

۱- در یک دنباله حسابی صعودی با جمله عمومی  $a_n$ ، روابط  $a_1 a_4 = 10(a_2 a_3)$  و  $a_2 + a_3 = 6$  است. جمله پنجم دنباله کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴) ۴۸

۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x - 3 = \frac{x+5}{x-2}$  باشند، حاصل  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$  کدام است؟

- (۱)  $10\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{5}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $6\sqrt{3}$

۳- رأس سهمی  $y = mx^2 + 16x + 14m - 7$  بر خط  $y = -3$  قرار دارد. محور تقارن سهمی، خط  $y = 3x + k$  را در نقطه‌ای به عرض  $-4$  قطع می‌کند. اگر  $m$  صحیح باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱)  $-6$  (۲)  $-9$  (۳)  $-16$  (۴)  $-12$

۴- به ازای  $x > 1$  مجموعه جواب نامعادله  $\frac{(a^2 + 4)x^2 + 8ax - 16}{x - 3\sqrt{x} + 2} < 0$  به صورت  $(2, 4)$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $2$  (۳)  $-2$  (۴) صفر

۵- اگر  $A(2, 5)$  و  $C(0, 1)$  دو رأس مستطیل ABCD باشند و خط  $2y - x = k$  از دو رأس B و D عبور کند، مساحت مستطیل چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۴

۶- اگر  $\left(\frac{27}{125}\right)^{x+1} \leq (0/6)^{x^2+x}$  باشد، برای  $\log_2(3^{x-1}) \leq 5$  چند جواب صحیح یافت می‌شود؟

- ۸ (۱)      ۹ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۲ (۴)

۷- اگر تابع  $f(x) = 3x^2 + (ax+b)(2-x)$  خطی و تابع  $g(x) = f(x) + c$  همانی باشد، مقدار  $b-c$  کدام است؟

- ۱۵ (۱)      ۱۲ (۲)      ۶ (۳)      ۵ (۴)

۸- اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  باشد، مجموع طول نقاط برخورد نمودار تابع  $y = f^{-1} \circ f^{-1}(x)$  و نیمساز ناحیه دوم و چهارم کدام

است؟ آزمون وی ای پی

- ۱ (۱)      -۱ (۲)      ۳ (۳)      -۳ (۴)

۹- تابع  $f$  با دامنه  $(-\infty, 1]$  اکیداً صعودی است. تعداد اعداد صحیح عضو مجموعه جواب نامعادله

$$f(x^2 + 6x + 6) \leq f(x^2 + 3x - 3)$$

کدام است؟

- ۴ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۵ (۴)

۱۰- تابع درجه دوم با ضرایب طبیعی  $f$  همواره در رابطه  $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)f'(x) - 2$  صدق می‌کند. حداقل مقدار باقی‌مانده

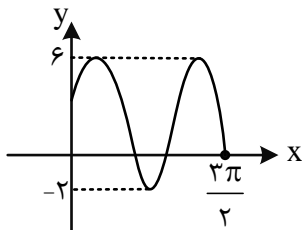
تقسیم  $f(x)$  بر  $x-1$  کدام است؟

- ۱۰ (۱)      ۷ (۲)      ۳ (۳)      ۶ (۴)

۱۱- اگر  $\frac{2 \tan(x - \frac{\pi}{2}) + \tan(x + \pi)}{\cot(\frac{3\pi}{2} + x) - 3 \cot(x - \pi)} = \frac{-2}{7}$  و  $x$  حاده باشد، مقدار  $\tan(2x - \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{7}$       (۲)  $\frac{1}{7}$       (۳)  $7$       (۴)  $-7$

۱۲- قسمتی از نمودار تابع  $y = c + a \cos(bx - \frac{\pi}{3})$  به صورت مقابل است.  $a + b$  کدام است؟



- (۱)  $2$   
(۲)  $-2$   
(۳)  $6$   
(۴)  $-6$

۱۳- حداکثر اختلاف بین دو ریشه متوالی معادله  $x - \cot^2 x = 1 - \sin x$  چقدر است؟

- (۱)  $\frac{4\pi}{3}$       (۲)  $\frac{7\pi}{6}$       (۳)  $\frac{2\pi}{3}$       (۴)  $\frac{3\pi}{2}$

۱۴- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع  $f(x) = \frac{ax + \left[\frac{-1}{x^2}\right]}{2x - \left[x^2\right]}$  در  $x = -1$  برابر  $-2$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-2$       (۲)  $2$       (۳)  $-4$       (۴)  $4$

