

۱- دنباله‌های $a_n = \alpha n + 2$ و $S_n = 4n^2 + bn$ به ترتیب دنباله خطی و جمع n جمله ابتدایی آن را نمایش می‌دهد. حاصل

$A = (a_1 + a_7) + (a_4 + a_8) + (a_5 + a_6) + (a_{10} + a_{11})$ کدام است؟

۵۱۸ (۴)

۴۱۰ (۳)

۴۰۰ (۲)

۵۰۸ (۱)

۲- اگر $A = \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$ و $B = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ مقدار $\frac{A+B}{A-B}$ چه عددی است؟

 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

۳- در یک مستطیل، نسبت محیط به چهار برابر عرض مستطیل عدد طلایی است. نسبت قطر مستطیل به طول مستطیل

چه عددی است؟

 $\frac{\sqrt{30}}{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ (۳) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ (۲) $\frac{6\sqrt{6}}{5}$ (۱)

۴- اگر جواب‌های معادله $mx^2 + mx - 4 = 0$ اعداد $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ و جواب‌های معادله $x^2 + nx - \lambda n = 0$ اعداد 2α و 2β باشند،

مقدار $n - m$ کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۵- دو نقطه $A(3, 4)$ و $B(-1, -2)$ نسبت به خط $ax + by = 10$ قرینه یکدیگر هستند، $a - b$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۶- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^2 + x + 1$ بر $x^2 + x + 1$ کدام است؟

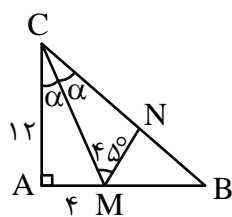
- (۱) $-x - 1$ (۲) $x + 1$ (۳) -۱ (۴) صفر

۷- هرگاه $\log_3^{(4x^2 - 4x + 1)} + \log_3^{(1 - 2x)} = 6$ مقدار $\log_3^{(2x + 4)}$ کدام است؟ منبع: آزمون وی ای پی

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) صفر

۸- در شکل روبه‌رو CN چه عددی است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) ۶
(۳) ۱۰ (۴) $6\sqrt{2}$



۹- اگر $f(x) = x^3 + x$ باشد، جواب معادله $f^{-1}\left(\frac{8x+3}{4}\right) = 2f^{-1}(x)$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

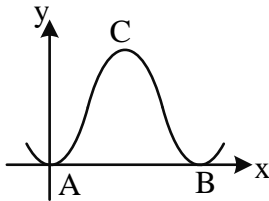
۱۰- اگر $g(x+3) + 2f(x+1) = 8$ ، $f^{-1}(2) = \frac{1}{5}$ ، مقدار $g^{-1}(4)$ چه عددی است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{11}{5}$ (۴) $\frac{8}{5}$

۱۱- f یک چندجمله‌ای با ۵ ریشه متفاوت است به طوری که جمع آن‌ها ۶ است. جمع صفرهای تابع $y = 2f(1-3x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) -12 (۴) 12

۱۲- قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin^2 \frac{\pi x}{2b}$ شکل روبه‌رو است. در مثلث ABC ، اگر $\tan C = \frac{4}{3}$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ ($b > 0$)

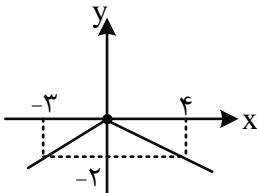


- (۱) $a = 2b$
 (۲) $b = 2a$
 (۳) $a = 4b$
 (۴) $b = 4a$

۱۳- برخی از جواب‌های مشترک $\cos 2x - \cos x = 0$ و $\sin 2x + \sin x = 0$ به کدام صورت می‌باشد؟

- (۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 (۲) $x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 (۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 (۴) $x = \frac{k\pi}{2}$

۱۴- نمودار f در مجاورت $x = 0$ شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^{[x]} f(2x)}{f(-3x)}$ چه عددی است؟



- (۱) 3
 (۲) $-\frac{8}{9}$
 (۳) $\frac{9}{8}$
 (۴) $-\frac{4}{3}$

۱۵- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ \frac{c}{b}[x^2] + 4 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} تابعی پیوسته است. مقدار $ab - 2c$ چه عددی است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۲۲ (۳) -۳۲ (۴) -۳۰

