$ تا $t = 8s$)

چند متر است؟



(۱) ۱۰۰

(۲) ۸۰

(۳) ۶۰

(۴) ۴۰

۴۶- متحرکی روی محور x با تندی ثابت $10 \frac{m}{s}$ در حرکت است. اگر فاصله متحرک در دو لحظه $t_1 = 3s$ و $t_2 = 11s$ از مکان $x = 8m$ برابر

باشد، معادله مکان-زمان آن در SI کدام می تواند باشد؟

(۱) $x = 10t + 62$

(۲) $x = -10t + 78$

(۳) $x = 10t + 78$

(۴) $x = -10t + 62$

محل انجام محاسبات:

۴۷- خودرویی با سبزشدن چراغ با شتاب ثابت $\frac{1}{25} \frac{m}{s^2}$ از حال سکون روی خط راست به راه می‌افتد. همان لحظه کامیونی با تندی $90 \frac{km}{h}$

از آن سبقت می‌گیرد. در بازه زمانی که فاصله خودرو تا کامیون در حال کاهش است، خودرو چه مسافتی را برحسب متر طی می‌کند؟

- ۱) ۱۰۰۰ (۲) ۷۵۰ (۳) ۵۰۰ (۴) ۲۵۰

۴۸- مطابق شکل، در یک لحظه سنگی از نقطه A رها می‌شود و ۲ ثانیه بعد از آن، سنگ دیگری

از نقطه B رها می‌شود. اگر ۲ ثانیه بعد از رهاشدن سنگ دوم، فاصله سنگ‌ها از یکدیگر ۲۰

متر باشد، تندی سنگی که از نقطه A رها شده است، هنگام رسیدن به زمین، چند متر بر

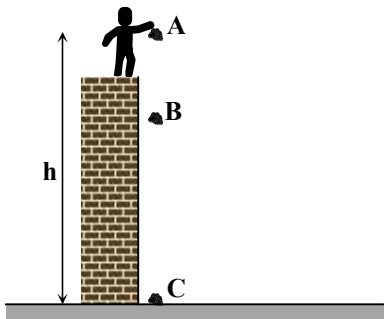
ثانیه می‌شود؟ (مقاومت هوا قابل چشم‌پوشی است، $BC = \frac{3}{2} AB$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) $20\sqrt{10}$ یا $20\sqrt{5}$

(۲) $10\sqrt{10}$ یا $20\sqrt{5}$

(۳) $40\sqrt{5}$ یا $20\sqrt{10}$

(۴) $10\sqrt{10}$ یا $40\sqrt{5}$



۴۹- جسمی به فاصله $20000 km$ تا مرکز زمین است. اگر آن را $10000 km$ به زمین نزدیک کنیم، نیروی گرانشی وارد بر آن از طرف زمین $3 N$

تغییر می‌کند. جرم جسم چند کیلوگرم است؟ (حاصل ضرب جرم زمین در ثابت جهانی گرانش را در SI برابر 4×10^{24} فرض کنید.)

- ۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۰- در شکل «الف»، وقتی آسانسور به صورت تندشونده با شتاب $3 \frac{m}{s^2}$ پایین

می‌رود، بزرگی نیروی کشش طناب 35 نیوتون می‌شود. در شکل «ب»، ثابت فنر

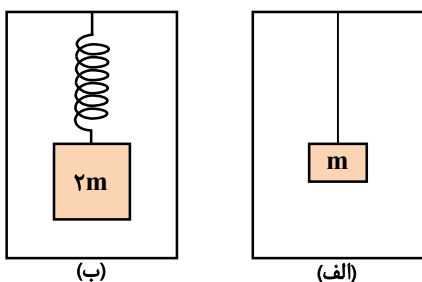
1500 نیوتون بر متر و طول فنر 8 سانتی‌متر بیشتر از طول عادی آن است. بزرگی

شتاب آسانسور چند متر بر مربع ثانیه است؟ (از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید و

شتاب حرکت وزنه و آسانسور را یکسان در نظر بگیرید و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) $2/5$ (۲) ۲

(۳) ۵ (۴) ۴



۵۱- در شکل مقابل، اگر $F_1 = 200 N$ و $F_2 = 180 N$ باشد، وزنه در آستانه لغزیدن

خواهد بود. برای آنکه در حالت $F_2 = 40 N$ وزنه ساکن بماند، کمترین مقدار

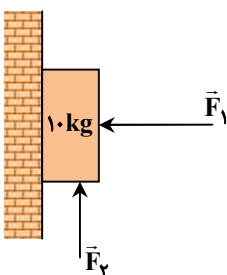
قابل قبول برای بزرگی F_1 چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) ۱۰۰

(۲) ۲۰۰

(۳) ۱۵۰

(۴) ۲۵۰



محل انجام محاسبات:

۵۲- یک قرص در صفحه افقی قرار دارد و به دور محور قائمی که از مرکز آن می‌گذرد، به صورت یکنواخت در هر دقیقه ۱۰ مرتبه می‌گردد. وزنه‌ای به جرم

۴ کیلوگرم روی سطح قرص و به فاصله ۲ متر از مرکز آن قرار دارد و نمی‌لغزد. چند مورد از جمله‌های زیر درست است؟ ($\pi^2 = 10$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

الف) تندی متوسط وزنه در مدت ۱۰ ثانیه برابر $\frac{\pi}{3}$ متر بر ثانیه است.

ب) شتاب و سرعت لحظه‌ای وزنه بر هم عمود هستند.

پ) ممکن است ضریب اصطکاک ایستایی بین وزنه و سطح قرص $0/4$ باشد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۵۳- اگر طول یک آونگ ساده ۴۴ درصد اضافه شود، تعداد نوسان‌های آن در هر دقیقه ۱۰ تا تغییر می‌کند. طول اولیه آونگ چند سانتی‌متر است؟

($g = \pi^2 = 10 \frac{m}{s^2}$)

۲۵ (۱) $\frac{75}{4}$ (۲) ۵۰ (۳) $\frac{25}{2}$ (۴)

۵۴- معادله حرکت هماهنگ ساده یک نوسانگر جرم- فنر در SI، $x = 0/04 \cos 100\pi t$ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل آن ۳ J است،

تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟ (جرم نوسانگر را ۱۰۰g فرض کنید و $\pi^2 = 10$)

۱۰ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴)

۵۵- منبع S، صوت را در همه جهت‌ها در هوا پخش می‌کند. اگر مساحت

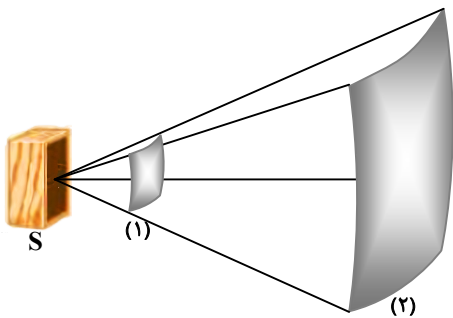
سطح (۲) هشت برابر مساحت سطح (۱) و تراز شدت صوت در محل

سطوح (۲) و (۱) به ترتیب ۹۳ و ۱۰۳ دسی‌بل باشد، چه کسری از انرژی

صوت در فاصله این دو سطح توسط هوا جذب شده است؟

$\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۱)

$\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{25}$ (۳)



۵۶- مسیر یک پرتو نور در بازتابش متوالی از ۳ آینه تخت در شکل دیده

می‌شود. اگر زاویه بازتابش از آینه (۲) برابر ۳۰ درجه باشد، زاویه θ

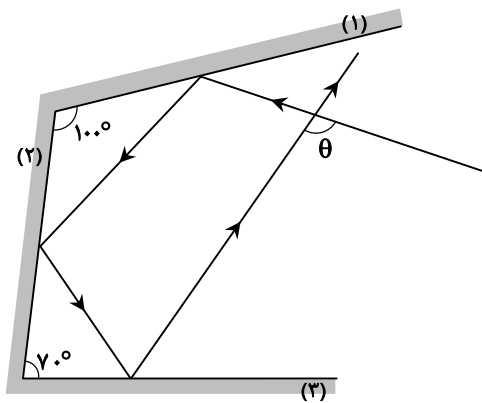
چند درجه است؟

۱۰۰ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۱۰ (۳)

۱۳۰ (۴)



محل انجام محاسبات:

۵۷- در یک تار دو سر بسته هنگام ارتعاش با بسامد ۵۰ هرتز، ۵ گره تشکیل شده که فاصله میان هر یک از آن‌ها با شکم مجاور آن ۱۰ سانتی‌متر است. اگر نیروی کشش تار ۱۰۰ نیوتون باشد، جرم تار چند گرم است؟

- ۱۰۰ (۱) ۲۰۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۲۵۰ (۴)

۵۸- طول موج آستانه برای یک فلز λ_1 است. با این فلز آزمایش فوتوالکتریک را یک مرتبه با طول موج $\frac{1}{4}\lambda_1$ و بار دیگر با طول موج $\frac{1}{6}\lambda_1$ انجام می‌دهیم. اگر اختلاف انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌ها در دو آزمایش ۹ الکترون‌ولت شود، طول موج λ_1 چند نانومتر است؟

($hc = 1200 \text{ eV} \cdot \text{nm}$)

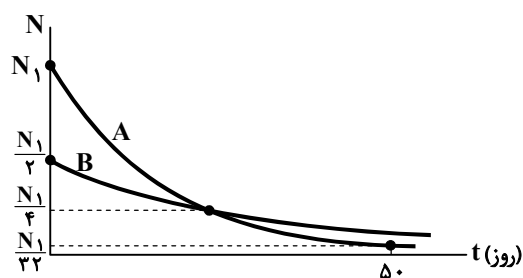
- $\frac{710}{3}$ (۱) $\frac{760}{3}$ (۲) $\frac{800}{3}$ (۳) $\frac{850}{3}$ (۴)

۵۹- اگر الکترون اتم هیدروژن در حالت $n = 3$ باشد، بلندترین طول موجی که می‌تواند نماید، تقریباً نانومتر است.

($R = 0.01 \text{ (nm)}^{-1}$)

- جذب - ۴۴۰۰ (۱) گسیل - ۱۱۲ (۲) گسیل - ۶۲۰ (۳) جذب - ۲۰۶۰ (۴)

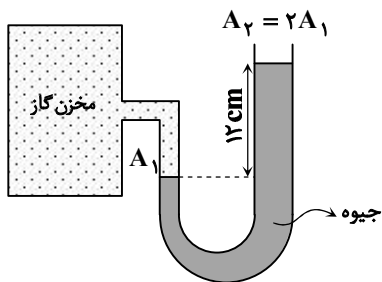
۶۰- نمودار تعداد هسته‌های مادر پرتوزای دو ماده A و B بر حسب زمان مطابق شکل است. نیمه‌عمر ماده B چند روز است؟



- ۱۰ (۱)
۲۰ (۲)
۵ (۳)
۲۵ (۴)

۶۱- در شکل مقابل، سطح مقطع قسمت سمت راست لوله دو برابر سطح مقطع قسمت سمت چپ آن است. اگر با گرم کردن مخزن گاز، فشار

پیمانه‌ای آن دو برابر شود، سطح مایع در لوله سمت راست چند سانتی‌متر بالا می‌رود؟ ($\rho = 13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



- ۴ (۱)
۶ (۲)
۸ (۳)
۱۲ (۴)

۶۲- در مدتی که کار برابری نیروهای وارد بر جسمی به جرم ۲ کیلوگرم، ۲۰۰ ژول است، تندی جسم ۳ برابر می‌شود. بزرگی تغییرات تکانه جسم در SI کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱۵ (۱) ۲۵ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴)

محل انجام محاسبات:

۶۳- دمای جسمی برحسب درجه سلسیوس ۴ برابر می شود. اگر دمای آن برحسب کلونین ۷۵ درصد افزایش یابد، دمای ثانویه جسم چند درجه فارنهایت است؟

۱۱۷۸ / ۶ (۴)

۶۸۷ / ۲ (۳)

۴۸۷ (۲)

۳۹۶ (۱)

۶۴- ۱۰۰ گرم یخ با دمای ۲۰- درجه سلسیوس را داخل ظرف محتوی ۲۰۰ گرم آب با دمای θ می اندازیم. پس از تعادل جرم یخ ۴۰ گرم می شود. اگر ظرفیت گرمایی ظرف و اتلاف حرارتی ناچیز باشد، θ چند درجه سلسیوس است؟

$(L_F = 336000 \frac{J}{kg}$ و $c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{J}{kg \cdot K}$ ، $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{J}{kg \cdot K}$)

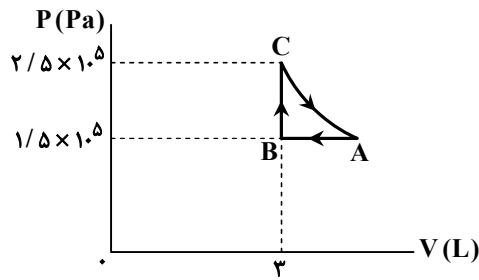
۱۳ (۴)

۱۸ (۳)

۲۴ (۲)

۲۹ (۱)

۶۵- نمودار P-V چرخه‌ای مربوط به گاز آرمانی مطابق شکل مقابل بوده و فرایند CA هم‌دما است. گرمای داده شده به گاز در چرخه برحسب ژول، کدام یک از گزینه‌های زیر می تواند باشد؟



۳۰۰ (۱)

۱۵۰ (۲)

۱۰۰ (۳)

۸۰ (۴)

۶۶- فاصله زمین تا سیاره نپتون ۳۰ برابر یکای نجومی است. این فاصله چند سال نوری است؟ (میانگین فاصله زمین تا خورشید را $1/5 \times 10^{11} m$

و یک سال را $3 \times 10^7 s$ فرض کنید، $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

5×10^{-2} (۴)

2×10^{-2} (۳)

5×10^{-4} (۲)

2×10^{-4} (۱)

۶۷- چگالی سطحی بار کره رسانای A دو برابر چگالی سطحی بار کره رسانای B و بار کره A نصف بار کره B است. نسبت بار به شعاع کره رسانای A $(\frac{q_A}{R_A})$ چند برابر نسبت بار به شعاع کره رسانای B $(\frac{q_B}{R_B})$ است؟

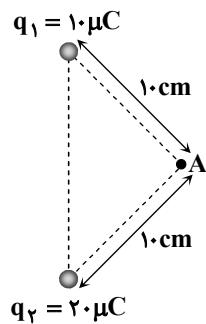
۴ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۶۸- در شکل داده شده، دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به هم نیروی الکتریکی ۹۰ نیوتون وارد می کنند.



بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه A چند نیوتون بر کولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$

9×10^6 (۱)

18×10^6 (۲)

$18\sqrt{2} \times 10^6$ (۳)

$9\sqrt{5} \times 10^6$ (۴)

محل انجام محاسبات:

۶۹- خازن تختی که بین صفحات آن دی الکتریک با ثابت $\frac{2}{5}$ قرار دارد، به یک باتری متصل و انرژی ذخیره شده در آن U است. در ابتدا دی الکتریک را از بین صفحات بیرون آورده و سپس خازن را از باتری جدا می کنیم. اگر در این حالت، فاصله بین صفحات خازن را ۳ برابر کنیم، انرژی ذخیره شده در آن چند برابر U می شود؟

۷/۵ (۴)

۱/۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{5}{6}$ (۱)

۷۰- آمپرساعت یکای اندازه گیری کدام کمیت است؟

بار الکتریکی (۴)

مقاومت الکتریکی (۳)

پتانسیل الکتریکی (۲)

جریان الکتریکی (۱)

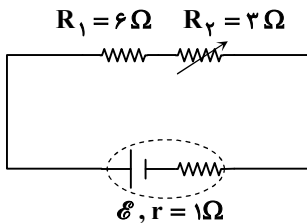
۷۱- در مدار شکل روبه رو، اگر مقاومت متغیر R_p را ۲ اهم افزایش دهیم، شدت جریان در مدار 0.1 آمپر کاهش می یابد. توان تولیدی مولد در این حالت چند وات است؟

۳ (۱)

۳/۶ (۲)

۲/۲۵ (۳)

۲/۷۵ (۴)



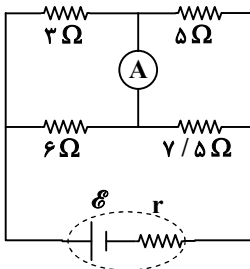
۷۲- در مدار شکل زیر، توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی برابر $12 W$ است. جریان گذرنده از آمپرسنج آرمانی چند آمپر است؟

۰/۲ (۱)

۰/۲۵ (۲)

۰/۴ (۳)

۰/۵ (۴)



۷۳- پیچۀ مسطحی به شعاع R حامل جریان I بوده و بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز آن B است. اگر پیچه را باز کرده و آن را به شکل سیم لوله ای با شعاع $\frac{R}{10}$ در آورده و از آن همان جریان I را عبور دهیم، طول سیم لوله چند برابر شعاع حلقه پیچۀ مسطح باشد تا بزرگی

میدان یکنواخت داخل آن $4B$ شود؟

۱۰ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۲۰ (۱)

۷۴- نمودار شار مغناطیسی گذرنده از مدار بسته ای شامل ۲۰ دور به مقاومت ۴ اهم مطابق شکل است. مقدار بار الکتریکی عبوری از مقطع سیم در بازه زمانی

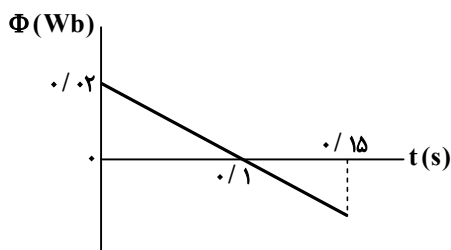
 $t_1 = 0$ تا $t_2 = 0.15 s$ چند کولن است؟

۰/۶ (۱)

۰/۳ (۲)

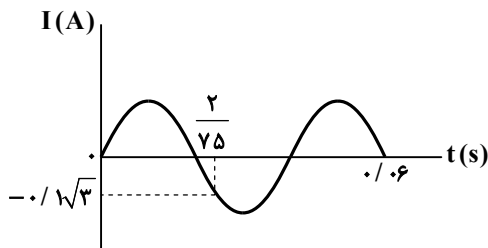
۰/۱۵ (۳)

۰/۱ (۴)



محل انجام محاسبات:

۷۵- نمودار جریان الکتریکی حاصل از مولد جریان متناوبی که به مقاومت ۶ اهم متصل است، مطابق شکل داده شده است. بیشینه نیروی محرکه مولد چند ولت است؟



(۱) ۰/۹

(۲) ۱/۲

(۳) ۱/۵

(۴) ۱/۸

۷۶- عنصر X دارای ۳ ایزوتوپ ^{70}X ، ^{72}X و ^{75}X است. اگر فراوانی سنگین ترین ایزوتوپ آن ۴ برابر فراوانی سبک ترین ایزوتوپ باشد، درصد فراوانی ایزوتوپ ^{72}X چقدر است؟ (جرم اتمی میانگین این عنصر ۷۳ amu است.)

(۴) ۵۰

(۳) ۴۰

(۲) ۲۵

(۱) ۲۰

۷۷- شمار اتم‌های موجود در ۷۹ گرم از یک ترکیب آلی با فرمول کلی $C_nH_{2n+2}O$ ، $16/5$ برابر عدد آووگادرو است. نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در این مولکول چقدر خواهد بود؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

(۴) ۲/۲

(۳) ۲/۰

(۲) ۱/۱

(۱) ۱/۰

۷۸- اگر در یون $^{70}M^{3+}$ تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها برابر عدد اتمی دومین فلز قلیایی در جدول تناوبی باشد، کدام مطلب درست است؟

(۱) در اتم M، ۷ زیرلایه از الکترون اشغال شده‌اند.

(۲) اتم M با از دست دادن سه الکترون به آرایش پایدار هشت تایی می‌رسد.

(۳) در اتم M مجموع $n+l$ الکترون‌های ظرفیتی برابر ۱۳ است.

(۴) این عنصر به دسته d از جدول دوره‌ای تعلق دارد.

۷۹- در چند مورد از گونه‌های زیر شمار الکترون‌های ناپیوندی از شمار الکترون‌های پیوندی بیشتر است؟



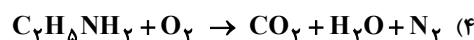
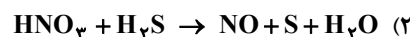
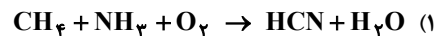
(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۸۰- در کدام یک از واکنش‌های زیر، نسبت مجموع ضرایب مولی فراورده‌ها به واکنش‌دهنده‌ها پس از موازنه بیشتر است؟



محل انجام محاسبات:

۸۱- اگر ۱۰ میلی‌لیتر از یک محلول ۸۷ درصد جرمی از پتاسیم سولفات که چگالی آن $1/5 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ است، را با آب رقیق کرده و به حجم نهایی ۵۰۰ میلی‌لیتر برسانیم، غلظت یون پتاسیم در محلول نهایی به تقریب برابر چند ppm خواهد بود؟ (چگالی محلول رقیق شده $1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ است.)

($O = 16, S = 32, K = 39 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۵۸۵ (۱) ۵۵۹ (۲) ۱۰۸۰۰ (۳) ۱۱۷۰۰ (۴)

۸۲- با سرد کردن ۱۸ گرم محلول سیر شده پتاسیم نیترات از دمای 50°C تا 10°C مقداری از این نمک رسوب کرده است. برای اینکه نمک رسوب کرده در دمای 10°C به طور کامل در آب حل شود، به تقریب چند گرم آب باید به محلول اضافه کنیم؟ (انحلال پذیری پتاسیم نیترات در دماهای 10°C و 50°C را به ترتیب برابر با ۲۰ و ۹۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب در نظر بگیرید.)

۹/۵ (۱) ۱۸۶ (۲) ۳۳ (۳) ۳۰/۳ (۴)

۸۳- با توجه به جدول داده شده در مورد سه ترکیب آلی با جرم مولی یکسان، چند مورد از عبارتهای زیر نادرست هستند؟

ماده	گشتاور دوقطبی (D)	نقطه جوش (K)
A	۱/۴۲	۳۰۰
B	۲/۰۷	۳۸۶
C	۰/۰۵	۲۱۰

(۱) در بین ترکیب‌های داده شده، یک ماده در دمای اتاق به شکل گاز وجود دارد.

(۲) مخلوط ترکیب B با هگزان و مخلوط ترکیب C با آب، مخلوط‌های ناهمگن به شمار می‌روند.

(۳) ماده B نسبت به دو ماده دیگر در میدان الکتریکی جهت‌گیری بیشتری دارد.

(۴) گشتاور دوقطبی دو ماده C و B بیشتر از گشتاور دوقطبی هیدروژن سولفید است.

۸۴- با توجه به پنج عنصر اول گروه ۱۴ جدول دوره‌ای پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه به ترتیب از راست به چپ بیان شده است؟
الف) چند عنصر سطح صیقلی دارند؟

ب) چند عنصر توانایی از دست دادن الکترون‌های ظرفیتی خود را دارند؟

پ) چند عنصر در اثر ضربه خرد نمی‌شوند؟

۲، ۱، ۴ (۱) ۲، ۲، ۴ (۲) ۲، ۱، ۳ (۳) ۳، ۲، ۳ (۴)

۸۵- اگر از واکنش ۱۰ گرم از $\text{LiAlH}_4(\text{s})$ ناخالص با آب مطابق معادله زیر $22/4 \text{ L}$ گاز در شرایط STP تولید شود، درصد خلوص

$\text{LiAlH}_4(\text{s})$ کدام است؟ ($H = 1, Li = 7, Al = 27 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) (معادله موازنه شود.)



۸۰ (۱) ۸۵ (۲) ۹۰ (۳) ۹۵ (۴)

۸۶- چند مورد از خواص زیر با افزایش جرم مولی آلکان‌ها افزایش نمی‌یابد؟

■ چسبندگی

■ انحلال پذیری در آب

■ گرانروی

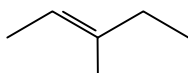
■ نیروی واندروالس

■ میزان فرار بودن

■ نقطه جوش

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

محل انجام محاسبات:



۸۷- با توجه به ساختار روبه‌رو، کدام موارد درست است؟ ($\text{Br} = 80 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

الف) تفاوت شمار گروه‌های CH_3 و CH_2 در آن برابر ۲ است.

ب) 0.1 مول از آن با 8 گرم برم، به‌طور کامل واکنش می‌دهد.

پ) شمار پیوندهای $\text{C}-\text{H}$ در آن ۳ برابر شمار پیوندهای $\text{C}-\text{C}$ است.

ت) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در آن با شمار اتم‌های هیدروژن در چهارمین عضو خانواده آلکان‌ها برابر ۴ است.

۱) «الف» و «پ» (۲) «الف» و «ت» (۳) «ب» و «ت» (۴) «ب» و «پ» (۴)

۸۸- واکنش $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{NH}_3(\text{g})$ در یک ظرف 10 لیتری با تعداد مول‌های معینی از گازهای نیتروژن و هیدروژن شروع می‌شود. اگر سرعت تولید آمونیاک 0.6 مول بر لیتر بر دقیقه باشد و پس از سه دقیقه از شروع واکنش 3 مول گاز هیدروژن در ظرف موجود باشد، تعداد مول‌های اولیه هیدروژن کدام بوده است؟

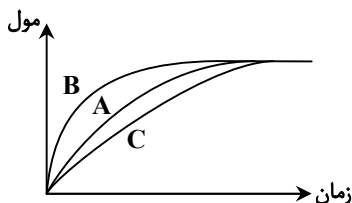
۱) 25 (۲) 30 (۳) 25 (۴) 40

۸۹- یک تیغه مسی را در 125 میلی‌لیتر محلول نقره نیترات با غلظت 0.48 مول بر لیتر وارد می‌کنیم. که پس از 10 دقیقه و مصرف شدن مقداری از تیغه، واکنش به پایان می‌رسد. سرعت متوسط مصرف فلز مس چند مول بر ثانیه است و غلظت کدام یون در طول واکنش تغییر نمی‌کند؟

۱) NO_3^- ، 1×10^{-4} (۲) Cu^{2+} ، 1×10^{-4}

۳) NO_3^- ، 5×10^{-5} (۴) Cu^{2+} ، 5×10^{-5}

۹۰- با توجه به نمودار مقابل کدام گزینه نادرست بیان شده است؟



۱) اگر نمودار A نشان‌دهنده تغییر مول‌های یکی از مواد فراورده در واکنش باشد، نمودار B می‌تواند مربوط به استفاده از کاتالیزگر در واکنش باشد.

۲) اگر نمودار A نشان‌دهنده تولید یک رادیکال در بدن باشد، نمودار B می‌تواند مربوط به استفاده از لیکوپن در روند تولید آن باشد.

۳) اگر نمودار C نشان‌دهنده روند تولید مول‌های یک فراورده باشد، نمودار A و B می‌توانند مربوط به استفاده از دو کاتالیزگر متفاوت باشند.

۴) نمودار نشان می‌دهد که عوامل مؤثر بر سرعت واکنش، بر مقدار فراورده تولیدشده تأثیری ندارند.

۹۱- کدام مورد نادرست است؟

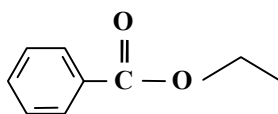
۱) تفاوت جرم مولی سیانواتن با پروپن برابر عدد اتمی فلز قلیایی دوره سوم جدول تناوبی است. ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{N} = 14 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۲) پلی‌اتن سنگین، ساختاری بدون شاخه دارد که در حضور کاتالیزگر از گاز اتن به‌دست می‌آید.

۳) کیسه‌های پلاستیکی رایج در بازار از پلی‌اتن سبک است.

۴) از پلیمر شدن کلرو اتان، پلی‌وینیل کلرید به‌دست می‌آید.

۹۲- ترکیب روبه‌رو یک بوده که سازنده آن است.



۱) کربوکسیلیک اسید آروماتیک - الکل - اتانول

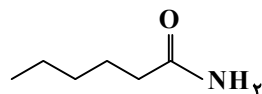
۲) کربوکسیلیک اسید آروماتیک - اسید - بنزوئیک اسید

۳) استر - الکل - اتانول

۴) استر - اسید - اتانوئیک اسید

محل انجام محاسبات:

۹۳- از آبکافت آمید نشان داده شده کربوکسیلیک اسیدی به دست می آید که از واکنش آن با ۱- پروپانول، استری ساخته می شود که نام آن است.



(۱) پروپیل هگزانوآت

(۲) هگزیل پروپانوآت

(۳) پروپیل پنتانوآت

(۴) پنتیل پروپانوآت

۹۴- به ۶۰ mL محلولی از اسید HA با $\text{pH} = 0.3$ و $K_a = 0.1$ چند میلی لیتر آب مقطر بیافزاییم تا در دمای اتاق، محلولی با $\text{pH} = 0.7$ به دست آید؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۵۴۰

۹۵- در بین عبارتهای زیر چند عبارت درست است؟

(الف) نیروی بین مولکولی غالب در چربیها مشابه هیدروکربنها است.

(ب) مخلوط آب، صابون و روغن کلئوئید پایدار است.

(پ) مواد سازنده رنگهای پوششی مانند TiO_2 و Fe_2O_3 از نوع کلئوئید هستند.

(ت) قدرت پاک کنندگی صابون به نوع پارچه، دما، نوع آب، نوع و مقدار صابون وابسته است.

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۹۶- ۱۰۰ mL محلولی از HCl با $\text{pH} = 0.3$ و ۲۵۰ mL محلولی از HNO_3 با $\text{pH} = 0.7$ را مخلوط می کنیم، این مخلوط توسط چند گرم

پتاس سوزآور با خلوص ۷۰٪ خنثی می شود؟ ($H = 1, O = 16, K = 39 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۹۷- در سلول گالوانی استاندارد Al-Cu (حجم هر دو محلول ۱۰ لیتر است.) ($N_A = 6 \times 10^{23}$, $Al = 27, Cu = 64 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) به ازای مبادله $3/6 \times 10^{24}$ الکترون، ۱۹۲ گرم از جرم محلولها کاسته می شود.

(۲) اختلاف غلظت کاتیونها در محلول آندی و کاتدی به ۰/۵ مولار می رسد.

(۳) تغییر جرم تیغه آندی بیش از تیغه کاتدی است.

(۴) به مرور زمان، محلول کاتدی پررنگ تر و محلول آندی کم رنگ تر می شود.

۹۸- مجموع تغییر عدد اکسایش کربن در سوختن کامل یک مول بنزن چند برابر مجموع تغییر عدد اکسایش اتمهای کربن در تبدیل یک مول اتن به ضدیخ است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۹۹- تعداد الکترون مبادله شده در یک سلول سوختی ناشی از مصرف ۶ گرم گاز هیدروژن باعث تولید چند مول فلز کروم از پتاسیم دی کرومات

($K_2Cr_2O_7$) در یک سلول الکترولیتی می شود؟ ($H = 1 g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۰- کدام عبارت نادرست است؟

(۱) واکنش کاتدی خوردگی آهن در محیط اسیدی به صورت $2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow 2OH^-(aq) + H_2(g)$ است.

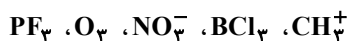
(۲) اگر در سطح حلبی خراش عمیقی ایجاد شود با ایجاد یک سلول گالوانی، آهن در نقش آند خواهد بود.

(۳) برای تولید فلز منیزیم از منیزیم کلرید مذاب در یک سلول الکترولیتی استفاده می شود.

(۴) در فرایند هال برخلاف تولید سدیم در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، تیغه آندی وارد واکنش می شود.

محل انجام محاسبات:

۱۰۱- نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی چند مورد از ذرات زیر مشابه SO_3 است؟



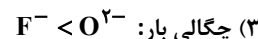
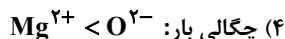
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۰۲- کدام مقایسه به درستی انجام شده است؟



۱۰۳- کدام عبارت نادرست است؟

(۱) آنتالپی فروپاشی AlF_3 نسبت به MgO بزرگ تر است.

(۲) اختلاف آنتالپی فروپاشی MgF_2 و NaF بیشتر از همین اختلاف در LiF و $NaBr$ است.

(۳) استفاده از Al_2O_3 به جای $NaCl$ به عنوان شاره گرمایی در نیروگاه خورشیدی توصیه نمی شود.

(۴) با اضافه نمودن مقدار کافی گرد روی به نمک وانادیم (V) فلز وانادیم تولید می شود.

۱۰۴- تعادل گازی: $3A + B \rightleftharpoons 3C$ با ۴ مول A، ۱ مول B و ۵ مول C در سامانه‌ای سر بسته برقرار است. با کاهش حجم سامانه، کدام مقدار را می توان به تعداد مول C در تعادل جدید نسبت داد؟

۴ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

۱۰۵- کدام عبارت درست است؟

(۱) در تولید ترفتالیک اسید، پارازایلن را در واکنش با محلول رقیق $KMnO_4$ شرکت می دهیم.

(۲) در تولید اتیلن گلیکول، اتن را در واکنش با محلول غلیظ $KMnO_4$ شرکت می دهیم.

(۳) تبدیل غیرمستقیم متان به متانول فرایندی دو مرحله‌ای است، که انرژی فعال سازی هر دو مرحله بسیار زیاد است.