۱۵- تابع  $f(x) = \begin{cases} (ax - a)[-x] + b & [x - 1] = 0 \\ x^3 + ax^2 - b & [x - 1] \neq 0 \end{cases}$  در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $2$       (۴)  $-2$

۱۶- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + ax + b} = +\infty$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + \sqrt{x^2 + 1}}{bx - 1}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{7}{8}$       (۲)  $-\frac{9}{8}$       (۳)  $\frac{7}{8}$       (۴)  $\frac{9}{8}$

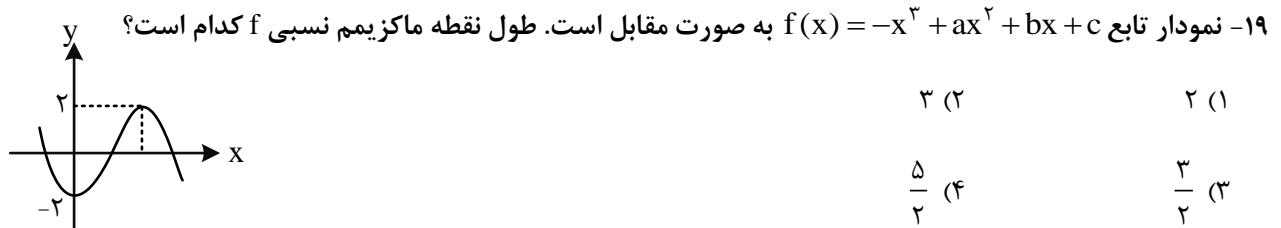
۱۷- اگر تابع  $f$  در  $x = -1$  پیوسته و  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$  باشد، حاصل مشتق تابع  $f(\frac{2}{x})$  در نقطه  $x = -2$  چقدر

است؟

- (۱)  $-6$       (۲)  $6$       (۳)  $12$       (۴)  $-12$

۱۸- اگر  $f(x) = g(\sin x + \cos x)$  و  $g'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$  باشد، مقدار  $f''(\frac{\pi}{4})$  کدام است؟ آزمون وی ای پی

- (۱)  $2$       (۲)  $\sqrt{2}$       (۳)  $2\sqrt{2}$       (۴)  $4$



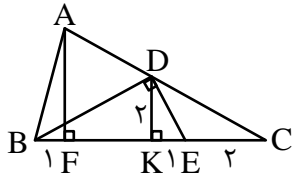
۲۰- فرض کنید  $(\alpha, \beta)$  بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که نمودار تابع  $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$  در آن بازه، صعودی و دارای تقعر رو به پایین است. مقدار  $f''(\alpha) + f'(\beta)$  چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $1$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴) صفر

۲۱- در مثلث ABC اندازه زاویه داخلی B برابر  $20^\circ$  است. اگر عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC روی ضلع BC همدیگر را قطع کنند، اندازه زاویه داخلی C چند درجه است؟

- (۱) ۵۰      (۲) ۶۰      (۳) ۶۵      (۴) ۷۰

۲۲- در شکل مقابل، طول ارتفاع AF کدام است؟

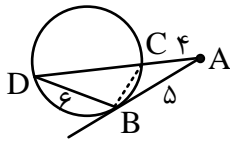


- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

۲۳- در مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌های برابر  $75^\circ$ ، فاصله نقطه‌ای روی قاعده از دو ساق مثلث برابر ۷ و ۹ است. طول ساق مثلث کدام است؟

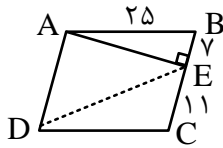
- (۱) ۱۸      (۲) ۲۴      (۳) ۳۲      (۴) ۳۶

۲۴- در شکل مقابل، AB در نقطه B بر دایره مماس است. طول BC کدام است؟



- (۱) ۶  
(۲)  $3/2$   
(۳)  $2/4$   
(۴)  $4/8$

۲۵- در متوازی‌الاضلاع شکل مقابل، طول پاره خط DE کدام است؟



۲۴ (۱)

۲۸ (۲)

۳۰ (۳)

۲۲ (۴)

 ۲۶- ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. مجموع درایه‌های ماتریس  $A^2$  چند برابر

 مجموع درایه‌های ماتریس  $B^3$  است؟ آزمون وی ای پی

۲ (۱)

-۲ (۲)

۳ (۳)

