

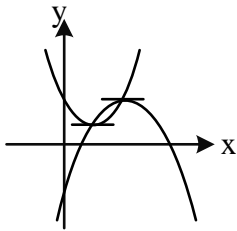
۱- دنباله a, b, c حسابی و دنباله $2+a, 6+b, 10+c$ هندسی است. نسبت مجموع جملات دنباله هندسی به مجموع

جملات دنباله حسابی به ازای $c=2$ چقدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲- در شکل مقابل، نمودار سهمی‌های $y = -mx^2 + 4mx - 3$ و $y = nx^2 - 2nx + 5$ رسم شده‌اند. مقدار $2m+n$ کدام

است؟ ($n, m > 0$)



۸ (۱)

۶ (۲)

۱۲ (۳)

۴ (۴)

۳- ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b + 6 = 0$ برابر مجذور ریشه‌های معادله $x^2 + (a+6)x + b = 0$ است. حاصل ab کدام

است؟ ($b > 0$)

- ۱۰ (۱) ۱۶ (۲) -۶ (۳) -۳۰ (۴)

۴- معادله $\sqrt{x} + \sqrt{a-x} = a$ برای x جواب حقیقی دارد. مجموع اعداد صحیح قابل قبول برای a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۵- فرض کنید $f(x) = (x-2)(x-3)$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح x ، نمودار تابع $y = \frac{2}{f(x)}$ بین دو خط $y=1$ و

$$y = \frac{8}{3}$$
 قرار دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر

۶- اگر $A = (\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})\sqrt{2}\sqrt{2}$ باشد، حاصل $A^4 + A^2 + 1$ کدام است؟

(۱) ۳۴۶ (۲) ۳۹۶ (۳) ۴۴۱ (۴) ۴۲۱

۷- اگر $\log b$ و $\log(a + \frac{3}{4}b)$ و $\log 4a$ تشکیل دنباله حسابی دهند، حاصل $\frac{16a^2 + 9b^2}{ab}$ کدام است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۵۰ (۳) ۲۵ (۴) ۱۵

۸- عرض رأس سهمی $f(x) = mx^2 - 4mx - 3$ برابر ۵- است. اگر بازه $[a, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع f در آن

بازه وارون‌پذیر باشد، مقدار $f(2a)$ کدام است؟ آزمون وی ای پی

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۹- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, -1), (4, 1)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, -1), (4, 2), (1, 3)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $\frac{f}{g \circ f^{-1}}$ کدام

است؟

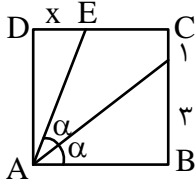
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۱۰- قرینه نمودار $f(x) = x + \sqrt{x+2}$ نسبت به $y = x$ را ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال داده‌ایم. نمودار

جدید خط $y = x - 6$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

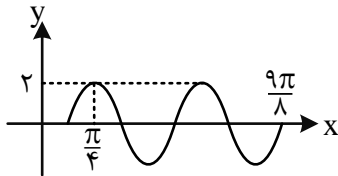
- ۵ (۴) ۳ (۳) -۳ (۲) ۵ (۱)

۱۱- در مربع شکل مقابل، طول پاره خط DE کدام است؟



- $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۱)
 $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{6}$ (۳)

۱۲- قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos \frac{x}{b}$ به صورت مقابل است. دوره تناوب تابع $y = \sin(abx)$ کدام است؟



- $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{7\pi}{3}$ (۱)
 4π (۴) $\frac{14\pi}{3}$ (۳)

۱۳- معادله $4 \sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۱۴- اگر $\lim_{x \rightarrow -} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{a+3x}}{\sqrt{1-\cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر باشد، مقدار a کدام است؟

- ۲ (۴) ۱ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۱۵- تابع $f(x) = |2x + a - [2x]|$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. حاصل $f'_+(1) - f'_-(1)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۶- تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{ax^2 + 2x - a}$ فقط یک مجانب قائم دارد. مجانب افقی تابع $y = \frac{(x+2)^2}{x} - 2f(x)$ کدام است؟

- (۱) $y = 1$ (۲) $y = 2$ (۳) $y = 3$ (۴) $y = 4$

۱۷- اگر $f(x) = \sqrt[3]{2x - |x|}$ و $g(x) = \frac{18}{x^3 - |x^3|}$ باشد، حاصل $f' \circ g(-3) \cdot f' \circ g(-3)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۸- آهنگ تغییر لحظه‌ای $f(x) = \sqrt{x}(x-3)^2$ در نقطه $x = a$ منفی است. a به کدام بازه تعلق دارد؟

- (۱) $(0, \frac{3}{5})$ (۲) $(\frac{3}{5}, 2)$ (۳) $(2, 3)$ (۴) $(\frac{3}{5}, 3)$