(۴) یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه تر است که بازده درصدی بالایی داشته باشد.

محل انجام محاسبات:

اسامی هیأت علمی آزمون های ویژه داوطلبان کنکور ۱۴۰۴ گروه علوم ریاضی

مدیرگروه	عنوان درس	مسئول درس	طراحان	دستیار مسئول درس
سید امیرمحمد سید شاکری	حسابان و ریاضی پایه	علی افضل زاده	حسین شفیع زاده- ایمان اردستانی	عباس سعیدی- امین کبیری
	هندسه	سعید اکبرزاده	سید محسن میراسلامی- علی نعمت	هادی کاظم نژاد
	ریاضیات گسسته	سعید اکبرزاده	علیرضا شریف خطیبی- امیدرضا پورحسینی	فرهاد فرزانی
محمد کشانی محمد حسین	فیزیک	منصور داوودندی	علی نعیمی- بهمن شاهمرادی- احمد رضوانی جمال خم خاجی- احمد مصلاهی	ساناز دریکوندی
	شیمی	شهرام شاه پرویزی	ماشاء الله سلیمانی- بهنام ابراهیم پور- شهرام شاه پرویزی مهرداد ملاصالحی- محمد علی توسلی فر- محمد احمدی	-

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمد رضا محمد هاشمی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

A

دفترچه پاسخ تشریحی

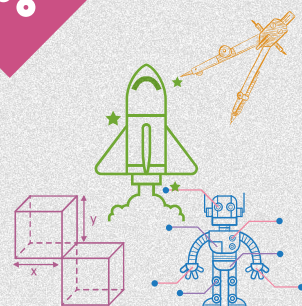
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۲۰ تیر ۱۴۰۴ (جایگزین تاریخ ۳۰ خرداد ۱۴۰۴)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

پایه
دوازدهم

مرحله
۳۰



۱۴۰۳-۱۴۰۴



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir

گزینهدو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۱)



$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

- مجموع جملات دنباله هندسی با قدرنسبت q و جمله اول a_1 برابر است با:



با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$S_9 = 91(a_1 + a_4 + a_7) \Rightarrow \frac{a_1(q^9 - 1)}{q - 1} = 91(a_1 + a_1q^3 + a_1q^6)$$

اکنون عبارت $q^9 - 1$ را با کمک اتحاد تفاضل مکعبات تجزیه می‌کنیم:

$$q^9 - 1 = (q^3)^3 - 1 = (q^3 - 1)(q^6 + q^3 + 1)$$

بنابراین:

$$\frac{a_1(q^3 - 1)(q^6 + q^3 + 1)}{q - 1} = 91a_1(1 + q^3 + q^6) \xrightarrow{a_1 \neq 0} \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 91 \Rightarrow \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = 91$$

$$\xrightarrow{q \neq 1} q^2 + q + 1 = 91 \Rightarrow q^2 + q - 90 = 0 \Rightarrow (q - 9)(q + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 9 \checkmark \\ q = -10 \text{ غلط} \end{cases}$$

از آنجا که دنباله هندسی افزایشی است، پس فقط $q = 9$ قابل قبول است. بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1q^4}{a_1q^2} = q^2 \xrightarrow{q=9} q^2 = 81$$

۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۳، درس ۴)



$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$



با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{10} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 10 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 10 \quad (1)$$

اگر مقدار خواسته شده یعنی $\frac{x^6 + \sqrt{2}x^3 - 1}{x^3}$ را ساده می‌کنیم به عبارت $x^3 - \frac{1}{x^3} + \sqrt{2}$ می‌رسیم. برای محاسبه مقدار این عبارت ابتدا

مقدار $x - \frac{1}{x}$ را محاسبه کرده و با توان ۳ رساندن مقدار خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

بنابراین با فرض $x - \frac{1}{x} = t$ مقدار t را به دست می‌آوریم:

$$x - \frac{1}{x} = t \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = t^2 \xrightarrow{(1)} 10 - 2 = t^2 \Rightarrow t^2 = 8 \Rightarrow t = \pm 2\sqrt{2}$$

چون $0 < x < 1$ ، پس $x < \frac{1}{x}$ و در نتیجه $x - \frac{1}{x}$ عددی منفی است. بنابراین:

$$x - \frac{1}{x} = -2\sqrt{2}$$

اکنون با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$x - \frac{1}{x} = -2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان } 3} (x - \frac{1}{x})^3 = (-2\sqrt{2})^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2(\frac{1}{x}) + 3x(\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{x^3} = -16\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x + \frac{3}{x} = -16\sqrt{2} \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(x - \frac{1}{x}) = -16\sqrt{2} \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} + 6\sqrt{2} = -16\sqrt{2} \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = -22\sqrt{2}$$

حال خواسته مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^6 + \sqrt{2}x^3 - 1}{x^3} = x^3 + \sqrt{2} - \frac{1}{x^3} = x^3 - \frac{1}{x^3} + \sqrt{2} = -22\sqrt{2} + \sqrt{2} = -21\sqrt{2}$$

۳- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)**



- برای هر دو مجموعه دلخواه A و B از مجموعه مرجع U، داریم:

الف) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

ب) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

- برای دو مجموعه دلخواه A و B داریم:

$A - B = A \cap B'$



به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها، داریم:

$$(A - B') \cup (B' - A') \cup (A' - B') = A \Rightarrow (A \cap B) \cup (B' \cap A) \cup (A' \cap B) = A$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)}_{A \cup B} = A \Rightarrow A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow B - A = \emptyset$$

پس گزینه ۴ قطعاً تهی است، زیرا وقتی $B \subseteq A$ حتماً $B' \subseteq A'$ و $B' - A' = \emptyset$.
گزینه‌های ۱ و ۳ نیز تهی هستند، زیرا:

گزینه ۱: $B \times B - A \times B = (B - A) \times B = \emptyset \times B = \emptyset$

گزینه ۳: $B \times A - A \times A = (B - A) \times A = \emptyset \times A = \emptyset$

پس فقط گزینه ۲ ممکن است تهی نباشد، زیرا می‌توان در نظر گرفت:

$A = \{a, b\}$, $B = \{b\}$

$A \times B - B \times A = \{(a, b), (b, b)\} - \{(b, a), (b, b)\} = \{(a, b)\} \neq \emptyset$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۴- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)**



- ترکیب عطفی، فصلی و شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د



جدول ارزش گزاره $A \equiv [p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \wedge r)]$ را تشکیل می‌دهیم.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \wedge r)$	A
د	د	د	د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	د	ن	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	د	د	د	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	د	د	د	د	ن	ن	ن

در ۶ حالت، ارزش گزاره A نادرست است که در ۴ حالت از این ۶ حالت، ارزش گزاره q درست است. پس خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۵- پاسخ: گزینه ۳ **▲** مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)



- به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است:

$$S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$$



α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ هستند؛ بنابراین:

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

برای حل سؤال، صورت و مخرج کسر داده‌شده را در β ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{\alpha^4 \beta^2 + 4\alpha^3 + 22\beta^2}{\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\alpha^4 \beta^3 + 4\alpha^4 \beta + 22\beta^3}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\alpha^4 (\alpha^3 \beta^3) + 4\alpha^4 (\alpha\beta) + 22\beta^3}{\alpha\beta}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=2} A = \frac{16\alpha^4 + 16\alpha^4 + 22\beta^3}{2} \Rightarrow A = 4(\alpha^4 + 2\alpha^4 + 4\beta^3) \quad (1)$$

از طرفی α ریشه معادله است، پس در آن صدق می‌کند و داریم:

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 4\alpha \xrightarrow{\times \alpha^2} \alpha^4 + 2\alpha^2 = 4\alpha^3 \quad (2)$$

بنابراین با جای‌گذاری عبارت (۲) در (۱)، خواهیم داشت:

$$A = 4(4\alpha^3 + 4\beta^3) = 16(\alpha^3 + \beta^3) = 16 \left[\underbrace{(\alpha + \beta)^3}_S - 3 \underbrace{\alpha\beta(\alpha + \beta)}_P \right] = 16 \left[(4^3) - 3(2)(4) \right] = 64$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

۶- پاسخ: گزینه ۳



- اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

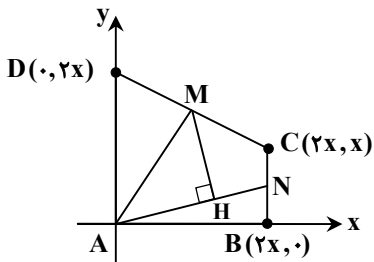
- به طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- به طور کلی اگر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم، می توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$


می خواهیم سؤال را با استفاده از هندسه تحلیلی حل کنیم. فرض می کنیم نقطه A روی مبدأ مختصات باشد، پس $A(0, 0)$. ضمناً با توجه به قائم بودن \hat{A} ، ضلع AB را روی محور طول ها و ضلع AD را روی محور عرض ها در نظر می گیریم. با توجه به اینکه $AB = AD = 2BC$ ؛ اگر طول نقطه B را برابر $2x$ در نظر بگیریم، مختصات نقاط B، C و D به صورت $B(2x, 0)$ ، $C(2x, x)$ و $D(0, 2x)$ درمی آید. پس مختصات نقاط M و N بر حسب x برابر است با:



CD وسط M $\Rightarrow M(\frac{0+2x}{2}, \frac{2x+x}{2}) = (x, \frac{3}{2}x)$

CB وسط N $\Rightarrow N(\frac{2x+2x}{2}, \frac{x+0}{2}) = (2x, \frac{1}{2}x)$

طول AM برابر $\sqrt{52}$ است، بنابراین:

$$AM = \sqrt{52} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}x^2} = \sqrt{52}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{13x^2}{4}} = \sqrt{52} \xrightarrow{x>0} \frac{\sqrt{13}x}{2} = 2\sqrt{13} \Rightarrow x = 4$$

در نتیجه مختصات نقاط M و N به صورت زیر است:

$$x = 4 \Rightarrow M(4, 6), N(8, 2)$$

اکنون معادله خط AN را می نویسیم:

$$\begin{cases} A(0, 0) \\ N(8, 2) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x \Rightarrow x - 4y = 0$$

حال با توجه به فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه $M(4, 6)$ را از خط AN پیدا می کنیم:

$$MH = \frac{|4 - 24|}{\sqrt{1+16}} = \frac{20}{\sqrt{17}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

۷- پاسخ: گزینه ۳



- در ویژگی های تابع جزء صحیح داریم؛ (k عددی صحیح است.)

$$[x+k] = [x] + k; k \in \mathbb{Z}$$



ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left[\frac{4x^2 + 3}{x^2 + 1} \right] = \left[\frac{3x^2 + 3 + x^2}{x^2 + 1} \right] = \left[3 + \frac{x^2}{x^2 + 1} \right] = 3 + \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right]$$

چون $x^2 \geq 0$ و $x^2 + 1 \geq 1$ ، پس صورت کسر $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ حتماً کمتر از مخرج آن است و داریم: $0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1$ بنابراین $\left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right] = 0$ ؛ پس

f تابعی ثابت با ضابطه $f(x) = 3$ است، پس:

$$(f \times g) = \frac{6}{\sqrt{mx^2 - mx + 26}}$$

بیشترین مقدار تابع $f \times g$ برابر $1/2$ یعنی $\frac{6}{5}$ است و این کسر زمانی به ماکزیمم خواهد رسید که مخرج کمترین مقدار باشد. پس کمترین

مقدار سهمی، یعنی عرض رأس سهمی $mx^2 - mx + 26$ برابر ۲۵ است:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 25 \Rightarrow \frac{m^2 - 4(m)(26)}{4m} = -25 \Rightarrow m^2 - 104m = -100m \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \checkmark \\ m = 0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

دقت کنید به‌ازای $m = 4$ سهمی $y = 4x^2 - 4x + 26$ همواره بالای محور طول‌ها قرار دارد (زیرا $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است).

$$\left[-\frac{2}{3}m \right] = \left[-\frac{8}{3} \right] = -3$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر است با:

۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)



- اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ به‌شرط آن‌که مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- (تعریف قدرمطلق):

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$



می‌خواهیم معادله $f(f(2x)) = 0$ را حل کنیم؛ پس ابتدا معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ |x| & x \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{f(x)=0} \begin{cases} x < -1 ; x+2=0 \Rightarrow x=-2 \checkmark \\ x \geq -1 ; |x|=0 \Rightarrow x=0 \checkmark \end{cases}$$

بنابراین $f(0) = f(-2) = 0$ ، اکنون باید معادله‌های $f(2x) = -2$ و $f(2x) = 0$ را حل کنیم:

$$f(2x) = \begin{cases} 2x+2 & 2x < -1 \\ |2x| & 2x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow f(2x) = \begin{cases} 2x+2 & x < -\frac{1}{2} \\ |2x| & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(2x) = -2 \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} ; 2x+2 = -2 \Rightarrow x = -2 \checkmark \\ x \geq -\frac{1}{2} ; |2x| = -2 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

$$f(2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} ; 2x+2 = 0 \Rightarrow x = -1 \checkmark \\ x \geq -\frac{1}{2} ; |2x| = 0 \Rightarrow x = 0 \checkmark \end{cases}$$

پس $x = 0$ ، $x = -1$ و $x = -2$ جواب‌های معادله هستند که مجموع آن‌ها برابر -۳ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

۹- پاسخ: گزینه ۴



- اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
 $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$
 - اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ به شرط آن که مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند:
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



محل برخورد f و f^{-1} نقطه $A(2, 0)$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f^{-1}(2) = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \end{cases}$$

اکنون با توجه به ضابطه f ، داریم:

$$f(x) = a - \sqrt{2x - b} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow a - \sqrt{4 - b} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{4 - b} & (1) \\ f(0) = 2 \Rightarrow a - \sqrt{-b} = 2 \Rightarrow a = \sqrt{-b} + 2 & (2) \end{cases}$$

سمت راست هر دو رابطه (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{4 - b} = \sqrt{-b} + 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} 4 - b = -b + 4\sqrt{-b} + 4 \Rightarrow 4\sqrt{-b} = 0 \Rightarrow b = 0 \xrightarrow{(1)} a = 2$$

با توجه به اینکه به ازای هر عضو دامنه f داریم: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با: $(f^{-1} \circ f)(2a) = (f^{-1} \circ f)(4) = 4$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

۱۰- پاسخ: گزینه ۱



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- دترمینان ماتریس 2×2 به صورت زیر است:

- ویژگی‌های لگاریتم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_a m b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_b a \times \log_a b = 1$$



ابتدا سمت راست معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} \log_4 4 & \log_5 2 \\ \log_2 5 & \log_4 4 \end{matrix} \right| &= (\log_4 4)^2 - (\log_5 2)(\log_2 5) = (\log_4 4)^2 - 1 = (\log_4 4 - 1)(\log_4 4 + 1) = (\log_4 4 - \log_4 1)(\log_4 4 + \log_4 1) \\ &= (\log_4 \frac{4}{1})(\log_4 4 \cdot 1) \end{aligned}$$

حال معادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$\log_4 \frac{4}{1} \times \log_4 (x^2 - 3x) = (\log_4 \frac{4}{1})(\log_4 4) \Rightarrow \log_4 (x^2 - 3x) = \log_4 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 8)(x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -5 \end{cases}$$

پس خواسته سؤال برابر است با:

$$\begin{cases} x = 8 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}(4x - 5) = \log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{\sqrt{3}} 3^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \times 1 = 6 \\ x = -5 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}(4x - 5) = \log_{\sqrt{3}}(-25) \text{ تعریف نشده} \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)



- (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

- برای هر زاویه دلخواه θ ، $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ، $-1 \leq \cos \theta \leq 1$.



با توجه به رابطه داده شده، داریم:

$$\sin 2\alpha > 3 \sin \alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha > 3 \sin \alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha - 3 \sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha (2 \cos \alpha - 3) > 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$$

توجه کنید عبارت $2 \cos \alpha - 3$ همواره منفی است؛ زیرا:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2 \cos \alpha \leq 2 \xrightarrow{-3} -5 \leq 2 \cos \alpha - 3 \leq -1$$

بنابراین $\sin \alpha < 0$ است.

از طرفی:

$$\begin{cases} \sin \alpha < 0 \Rightarrow 3 \sin \alpha < 0 \Rightarrow 3 \sin \alpha - 1 < 0 \quad (1) \\ \frac{3 \sin \alpha - 1}{\cos \alpha} > 0 \xrightarrow{(1)} \cos \alpha < 0 \end{cases}$$

بنابراین $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha < 0$ ، پس α در ناحیه سوم است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

۱۲- پاسخ: گزینه ۱



- اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

- اگر تفاضل زوایا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد، آنگاه داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

- نسبت‌های مثلثاتی مکمل زاویه:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

- اگر تفاضل زوایا π رادیان باشد، آنگاه داریم:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$



زاویه‌های داده شده را برحسب زاویه 15° بازنویسی می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin 105^\circ + \cos 255^\circ}{\sin(-525^\circ) + \cos 195^\circ} = \frac{\sin(90^\circ + 15^\circ) + \cos(270^\circ - 15^\circ)}{-\sin(540^\circ - 15^\circ) + \cos(180^\circ + 15^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{-\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$$

می‌دانیم $0 < \sin 15^\circ < \cos 15^\circ$ ، پس A عددی منفی است.