-۳ (۴)

 ۲۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های ماتریس  $B$  از تساوی  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & \sqrt{|A|} \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} |A| & 4 \\ \frac{|A|}{2} & 2 \end{bmatrix}$  کدام است؟

 $\frac{7}{3}$  (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

 $\frac{10}{3}$  (۴)

 ۲۸- محور تقارن سهمی  $y^2 - 2y - 4x = 7$  خط هادی آن را در نقطه  $A$  و خط عمود بر محور سهمی در کانون، سهمی را در نقاط  $B$  و  $C$  قطع می‌کند. اندازه شعاع دایره محاطی داخلی مثلث  $ABC$  کدام است؟

 $2\sqrt{2} - 1$  (۱)

 $2(\sqrt{2} + 1)$  (۲)

 $2\sqrt{2} + 1$  (۳)

 $2(\sqrt{2} - 1)$  (۴)

 ۲۹- دایره‌های  $x^2 + y^2 + 12x + 8y - 48 = 0$  و  $x^2 + y^2 - 12x - 24y + 36 = 0$  مفروض‌اند. پاره خط واصل مراکز دو

 دایره، آن‌ها را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع می‌کند. طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

۱ (۱)

 $1/5$  (۲)

۲ (۳)

 $2/5$  (۴)

۳۰- اگر  $a = (1, 2, -2)$ ،  $b = (1, 2, 3)$  و  $c = (2, 1, 0)$  سه بردار در فضا باشند، اندازه بردار  $a \times (b \times c)$  چند برابر اندازه بردار  $(2, 3, 4)$  است؟

- (۱) ۳      (۲)  $2\sqrt{2}$       (۳)  $3\sqrt{2}$       (۴) ۲

۳۱- مجموعه‌های  $B = \{a, b, c\}$  و  $A$  با فرض  $A \cap B = \emptyset$  مفروض‌اند. اگر تعداد اعضای مجموعه توانی  $A \cup B$ ، ۴۴۸ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $A$  باشد، مجموعه  $A$  چند زیرمجموعه محض و ناتهی دارد؟

- (۱) ۳۱      (۲) ۶۳      (۳) ۶۲      (۴) ۳۰

۳۲- یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار سوم «رو» ظاهر شود، احتمال آن که دقیقاً ۷ پرتاب لازم شود چند برابر آن است که در ۶ پرتاب، سه بار سکه رو بیاید؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{3}{4}$       (۳)  $\frac{3}{8}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

۳۳- در ظرف اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره آبی و در ظرف دوم ۵ مهره سفید و ۴ مهره آبی وجود دارد. چهار سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر تعداد روها و پشت‌ها برابر باشند. مهره‌ای از ظرف اول به تصادف خارج کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم، در غیر این صورت مهره‌ای به تصادف از ظرف دوم خارج کرده و در ظرف اول قرار می‌دهیم. سپس از ظرف با تعداد مهره‌های کمتر ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره اخیر هم‌رنگ هستند؟

- (۱)  $\frac{65}{288}$       (۲)  $\frac{61}{144}$       (۳)  $\frac{67}{144}$       (۴)  $\frac{61}{288}$

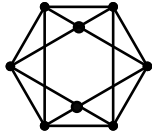
۳۴- داده‌های آماری، مجموع ارقام هر یک از اعداد دو رقمی کوچک‌تر از ۳۰ هستند. واریانس داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۷      (۲)  $7/5$       (۳) ۸      (۴)  $8/5$

۳۵- حاصل ضرب درجات رئوس گراف با کم‌ترین مرتبه ممکن برابر ۵۷۶ است. در این گراف چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

- ۷ (۱)      ۸ (۲)      ۹ (۳)      ۱۰ (۴)

۳۶- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۳۷- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، معادله  $(5a-2)x + (3a+7)y = 5n+2$  به ازای هر مقدار صحیح  $a$  در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است؟

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

۳۸- باقی‌مانده تقسیم عدد  $7^3 + 2^6$  بر ۱۳ کدام است؟

- ۱ (۱)      ۳ (۲)      ۷ (۳)      ۴ (۴) صفر

۳۹- معادله  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = \frac{20}{x_1}$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- ۱۹۰ (۱)      ۲۰۰ (۲)      ۲۱۰ (۳)      ۲۲۰ (۴)