۱۹- نقطه عطف تابع $f(x) = (x-3)(ax^2 - 3)$ بر روی خط $y = 2x$ واقع است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰- تابع $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x|x|}}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخنامه

۱- پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} \text{حسابی } a, b, c \\ \text{حسابی } 2, 6, 10 \end{cases} \Rightarrow a+2, b+6, c+10$$

طبق فرض سوال، دنباله $a+2, b+6, c+10$ هندی هم هست پس یک دنباله ثابت است.

$$a+2=b+6=c+10 \Rightarrow \begin{cases} a=c+8 \\ b=c+4 \end{cases}$$

$$A = \frac{(a+2)+(b+6)+(c+10)}{a+b+c} = \frac{3(c+10)}{3c+12} = \frac{3 \times 12}{18} = 2$$

۲- پاسخ: گزینه ۲

نکته: به شرطی رأس سهمی‌ها بر هم منطبق است که نمودار X^2 به یک اندازه منبسط یا منقبض شده باشد. پس $m=n$ است.

$$\begin{cases} y = -mx^2 + 4mx - 3 \\ y = mx^2 - 2mx + 5 \end{cases}$$

رأس اولی، $S(2, -3+4m)$ است.

$$y = -3 + 4m = 4m - 4m + 5$$

$$\Rightarrow m=2 \Rightarrow 2m+n=6$$

۳- پاسخ: گزینه ۴

ریشه‌های معادله دوم را α و β فرض کنید، پس:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a - 6 \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = -a \\ \alpha^2\beta^2 = b + 6 \end{cases}$$

$$(1): b^2 = b + 6 \Rightarrow b = 3$$

$$(2): \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\Rightarrow -a = (-a-6)^2 - 2b \Rightarrow a^2 + 12a + 36 - 2b = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = -3 \text{ یا } -10$$

اگر $a = -3$ و $b = 3$ باشد، معادله اول جواب ندارد، پس $ab = -30$ است.

۴- پاسخ: گزینه ۳

$$a \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{a-x})^2 = a^2 \Rightarrow x + a - x + 2\sqrt{ax-x^2} = a^2 \Rightarrow 2\sqrt{ax-x^2} = a^2 - a$$

ماکزیمم عبارت سمت چپ به ازای $x = \frac{a}{2}$ به دست می‌آید که برابر a است، پس:

$$0 \leq a^2 - a \leq a \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 0 \text{ یا } a \geq 1 \\ a^2 - 2a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 2 \end{cases}$$

پس $a = 0$ ، $a = 1$ و $a = 2$ قابل قبول است که مجموع آنها برابر ۳ است.

۵- پاسخ: گزینه ۴

$$1 < \frac{2}{x^2 - 5x + 6} < \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 2 < \frac{1}{3}x^2 - \frac{40}{3}x + 16$$

$$x < 2 \text{ یا } x > 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ 8x^2 - 40x + 42 > 0 \end{cases}$$

$$x < 2 \text{ یا } x > 3 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 4 \\ x < \frac{3}{2} \text{ یا } x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

پس جواب به صورت $\frac{3}{2} < x < 4$ و $1 < x < \frac{7}{2}$ است که فاقد عدد صحیح‌اند.

۶- پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{8} = (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{2} \\ &= \sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{6} + 2\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5} - 1 + (\sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$A^6 + A^2 + 1 = 400 + 20 + 1 = 421$$

۷- پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی

اگر a, b, c تشکیل دنباله حسابی دهند، آن‌گاه $2b = a + c$.

$$2 \log\left(a + \frac{3}{4}b\right) = \log 4a + \log b \Rightarrow \log\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 = \log 4ab$$

$$\Rightarrow \left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 = 4ab \Rightarrow a^2 + \frac{9}{16}b^2 + \frac{3}{2}ab = 4ab$$

$$\Rightarrow 16a^2 + 9b^2 = 40ab \Rightarrow \frac{16a^2 + 9b^2}{ab} = 40$$

۸- پاسخ: گزینه ۴

$x = a$ برابر رأس سهمی است، پس $a = -\frac{-4m}{2m} = 2$ است. نمودار سهمی بر خط $y = -5$ مماس است.

$$mx^2 - 4mx - 3 = -5 \Rightarrow mx^2 - 4mx + 2 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16m^2 - 8m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$$

$$f(2a) = f(4) = 8 - 8 - 3 = -3$$

۹- پاسخ: گزینه ی ۴

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (-1, 3), (1, 4)\}$$

$$\text{gof}^{-1} = \{(2, 3), (3, 1), (-1, -1), (1, 2)\}$$

$$\frac{f}{\text{gof}^{-1}} = \{(2, 1), (3, -1), (1, 1)\}$$

$$\text{برد} = \{1, -1\} \Rightarrow \text{مجموع اعضاء} = 0$$

۱۰- پاسخ: گزینه ی ۳

$$y = x \text{ به } x = y + \sqrt{y+2}$$

$$x - 3 = y + 2 + \sqrt{y+2+2} \Rightarrow x = y + 5 + \sqrt{y+4}$$

تقاطع با خط $y = x - 6$ می دهیم.