۱۶- اگر $f(x) = \sqrt{x+3} - 2x$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(1 - \frac{2}{x})$ چه عددی است؟ منبع: آزمون وی ای پی

- (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $-\frac{7}{2}$ (۴) $-\frac{7}{4}$

۱۷- اگر $f(x) = x + g^3(\frac{2}{x})$ باشد، به طوری که $f'(1) = 1$ و $g(2) = 2$ ، آن گاه به ازای کدام مقدار k ، $kg''(2) = f''(1)$ است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴) ۹۶

۱۸- اگر خط $y = -9x + b$ بر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+a}{x-a}$ در نقطه‌ای به طول مماس ۲ باشد، مقدار ab کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۲ (۳) ۲۷ (۴) ۳۳

۱۹- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = (x - 2\alpha)^2(x + \alpha)$ در $x = -1$ از تابع عبور می‌کند. طول ماکزیمم نسبی تابع کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) صفر

۲۰- هرگاه $f(x) = |x|(x-2)$ باشد، به طوری که مینیمم نسبی تابع $y = a + f(b-x)$ بر مبدأ مختصات منطبق شود، $a - b$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) صفر

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} \log_3^4 & 7 \\ 4 & \log_3^3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس X از تساوی $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲۹- (۲) ۴۰- (۳) ۴۲- (۴) ۳۱-

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A^{-1} + \beta I$ باشد، مقدار $\alpha + 2\beta$ کدام است؟

- (۱) ۸- (۲) ۱۰- (۳) ۶- (۴) ۴-

۲۳- دایره‌ی گذرا از نقطه‌ی $A(2, 1)$ و مماس بر خط $3x + 4y - 10 = 0$ روی خط $y + 1 = 2x$ بزرگ‌ترین وتر ممکن را جدا می‌کند. فاصله‌ی مرکز دایره از نقطه‌ی A کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۴- سهمی با کانون $F(1, 4)$ و خط هادی $x = 5$ مفروض است. خط $x = 1$ سهمی را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر پاره‌خط AB قطر بزرگ یک بیضی گذرا از رأس سهمی باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۵- تصویر قائم بردار $\vec{a} = (1, -2, 3)$ بر بردار $\vec{b} = (2, 1, 1)$ را بردار \vec{c} می‌نامیم. زاویه‌ی بین بردار \vec{c} و بردار $\vec{d} = (1, -1, 2)$ چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۴۵ (۴) ۱۲۰

۲۶- در مثلث ABC میانه‌های وارد بر اضلاع AB و AC با هم برابر و بر هم عمودند. اگر $AB = 8\sqrt{5}$ باشد، فاصله رأس A تا نقطه تلاقی میانه‌ها کدام است؟ منبع: آزمون وی ای پی

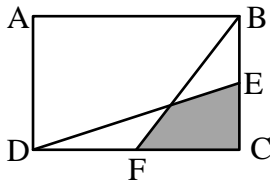
۱۶ (۴)

۴ (۳)

$8\sqrt{2}$ (۲)

$4\sqrt{2}$ (۱)

۲۷- در شکل مقابل، ABCD مستطیل است. اگر E و F وسط اضلاع مستطیل باشند، مساحت مستطیل چند برابر مساحت ناحیه رنگی است؟



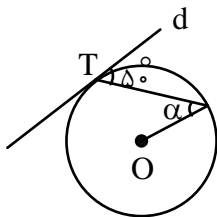
$4\sqrt{2}$ (۲)

۶ (۱)

$6\sqrt{2}$ (۴)

۴ (۳)

۲۸- در شکل مقابل، O مرکز دایره و خط d در نقطه T بر دایره مماس است. اندازه α چند درجه است؟



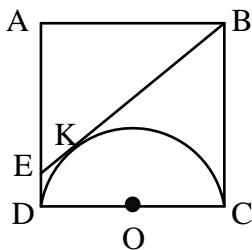
۳۰ (۱)