۴۰- مجموعه  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots, n\}$  مفروض است. اگر یک زیرمجموعه حداقل ۱۳ عضوی از  $A$ ، لاقبل دو عضو داشته باشد که نسبت به هم اول نباشند، بیشترین مقدار  $n$  کدام است؟

- ۴۲ (۱)      ۴۰ (۲)      ۳۸ (۳)      ۴۴ (۴)

## پاسخنامه

## ۱- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$a_1(a_1 + 3d) = 1 \cdot (a_1 + d)(a_1 + 2d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 3a_1d = 1 \cdot a_1^2 + 3 \cdot a_1d + 2 \cdot d^2$$

$$\Rightarrow 9a_1^2 + 27a_1d + 2 \cdot d^2 = 0 \quad (1)$$

$$a_r + a_r = 6 \Rightarrow a_1 + d + a_1 + 2d = 6 \Rightarrow 2a_1 + 3d = 6 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 9\left(\frac{6-3d}{2}\right)^2 + 27d\left(\frac{6-3d}{2}\right) + 2 \cdot d^2 = 0$$

$$\Rightarrow 324 + 81d^2 - 324d - 81d^2 + 324d = 0 \Rightarrow d^2 = 324 \Rightarrow \begin{cases} d = 18 \\ a_1 = -24 \end{cases} \quad \text{از طرفی:}$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 48$$

## ۲- پاسخ: گزینه‌ی ۱ آزمون وی ای پی

$$(x-3)(x-2) = x + 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 6 \\ P = \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{S^2 - 2PS}{P^2} + \frac{2}{\sqrt{P}} = \frac{216 - 18}{1} + 2 = 200$$

$$\Rightarrow A = 10\sqrt{2}$$

## ۳- پاسخ: گزینه‌ی ۳

عرض رأس سهمی برابر ۳- است.

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -3 = -\frac{256 - 4m(14m - 7)}{4m} \Rightarrow 3m = 64 - 14m^2 + 7m$$

$$\Rightarrow 7m^2 - 2m - 32 = 0 \Rightarrow m = -2 \text{ یا } \frac{16}{7}$$

$$m = -2 \Rightarrow x_S = -\frac{16}{2m} = 4$$

$$y = 3x + k \Rightarrow -4 = 12 + k \Rightarrow k = -16$$

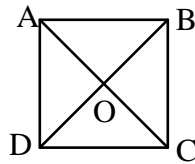
## ۴- پاسخ: گزینه‌ی ۴

ابتدا و انتهای بازه (۲, ۴) ریشه های صورت و مخرج کسر هستند. چون  $x = 4$  ریشه مخرج است، پس  $x = 2$  ریشه صورت است.

$$(a^x + 4)x^x + 8ax - 16 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow 4(a^2 + 4) + 16a - 16 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a = 0 \Rightarrow a = 0, -4$$



$$O = \frac{A+C}{2} = (1, 3)$$

$$x = 1, y = 3 \Rightarrow 2y - x = k \Rightarrow 6 - 1 = k \Rightarrow k = 5$$

فرض کنید  $B(2b - 5, b)$  روی خط  $2y - x = 5$  واقع باشد.

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{b-5}{2b-7} \times \frac{b-1}{2b-5} = -1$$

$$\Rightarrow b^2 - 6b + 5 = -4b^2 + 24b - 35 \Rightarrow 5b^2 - 30b + 40 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 6b + 8 = 0 \Rightarrow b = 2, 4$$

$b = 4, 2$  که به دست آمده است همان عرض نقاط  $B$  و  $D$  است.

$$\text{فرض } b = 2 \Rightarrow S = AB \times BC = \sqrt{3^2 + 3^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2} = 6$$

### ۶- پاسخ: گزینه ۲

$$1) \left(\frac{6}{10}\right)^{x^2+x} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{3x+3} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+x} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{3x+3}$$

$$\Rightarrow x^2 + x \geq 3x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 3$$

$$2) \log_7^{(3x-1)} \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \\ 3x-1 \leq 7^5 \Rightarrow x \leq 11 \end{cases}$$

پس  $3 \leq x \leq 11$  است و تعداد جوابهای صحیح برابر ۹ است.