$$x = x - 6 + 5 + \sqrt{x-6+4} \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x = 3$$

۱۱- پاسخ: گزینه ی ۳

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

$$\cot \hat{D\hat{A}E} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \tan 2\alpha$$

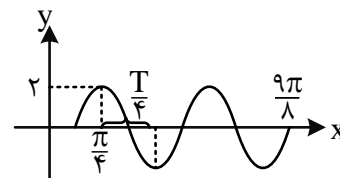
$$\Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{24}{7} \Rightarrow x = \frac{7}{6}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ی ۴

$$\max = 2 \Rightarrow |a| = 2$$

فاصله بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{8}$ برابر $7 \times \frac{T}{4}$ است.

$$\frac{9\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = 7 \times \frac{T}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|} = 2|b|\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{4}$$



دوره تناوب $\sin(abx)$ برابر است با:

$$T' = \frac{2\pi}{|ab|} = \frac{2\pi}{2 \times \frac{1}{4}} = 4\pi$$

۱۳- پاسخ: گزینه ی ۴

چون $X - \frac{\pi}{6} = X + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$ پس:

$$4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$$

معادله چهار جواب دارد.

۱۴- پاسخ: گزینه‌ی ۲ آزمون وی ای پی

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{a+2x} - \sqrt{a+3x})(\sqrt{a+2x} + \sqrt{a+3x})}{\sqrt{2} \sin^2 x (\sqrt{a+2x} + \sqrt{a+3x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a+2x - a-3x}{\sqrt{2} |\sin x| \times 2\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{-2\sqrt{2ax}} = \frac{1}{2\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۱

کافی است نقطه‌ای مانند $x = 0$ را بررسی کنیم:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = |0 + a - 0| = |a|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = |0 + a + 1| = |a + 1|$$

$$\Rightarrow |a| = |a + 1| \Rightarrow a + 1 = -a \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$f(x) = \left| 2x - \frac{1}{2} - [2x] \right|$$

در یک همسایگی $x = 1$ داریم:

$$1^+ : f(x) = \left| 2x - \frac{1}{2} - 2 \right| = -2x + \frac{5}{2} \Rightarrow f'_+(1) = -2$$

$$1^- : f(x) = \left| 2x - \frac{1}{2} - 1 \right| = 2x - \frac{3}{2} \Rightarrow f'_-(-1) = 2$$

۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۴

زمانی فقط یک مجانب قائم دارد که یا مخرج ریشه مضاعف داشته باشد و یا مخرج فقط یک ریشه داشته باشد.

$$\begin{cases} \Delta = 4 + 4a^2 \neq 0 \\ a = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x} \end{cases}$$

$$y = \frac{(x+2)^2}{x} - 2f(x) = \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 - 1}{x} = \frac{4x + 3}{x}$$

خط $y = 4$ مجانب افقی است.

۱۷- پاسخ: گزینه‌ی ۳

 اگر x منفی باشد، آن‌گاه:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x}$$

$$g(x) = \frac{18}{2x^2} = \frac{9}{x^2}$$

$$\Rightarrow fog(x) = \sqrt[3]{3 \times \frac{9}{x^2}} = \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x) \times f'(g(x)) = \frac{-3}{x^2}$$

$$\Rightarrow g'(-3)f'(g(-3)) = -\frac{1}{3}$$

۱۸- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3)^2 + 2(x-3)\sqrt{x} = \frac{(x-3)^2 + 4x(x-3)}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-3)(5x-3)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(a) < 0 \Rightarrow (a-3)(5a-3) < 0 \Rightarrow \frac{3}{5} < a < 3$$

۱۹- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$f(x) = ax^2 - 3ax^2 - 3x + 9$$

$$f'(x) = 2ax - 6ax - 3$$

$$f''(x) = 2a - 6a \xrightarrow{f''=0} x=1 \xrightarrow{y=2x} y=2$$

 حال نقطه $A(1, 2)$ را در ضابطه تابع f جایگزین می‌کنیم.

$$f(1) = 2 \Rightarrow -2(a-3) = 2 \Rightarrow a = 2$$

۲۰- پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{2x\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x(1+x^2) = x^2 \Rightarrow 2+2x^2 = x^2 \Rightarrow 2+x^2 = 0$$
 جواب ندارد.

$$x \geq 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{2x\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x(1-x^2) = -x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2-2x^2 = -x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \end{cases}$$

 دقت کنید که $x = \sqrt{2}$ در دامنه نیست. پس فقط $x = 0$ نقطه بحرانی است.