۳۵ (۲)

۴۰ (۳)

۴۵ (۴)

۲۹- در شکل مقابل، ABCD مربع است. نیم‌دایره به قطر CD رسم شده و پاره خط BE بر نیم‌دایره مماس است. اگر مساحت مربع ۳۶ باشد، طول پاره خط EK کدام است؟



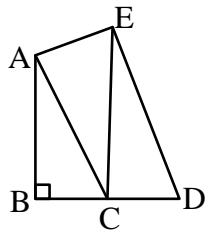
۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{3}{2}$ (۴)

۲ (۳)

۳۰- در شکل مقابل، $AC \parallel DE$ ، $AB = 10$ و $CD = 4$ است. مساحت مثلث ACE کدام است؟



۱۰ (۱)

۱۵ (۲)

۲۰ (۳)

۳۰ (۴)

۳۱- اگر گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee \sim q$ کدام است؟

F (۴)

q (۳)

$\sim q$ (۲)

T (۱)

۳۲- مجموعه‌های A و B به ترتیب با ۵ و ۶ عضو مفروض‌اند. اگر مجموعه $(A \cup B) \times (A \cap B')$ دارای ۲۷ عضو باشد،

مجموعه $(A \cup B)' - (A' \cup B')$ چند زیرمجموعه سره و ناتهی دارد؟

۳۰ (۴)

۲۵۴ (۳)

۱۲۶ (۲)

۶۳ (۱)

۳۳- بزرگ‌ترین عدد دو رقمی y که در معادله $(323, 221) = 323x + 221y$ صدق می‌کند را a می‌نامیم. مجموع ارقام

کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه $\{am + 182n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۸ (۱)

۳۴- عدد پنج‌رقمی $\overline{abab0}$ برابر حاصل ضرب 101 در مربع کامل یک عدد است. برای \overline{ab} چند عدد وجود دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخنامه

۱- پاسخ: گزینه ۲

$$a_n = \alpha n + \tau \Rightarrow S_n = \frac{n}{\tau} (\tau a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{\tau} (\tau(\alpha + \tau) + (n-1)\alpha) = n(\alpha + \tau) + \frac{n}{\tau} (n-1)\alpha = \frac{\alpha}{\tau} n^2 + n\alpha + \tau n - \frac{\alpha}{\tau} n$$

$$= \frac{\alpha}{\tau} n^2 + \left(\frac{\alpha}{\tau} + \tau\right)n \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\tau} = 4 \Rightarrow \alpha = 8 \\ \tau = 6 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$A = S_{11} - (a_7 + a_6 + a_5) = (4 \times 121 + 66) - (26 + 50 + 74) = 400$$

۲- پاسخ: گزینه ۲

$$A + B = \sqrt[3]{(\tau + \sqrt{\tau})^{\tau}} + \sqrt[3]{(\tau - \sqrt{\tau})^{\tau}} = \sqrt{\tau + \sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau - \sqrt{\tau}}$$

$$A + B > 0 \Rightarrow (A + B)^{\tau} = \tau + \sqrt{\tau}^{\tau} + \tau - \sqrt{\tau}^{\tau} + \tau \sqrt{(\tau + \sqrt{\tau})(\tau - \sqrt{\tau})}$$

$$(A + B)^{\tau} = 6 \Rightarrow A + B = \sqrt{6}$$

$$(A - B) = \sqrt{\tau + \sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau - \sqrt{\tau}} \Rightarrow A - B > 0$$

$$(A - B)^{\tau} = \tau + \sqrt{\tau} + \tau - \sqrt{\tau} - \tau \Rightarrow A - B = \sqrt{\tau}$$