اکنون با توان رسانی، مقدار A را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

اینجوری هم میشه

برای محاسبه A می توان از اتحاد های $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ و $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ نیز استفاده کرد:

$$A = \frac{\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)} = \frac{\sin(-30^\circ)}{\sin 60^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

اینجوری هم میشه

برای محاسبه A می توان از تانژانت نیز کمک گرفت:

$$A = \frac{\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\tan 15^\circ - 1}{1 + \tan 15^\circ} = -\frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ \times \tan 45^\circ} = -\tan(45^\circ - 15^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- رابطه تانژانت مجموع زوایا:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

- جواب های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

جوابش اینه

ابتدا سمت چپ معادله را با توجه به رابطه تانژانت مجموع دو زاویه ساده می کنیم:

$$\frac{\tan x + \tan 3x}{1 - \tan x \tan 3x} = \tan(x + 3x) = \tan 4x$$

بنابراین داریم:

$$\tan 4x = \cot 2x \Rightarrow \tan 4x = \tan(\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow 4x = k\pi + (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow 6x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب های معادله را در بازه $(0, \pi)$ به دست می آوریم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$

هر ۶ جواب به دست آمده در معادله صدق می کنند و عبارت های $\tan x$ ، $\tan 3x$ و $\cot 2x$ تعریف شده هستند، پس معادله ۶ بازه $(0, \pi)$ دارد.

۱۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

خوبه اینو بدونی

- در رفع ابهام مثلثاتی زمانی که $x \rightarrow 0$ است، سعی می کنیم آن را به عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ برسانیم.

- نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$



حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، برابر صفر است، پس حد صورت نیز باید برابر صفر باشد، تا حاصل حد متناهی شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (b - \cos a\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

اکنون حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b - \cos(a\sqrt{x})}{a \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(a\sqrt{x})}{a \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \sin^2(a\sqrt{x})}{a \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\sin a\sqrt{x}}{a\sqrt{x}} \times a\sqrt{x}\right)^2}{a \frac{\sin x}{x} \times x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2 \frac{x}{2}}{ax} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

حاصل حد برابر b^2 است؛ بنابراین:

$$\frac{a}{2} = b^2 \xrightarrow{b=1} \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر است با:

$$a + 2b = 2 + 2 \times 1 = 4$$



وقتی $u \rightarrow 0$ هم ارزی‌های زیر برقرار است:

$$1 - \cos u \sim \frac{1}{2} u^2, \quad \sin u \sim u$$

حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، برابر صفر است، پس حد صورت نیز برابر صفر خواهد بود:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (b - \cos a\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos a\sqrt{x}}{a \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} (a\sqrt{x})^2}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} a^2 x}{ax} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر است با:

$$a + 2b = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس‌های ۱ و ۲)

۱۵- پاسخ: گزینه ۲



- (تعریف): خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

- اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b$ ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

- خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.



مجانِب افقی تابع خط $y = 1$ است، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)(x^2)}{(ax)(mx^2)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{am} = 1 \Rightarrow am = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{a} \quad (1)$$

خط $x = a$ مجانِب قائم تابع f است و علامت تابع f در اطراف $x = a$ تغییر نکرده است ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$) و از طرفی

$x = a$ ریشهٔ صورت تابع نیز می‌باشد، پس مخرج تابع f باید به صورت ضربی از $(x - a)^3$ باشد.

پس $x = a$ ریشهٔ هر دو عبارت مخرج است:

$$\begin{cases} ax - m = 0 \xrightarrow{x=a} a^2 - m = 0 \Rightarrow a^2 = m \xrightarrow{(1)} a^2 = \frac{1}{a} \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(1)} m = 1 \\ mx^2 - 2mx + 2n = 0 \xrightarrow{m=1} x^2 - 2x + 2n = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - 2 + 2n = 0 \Rightarrow 2n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه ضابطهٔ تابع به صورت مقابل خواهد بود:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x-1)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$$

پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{6n}{m+a} = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = \frac{\frac{9}{4} + 1}{\frac{1}{4}} = 13$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)

۱۶- پاسخ: گزینه ۱



اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$



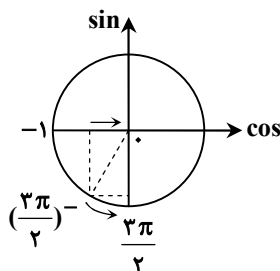
ابتدا توجه کنید که:

$$x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^- \xrightarrow{x < \frac{3\pi}{4}} \begin{cases} 2x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^- \\ 4x < 3\pi \Rightarrow 4x - 3\pi < 0 \end{cases}$$

بنابراین $[-4x + 3\pi] = -1$ است. اکنون حد داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} \frac{\tan 2x}{\sqrt{4x - 3\pi}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} \frac{\sin 2x}{-\cos 2x} = \frac{-1}{+} = -\infty$$

دقت کنید وقتی $2x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$ ، تابع $\cos 2x$ با مقادیر کمتر از صفر به آن نزدیک می‌شود:



▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۷- پاسخ: گزینه ۲



- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه توابع fg و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

- توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم:

$f'(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x$

- اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$



با توجه به قواعد مشتق گیری، می دانیم که:

$$\frac{1}{3}f'(\frac{\pi}{4}) + g'(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{3}f + g)'(\frac{\pi}{4})$$

پس بهتر است ابتدا ضابطه تابع $\frac{1}{3}f + g$ را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3}f(x) &= \frac{|9-6x|-3}{3(\cos^2 x - 1)} = \frac{|6x-9|-3}{-3\sin^2 x} = \frac{3-3|2x-3|}{3\sin^2 x} = \frac{1-|2x-3|}{\sin^2 x} \\ g(x) &= \frac{\sqrt{4x^2-12x+9} + \cot^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{(2x-3)^2} + \cot^2 x}{\sin^2 x} = \frac{|2x-3| + \cot^2 x}{\sin^2 x} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}f + g\right)(x) = \frac{1-|2x-3| + |2x-3| + \cot^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \cot^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^4 x}$$

اکنون مشتق تابع فوق $(y = \frac{1}{\sin^4 x})$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ محاسبه می کنیم:

$$y' = \frac{-4 \sin^3 x \cos x}{\sin^8 x} \Rightarrow y' = \frac{-4 \cos x}{\sin^5 x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y' = \frac{-4(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^5} = \frac{-4}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^4} = \frac{-4}{\frac{1}{4}} = -16$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۱)

۱۸- پاسخ: گزینه ۱



- تعریف مشتق تابع:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- مقدار مشتق تابع در a برابر با شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ای به طول a است.

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۲)



- فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:
 الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.
 ب) جهت تقعر f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.



ابتدا ضابطه تابع f را بدون قدر مطلق می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 10 & x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 10 & x \geq 0 \end{cases}$$

اکنون مشتق اول و دوم تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 12x & x < 0 \\ 3x^2 - 12x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x + 12 & x < 0 \\ 6x - 12 & x > 0 \end{cases}$$

ابتدا با حل معادله $f''(x) = 0$ وجود نقاط عطف f را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{x < 0} x = -2 \text{ طول نقطه عطف} \\ 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{x > 0} x = 2 \text{ طول نقطه عطف} \end{cases}$$

از طرفی تابع f در نقطه مرزی $x = 0$ نیز شرایط نقطه عطف را دارد؛ زیرا اولاً در این نقطه پیوسته است و یک مماس دارد و ثانیاً f'' در $x = 0$ تغییر علامت می دهد؛

$$\begin{cases} x = 0 \text{ پیوستگی در } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 10 \\ x = 0 \text{ مماس واحد در } \Rightarrow f'_-(0) = f'_+(0) = 0 \\ x = 0 \text{ علامت } f'' \text{ در } \Rightarrow f''_-(0) = 12, f''_+(0) = -12 \end{cases}$$

پس نقاطی با طول $x = -2, 2, 0$ نقاط عطف f هستند؛ بنابراین:

$$f(x) = x^3 - 6x|x| + 10 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 8 - 24 + 10 = -6 \\ f(-2) = -8 + 24 + 10 = 26 \\ f(0) = 10 \end{cases}$$

بنابراین مجموع عرض نقاط تابع f برابر ۳۰ است.

۲۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)



- (انحراف معیار داده ها): اگر n داده از جامعه به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، انحراف معیار آن ها را با نماد σ نشان می دهیم، که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$



می دانیم هر چه داده ها به هم نزدیک تر باشند، انحراف معیار آن ها کمتر است.

بدیهی است که در میان دسته های چهار تایی اعداد اول، دسته $\{2, 3, 5, 7\}$ کمترین انحراف معیار را دارد. پس:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2+3+5+7}{4} = \frac{17}{4} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{(2-\frac{17}{4})^2 + (3-\frac{17}{4})^2 + (5-\frac{17}{4})^2 + (7-\frac{17}{4})^2}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{81}{16} + \frac{25}{16} + \frac{9}{16} + \frac{121}{16}}{4}} = \sqrt{\frac{236}{64}} = \frac{\sqrt{236}}{8} = \frac{2\sqrt{59}}{8} = \frac{\sqrt{59}}{4} \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

۲۲- پاسخ: گزینه ۴

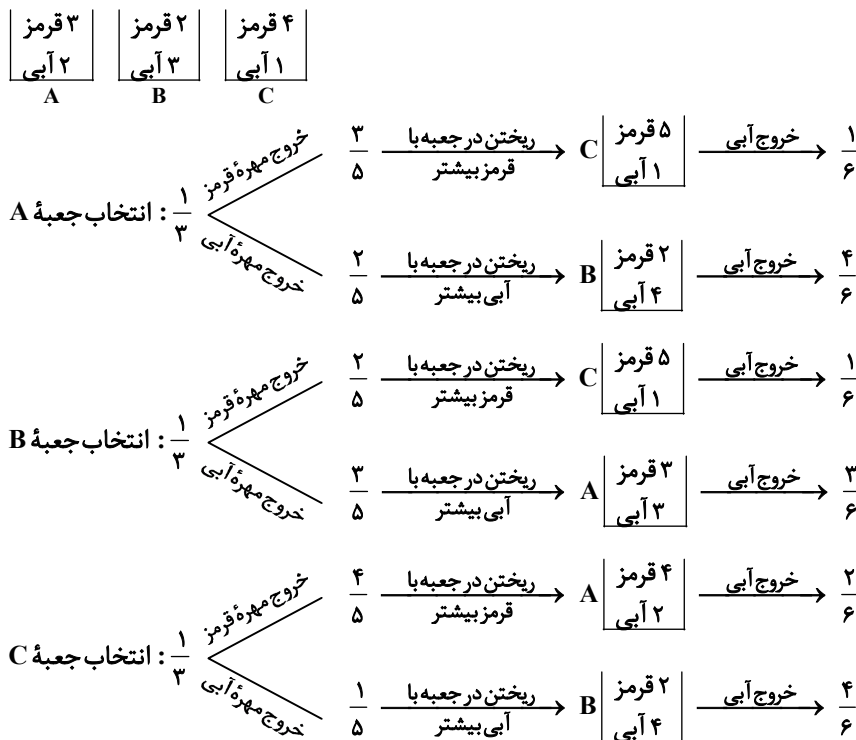


- فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$



بر اساس قانون احتمال کل، حالت‌های مسئله به صورت زیر است.



پس احتمال مورد نظر برابر است با:

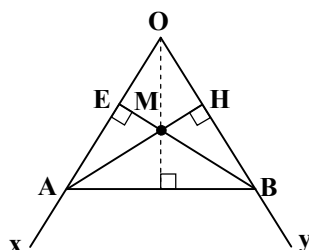
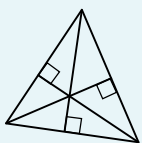
$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{3}{90} + \frac{8}{90} + \frac{2}{90} + \frac{9}{90} + \frac{8}{90} + \frac{4}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۲۳- پاسخ: گزینه ۳



- سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رس هستند.



مطابق شکل، در مثلث OAB ، AH یک ارتفاع و BE ارتفاع دوم است، پس M محل هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث OAB است و باید امتداد OM ، همان ارتفاع سوم مثلث باشد، پس:

$$OM \perp AB$$



۲۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۱)



- در هر n ضلعی، تعداد قطرهای $\frac{n(n-3)}{2}$ است.



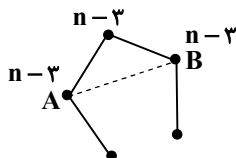
از هر رأس یک n ضلعی $n-3$ قطر می‌گذرد، در محاسبه مجموع قطرهای رسم شده از سه رأس متوالی، مطابق شکل، قطر AB باید یک بار حساب شود، پس:

$$3(n-3) - 1 = 23 \Rightarrow 3(n-3) = 24$$

$$n-3 = 8 \Rightarrow n = 11$$

حال تعداد کل قطرهای را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد قطرهای} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{11 \times 8}{2} = 44$$

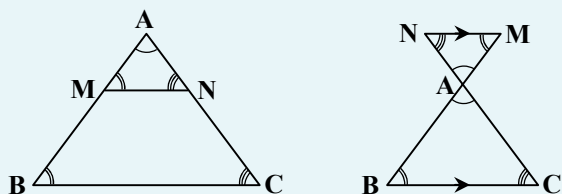


۲۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس‌های ۳ و ۴)



- قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

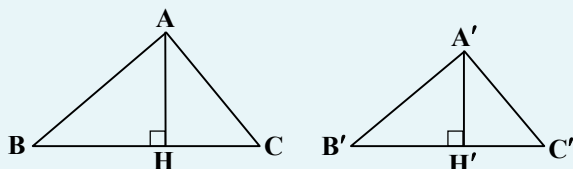


$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

- اگر مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند و نسبت تشابه آن‌ها k باشد $(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k)$ ، آنگاه:

نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آن‌ها k است:

$$\frac{A'H'}{AH} = k$$



طبق قضیه اساسی تشابه داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های متناظر با نسبت تشابه برابر است با فرض $AH = h$ ، داریم:

$$\frac{AK}{AH} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{h-\frac{1}{3}}{h} = \frac{\frac{1}{3}}{a} \Rightarrow \frac{3h-1}{h} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 3ah - 1a = 1h, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah = 16 \Rightarrow ah = 32$$

با جای گذاری $ah = 32$ در رابطه $3ah - 1a = 1h$ داریم:

$$3 \times 32 - 1a = 1h \Rightarrow a + h = 12 \Rightarrow \begin{cases} a + h = 12 \\ ah = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ h = 4 \end{cases}$$

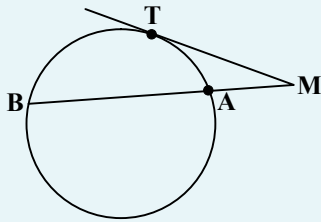
پس: $BC = a = 8$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۲۶- پاسخ: گزینه ۲



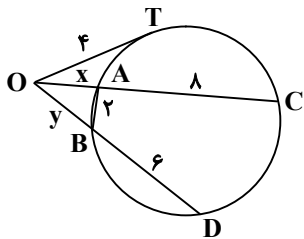
هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع



$$MT^2 = MA \cdot MB$$



با فرض $OA = x$ و $OB = y$ ، بر طبق روابط طولی در دایره، داریم:



$$OT^2 = OA \times OC$$

$$4^2 = x(x+8) \Rightarrow x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$\Delta = 64 + 64 = 128 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm 8\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{x > 0} x = 4\sqrt{2} - 4$$

$$OT^2 = OB \times OD$$

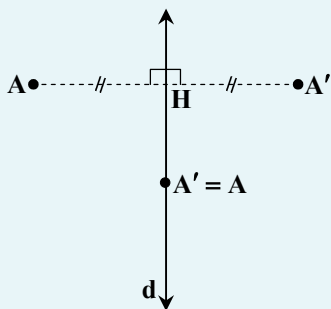
$$4^2 = y(y+6) \Rightarrow y^2 + 6y - 16 = 0$$

$$(y-2)(y+8) = 0 \xrightarrow{y > 0} y = 2$$

$$\Delta_{OAB} \text{ محیط} = OA + OB + AB = 4\sqrt{2} - 4 + 2 + 2 = 4\sqrt{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۲۷- پاسخ: گزینه ۲



برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d، کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$S(A) = A'$$

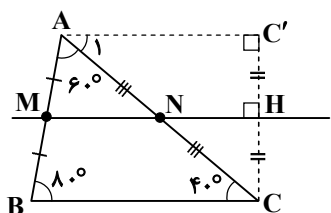
در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می‌شود.

اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.



ابتدا اندازه زاویه C را می‌یابیم:



$$\hat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$$

چون M و N وسط اضلاع AB و AC هستند، داریم:

$$MN \parallel BC$$

از طرفی، طبق تعریف بازتاب، داریم:

$$CH = C'H$$

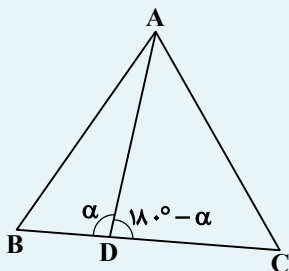
بر طبق عکس قضیه تالس در مثلث ACC' داریم:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{CH}{HC'} = 1 \Rightarrow NH \parallel AC' \Rightarrow AC' \parallel BC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C} = 40^\circ \Rightarrow \hat{BAC}' = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$$



- در مثلث ABC، برای نقطه دلخواه D روی BC، رابطه زیر همواره برقرار است.

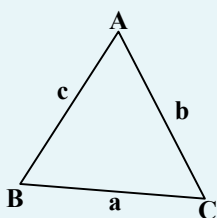
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$



- (قضیه کسینوسها): در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو

ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



در شکل زیر، $BD = x$ و $EC = y$ را در نظر می‌گیریم و قضیه استوارت را در دو مثلث ABD و AEC می‌نویسیم:

$$\triangle ABD: BD^2 \times AE + AD^2 \times BE = AB(DE^2 + AE \times BE)$$

$$\Rightarrow x^2 \times 1 + 2^2 \times 3 = (1+3)(2^2 + 1 \times 3)$$

$$\Rightarrow x^2 + 12 = 28 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

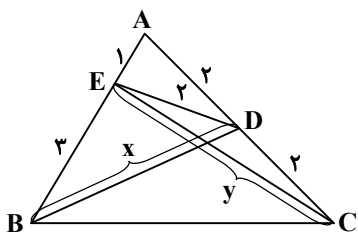
$$\triangle AEC: EC^2 \times AD + AE^2 \times CD = AC(DE^2 + AD \times DC)$$

$$\Rightarrow y^2 \times 2 + 1^2 \times 2 = (2+2)(2^2 + 2 \times 2) \Rightarrow 2y^2 + 2 = 32$$

$$\Rightarrow y^2 = 15 \Rightarrow y = \sqrt{15}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$



با استفاده از قضیه کسینوسها، داریم:

$$\triangle AED: DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow 4 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{4}$$

$$\triangle AEC: EC^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow y^2 = 1 + 16 - 2 \times 1 \times 4 \times \frac{1}{4} = 15 \Rightarrow y = \sqrt{15}$$

$$\triangle ADB: BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow x^2 = 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{4} = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

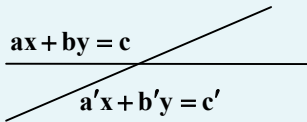
▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۹- پاسخ: گزینه ۲



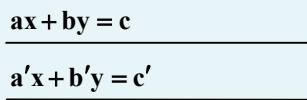
- سه حالت زیر را برای دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ می توان در نظر گرفت:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، در این صورت دو خط متقاطع اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد.

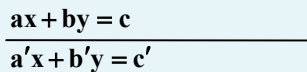


ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ، در این صورت دو خط موازی اند و یکی از دو حالت زیر می تواند رخ دهد:

۱) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، در این حالت دو خط موازی اند و هیچ نقطه اشتراکی ندارند، لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.



۲) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی اند و روی یکدیگر واقع اند یا به عبارتی هر دو معادله یک خط را نشان می دهند، لذا دستگاه تعداد بی شمار جواب دارد و هر نقطه ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می کند.



طبق نکته بالا، داریم:

$$\begin{cases} \Delta kx + 6y = 2 \\ \Delta x + (k-1)y = k \end{cases} : \frac{\Delta k}{\Delta} = \frac{6}{k-1} \neq \frac{2}{k}$$

از رابطه $\frac{\Delta k}{\Delta} = \frac{6}{k-1}$ ، داریم:

$$\Delta k(k-1) = 30 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow (k+2)(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 3 \end{cases}$$

مقادیر فوق را امتحان می کنیم:

$$\begin{cases} k = -2 \Rightarrow \frac{6}{k-1} = \frac{6}{-2-1} = -2 \neq \frac{2}{k} \\ k = 3 \Rightarrow \frac{6}{k-1} = \frac{6}{3-1} = 3 \neq \frac{2}{k} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۳۰- پاسخ: گزینه ۲



- برای ۳ ماتریس A، B و C، داریم:

$$A(B \pm C) = AB \pm AC \quad , \quad (A \pm B)C = AC \pm BC$$



با توجه به فرض $A + B = kI$ ، عبارت $A^2 + kB + AB$ را ساده می‌کنیم:

$$A^2 + kB + AB = (A^2 + AB) + kB = A(A + B) + kB = A(kI) + kB = kA + kB = k(A + B) = k(kI) = k^2I$$

ماتریس $(A^2 + kB + AB)^3$ برابر است با:

$$(A^2 + kB + AB)^3 = (k^2I)^3 = k^6I = \begin{bmatrix} k^6 & 0 & 0 \\ 0 & k^6 & 0 \\ 0 & 0 & k^6 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر $3k^6$ است، پس داریم:

$$3k^6 = 192 \Rightarrow k^6 = 64 \Rightarrow k = \pm 2$$

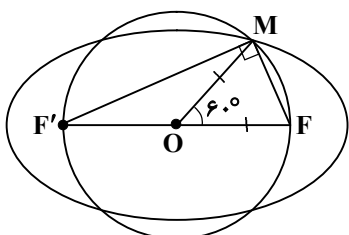
۳۱- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)**



- بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت برابر با مقدار ثابت است. فاصله دو نقطه ثابت از مقدار ثابت، کمتر است.



طبق شکل، زاویه $F'MF$ محاطی روبه‌رو به قطر دایره و 90° است. در مثلث قائم‌الزاویه MFF' ، میانه وارد بر وتر نصف وتر است:



$$MO = OF = c, \quad \angle M\hat{O}F = 60^\circ \Rightarrow \angle OFM = \angle OMF = 60^\circ$$

پس مثلث MOF متساوی‌الاضلاع است و لذا:

$$MF = OF = c$$

حال طبق تعریف بیضی، داریم:

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow c + MF' = 2a \Rightarrow MF' = 2a - c$$

۳۲- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)**



- مراکز تمام دایره‌هایی که از نقاط M و N می‌گذرند، روی عمودمنصف MN قرار دارند.



طبق شکل، مختصات نقطه A وسط MN و شیب MN را می‌یابیم.

$$A = \frac{M+N}{2} = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = (-1, 1), \quad m_{MN} = \frac{3-(-1)}{-3-1} = -1$$

شیب عمودمنصف MN باید ۱ باشد، معادله عمودمنصف MN یعنی معادله OO' را می‌یابیم.

$$OO' : y - 1 = 1 \times (x + 1) \Rightarrow y = x + 2$$

از طرفی:

$$MO = MO' = 5$$

O' و O نقاطی روی عمودمنصف یعنی روی خط $y = x + 2$ هستند که فاصله آن‌ها از M

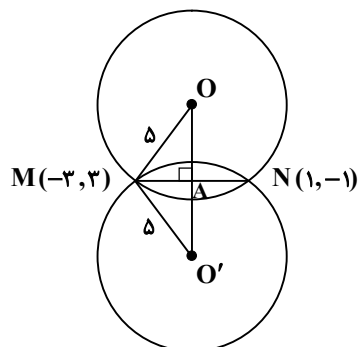
باید ۵ باشد. اگر نقطه روی عمودمنصف را به صورت $(\alpha, \alpha + 2)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$MO = \sqrt{(\alpha + 3)^2 + (\alpha - 1)^2} = 5 \Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha + 9 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 25$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha - 15 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$x_1 + x_2$ همان مجموع ریشه‌های این معادله درجه ۲ است که برابر $\frac{-b}{a}$ می‌باشد:



اینجوری هم میشه



چون شعاع دو دایره برابر است، پس چهارضلعی OMO'N لوزی است و قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند. پس نقطه A وسط OO' نیز می‌باشد و داریم:

$$x_A = \frac{x_O + x_{O'}}{2} \Rightarrow -1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = -2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

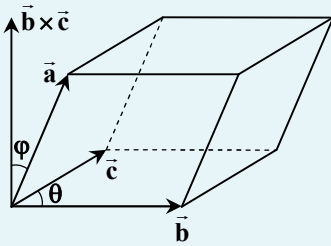
۳۳- پاسخ: گزینه ۱

خوبه اینو بدونی



- حجم متوازی‌السطوح ساخته شده بر روی سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

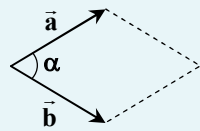


- برای سه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی دو بردار \vec{a} و \vec{b} از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$



جوابش اینه



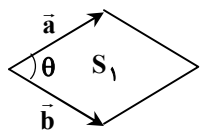
بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = \vec{j} + \vec{k} = (0, 1, 1), \quad \vec{c} = \vec{k} + \vec{i} = (1, 0, 1)$$

حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر روی سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} برابر است با:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \text{حجم متوازی‌السطوح} = V = 2$$

در مورد بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} داریم:



$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

بنابراین تمام وجه‌ها، لوزی‌های برابر با زاویه 60° هستند.

$$S_{\text{کل}} = 6S_1 = 6 \times |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 6 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{V}{S_{\text{کل}}} = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۴، درس ۲)

۳۴- پاسخ: گزینه ۳



- برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

که μ میانگین جامعه است.



با توجه به فرمول برآورد بازه‌ای با اطمینان ۹۵ درصد، داریم:

$$\begin{cases} \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{100}} = 4/6 \\ \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{100}} = 5/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} - \frac{\sigma}{5} = 4/6 \\ \bar{x} + \frac{\sigma}{5} = 5/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 5 \\ \sigma = 2 \end{cases}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{5} = 0/4$$

پس ضریب تغییرات نمونه، برابر است با:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

۳۵- پاسخ: گزینه ۳



- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.



با قرار دادن اعداد طبیعی مناسب به جای متغیرهای x_1 و x_4 تعداد جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x_1 + x_2 + x_3 + 0/5 x_4} = 6$$

$$x_1 = 1, x_4 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{4-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$x_1 = 1, x_4 = 4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$x_1 = 1, x_4 = 6 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{2-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1$$

$$x_1 = 4, x_4 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$x_1 = 4, x_4 = 4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{2-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1$$

$$x_1 = 9, x_4 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{2-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1$$

$$3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10$$

بنابراین تعداد کل جوابها برابر است با:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

۳۶- پاسخ: گزینه ۴



- گراف k - منتظم: گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k - منتظم می‌نامیم.
 - زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G ، و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد.
 - گراف دور: گرافی که فقط از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را گراف C_n می‌گویند و n یال دارد. گراف C_n ، گراف 2 - منتظم مرتبه n است.



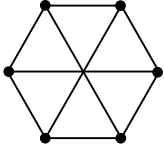
در تجزیه عدد ۳۲۴، داریم:

$$324 = 18 \times 18 = 9 \times 2 \times 9 \times 2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$$

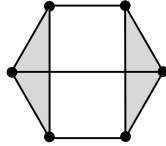
با توجه به اینکه گراف G ، k -منتظم بوده و یک یال از آن حذف شده، درجه دو رأس یک واحد کمتر از درجه سایر رؤس است.

$$3, 3, 3, 3, 2, 2 \Rightarrow \text{دنباله درجات } G$$

پس گراف G یک گراف ۳-منتظم مرتبه ۶ است که شکل آن به یکی از دو صورت زیر است:



زیرگراف به شکل C_3 ندارد.



۲ زیرگراف به شکل C_3 دارد.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس های ۲ و ۳)

۳۷- پاسخ: گزینه ۱



- قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهستی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم نهستی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$$



مطابق با قضیه تقسیم، داریم:

$$a = 16q + r ; 0 \leq r < 16$$

و با توجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$r + q = 23 \Rightarrow q = 23 - r$$

با جای گذاری رابطه اخیر در رابطه تقسیم، داریم:

$$a = 16(23 - r) + r = 368 - 15r \quad (*)$$

باقی مانده تقسیم $a + 15$ بر ۷۵ برابر ۸ است، پس:

$$a + 15 \equiv 8 \pmod{75}$$

با جای گذاری رابطه (*) در این معادله، خواهیم داشت:

$$368 - 15r + 15 \equiv 8 \pmod{75} \Rightarrow 15r \equiv 375 \pmod{75} \xrightarrow{:(15, 75)=15} r \equiv 25 \pmod{5}$$

یعنی r مضرب ۵ است که در میان مقادیر $0 \leq r < 16$ اعداد ۰، ۵، ۱۰، ۱۵ مضرب ۵ هستند که ۴ مقدار متمایز برای r وجود خواهد داشت.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۲)

۳۸- پاسخ: گزینه ۴



- زیرمجموعه D از مجموعه رؤس گراف G را مجموعه احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رؤس D مجاور باشد.

- یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر مینیمال می نامیم.



برای احاطه شدن رأس g از رؤس c و d حداقل یکی باید انتخاب شود، پس ۳ حالت داریم:

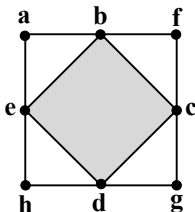
$$c \text{ و } d \text{ با هم انتخاب شود} \Leftarrow \text{احاطه‌گر مینیمال} = \{c, d, a\}$$

$$\text{فقط } c \text{ انتخاب شود} \Leftarrow \text{احاطه‌گر مینیمال} = \{c, e\}$$

$$\text{فقط } d \text{ انتخاب شود} \Leftarrow \text{احاطه‌گر مینیمال} = \{d, b\}$$

پس ۳ زیرمجموعه از مجموعه مذکور، احاطه‌گر مینیمال هستند.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.



▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

۳۹- پاسخ: گزینه ۲



- قضیه جایگشت با تکرار: اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$



بدیهی است که برای بخش پذیر بودن بر ۶ عدد مورد نظر باید زوج باشد و رقم یکان قطعاً ۲ است. پس اگر x رقم ۲ و y رقم ۱ در نظر بگیریم، داریم:

$$x + y = 11 \Rightarrow y = 11 - x \quad (*)$$

مجموع ارقام باید مضرب ۳ باشد، پس:

$$2x + y = 3k \xrightarrow{(*)} 2x + 11 - x = 3k \Rightarrow x + 11 = 3k$$

x + 11 باید مضرب ۳ باشد که چهار حالت وجود دارد:

$$1) x = 1 \Rightarrow \text{عدد } 1111111112 \Rightarrow \text{۱ رقم ۲ و ۱۰ رقم ۱}$$

$$2) x = 4 \Rightarrow \text{۴ رقم ۲ و ۷ رقم ۱} \Rightarrow \frac{1111112222}{10!} \downarrow \text{یکان } 7! \times 3! = 1320$$

$$3) x = 7 \Rightarrow \text{۷ رقم ۲ و ۴ رقم ۱} \Rightarrow \frac{1111222222}{10!} \downarrow \text{یکان } 4! \times 6! = 210$$

$$4) x = 10 \Rightarrow \text{۱۰ رقم ۲ و ۱ رقم ۱} \Rightarrow \frac{1222222222}{10!} \downarrow \text{یکان } 9! \times 1! = 10$$

پس در مجموع $10 + 210 + 120 + 1 = 341$ عدد یازده رقمی با شرایط مسئله می توان نوشت.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

۴۰- پاسخ: گزینه ۲



- اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



مجموعه اعداد طبیعی کوچک تر از ۵۱ به صورت زیر است.

$$\{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

اعداد را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که در بدترین شرایط از هر دسته حداکثر چند عدد برداریم تا شرط مسئله رخ ندهد.