### ۷- پاسخ: گزینه ۱

تابع خطی درجه اول (یا ثابت) است، پس ضریب  $X$  باید صفر باشد.

$$f(x) = 3x^2 - ax^2 + 2ax - bx + 2b$$

$$a = 3 \Rightarrow f(x) = (6-b)x + 2b$$

$$\Rightarrow g(x) = (6-b)x + 2b + c = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-b=1 \\ 2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=-10 \end{cases} \Rightarrow b-c=15$$

### ۸- پاسخ: گزینه ۱

$$\text{نکته: } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$y = -x \Rightarrow f^{-1} \circ f^{-1}(x) = -x \Rightarrow (f \circ f)^{-1}(x) = -x$$

$$\Rightarrow f \circ f(x) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - 1}{\frac{2x-1}{x+1} + 1} = \frac{3x-3}{3x} = \frac{x-1}{x} \Rightarrow (f \circ f)^{-1}(x) = \frac{-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x-1} = -x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$$

۹- پاسخ: گزینه ۲

$$f(x^2 + 6x + 6) \leq f(x^2 + 3x - 3)$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 6 \leq x^2 + 3x - 3 \Rightarrow x \leq -3$$

از طرفی دامنه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 6 \leq 1 \\ x^2 + 3x - 3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -1 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

از اشتراک تمام شرایط بالا به جواب  $-4 \leq x \leq -3$  می‌رسیم که شامل دو عدد صحیح است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = \frac{1}{4}(x+2)(2ax+b) - 2 = ax^2 + \left(2a + \frac{b}{4}\right)x + b - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2a + \frac{b}{4} \\ c = b - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4a \\ c = 4a - 2 \end{cases}$$

حداقل مقدار  $f(1)$  مورد نظر است.

$$f(1) = a + b + c = a + 4a + 4a - 2 = 9a - 2$$

حداقل  $a$  برابر یک است، پس  $f(1) = 7$  است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{-2 \cot x + \tan x}{-\tan x - 3 \cot x} = -\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow -14 \cot x + 7 \tan x = 2 \tan x + 6 \cot x$$

$$\Rightarrow \Delta \tan x = 2 \cot x = \frac{2}{\tan x} \Rightarrow \tan^2 x = 4 \Rightarrow \tan x = +2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{4}{-3}$$

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 2x - 1}{1 + \tan 2x} = \frac{-\frac{4}{3} - 1}{1 - \frac{4}{3}} = 7$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۳

برای  $a$  و  $b$  دو حالت در نظر می‌گیریم:

$b > 0$  و  $a > 0$  (۱)

$$\begin{cases} c+a=6 \\ c-a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=4 \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 = 2 + 4 \cos(bx - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(\frac{3\pi}{2}b - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{جواب سومین} \Rightarrow \frac{3\pi}{2}b - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow b=2 \Rightarrow a+b=6$$

$b < 0$  و  $a < 0$  (۲)

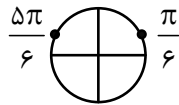
$$\begin{cases} c-a=6 \\ c+a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=-4 \end{cases}$$

تناقض  $y(0) = c + \frac{a}{2} = 0$

۱۳- پاسخ: گزینه ۱

$$\wedge \sin x = 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \wedge \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \dots$$



$$\max(x_2 - x_1) = \frac{13\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{ax-2}{2x-0} = \frac{a+2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax-1}{2x-1} = \frac{a+1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a+2}{2} + \frac{a+1}{3} = -2 \Rightarrow \frac{5a+8}{6} = -2 \Rightarrow a = -4$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)[-x] + b & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax^2 - b & x \leq 0, x \geq 2 \end{cases}$$

پیوستگی f در نقاط  $x=2$  و  $x=0$  را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow -2a + b = 8 + 4a - b \Rightarrow -6a + 2b = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow a + b = -b \Rightarrow a + 2b = 0$$

در نتیجه  $\frac{a}{b} = -2$  است.

**۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۲**

$$2x^2 + ax + b = 2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$$

پس  $b = 8$  و  $a = -8$  است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + \sqrt{x^2 + 1}}{bx - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |x|}{bx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x - x}{8x} = -\frac{9}{8}$$

**۱۷- پاسخ: گزینه‌ی ۱**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{\underbrace{(x-1)(x+1)}_{-2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{x+1} = -3$$

پس  $f'(-1) = -3$  و  $f(-1) = 3$  است.

$$y = x^2 f\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow y' = 2xf\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x^2} \times x^2 f'\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$\Rightarrow y'(-2) = -4f(-1) - 2f'(-1) = -4 \times 3 - 2 \times (-3) = -6$$

**۱۸- پاسخ: گزینه‌ی ۱**

نکته:  $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$

$$f'(x) = (\cos x - \sin x)g'(\sin x + \cos x)$$

در مرحله بعد، فقط از عامل صفرکننده  $\cos x - \sin x$  مشتق می‌گیریم.