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{\tau}$$

۳- پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\tau a + \tau b}{\tau a} = \frac{\sqrt{\delta} + 1}{\tau} \Rightarrow \frac{b}{\tau a} + \frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{\delta} + 1}{\tau} \Rightarrow \frac{b}{\tau a} = \frac{\sqrt{\delta}}{\tau} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{\delta}$$

$$A = \frac{\sqrt{a^{\tau} + b^{\tau}}}{b} \Rightarrow A^{\tau} = \frac{a^{\tau}}{b^{\tau}} + \frac{b^{\tau}}{b^{\tau}} = \frac{1}{\delta} + 1 = \frac{\tau}{\delta}$$

$$A = \sqrt{\frac{\tau}{\delta}} = \frac{\sqrt{\tau}}{\delta}$$

۴- پاسخ: گزینه ۲

$$mx^{\tau} + mx - \tau = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\tau} + \frac{\beta}{\tau} = -1 \Rightarrow \alpha + \beta = -\tau \\ \frac{\alpha}{\tau} \cdot \frac{\beta}{\tau} = -\frac{\tau}{m} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{\tau^2}{m} \end{cases}$$

$$x^{\tau} + nx - \tau n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau\alpha + \tau\beta = -n \Rightarrow \tau(-\tau) = -n \\ (\tau\alpha)(\tau\beta) = -\tau n \end{cases}$$

$$n = 4 \Rightarrow \tau\alpha\beta = -\tau n \Rightarrow \tau\alpha\beta = -32 \Rightarrow \alpha\beta = -8 \Rightarrow -\frac{\tau^2}{m} = -8 \Rightarrow m = \tau$$

۵- پاسخ: گزینه ۴

در واقع خط داده شده همان عمودمنصف A و B است، یعنی باید عمودمنصف A و B را پیدا کنیم.

$$\text{میدان } M \left| \begin{array}{l} m_{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \text{عمودمنصف } m = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 3 = -2x + 2 \Rightarrow 3y + 2x = 5 \Rightarrow 6y + 4x = 10 \Rightarrow a - b = -2$$

۶- پاسخ: گزینه ۴

$$P(x) = (x^r + x + 1)q(x) + r(x)$$

$$(x - 1)(x^{r^0} + x^{1^0} + 1) = (x^r + x + 1)q(x)(x - 1) + r(x)(x - 1)$$

$$(x - 1)(x^{r^0} + x^{1^0} + 1) = (x^r - 1)q(x) + r(x)(x - 1)$$

$$x^r = 1 : (x - 1)((x^r)^6 \cdot x^r + (x^r)^r \cdot x + 1) = r(x)(x - 1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x - 1)(x^r + x + 1)}_{x^{r-1}} = r(x)(x - 1) \Rightarrow r(x) = 0$$

۷- پاسخ: گزینه ۳

$$\log_r^{(1-2x)} + \log_r^{(rx-1)^2} = 6 \Rightarrow \log_r^{(1-2x)} + 2\log_r^{(1-2x)} = 6$$

$$\log_r^{(1-2x)} = 2 \Rightarrow 1 - 2x = 4 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\log_r^{(rx+4)} = \log_r^1 = 0$$

۸- پاسخ: گزینه ۳

$$\tan \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

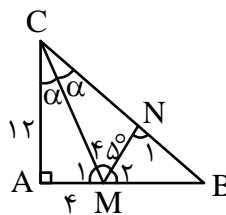
$$\tan 2\alpha = \frac{3}{4} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow MB = 5$$

$$M_1 = 90 - \alpha$$

$$M_2 = 180 - (90 - \alpha + 45) = 45 + \alpha$$

$$N_1 = 45 + \alpha \Rightarrow \text{زاویه خارجی} \Rightarrow MB = NB = 5$$

$$AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow 144 + 81 = BC^2$$



از طرفی:

$$BC = 15, NB = 5, \text{ پس } NC = 10$$

۹- پاسخ: گزینه ۳

$$f^{-1}\left(\frac{8x+3}{4}\right) = 2f^{-1}(x) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) = \frac{8x+3}{4} \\ f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = x \end{cases}$$

$$f(\alpha) = \lambda f\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) + 3 \Rightarrow f(\alpha^{\sqrt{3}} + \alpha) = \lambda\left(\frac{\alpha^{\sqrt{3}}}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda}\right) + 3$$

$$f\alpha^{\sqrt{3}} + f\alpha = \alpha^{\sqrt{3}} + f\alpha + 3 \Rightarrow \sqrt{3}\alpha^{\sqrt{3}} = 3 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\lambda}$$