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \Rightarrow \text{حداکثر ۳ تا} \Rightarrow 3$$

$$\{3, 6, 12, 24, 48\} \Rightarrow \text{حداکثر ۳ تا} \Rightarrow 3$$

$$\{5, 10, 20, 40\} \Rightarrow \text{حداکثر ۲ تا} \Rightarrow 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \{7, 14, 28\} \\ \{9, 18, 36\} \\ \{11, 22, 44\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{از هر کدام حداکثر ۲ تا} \Rightarrow 3 \times 2 = 6$$

$$\{13, 26\}, \{15, 30\}, \{17, 34\}, \{19, 38\}, \{21, 42\}, \{23, 46\}, \{25, 50\} \Rightarrow 7$$

$$\{27\}, \{29\}, \{31\}, \{33\}, \{35\}, \{37\}, \{39\}, \{41\}, \{43\}, \{45\}, \{47\}, \{49\} \Rightarrow 12$$

پس اگر $3 + 3 + 3 + 6 + 7 + 12 = 34$ عدد انتخاب کنیم با اطمینان نمی‌توانیم بگوییم که یکی دو برابر دیگری است اما اگر ۳۵ عدد برداریم قطعاً یکی از آن‌ها دو برابر دیگری است.
بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

فیزیک

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۴۱- پاسخ: گزینه ۲



مورد «الف»: نادرست است؛ چون شیشه جزء جامدهای بی‌شکل است.
مورد «ب»: نادرست است؛ فاصله بین ذرات سازنده مایع و جامد در حد آنگستروم است.
مورد «پ»: درست است؛ چون مایع با حجم مشخص به علت نیروی کشش سطحی می‌خواهد کمترین مساحت را داشته باشد، شکل کره خواهد داشت.
مورد «ت»: نادرست است؛ افزایش دما باعث کاهش نیروی هم‌چسبی مایع می‌شود.
مورد «ث»: درست است؛ به همین علت آب در لوله شیشه‌ای مویین بالا می‌رود که همان خاصیت مویینی است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۴۲- پاسخ: گزینه ۳



افزایش دما باعث کاهش مقاومت نیم‌رسانا می‌شود، چون باعث افزایش حاملان بار می‌شود و افزایش شدت نور تابیده شده به LDR باعث کاهش مقاومت آن می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۴۳- پاسخ: گزینه ۲



$$\frac{A}{Z} X \longrightarrow 3\frac{1}{2}\alpha + 4\gamma + \frac{A-12}{Z-6} Y$$

عدد جرمی ۱۲ واحد کم شده و عدد اتمی ۶ واحد کم شده است. پس تعداد نوترون‌های Y از تعداد نوترون‌های X، ۶ تا کمتر است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۴۴- پاسخ: گزینه ۲



با قاعده دست راست فقط گزینه ۲ امکان پذیر است.

۴۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



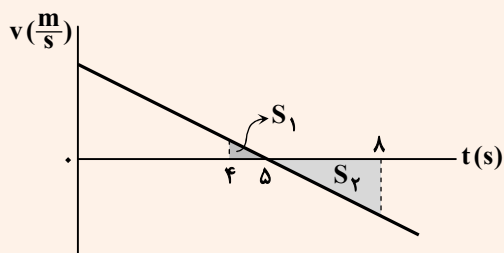
در $t = 5s$ سرعت متحرک صفر می‌شود (در رأس سهمی، خط مماس بر سهمی افقی است.)

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow 170 - 20 = \frac{v_0 + 0}{2} \times 5 \Rightarrow 150 = \frac{v_0 \times 5}{2} \Rightarrow v_0 = 60 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 60}{5} = -12 \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = -6t^2 + 60t + 20$$

$$l = |x(5) - x(4)| + |x(8) - x(5)| = |(170 - 164)| + |116 - 170| = 6 + 54 = 60m$$



برای محاسبه جابه‌جایی و مسافت طی شده می‌توانیم از مساحت زیر نمودار سرعت-زمان استفاده کنیم. شتاب حرکت ثابت است، پس نمودار سرعت-زمان خطی است. ضمناً در $t = 5s$ جهت حرکت عوض می‌شود. قبل از $t = 5s$ سرعت مثبت است و بعد از $t = 5s$ سرعت منفی است. مساحت مثلث مربوط به $t = 0$ تا $t = 5s$ برابر $(170 - 20 = 150)$ متر است و بقیه کار هم با تشابه مثلث‌ها انجام می‌شود.

$$\frac{S_1}{150} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow S_1 = 6m, \quad \frac{S_2}{150} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow S_2 = 54m$$

$$l = S_1 + S_2 = 60m$$

۴۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



چون تندی متحرک ثابت است، پس باید در لحظه $t = \frac{11+3}{2} = 7s$ از مکان $x = 8m$ عبور کند. به این ترتیب یکی از دو معادله زیر می‌تواند معادله حرکت آن باشد:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} 8 = -10 \times 7 + x_0 \Rightarrow x_0 = 78m \Rightarrow x = -10t + 78 \\ 8 = 10 \times 7 + x_0 \Rightarrow x_0 = -62m \Rightarrow x = 10t - 62 \end{cases}$$

۴۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



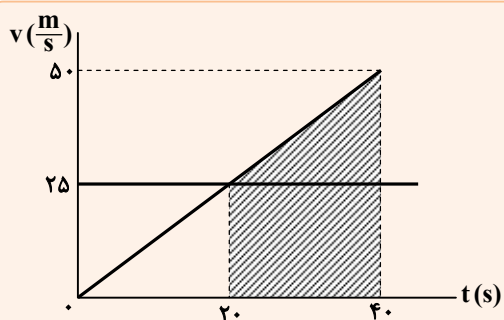
فاصله دو متحرک از لحظه‌ای کاهش می‌یابد که تندی خودرو در عقب با تندی کامیون در جلو برابر شود.

$$v_{\text{کامیون}} = 90 \frac{km}{h} = 25 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 25 = 1/25t + 0 \Rightarrow t = 20s \text{ لحظه برابری تندی‌ها}$$

$$x_{\text{خودرو}} = x_{\text{کامیون}} \Rightarrow \frac{1}{2} at^2 = vt \Rightarrow \frac{1}{2} \times 1/25t = 25 \Rightarrow t = 40s$$

$$x = \frac{1}{2} \times 1/25 \times 40^2 - \frac{1}{2} \times 1/25 \times 20^2 = 750m \text{ مسافتی را که خودرو در بازه زمانی } t = 20s \text{ تا } t = 40s \text{ طی می‌کند، به دست می‌آوریم.}$$



با نمودار $v-t$ هم می‌توان به این پاسخ رسید. بخش هاشورخورده مسافتی است که در آن فاصله دو متحرک در حال کاهش است.

$$\Delta x = \frac{50 + 25}{2} \times 20 = 750m$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۸- پاسخ: گزینه ۱



اگر $t = 0$ را زمان رهاشدن سنگ اول در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$y_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \Delta t^2 \xrightarrow{t=4s} y_1 = 80 \text{ m}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}g(t-\tau)^2 + AB = \Delta(t-\tau)^2 + \frac{\tau}{\Delta}h \xrightarrow{t=4s} y_2 = 20 + \frac{\tau}{\Delta}h$$

$$\text{فاصله سنگ‌ها از یکدیگر} = |y_1 - y_2| = \left| 80 - 20 - \frac{\tau}{\Delta}h \right| = \left| 60 - \frac{\tau}{\Delta}h \right| = 20$$

$$\Rightarrow 60 - \frac{\tau}{\Delta}h = \pm 20 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\tau}{\Delta}h = 80 \Rightarrow h = 200 \text{ m} \\ \frac{\tau}{\Delta}h = 40 \Rightarrow h = 100 \text{ m} \end{cases}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = 2 \times 10 \times h \Rightarrow \begin{cases} v^2 = 20 \times 200 \Rightarrow v = 20\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v^2 = 20 \times 100 \Rightarrow v = 20\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۱



$$F = G \frac{M_e m}{r^2}$$

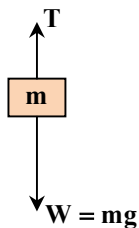
$$F_2 - F_1 = GM_e \times m \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \Rightarrow 3 = 4 \times 10^{24} \times m \left[\frac{1}{(10^7)^2} - \frac{1}{(2 \times 10^7)^2} \right] \Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۲

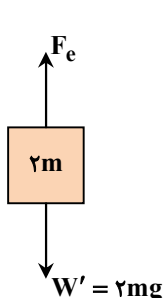


شکل «الف»: شتاب حرکت رو به پایین است:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow m(g - a) = T \Rightarrow (10 - 3)m = 35 \Rightarrow m = 5 \text{ kg}$$

شکل «ب»:



$$F_e = kx = 1500 \times \frac{1}{100} = 15 \text{ N}$$

$$W' = 2mg = 100 \text{ N}$$

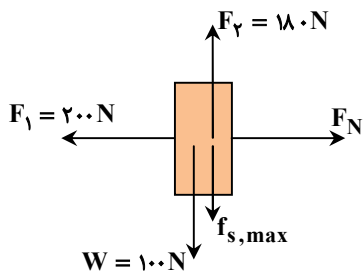
$$F_e - 2mg = 2ma \Rightarrow 15 - 100 = 10a \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$F_e > W'$ یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم رو به بالا است.

۵۱- پاسخ: گزینه ۳



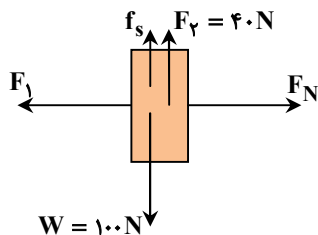
حالت اول:



$$180 - 100 - f_{s,max} = 0 \Rightarrow f_{s,max} = 80 \cdot N$$

$$\Rightarrow f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow 80 = 20 \mu_s \Rightarrow \mu_s = 4/5$$

حالت دوم:



$$40 + f_s - 100 = 0 \Rightarrow f_s = 60 \cdot N \Rightarrow f_s \leq \mu_s F'_N$$

$$\Rightarrow 60 \leq 0.4 F'_N \Rightarrow F'_N \geq 150 \cdot N \Rightarrow F_1 \geq 150 \cdot N$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۲

مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



در حرکت دایره‌ای یکنواخت، تندی ثابت است، پس تندی متوسط در هر بازه زمانی که حساب شود، فرقی نمی‌کند. (جمله «الف» نادرست است.)

$$T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{6 \cdot s}{10} = 0.6 \cdot s$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 2}{6} = \frac{2\pi}{3} \frac{m}{s}$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، سرعت و شتاب بر هم عمود هستند. (جمله «ب» درست است.)

$$f_s = \frac{mv^2}{R} \xrightarrow{f_s \leq \mu_s F_N, F_N = mg} \frac{mv^2}{R} \leq mg\mu_s \Rightarrow \frac{4\pi^2}{9} \leq 10\mu_s \Rightarrow \frac{2\pi^2}{90} \leq \mu_s$$

عدد $\frac{2\pi^2}{90}$ برابر با $\frac{2}{9}$ می‌شود و 0.4 از این مقدار بیشتر است، پس جمله «پ» درست است.

۵۳- پاسخ: گزینه ۱

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)



تعداد نوسان در مدت Δt از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$N = f \cdot \Delta t = \frac{\Delta t}{T}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

$$\frac{N_1 - 10}{N_1} = \sqrt{\frac{L_1}{1/44 L_1}} \Rightarrow \frac{N_1 - 10}{N_1} = \frac{1}{1/2} \Rightarrow N_1 = 60 \Rightarrow f_1 = 1 \text{ Hz}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \sqrt{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۱

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)



$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \times \frac{100}{1000} \times (100\pi)^2 \times 0.04^2 = 8 \text{ J}$$

$$E = U + K \Rightarrow 8 = 3 + K \Rightarrow K = 5 \text{ J}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2} \times 0.1 v^2 \Rightarrow v = 10 \frac{m}{s}$$

۵۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)



$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow 93 - 103 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow{I = \frac{P}{A}} \frac{\frac{P_2}{A_2}}{\frac{P_1}{A_1}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{8}{10}$$

توان موج در سطح (۲) برابر $\frac{8}{10}$ توان موج در سطح (۱) است. پس $\frac{1}{2}$ توان موج و در نتیجه $\frac{1}{2}$ انرژی موج در این فاصله جذب هوا شده است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

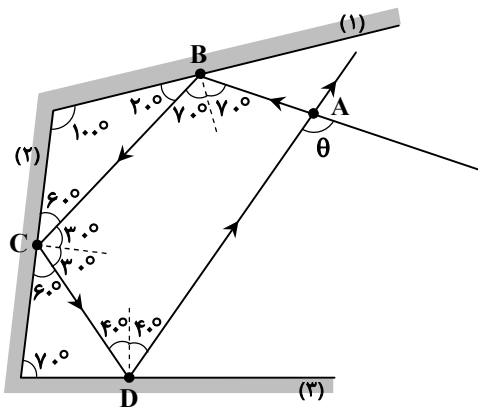
۵۶- پاسخ: گزینه ۱



با توجه به مثلث‌های ایجاد شده در شکل و برابری زاویه تابش و بازتابش، زاویه‌های چهارضلعی ABCD به شکل زیر است:

$$(180 - \theta) + 2 \times 30 + 2 \times 40 + 2 \times 70 = 360$$

$$\Rightarrow 180 - \theta + 280 = 360 \Rightarrow \theta = 100$$



▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۷- پاسخ: گزینه ۲



$$\text{فاصله گره و شکم مجاور} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 0.1 = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 0.4 \text{ m}$$

$$L = \frac{n\lambda}{2} = \frac{4\lambda}{2} = 0.8 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow 0.4 = \frac{v}{50} \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \Rightarrow 20 = \sqrt{\frac{100 \times 0.8}{m}} \Rightarrow 400 \cdot m = 80 \Rightarrow m = \frac{1}{5} \text{ kg} = 200 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۵۸- پاسخ: گزینه ۳



$$K_{\max} = hf - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{آزمایش اول: } K_{\max,1} = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{3hc}{\lambda_1} \\ \text{آزمایش دوم: } K_{\max,2} = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{5hc}{\lambda_1} \end{array} \right. \Rightarrow (5-3) \frac{hc}{\lambda_1} = 9 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2 \times 1200}{9} = \frac{800}{3} \text{ nm}$$

۵۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)



با توجه به رابطه انرژی فوتون ($E = hf = \frac{hc}{\lambda}$) هرچه طول موج فوتون بلندتر باشد، انرژی آن کمتر می‌شود. ضمناً انرژی این فوتون برابر اختلاف انرژی دو تراز است. پس وقتی صحبت از بلندترین طول موج باشد، کمترین ΔE مورد نظر است، یعنی کمترین تفاوت بین تراز مبدأ و مقصد. با توجه به اینکه الکترون در ابتدا در تراز $n = 3$ بوده است، دو حالتی که باید بررسی شود، دو گذار ($n = 3 \rightarrow n = 4$ جذب فوتون) و ($n = 3 \rightarrow n = 2$ گسیل فوتون) است.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3 \xrightarrow{\text{گسیل}} 2: \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{36}{5R} = \frac{3600}{5} = 720 \text{ nm} \\ 3 \xrightarrow{\text{جذب}} 4: \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = \frac{7R}{144} \Rightarrow \lambda = \frac{144}{7R} = \frac{14400}{7} \approx 2060 \text{ nm} \end{cases}$$

۶۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)



در مدت ۵۰ روز تعداد هسته‌های A از N_1 به $\frac{N_1}{3}$ رسیده؛ پس ۵۰ روز برابر ۵ نیمه‌عمر ماده A است؛ یعنی نیمه‌عمر A برابر ۱۰ روز است. در مدتی که تعداد هسته‌های B نصف شده ($\frac{N_1}{2} \rightarrow \frac{N_1}{4}$) تعداد هسته‌های A از N_1 به $\frac{N_1}{4}$ رسیده پس نیمه‌عمر B دو برابر نیمه‌عمر A است؛ یعنی ۲۰ روز.

۶۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)



در ابتدا فشار پیمانه‌ای گاز ۱۲ سانتی‌متر جیوه است که با گرم کردن مخزن، به ۲۴ سانتی‌متر جیوه می‌رسد؛ یعنی ۱۲ سانتی‌متر جیوه افزایش می‌یابد. سطح مایع در لوله سمت راست به اندازه h_2 بالا می‌رود و در لوله سمت چپ به اندازه h_1 پایین می‌آید.