$$f''(x) = (-\sin x - \cos x)g'(\sin x + \cos x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}g'(\sqrt{2}) = 2$$

**۱۹- پاسخ: گزینه‌ی ۱**

$$f(0) = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{f'(0)=0} b = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2ax = x(-3x + 2a)$$

$$f' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2a}{3} \end{cases}$$

$$f'\left(\frac{2a}{3}\right) = 2 \Rightarrow \frac{-8a^2}{27} + \frac{4a^2}{9} - 2 = 2 \Rightarrow \frac{4a^2}{27} = 4$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow x = \frac{2a}{3} = 2$$

**۲۰- پاسخ: گزینه‌ی ۴**

$$f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 6x^2$$

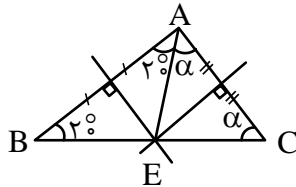
$$f'(x) = 12x^2 - 24x^2 + 12x$$

$$= 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(x-1)(3x-1)$$

$$\begin{cases} f' > 0 \Rightarrow x > 0 \\ f'' < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) + f'(1) = 0 + 0 = 0$$



۲۱- پاسخ: گزینه‌ی ۴

با توجه به شکل زیر، از E به A وصل می‌کنیم.

مثلث‌های AEB و AEC متساوی‌الساقین هستند و داریم:

$$\hat{AEC} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$$

$$\alpha + \alpha + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 70^\circ \Rightarrow \hat{C} = 70^\circ$$

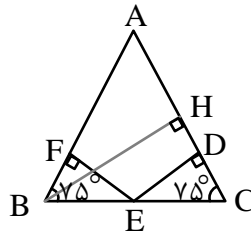
۲۲- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$DK^2 = KE \times KB \Rightarrow 4 = 1 \times KB \Rightarrow KB = 4 \Rightarrow FK = 3$$

در مثلث قائم‌الزاویه BDE داریم:

در مثلث AFC،  $DK \parallel AF$ ، پس به کمک تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{CK}{CF} = \frac{DK}{AF} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{AF} \Rightarrow AF = 4$$



۲۳- پاسخ: گزینه‌ی ۳

با توجه به شکل زیر داریم:

$$ED + EF = BH \Rightarrow BH = 7 + 9 = 16$$

در مثلث ABC،  $\hat{A} = 30^\circ$  می‌باشد. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه AHB، ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$  نصف وتر است، پس

$$AB = 32 \text{ می‌باشد.}$$

۲۴- پاسخ: گزینه‌ی ۴

زاویه‌های  $\hat{ABC}$  و  $\hat{BDC}$  با هم برابرند، پس دو مثلث ABC و ABD متشابه‌اند.

$$\hat{ABC} \sim \hat{ABD} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{BC}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow BC = 4/8$$

چون مثلث FAD متساوی‌الساقین است، پس  $AD = 2\sqrt{21}$  بوده و در نتیجه مساحت مربع برابر  $(2\sqrt{21})^2 = 84$  است.

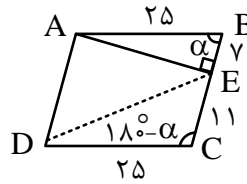
۲۵- پاسخ: گزینه‌ی ۳

در مثلث قائم‌الزاویه AEB داریم:

$$AE^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow AE^2 = 576 \Rightarrow AE = 24$$

$$\sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{24}{25} \Rightarrow \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow \cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{7}{25} \Rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{7}{25}$$



حال به کمک قضیه کسینوسها داریم:

$$DE^2 = 11^2 + 25^2 - 2 \times 11 \times 25 \times \left(-\frac{7}{25}\right) \Rightarrow DE^2 = 900 \Rightarrow DE = 30$$

### ۲۶- پاسخ: گزینه ی ۴

چون سطرهای دوم و سوم ماتریس A مضرب سطر اول آن هستند، پس:

$$A^2 = (1 + (-1) + 2) \times A \Rightarrow A^2 = 2A$$

بنابراین مجموع درایه های ماتریس  $A^2$  برابر ۱۲ می باشد. از طرفی داریم:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