پس $x = \frac{5}{\lambda}$ جواب معادله است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۳

$$f^{-1}(2) = \frac{1}{5} \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = 2$$

$$\Rightarrow x + 1 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow g\left(-\frac{4}{5} + 3\right) + 2f\left(\frac{1}{5}\right) = 8$$

$$g\left(\frac{11}{5}\right) + 4 = 8 \Rightarrow g^{-1}(4) = \frac{11}{5}$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۱

اگر صفرهای چندجمله‌ای $y = f(x)$ را x_1, x_2, \dots, x_5 در نظر بگیریم، آن گاه: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$

چون $y = 2f(1-3x)$ را در نظر گرفته‌ایم، آن گاه طبق تعریف تابع مرکب داریم:

$$1-3x = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

$$x = \frac{1-x_1}{3}, \frac{1-x_2}{3}, \dots, \frac{1-x_5}{3}$$

در این صورت صفرهای تابع عبارتند از:

$$\text{جمع صفرها} = \frac{1-x_1}{3} + \frac{1-x_2}{3} + \dots + \frac{1-x_5}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(x_1 + \dots + x_5) = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \times 6 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3}$$

Azmonvip

۱۲- پاسخ: گزینه ۱

$$c = 2\alpha \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}$$

$$6 \tan \alpha = -4 \tan^2 \alpha + 4 \Rightarrow 2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 2 = 0$$

$$(2 \tan \alpha - 1)(\tan \alpha + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{2} \\ \tan \alpha = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{T}{\max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \max = T$$

$$|a| = \frac{\pi}{2b} \Rightarrow |a| = 2b, a > 0, a = 2b$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۲

$$\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0, \cos x = -\frac{1}{2}$$

قسمتی از جواب‌های مشترک، جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ است، یعنی:

$$x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

جواب کلی قسمتی از جواب‌های مشترک به یکی از دو فرم داده شده است.

۱۴- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$x > 0: f(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$x < 0: f(x) = \frac{2}{3}x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^{[x]} f(2x)}{f(-3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 \times \frac{4x}{3}}{\frac{2}{3}x} = -\frac{8}{9}$$

۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$b = -2a \text{ پس } 2a + b = 0 \text{ اولاً}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)^H}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{a}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{a}{\frac{3}{4}} = \frac{4a}{3}$$

ثانیاً چون تابع در \mathbb{R} پیوسته است، پس $c = 0$ و از طرفی $\frac{4a}{3} = 4$ یعنی $a = 3, b = -6, c = 0$

$$ab - 2c = -18$$

۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

اگر فرض کنیم $\frac{1}{x} = t$ ، آنگاه با توجه به آن که $f(1) = 0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(1 - \frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 - 2t) - f(1)}{t} = -2f'(1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - 2 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(1 - \frac{2}{x}) = -2 \times \frac{-7}{4} = \frac{7}{2}$$

پس جواب نهایی:

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

$$f'(x) = 1 + 3g^2(\frac{2}{x})g'(\frac{2}{x}) \cdot \frac{-2}{x^2}$$

$$x = 1: f'(1) = 1 + 3g^2(2)g'(2)(-2)$$

$$g'(2) = 0$$

$$f''(1) = \frac{-2}{x^2} g''(\frac{2}{x}) \times \frac{-6}{x^2} g'(\frac{2}{x}) + \dots$$

$$f''(1) = \frac{12}{1} g''(2)g'(2)$$

$$f''(1) = 48g''(2) \Rightarrow k = 48$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر خطی در $X = \alpha$ بر نمودار تابعی مماس باشد، آن گاه $X = \alpha$ ریشه مضاعف تلاقی خط با تابع است.