رابطه (۱) $h_1 + h_2 = 12 \text{ cm}$

$A_1 h_1 = A_2 h_2 \Rightarrow A_1 h_1 = 2A_1 h_2 \Rightarrow h_1 = 2h_2 \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} 3h_2 = 12 \text{ cm} \Rightarrow h_2 = 4 \text{ cm}$

۶۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)



$W_t = \Delta K \Rightarrow 200 = \frac{1}{2} \times 2(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow 200 = 9v_2^2 - v_1^2 = 8v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 25 \Rightarrow v_1 = \pm 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$|\Delta p| = m(v_2 - v_1) \Rightarrow \begin{cases} \text{بدون تغییر جهت } 2(15 - 5) = 20 \text{ Ns} \\ \text{با تغییر جهت } 2(15 - (-5)) = 40 \text{ Ns} \end{cases}$

۶۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)



$\begin{cases} T_1 = \theta + 273 \\ T_2 = 4\theta + 273 \end{cases} \Rightarrow T_2 = 1/75 T_1 \quad \text{رابطه (۱)}$

$\xrightarrow{(۱)} 4\theta + 273 = 1/75(\theta + 273) = \frac{1}{75}(\theta + 273) \Rightarrow 16\theta + 4 \times 273 = 7\theta + 7 \times 273 \Rightarrow 9\theta = 3 \times 273 \Rightarrow \theta = 91^\circ \text{C}$

دمای ثانویه جسم برابر $\theta_2 = 364^\circ \text{C}$ می‌شود؛ بنابراین θ_2 را برحسب فارنهایت می‌نویسیم:

$F_2 = 1/8\theta_2 + 32 \Rightarrow F_2 = (1/8 \times 364) + 32 \Rightarrow F_2 = 65.5/2 + 32 = 68.75/2^\circ \text{F}$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۶۴- پاسخ: گزینه ۱



وقتی پس از تعادل ۴۰ گرم از یخ باقی می ماند، یعنی دمای تعادل صفر درجه سلسیوس است و ۶۰ گرم از یخ ذوب شده است. یخ گرما می گیرد تا به دمای تعادل برسد و آب گرما از دست می دهد تا به دمای تعادل برسد.

$$Q_1 = m_{\text{یخ}} c \Delta\theta + (m_{\text{یخ}} - 0.04) L_F \Rightarrow Q_1 = 0.1 \times 2100 \times (0 - (-20)) + 0.06 \times 336000 \Rightarrow Q_1 = 4200 + 20160 = 24360 \text{ J}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = -24360 \text{ J}$$

$$Q_2 = m' \times c_{\text{آب}} (0 - \theta) \Rightarrow -24360 = -0.2 \times 4200 \times \theta \Rightarrow 24360 = 840 \theta \Rightarrow \theta = \frac{24360}{840} = 29^\circ \text{C}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

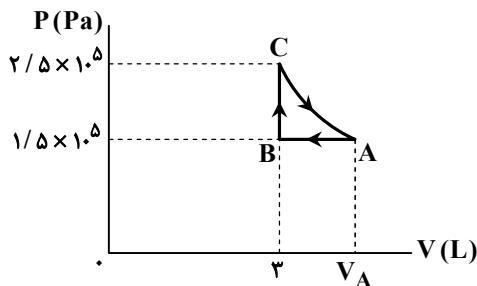
۶۵- پاسخ: گزینه ۴



در یک چرخه کامل $\Delta U = 0$ است.

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = -W$$

چون چرخه ساعتگرد است، کار منفی بوده و گرما مثبت است.



$$\frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_A V_A}{T_A} \Rightarrow P_C V_C = P_A V_A$$

$$\Rightarrow 2/5 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3} = 1/5 \times 10^5 \times V_A \Rightarrow V_A = 6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$W_{\text{چرخه}} = -|S|_{\text{داخل نمودار}} \Rightarrow |S|_{\text{داخل نمودار}} < S_{ABC}$$

$$= \frac{(5-3) \times 10^{-3} \times (2/5 - 1/5) \times 10^5}{2} = 100 \text{ J} \Rightarrow Q_{\text{چرخه}} < 100 \text{ J}$$

این بدان معنی نیست که گرما حتماً ۸۰ ژول است ولی سه گزینه دیگر غیرممکن است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

۶۶- پاسخ: گزینه ۲



فاصله زمین تا سیاره نپتون ۳۰ برابر یکای نجومی است؛ بنابراین:

$$d = 30 \text{ AU} = 30 \times (1/5 \times 10^{11}) = 4/5 \times 10^{12} \text{ m}$$

از طرفی، سال نوری مقدار مسافتی است که نور در مدت یک سال در خلأ می پیماید، در نتیجه:

$$Ly = c \times t = (3 \times 10^8) \times (3 \times 10^7) = 9 \times 10^{15} \text{ m}$$

پس فاصله زمین تا سیاره نپتون برحسب سال نوری برابر است با:

$$d = 4/5 \times 10^{12} \text{ m} = 4/5 \times 10^{12} \text{ m} \times \frac{Ly}{9 \times 10^{15} \text{ m}} = 0.5 \times 10^{-3} Ly = 5 \times 10^{-4} Ly$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۷- پاسخ: گزینه ۳

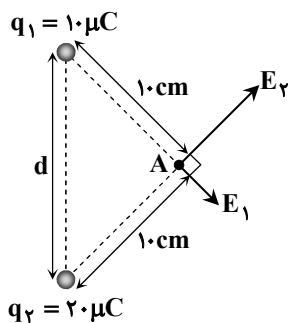


$$\sigma_A = 2\sigma_B \Rightarrow \frac{q_A}{4\pi R_A^2} = 2 \frac{q_B}{4\pi R_B^2} \Rightarrow \frac{1}{R_A^2} q_A = \frac{2}{R_B^2} q_B \Rightarrow R_B = 2R_A$$

$$\frac{q_A}{R_A} = \frac{1}{2} \frac{q_B}{R_B} \times \frac{2R_A}{R_A} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)



$$F = \frac{kq_1q_2}{d^2} \Rightarrow 90 = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{-5}}{d^2}$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{9 \times 2 \times 10^{-1}}{90} = 2 \times 10^{-2} \Rightarrow d = 0.1\sqrt{2} \text{ m} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

که نشان می‌دهد مثلث قائم‌الزاویه بوده و زاویه رأس A، ۹۰ درجه است.

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-5}}{10^{-2}} = 9 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-5}}{10^{-2}} = 18 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(9 \times 10^6)^2 + (18 \times 10^6)^2} \Rightarrow E_A = \sqrt{(9 \times 10^6)^2 (1+4)} = 9\sqrt{5} \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

۶۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)



در ابتدا خازن به باتری متصل و بنابراین ولتاژ دو سر آن ثابت است. در این حالت با خارج کردن دی الکتریک از بین صفحات خازن، انرژی خازن از $U_1 = U$ به U_2 تغییر می‌کند:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \xrightarrow{(V \text{ ثابت})} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \xrightarrow{(A \text{ و } d \text{ ثابت})} \frac{U_2}{U_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{2/5} \Rightarrow U_2 = \frac{5}{2} U = 0.4 U \quad (1) \text{ رابطه}$$

پس از جدا کردن خازن از باتری، بار صفحات خازن ثابت می‌ماند. در این حالت با ۳ برابر کردن فاصله بین صفحات خازن، انرژی آن از U_2 به U_3 می‌رسد:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \xrightarrow{(Q \text{ ثابت})} \frac{U_3}{U_2} = \frac{C_2}{C_3} \xrightarrow{(A \text{ و } \kappa \text{ ثابت})} \frac{U_3}{U_2} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow \frac{U_3}{U_2} = 3 \xrightarrow{\text{رابطه (1)}} \frac{U_3}{0.4 U} = 3 \Rightarrow U_3 = 1.2 U$$

۷۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۲)



آمپرساعت یکای اندازه‌گیری بار الکتریکی است.

۷۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \Rightarrow \mathcal{E} = I(R_{eq} + r)$$

نیروی محرکه در هر دو حالت ثابت است؛ بنابراین داریم:

$$I(9 + 1) = (I - 0.1)(11 + 1) \Rightarrow 10I = 12I - 1/2 \Rightarrow 2I = 1/2 \Rightarrow I = 0.06 \text{ A}$$

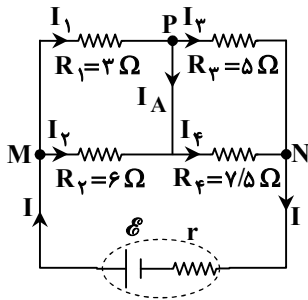
جریان مدار در حالت دوم برابر $I' = 0.06 - 0.1 = -0.04 \text{ A}$ می‌شود:

$$\mathcal{E} = 0.05 \times 12 = 6 \text{ V}$$

$$P_{\text{تولیدی}} = \mathcal{E}I' = 6 \times 0.04 = 0.24 \text{ W}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۷۲- پاسخ: گزینه ۱



آمپرسنج، آرمانی است؛ بنابراین می‌توان آن را اتصال کوتاه در نظر گرفت و در نتیجه مقاومت‌های R_1 و R_2 با هم و مقاومت‌های R_4 و R_5 با هم موازی‌اند. توان مصرفی در مقاومت $R_1 = 3 \Omega$ برابر $12 W$ است؛ بنابراین:

$$P_1 = I_1^2 R_1 \Rightarrow 12 = I_1^2 \times 3 \Rightarrow I_1^2 = 4 \Rightarrow I_1 = 2 A$$

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow 2 \times 3 = I_2 \times 6 \Rightarrow I_2 = 1 A$$

در گره M جریان I وارد و جریان‌های I_1 و I_2 خارج می‌شوند؛ بنابراین:

$$I = I_1 + I_2 = 2 + 1 = 3 A$$

در گره N جریان‌های I_3 و I_4 وارد و جریان I از آن خارج می‌شود، در نتیجه:

$$I = I_3 + I_4 \Rightarrow I_3 + I_4 = 3 \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$R_3 I_3 = R_4 I_4 \Rightarrow 6 I_3 = 7/5 I_4 \Rightarrow 2 I_3 = 7/5 I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{2}{7} I_3$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} I_3 + I_4 = 3 \Rightarrow I_3 + \frac{2}{7} I_3 = 3 \Rightarrow \frac{9}{7} I_3 = 3 \Rightarrow I_3 = \frac{9}{7} = 1/8 A$$

در پایان برای محاسبه خواسته سؤال با دقت در گره P، داریم:

$$I_1 = I_A + I_3 \Rightarrow 2 = I_A + 1/8 \Rightarrow I_A = 15/8 A$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۷۳- پاسخ: گزینه ۲



$$R_1 = 10 R_2 \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\text{طول سیم} = N_1 \times 2\pi R_1 = N_2 \times 2\pi R_2 \xrightarrow{(۱)} N_2 = 10 N_1$$

$$\text{سیم لوله} = 4B \Rightarrow \frac{\mu_0 N_2 I}{\ell} = \frac{4\mu_0 N_1 I}{2R} \Rightarrow \frac{10 N_1}{\ell} = \frac{2 N_1}{R} \Rightarrow \ell = 5R$$

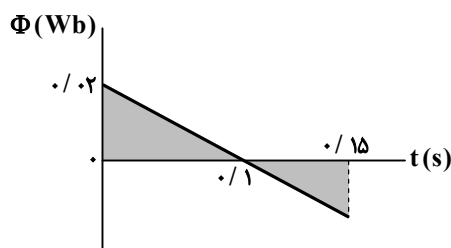
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۷۴- پاسخ: گزینه ۳



$$\mathcal{E}_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow I_{av} = \frac{|\mathcal{E}_{av}|}{R} = \frac{N |\Delta\Phi|}{R \Delta t}$$

$$q = I_{av} \times \Delta t \Rightarrow q = \frac{N |\Delta\Phi|}{R}$$



$$\Phi_{(0.15s)} = -0.1 Wb$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{0.15} - \Phi_0 = -0.1 - 0.2 = -0.3 Wb$$

$$q = \frac{N |\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow q = \frac{20 \times 0.3}{4} = 1.5 C$$

از تشابه دو مثلث در نمودار داده‌شده، داریم:



۷۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۴)



دوره تناوب برابر با $T = 0.04s$ است:

$$\frac{3}{2}T = \frac{6}{100} \Rightarrow T = 0.04s$$

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{0.04}t\right) = I_m \sin 50\pi t$$

$$\Rightarrow -0.1\sqrt{3} = I_m \sin\left(50\pi \times \frac{2}{75}\right) \Rightarrow -0.1\sqrt{3} = I_m \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -0.1\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}I_m \Rightarrow I_m = 0.2A$$

بیشینه نیروی محرکه برابر است با:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \Rightarrow 0.2 = \frac{\mathcal{E}_m}{6} \Rightarrow \mathcal{E}_m = 1.2V$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)



اگر درصد فراوانی ایزوتوپ‌های ^{70}X ، ^{72}X و ^{75}X را به ترتیب با F_1 ، F_2 و F_3 نشان دهیم، می‌توان گفت:

$$\left. \begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 &= 100 \\ F_3 &= 4F_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_1 + F_2 + 4F_1 = 100 \Rightarrow 5F_1 + F_2 = 100$$

با توجه به تعریف جرم اتمی میانگین خواهیم داشت:

$$\bar{M} = \frac{M_1F_1 + M_2F_2 + M_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \Rightarrow 73 = \frac{70F_1 + 72F_2 + 75(4F_1)}{100} \Rightarrow 7300 = 370F_1 + 72F_2$$

به این ترتیب می‌توان مقدار F_2 را به صورت زیر تعیین کرد:

$$(-72) \times \begin{cases} 5F_1 + F_2 = 100 \\ 370F_1 + 72F_2 = 7300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -360F_1 - 72F_2 = -7200 \\ 370F_1 + 72F_2 = 7300 \end{cases} \Rightarrow 10F_1 = 100 \Rightarrow F_1 = 10$$

$$5F_1 + F_2 = 100 \Rightarrow (5 \times 10) + F_2 = 100 \Rightarrow F_2 = 50$$

۷۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)



جرم مولی این ترکیب برابر است با:

$$(17 \times n) + (2n + 2) + 16 = 14n + 18$$

شمار مول‌اتم‌های موجود، در یک مول از این ترکیب نیز برابر خواهد بود با:

$$\begin{matrix} n & + & 2n+2 & + & 1 & = & 3n+3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{کربن} & & \text{هیدروژن} & & \text{اکسیژن} & & \end{matrix}$$

به این ترتیب می‌توان گفت (عدد آوگادرو را با N_A نشان می‌دهیم):

$$79g C_nH_{2n+2}O \times \frac{1 \text{ mol } C_nH_{2n+2}O}{(14n+18)g C_nH_{2n+2}O} \times \frac{(3n+3) \text{ mol اتم}}{1 \text{ mol } C_nH_{2n+2}O} \times \frac{N_A}{1 \text{ mol اتم}} = 16/5 N_A$$

$$\Rightarrow 79 \times (3n+3) \times N_A = 16/5 \times (14n+18) \times N_A \Rightarrow 237n + 237 = 231n + 297 \Rightarrow 6n = 60 \Rightarrow n = 10$$

بنابراین فرمول مولکولی این ترکیب $C_{10}H_{22}O$ بوده و نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در آن برابر $2/2$ است.

۷۸- پاسخ: گزینه ۳

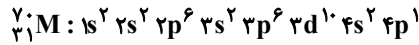
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)



ابتدا باید تعداد ذره‌های زیراتمی در ${}^{70}\text{M}^{3+}$ را تعیین کنیم:

$$\left. \begin{matrix} n + p = 70 \\ n - e = 11 \\ e = p - 3 \end{matrix} \right\} n - (p - 3) = 11 \Rightarrow n - p = 8 \Rightarrow 2n = 78 \Rightarrow n = 39 \Rightarrow p = 31, e = 28$$

به این ترتیب آرایش الکترونی اتم M عبارت است از:



گزینه ۳: درست

$$4s^2 4p^1 \Rightarrow 2(4+0) + 1(4+1) = 13$$

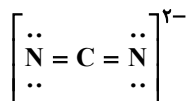
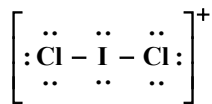
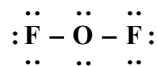
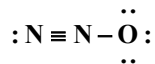
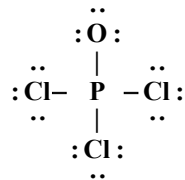


گزینه ۱: نادرست؛ در این اتم ۸ زیرلایه از الکترون اشغال شده‌اند، که ۷ زیرلایه به‌طور کامل پر شده و یک زیرلایه (۴p) به‌طور کامل اشغال نشده است.
گزینه ۲: نادرست؛ این عنصر در لایه ظرفیت خود (که شامل زیرلایه‌های ۴s و ۴p است) ۳ الکترون دارد، که با از دست دادن الکترون به آرایش پایدار گاز نجیب نمی‌رسند.
گزینه ۴: نادرست؛ با توجه به آرایش الکترونی عنصر M، این عنصر به دسته p از جدول دوره‌ای تعلق دارد.

۷۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)



ساختار لوویس گونه‌های داده شده عبارتند از:



شمار الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی موجود در این گونه‌ها برابر است با:

فرمول شیمیایی	POCl_3	N_2O	OF_2	ICl_4^+	CN_2^{2-}
شمار الکترون‌های پیوندی	۸	۸	۴	۴	۸
شمار الکترون‌های ناپیوندی	۲۴	۸	۱۶	۱۶	۸

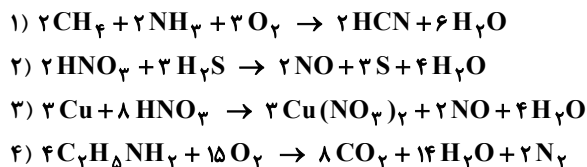
بنابراین در سه گونه POCl_3 ، OF_2 و ICl_4^+ شمار الکترون‌های ناپیوندی از پیوندی بیشتر است.