چون  $B^2 = B$  می باشد، پس  $B^2$  نیز برابر B بوده و مجموع درایه های آن برابر -۴ می باشد، پس مقدار خواسته شده برابر

$$-3 - \frac{12}{-4} = -3$$

### ۲۷- پاسخ: گزینه ی ۳

$$|A| = -2(-26) - 1(4) - 2(16) = 16$$

ابتدا دترمینان ماتریس A را به دست می آوریم:

حال داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 5 \\ -14 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس B به صورت زیر است و داریم:

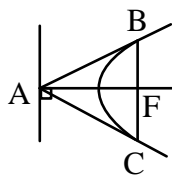
$$B = (B^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 14 & 29 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{12} ((-2) + (-5) + 14 + 29) = \frac{1}{12} \times 36 = 3$$

### ۲۸- پاسخ: گزینه ی ۴

با توجه به شکل زیر داریم:

$$BC = 4|a|$$

$$AB = AC = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2\sqrt{2}|a|$$



$$S = \frac{1}{2} \times 4|a| \times 2|a| = 4|a|^2$$

$$2P = 4|a| + 2\sqrt{2}|a| + 2\sqrt{2}|a| = (4 + 4\sqrt{2})|a|$$

حال مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$a = -\frac{-4}{4 \times 1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC برابر است با:

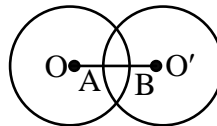
$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{4}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

### ۲۹- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا مرکز و شعاع هر دایره را به دست می‌آوریم:

$$O = (-6, -4), r = \sqrt{36 + 16 + 48} = 10$$

$$O' = (6, 12), r' = \sqrt{36 + 144 - 36} = 12$$



حال  $OO' = 20$  برابر  $\sqrt{144 + 256} = 20$  می‌باشد، پس دایره‌ها متقاطع‌اند، با فرض  $AB = L$  داریم:

$$OA + AB + BO' = OO' \Rightarrow 12 - L + L + 10 - L = 20 \Rightarrow 22 - L = 20 \Rightarrow L = 2$$

### ۳۰- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا بردار  $a \times (b \times c)$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} b = (1, 2, 3) \\ c = (2, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow b \times c = (-3, 6, -3)$$

$$\begin{cases} a = (1, 2, -2) \\ b \times c = (-3, 6, -3) \end{cases} \Rightarrow a \times (b \times c) = (6, 9, 12)$$

می‌دانیم  $(6, 9, 12) = 3 \times (2, 3, 4)$  است، پس اندازه بردار  $a \times (b \times c)$  سه برابر اندازه بردار  $(2, 3, 4)$  م می‌باشد.

### ۳۱- پاسخ: گزینه ۳

فرض می‌کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد، از آنجایی که  $A \cap B = \emptyset$  است، پس مجموعه  $A \cup B$  دارای  $n + 3$  عضو

است که مجموعه توانی آن دارای  $2^{n+3}$  عضو می‌باشد، پس:

$$2^{n+3} = 2^n + 448 \Rightarrow 2^{n+3} - 2^n = 448 \Rightarrow 2^n(8 - 1) = 448 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین مجموعه A دارای ۶ عضو است، پس  $2^6 - 1 - 1 = 62$  زیرمجموعه محض و ناتهی دارد.

### ۳۲- پاسخ: گزینه ۳

برای آن که سکه برای بار سوم در پرتاب هفتم «رو» ظاهر شود، باید در ۶ پرتاب اول، دو بار «رو» ظاهر شود و در پرتاب هفتم

نیز «رو» ظاهر شود، پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{2^6} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{128}$$

$$P(B) = \frac{\binom{6}{3}}{2^6} \times \frac{1}{2} = \frac{20}{64}$$

از طرفی، احتمال آن که در ۶ پرتاب، سه بار رو ظاهر شود برابر است با:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{128}}{\frac{20}{64}} = \frac{15 \times 64}{20 \times 128} = \frac{3}{8}$$

حال داریم:

### ۳۳- پاسخ: گزینه ۳

احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} \times \left( \frac{6}{9} \times \frac{\binom{5}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{3}{9} \times \frac{\binom{6}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} \right) + \left( 1 - \frac{\binom{4}{2}}{2^4} \right) \times \left( \frac{5}{9} \times \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{4}{9} \times \frac{\binom{5}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{16} \times \left( \frac{6}{9} \times \frac{13}{28} + \frac{3}{9} \times \frac{16}{28} \right) + \frac{10}{16} \times \left( \frac{5}{9} \times \frac{12}{28} + \frac{4}{9} \times \frac{13}{28} \right)$$

$$= \frac{3}{8} \times \left( \frac{26+16}{3 \times 28} \right) + \frac{5}{8} \times \left( \frac{60+52}{9 \times 28} \right) = \frac{126}{8 \times 3 \times 28} + \frac{560}{8 \times 9 \times 28} = \frac{938}{8 \times 9 \times 28} = \frac{469}{36 \times 28} = \frac{67}{144}$$