نکته: اگر خطی در $X = \alpha$ بر نمودار تابعی مماس باشد، آن گاه مشتق تابع در α برابر با شیب خط مماس است و علاوه بر آن α طول نقطه تلاقی خط با تابع است. بدیهی است مسأله ۲ روش حل دارد، روش ساده‌تر به شکل زیر است:

$$\frac{2x+a}{x-a} = -9x+b \Rightarrow -9x^2 + 9ax + bx - ab = 2x + a$$

$$9x^2 + (2-b-9a)x + a + ab = 0$$

این معادله ریشه مضاعف ۲ دارد، پس به صورت $9(x-2)^2 = 0$ خواهد بود.

$$9x^2 + (2-b-9a)x + a(1+b) = 9x^2 - 36x + 36$$

$$\begin{aligned} 2-b-9a &= -36 \\ a(1+b) &= 36 \end{aligned} \Rightarrow a = 3, b = 11 \Rightarrow ab = 33$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۳

در تابع $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ نقطه $x = \frac{a+b+c}{3}$ طول عطف تابع است. پس در این تابع:

$$\text{طول عطف} = \frac{2\alpha + 2\alpha - \alpha}{3} = \alpha$$

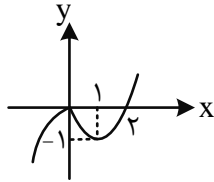
پس $\alpha = -1$.

$$f(x) = (x+2)^2(x-1)$$

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1) + (x+2)^2$$

$$= (x+2)(2x-2+x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{نسبی Max } A \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } \text{نسبی Min } B \begin{vmatrix} 0 \\ -4 \end{vmatrix}$$



۲۰- پاسخ: گزینه‌ی ۴

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم،

پس $A(1, -1)$ اکسترمم نسبی f و درواقع Min نسبی f است. قرار است با تبدیلات خواسته شده این نقطه را به مبدأ انتقال دهیم $b=1$ و $a=1$ قابل قبول است.

زیرا نمودار f را یک واحد به چپ انتقال دهیم min بر محور عرض‌ها منطبق خواهد شد و با یک واحد انتقال به بالا و قرینه‌یابی نسبت به محور عرض‌ها نقطه Min بر مبدأ منطبق خواهد شد.

۲۱- پاسخ: گزینه‌ی ۴

ابتدا دترمینان A را به دست می‌آوریم:

$$|A| = \log_4^3 \times \log_4^3 - 7 \times 4 = 1 - 28 = -27$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 19 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -19 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -16 & -29 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = -31$$

۲۲- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$A^2 - 7A + 12I = \bar{O}$$

$$\text{در ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow A^2 = 7A - 12I \xrightarrow{\times A} A^3 = 7A^2 - 12A \Rightarrow A^3 = 7(7A - 12I) - 12A$$

$$\Rightarrow A^3 = 37A - 84I \xrightarrow{\times A^{-1}} A^2 = 37I - 84A^{-1}$$

$$\alpha + 2\beta = -84 + 74 = -10$$

بنابراین $\alpha = -84$ و $\beta = 37$ است و داریم:

۲۳- پاسخ: گزینه‌ی ۳

مرکز دایره روی خط $y+1=2x$ قرار دارد، پس $O(\alpha, 2\alpha-1)$ است، حال داریم:

$$\sqrt{(\alpha-2)^2 + (2\alpha-2)^2} = \frac{|3\alpha + 4(2\alpha-1) - 10|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow (\alpha-2)^2 + (2\alpha-2)^2 = \frac{(11\alpha-14)^2}{25}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 = \frac{121\alpha^2 - 308\alpha + 196}{25}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow O(-1, -3)$$

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

فاصله مرکز دایره از نقطه A همان شعاع دایره است، پس:

۲۴- پاسخ: گزینه ۴

$$2|a| = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

در سهمی فاصله F(1, 4) از خط x = 5 برابر 2|a| است، پس:

پاره خط AB وتر کانونی سهمی است، پس برابر 8|a| = 4 می باشد که قطر بزرگ بیضی است. قطر کوچک بیضی برابر 2|a| است پس در بیضی داریم:

$$\begin{cases} 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \\ 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} c^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۵- پاسخ: گزینه ۲

کافی است کسینوس زاویه بین بردار b و بردار d را به دست آوریم:

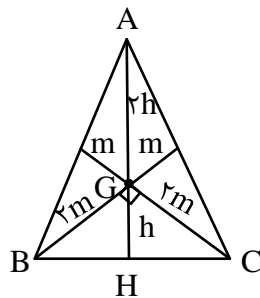
$$\cos \alpha = \frac{2-1+2}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

۲۶- پاسخ: گزینه ۲

چون میانه‌های وارد بر اضلاع AB و AC با هم برابرند، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و داریم:

$$BC = 2m\sqrt{2} \Rightarrow h = m\sqrt{2}$$

$$AH = 3h = 3m\sqrt{2}$$



حال در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم:

$$(h\sqrt{5})^2 = (m\sqrt{2})^2 + (3m\sqrt{2})^2 \Rightarrow 320 = 2m^2 + 18m^2 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = 4$$

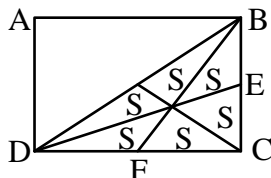
$$AG = 2h = 2m\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

بنابراین AG برابر است با:

۲۷- پاسخ: گزینه ۱

قطر مستطیل را رسم می کنیم. BF و DE میانه‌های مثلث DBC هستند، پس میانه سوم را رسم کرده و داریم:

$$\frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{رنگی}}} = \frac{12S}{2S} = 6$$



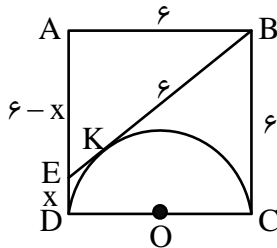
۲۸- پاسخ: گزینه ۳

شعاع OT را رسم می‌کنیم، مثلث AOT متساوی‌الساقین است. از طرفی OT بر خط d عمود است. پس:

$$\alpha + 50^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

۲۹- پاسخ: گزینه‌ی ۴

با توجه به این که مساحت مربع ۳۶ است، پس طول ضلع آن ۶ می‌باشد. می‌دانیم مماس‌های مرسوم از نقطه‌ای خارج دایره بر آن، با هم برابرند، پس اندازه‌ها به صورت زیر است:



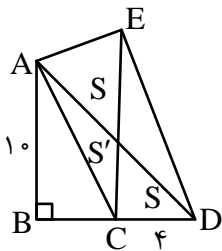
azmonvip

$$(6+x)^2 = (6-x)^2 + 6^2 \Rightarrow 24x = 36 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث EAB داریم:

۳۰- پاسخ: گزینه‌ی ۳

از A به D وصل می‌کنیم. در دوزنقه AEDC مساحت‌ها به صورت زیر است:



واضح است که مساحت مثلث ACE با مساحت مثلث ACD برابر است، پس:

$$S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 10 = 20$$

۳۱- پاسخ: گزینه‌ی ۱

چون ترکیب عطفی دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \sim q$ درست است، پس هر دو گزاره درست می‌باشند، در این صورت حتماً ارزش p نادرست است، حال داریم:

$$\sim p \Leftrightarrow q \equiv T \Leftrightarrow q \equiv q$$

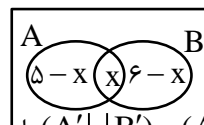
$$\sim q \vee (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv \sim q \vee q \equiv T$$

۳۲- پاسخ: گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار ون زیر داریم:

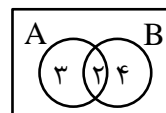
$$|(A \cap B') \times (A \cup B)| = 27 \Rightarrow |(A - B) \times (A \cup B)| = 27$$

$$\Rightarrow (5-x) \times (11-x) = 27 \Rightarrow x = 2$$



حال تعداد اعضای مجموعه $(A' \cup B') - (A \cup B)'$ را به دست می‌آوریم:

$$|(A' \cup B') - (A \cup B)'| = |(A \cap B)' - (A \cup B)'| = 7$$



بنابراین دارای $2^7 - 1 - 1 = 126$ زیر مجموعه سره و ناتهی است.