۸۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)



معادله واکنش‌های موازنه شده عبارت‌اند از:



نسبت مجموع ضرایب مولی فرآورده‌ها به واکنش‌دهنده‌ها در این واکنش‌ها به ترتیب برابر با $\frac{8}{7}$ ، $\frac{9}{5}$ ، $\frac{9}{11}$ و $\frac{24}{19}$ هستند، که این نسبت در واکنش دوم از بقیه بیشتر است.

۸۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)



ابتدا لازم است جرم یون K^+ موجود در محلول اولیه را به دست آوریم:

$$10 \text{ mL محلول} \times \frac{1/5 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{87 \text{ g } K_2SO_4}{100 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol } K_2SO_4}{174 \text{ g } K_2SO_4} \times \frac{2 \text{ mol } K^+}{1 \text{ mol } K_2SO_4} \times \frac{39 \text{ g } K^+}{1 \text{ mol } K^+} = 5/85 \text{ g } K^+$$

با توجه به اینکه چگالی محلول رقیق شده برابر $1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ است، آنگاه برای تعیین غلظت برحسب ppm خواهیم داشت:

$$\text{ppm} = \frac{5/85 \times 10^3 \text{ mg } K^+}{0.5 \text{ L}} = 11700$$

۸۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)



با توجه به مقدار انحلال پذیری نمک متوجه می‌شویم که با سرد کردن ۱۹۰ گرم محلول از دمای 50°C تا 10°C به اندازه ۷۰ گرم نمک رسوب می‌کند، پس مقدار نمک رسوب کرده در آزمایش برابر است با:

$$\frac{70 \text{ g رسوب}}{190 \text{ g محلول}} = \frac{? \text{ g رسوب}}{18 \text{ g محلول}} \Rightarrow ? = 6/6 \text{ g رسوب}$$

انگن با توجه به مقدار انحلال پذیری نمک در دمای 10°C مقدار آب مورد نیاز برای حل کردن این مقدار رسوب را به دست می‌آوریم:

$$\frac{20 \text{ g نمک}}{100 \text{ g آب}} = \frac{6/6 \text{ g نمک}}{? \text{ g آب}} \Rightarrow ? = 33 \text{ g آب}$$

۸۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)



گزینه ۴: نادرست؛ گشتاور دوقطبی H_2S برابر $0/97$ دبابی است؛ بنابراین H_2S نسبت به C قطبی تر بوده و گشتاور دوقطبی بالاتری دارد.



گزینه ۱: درست؛ دمای اتاق معادل با 25°C یا 298 K است. با توجه به نقطه جوش ترکیب‌های داده شده، ماده C در دمای 298 K به صورت گاز وجود دارد.

گزینه ۲: درست؛ B ماده‌ای قطبی بوده و در هگزان (ناقطبی) نامحلول است؛ C نیز ماده ناقطبی و نامحلول در آب (قطبی) است؛ بنابراین مخلوط‌های ایجاد شده ناهمگن خواهند بود.

گزینه ۳: درست؛ از آنجاکه ماده B دارای گشتاور دوقطبی بیشتری است، پس قطبیت بیشتری داشته و میزان جهت‌گیری و منظم شدن مولکول‌های آن در میدان الکتریکی محسوس تر از A و C خواهد بود.

۸۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



الف) دو شبه فلز Si و Ge و دو فلز Sn و Pb ظاهر درخشان و سطح صیقلی دارند.
ب) دو عنصر فلزی Sn و Pb می‌توانند در واکنش با نافلزها الکترون از دست بدهند.
پ) فلزها بر اثر ضربه خرد نمی‌شوند (Sn و Pb)

۸۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



ابتدا با توجه به حجم گاز تولیدشده جرم واکنش دهنده خالص را حساب می‌کنیم:

$$x \text{g LiAlH}_4(\text{s}) = 22 / 4 \text{ L H}_2 \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{22 / 4 \text{ L H}_2} \times \frac{1 \text{ mol LiAlH}_4}{4 \text{ mol H}_2} \times \frac{38 \text{ g LiAlH}_4}{1 \text{ mol LiAlH}_4} = 9 / 5 \text{ g LiAlH}_4 \text{ خالص}$$

$$\text{جرم خالص} = \frac{\text{جرم خالص}}{\text{جرم ناخالص}} \times 100$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{9 / 5}{10} \times 100 = 95\%$$

۸۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

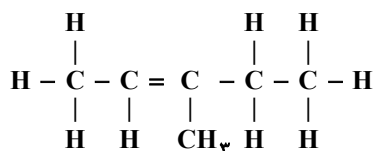


با افزایش جرم مولی یک آلکان نیروهای بین مولکولی که همان نیروهای واندروالس است افزایش می‌یابد و در نتیجه به دلیل جاذبه بیشتر، میزان چسبندگی، گرانروی و نقطه جوش افزایش می‌یابد.
ولی هرچه مولکول سبک‌تر باشد به دلیل ضعیف‌تر بودن نیروهای بین مولکولی، فرار بودن افزایش می‌یابد.
در مورد انحلال پذیری در آب توجه داشته باشید که آلکان‌ها موادی ناقطبی هستند و افزایش جرم مولی تأثیری بر میزان انحلال پذیری ندارد.

۸۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



شکل داده شده مربوط به مولکول ۳- متیل ۲- پنتن با فرمول مولکولی C_6H_{12} است.



الف) درست؛ سه گروه CH_3 و یک گروه CH_2 دارد.
ب) درست؛ در ساختار ۱۲ پیوند $\text{C}-\text{H}$ و چهار پیوند $\text{C}-\text{C}$ دیده می‌شود.



ب) نادرست؛ ۰/۱ مول از آن با ۰/۱ مول Br_2 یعنی ۱۶ گرم واکنش می‌دهد.
ت) نادرست؛ مولکول داده شده ۱۲ اتم هیدروژن دارد. چهارمین عضو خانواده آلکان‌ها دارای فرمول C_4H_{10} است. پس تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در آن‌ها برابر ۲ است.

۸۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)



$$\text{mol H}_2 \text{ مصرفی} = \frac{0.6 \text{ mol NH}_3}{\text{L} \cdot \text{min}} \times 10 \text{ L} \times 3 \text{ min} \times \frac{3 \text{ mol H}_2}{2 \text{ mol NH}_3} = 27 \text{ mol H}_2$$

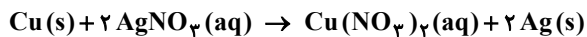
$$\text{H}_2 = \text{تعداد مول‌های مصرفی} + \text{تعداد مول‌های باقی مانده} = 3 \text{ mol} + 27 \text{ mol} = 30 \text{ mol H}_2$$

۸۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)



ابتدا تعداد مول‌های یون نقره مصرفی را محاسبه می‌کنیم:



$$? \text{ mol Ag}^+ = 0.125 \text{ L AgNO}_3 \times \frac{0.48 \text{ mol Ag}^+}{1 \text{ L AgNO}_3} = 0.06 \text{ mol Ag}^+$$

$$\bar{R}_{(\text{Ag}^+)} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{0.06 \text{ mol}}{10 \times 60 \text{ s}} = 0.0001 \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{R}_{(\text{Cu})} = \frac{1}{2} \bar{R}_{\text{Ag}^+} = \frac{0.0001}{2} = 5 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

یون‌های NO_3^- در طی واکنش در مبادله الکترون شرکت نکرده و غلظت آن‌ها ثابت می‌ماند.

۹۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)



لیکوپن یک بازدارنده است و روند تولید رادیکال را کند می‌کند، پس نمودار C می‌تواند مربوط به استفاده از این بازدارنده باشد.

۹۱- پاسخ: گزینه ۴

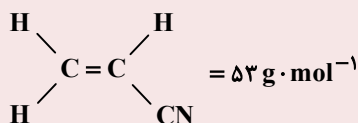
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)



گزینه ۴: نادرست؛ از پلیمر شدن کلرو اتن (وینیل کلرید) پلی وینیل کلرید به دست می‌آید. مونومرهای سازنده باید ترکیب‌هایی سیر نشده باشند.



گزینه ۱: درست



$$\text{C}_3\text{H}_6 = 42 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$53 - 42 = 11 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

گزینه ۲: درست

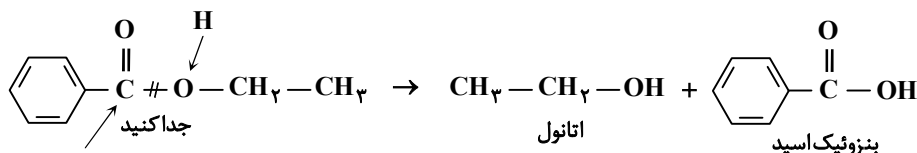
گزینه ۳: درست

۹۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

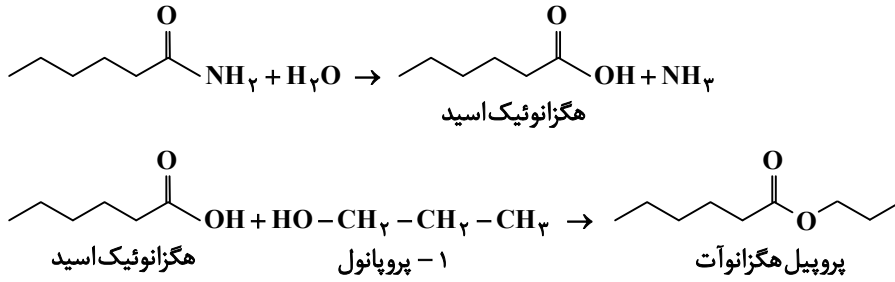


گروه عاملی موجود در شکل مربوطه به یک استر است، که اسید و الکل سازنده آن را به صورت زیر تشخیص می‌دهیم.



۹۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)



۹۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$\text{pH} = 0.3 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-0.3} = 10^{-1} \times 10^{0.7} = 0.5$$

$$\text{pH} = 0.7 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-0.7} = 10^{-1} \times 10^{0.3} = 0.2$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M_1 - [\text{H}^+]} \Rightarrow 10^{-1} = \frac{(0.5)^2}{M_1 - 0.5} \Rightarrow M_1 = 3$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M_2 - [\text{H}^+]} \Rightarrow 10^{-1} = \frac{(0.2)^2}{M_2 - 0.2} \Rightarrow M_2 = 0.6$$

$$M_1 V_1 = M_2 V_2$$

$$\Rightarrow 3 \times 60 = 0.6 \times V_2$$

$$\Rightarrow V_2 = 300 \text{ mL}$$

$$\Rightarrow \text{آب مقطر} = 240 \text{ mL}$$

۹۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)



کلیه عبارت‌ها به جز عبارت «پ» درست هستند.

TiO_2 و Fe_2O_3 کلوئید نیستند، اما رنگ‌های پوششی ساخته شده از آن‌ها کلوئید هستند.

۹۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$\text{HCl} : \text{pH} = 0.3 \Rightarrow [\text{H}^+] = M = 0.5 \Rightarrow \text{mol H}^+ = 0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 0.1 \text{ L} = 0.05 \text{ mol}$$

$$\text{HNO}_3 : \text{pH} = 0.7 \Rightarrow [\text{H}^+] = M = 0.2 \Rightarrow \text{mol H}^+ = 0.2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 0.25 \text{ L} = 0.05 \text{ mol}$$

در فرایند خنثی شدن شمار مول‌های H^+ با OH^- برابر می‌شود، پس:

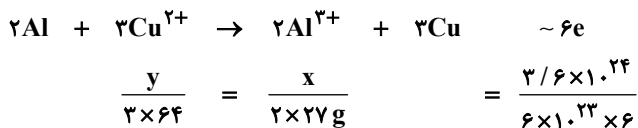
$$(0.05 + 0.05) \text{ mol OH}^- \times \frac{1 \text{ mol KOH}}{1 \text{ mol OH}^-} \times \frac{56 \text{ g KOH}}{1 \text{ mol KOH}} \times \frac{100 \text{ g KOH خالص}}{70 \text{ g KOH}} = 8 \text{ g}$$

۹۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)



گزینه ۱: نادرست



$y = 192, x = 54 \Rightarrow$ کاهش جرم محلول ها $= 192 - 54 = 138$

گزینه ۲: درست

غلظت استاندارد برابر یک مولار است. پس در هر دو محلول ۱۰ مول کاتیون وجود دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مول } Al^{3+} \text{ تولیدی} = \frac{54}{27} = 2 \Rightarrow \text{مولار } Al^{3+} = \frac{10+2}{10} = 1/2 \\ \text{مول } Cu^{2+} \text{ مصرفی} = \frac{192}{64} = 3 \Rightarrow \text{مولار } Cu^{2+} = \frac{10-3}{10} = 0/7 \end{array} \right. \Rightarrow \text{اختلاف غلظت مولی محلول ها} = 1/2 - 0/7 = 0/5$$

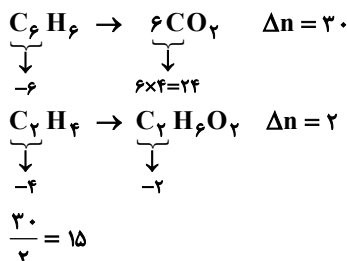
گزینه ۳: نادرست

$192 =$ تغییر جرم تیغه کاتدی $< 54 =$ تغییر جرم تیغه آندی

گزینه ۴: نادرست؛ محلول کاتدی رقیق تر و در نتیجه کم رنگ تر می شود؛ ولی محلول آندی از ابتدا بی رنگ است و افزایش غلظت تأثیری در رنگ آن ندارد.

۹۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

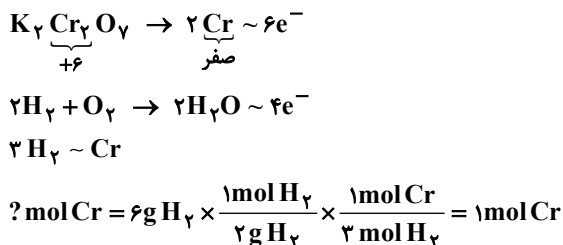


۹۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



در تبدیل پتاسیم دی کرومات به فلز کروم به ازای تشکیل هر مول فلز کروم ۶ مول الکترون مبادله می شود. در واکنش کلی سوختن هیدروژن به ازای مصرف هر مول $H_2(g)$ ، ۲ مول الکترون مبادله می شود. پس برای تولید هر مول فلز کروم باید ۳ مول $H_2(g)$ مصرف شود.

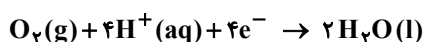


۱۰۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)



واکنش کاتدی خوردگی آهن در محیط اسیدی به شرح زیر است:



۱۰۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)



در نقشه پتانسیل باید علاوه بر شکل هندسی رنگ‌بندی اتم‌های مرکزی و اتم‌های متصل نیز یکسان باشند تا بتوان گفت نقشه پتانسیل مشابه است که دو گونه BCl_3 و NO_3^- مشابه SO_3 است. یعنی در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی، اتم مرکزی در آن‌ها به رنگ آبی و اتم‌های جانبی به رنگ قرمز نشان داده می‌شوند.

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)



در مقایسه شعاع هالوژن‌ها، فلزهای گروه ۱ و یون‌های حاصل از آن‌ها رابطه زیر برقرار است:
اتم گروه ۱ < آنیون گروه ۱۷ < کاتیون گروه ۱ < اتم هالوژن
بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ هر دو نادرست هستند.

شکل درست گزینه ۴ نیز به صورت $\text{O}^{2-} > \text{Mg}^{2+}$ است؛ زیرا اندازه بارها یکسان ولی شعاع یونی Mg^{2+} کوچک‌تر است.

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)



قدرت کاهندگی Zn کمتر از آن است که بتواند V^{2+} را به فلز V تبدیل کند.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)



با کاهش حجم (افزایش فشار)، تعادل به سمت تولید C جابه‌جا می‌شود و مول C افزایش می‌یابد؛ (بنابراین گزینه ۴ نادرست است) و در صورت مصرف کامل B حداکثر ۸ مول C، حاصل می‌شود که با وجود تعادل جدید B نمی‌تواند کامل مصرف شود و باید مقدار C (g) از ۸ کمتر باشد، پس گزینه ۳ درست است.

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)



هر دو مرحله تبدیل متان به متانول در دما و فشار بالا انجام می‌گیرد، که نشان‌دهنده زیاد بودن انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها در این دو مرحله است.



گزینه ۱: باید KMnO_4 غلیظ باشد.

گزینه ۲: باید KMnO_4 رقیق باشد.

گزینه ۴: باید شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فرآورده‌های سودمند تبدیل شود.