### ۳۴- پاسخ: گزینه ۴

مجموع ارقام اعداد ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۲۹ برابر ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ است، پس:

$$\bar{x} = \frac{1+2 \times (2+3+\dots+10)+11}{20} = \frac{1+2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 + 11}{20} = \frac{120}{20} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{25+2 \times 16+2 \times 9+2 \times 4+2 \times 1+2 \times 0+2 \times 1+2 \times 4+2 \times 9+2 \times 16+25}{20} = \frac{170}{20} = 8.5$$

### ۳۵- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا درجات رئوس گراف را به دست می‌آوریم:

$$576 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \xrightarrow{\text{کمترین مرتبه}} 4, 4, 4, 3, 3$$

این گراف یک یال کمتر از گراف  $K_5$  دارد. اگر گراف کامل بود تعداد دورهای به طول ۴ برابر بود با:

$$\binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

حال تعداد دورهای گذرنده از یال حذف شده که برابر تعداد مسیرهای به طول ۳ بین دو رأس یال حذف شده می‌باشد را به

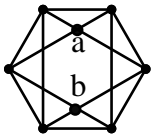
دست می‌آوریم:

$$a - b: \binom{3}{2} \times 2! = 6$$

بنابراین تعداد دورها برابر  $9 = 15 - 6$  می‌باشد.

**۳۶- پاسخ: گزینه ۱**

مجموعه  $\{a, b\}$  مجموعه احاطه گر مینیمم گراف است، پس عدد احاطه گری گراف برابر ۲ می باشد.



**۳۷- پاسخ: گزینه ۱**

باید به ازای هر مقدار صحیح  $a$ ، رابطه  $(5a - 2, 3a + 7) | 5n + 2$  برقرار باشد، پس:

$$(5a - 2, 3a + 7) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 5a - 2 \xrightarrow{\times 3} d | 15a - 6 \\ d | 3a + 7 \xrightarrow{\times 5} d | 15a + 35 \end{cases} \Rightarrow d | 41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 41$$

اگر  $d = 1$  باشد که همواره برقرار است، به ازای  $d = 41$  داریم:

$$41 | 5n + 2 \Rightarrow 5n + 2 \equiv 0 \pmod{41} \Rightarrow 5n \equiv -2 \equiv 39 \pmod{41} \Rightarrow n \equiv 16 \pmod{41}$$

$$\Rightarrow n = 41k + 16 \xrightarrow{\text{طبیعی دو رقمی } n} k = 0, 1, 2 \Rightarrow \text{مقدار } 3$$

**۳۸- پاسخ: گزینه ۴**

به کمک قضیه فرما داریم:

$$7^{12} \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{O^5} 7^{60} \equiv 1$$

$$7^{12} \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{O^2} 7^{24} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7^6} 7^{30} \equiv 49 \times 49 \times 49 \equiv 10 \times 10 \times 10 \equiv -1$$

$$7^{60} + 7^{30} \equiv 1 + (-1) \equiv 0$$

بنابراین داریم:

**۳۹- پاسخ: گزینه ۴**

$X_1$  می تواند ۱ یا ۴ باشد، پس:

$$X_1 = 1 \Rightarrow 1 + t_r + X_r + X_f = 20 \Rightarrow t_r + X_r + X_f = 19$$

$$\Rightarrow \binom{19+3-1}{3-1} = \binom{21}{2} = 210$$

$$X_1 = 4 \Rightarrow 2 + t_r + X_r + X_f = 5 \Rightarrow t_r + X_r + X_f = 3$$

$$\Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

بنابراین تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله برابر  $210 + 10 = 220$  است.

**۴۰- پاسخ: گزینه ۲**

اگر اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷ را انتخاب کنیم ۱۲ عضو داریم که هر دو عدد نسبت به هم اول هستند. حال اگر عدد سیزدهم را انتخاب کنیم قطعاً با یکی از این اعداد، نسبت به هم اول نیستند، پس بیشترین مقدار  $n$  برابر ۴۰ است.