۳۳- پاسخ: گزینه ۴

$323x + 221y = 17 \Rightarrow 19x + 13y = 1$ می باشد، پس: $(323, 221) = 17$

$$\Rightarrow 13y \equiv 1 \equiv 39 \pmod{(13, 19)=1} \xrightarrow{\div 13} y \equiv 3 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow y = 19k + 3 \Rightarrow a = 98$$

می دانیم کوچک ترین عضو مثبت مجموعه $\{am + 182n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ برابر $(a, 182)$ است، پس:

$$(98, 182) = 14 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 1 + 4 = 5$$

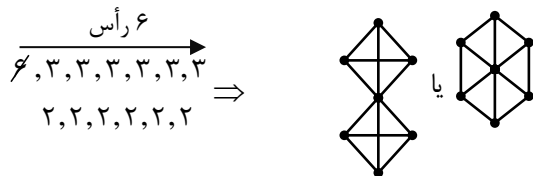
۳۴- پاسخ: گزینه ۲

$$\overline{abab^0} = 10 \times \overline{abab} = 10 \cdot 1 \times n^2 \Rightarrow 10 \times (\overline{ab} + 100 \times \overline{ab}) = 10 \cdot 1 \times n^2$$

$$\Rightarrow 10 \times 101 \times \overline{ab} = 10 \cdot 1 \times n^2 \Rightarrow 10 \times \overline{ab} = n^2 \Rightarrow \overline{ab} = 10 \cdot k^2 \Rightarrow k = 1, 2, 3$$

۳۵- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا گراف را رسم می کنیم:



در گراف سمت چپ، هشت دور به طول ۳ وجود دارد.

حال تعداد مسیرها بین دو رأس درجه ۳ و غیرمجاور برابر است با:

$$[(4-2) \times 2 / 2] \times [(4-2) \times 2 / 2] = 5 \times 5 = 25$$

۳۶- پاسخ: گزینه ۲

می دانیم $\overline{abc} = \overline{abcabc} = 1001 \times abc$ می باشد، پس:

$$2a + 2b + 2c = 14 \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 7 \\ a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$2a + 2b + 2c = 28 \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 14 \\ a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \binom{13+3-1}{3-1} = \binom{15}{2} = 105$$

$$2a + 2b + 2c = 42 \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 21 \\ a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \binom{20+3-1}{3-1} = \binom{22}{2} = 231$$

بنابراین تعداد اعداد سه رقمی \overline{abc} برابر $28 + 105 + 231 = 364$ می باشد.

۳۷- پاسخ: گزینه ۳

بدترین حالت این است که اعدادی که مضرب ۵ نیستند عضو زیرمجموعه باشند که تعداد آن ها برابر است با:

$$50 - \left\lfloor \frac{50}{5} \right\rfloor = 40$$

حال اگر یک عدد دیگر به زیرمجموعه اضافه شود، حتماً دو عدد وجود دارد که حاصل ضرب آن ها مضرب ۱۵ می ود.

۳۸- پاسخ: گزینه ۳

احتمال این که دو تاس، برابر و متوالی نباشند برابر $\frac{20}{36}$ و احتمال این که مجموع اعداد رو شده برابر ۳ باشد، $\frac{2}{36}$ می باشد، پس:

$$\frac{20}{36} \times \frac{\binom{3}{2}}{2^3} + \frac{2}{36} \times \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{20}{36} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{36} \times \frac{10}{32} = \frac{240+20}{36 \times 32} = \frac{65}{288}$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به مقادیر داده شده داریم:

$$\begin{cases} P(A) = 0/7 \Rightarrow P(A') = 1 - 0/7 = 0/3 \\ P(A'|B) = 0/3 \end{cases}$$

بنابراین پیشامدهای A' و B و در نتیجه پیشامدهای A و B مستقل اند. حال داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = 0/7 \times 0/6 = 0/42$$

۴۰- پاسخ: گزینه ۴

مد داده‌ها ۱۳ است، پس داده‌های باقی‌مانده ۱۷، ۱۲، ۱۴، ۱۹، ۱۸ است، حال داریم:

$$\bar{x} = \frac{18+19+14+12+17}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$\sigma^2 = \frac{4+9+4+16+1}{5} = \frac{34}{5} = 6/8$$