

۱- در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۸ نفر فقط به فوتبال و ۱۵ نفر فقط به بسکتبال علاقه‌مند هستند. هرگاه ۴ نفر به هیچ‌یک از این

دو ورزش علاقه‌مند نباشند، نسبت علاقه‌مندان فوتبال به علاقه‌مندان بسکتبال چه عددی است؟

(۱)  $1/2$       (۲)  $1/15$       (۳)  $0/8$       (۴)  $0/85$

۲- در یک دنباله حسابی، جمع سه جمله اول ۱۵ و جمله سوم آن واسطه هندسی بین جملات اول و یازدهم است. جمله

چهارم الگوی ... و  $\bullet\bullet\bullet\bullet$  و  $\bullet\bullet$  با جمله چندم دنباله حسابی برابر است؟

(۱) ۲۱      (۲) ۲۰      (۳) ۷      (۴) ۹

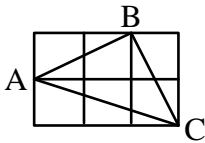
۳- سهمی از نقاط  $A(7,1)$  و  $B(3,1)$  می‌گذرد. اگر بیشترین مقدار سهمی ۹ باشد، جمع صفرهای سهمی چند برابر

اختلاف صفرهای آن است؟

(۱)  $\frac{10\sqrt{2}}{3}$       (۲)  $\frac{5\sqrt{2}}{3}$       (۳)  $\frac{5}{3\sqrt{2}}$       (۴)  $\frac{25}{3\sqrt{2}}$

۴- در شکل روبه رو ۶ مربع واحد که درون آن مثلث ABC رسم شده آورده شده است. اگر  $\sin A = k \sin B$ ، مقدار k

کدام است؟



(۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۳)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       (۴)  $\sqrt{5}$

۵-  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های  $kx^2 - 3kx + 5 = 0$  باشند به طوری که اختلاف ریشه‌های آن ۲ واحد باشد، حاصل  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{26}{5}$  (۲)  $\frac{15}{4}$  (۳)  $\frac{29}{10}$  (۴)  $\frac{27}{10}$

۶- A و B با هم کاری را در ۳۶ روز تمام می‌کنند. بعد از ۶ روز کار مشترک B حذف شده و ۲۵ نفر هم سرعت با A در طی دو روز کار را جمع می‌کنند. بعد از چند روز کار مشترک، اگر A حذف می‌شد می‌توانستیم با ۵ نفر هم سرعت با B کار را یک روزه جمع کنیم؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۳۴ (۴) ۲۷

۷- با فرض  $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 1$ ، مقدار  $x^3 + 2x^2 + 5x$  چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۸- جواب نامعادله  $x - 4 < |x|(2x + 1)$  بازه  $(-\infty, \alpha)$  است. حداکثر مقدار  $\alpha$  کدام است؟ منبع: آزمون وی ای پی

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

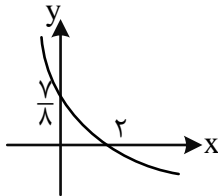
۹- ۴ رئیس‌جمهور به همراه ۴ وزیر خارجه از ۴ کشور و ۴ وزیر خارجه به تنهایی از ۴ کشور دیگر می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند به طوری که روسای جمهور در ردیف اول کنار هم و وزرا در ردیف دوم باشند به چند طریق عکس می‌گیرند به طوری که وزرای خارجه پشت سر رئیس‌جمهور خودشان باشند؟

- (۱) ۸! (۲) ۴!۵! (۳) ۴!۴! (۴)  $\binom{8}{4}$

۱۰- اگر  $4x + 3y = 3$  و  $3x + ay = 5$  دو ضلع مجاور مستطیل و  $A(2, 1)$  محل تلاقی اقطار مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- $\frac{24}{25}$  (۴)       $\frac{96}{25}$  (۳)       $\frac{32}{5}$  (۲)       $\frac{24}{5}$  (۱)

۱۱- نمودار تابع  $f(x) = 1 + a \times 2^{bx+c}$  شکل روبه‌رو است. مقدار  $f(\frac{4}{3})$  چه عددی است؟



- $\frac{3}{4}$  (۲)       $\frac{8}{3}$  (۱)  
 $\frac{1}{4}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)

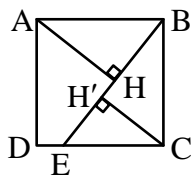
۱۲- اگر  $\log_2^5 = a$  و  $\log_5^3 = b$  مقدار  $\log_6^{12}$  کدام است؟

- $\frac{1}{2} + \frac{ab}{2}$  (۴)       $\frac{1}{4} + \frac{ab}{2}$  (۳)       $\frac{1}{2} + \frac{ab}{4}$  (۲)       $\frac{1}{4} + \frac{ab}{4}$  (۱)

۱۳- اعداد طبیعی زوج یک رقمی را در نظر بگیرید. اگر یکبار به هر کدام یک واحد اضافه کنیم و ۴ عدد فرد متوالی به دست آوریم و بار دیگر از هر کدام یک واحد کم کنیم و ۴ عدد فرد متوالی به دست آوریم در دو سری جدید ضرب تغییرات آن‌ها نسبت به هم چه عددی است؟

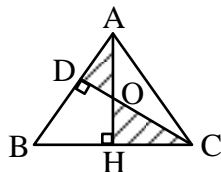
- $\frac{3}{2}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)      ۱ (۲)       $\sqrt{\frac{3}{2}}$  (۱)

۱۴- چهارضلعی ABCD مربع است به طوری که  $AH = ۴$  و  $CH' = ۳$ ، مساحت مربع چه عددی است؟



- (۱)  $\frac{۲۵۶}{۹}$
- (۲) ۲۴
- (۳)  $\frac{۲۲۵}{۱۶}$
- (۴) ۲۵

۱۵- در مثلث ABC دو ارتفاع را رسم کرده ایم. به طوری که  $OH = ۲$ ،  $OD = \frac{۳}{۲}OH = AD$  و  $OH = \frac{۲}{۳}AD$ . نسبت مساحت دو مثلث رنگی

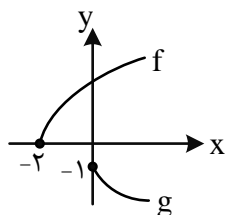


چه عددی است؟ منبع: آزمون وی ای پی

- (۱)  $\frac{۲۷}{۴}$
- (۲)  $\frac{۱۶}{۳}$
- (۳)  $\frac{۸۱}{۱۶}$
- (۴)  $\frac{۸۱}{۳۲}$

۱۶- توابع  $f$  و  $g$  به کمک تبدیلات قرینه‌یابی و انتقال به هم قابل تبدیل هستند. با فرض آن‌که

$$f^{-1}(-x-a) = g^{-1}(x)-b$$



- (۱) -۳
- (۲) ۳
- (۳) ۱
- (۴) -۱

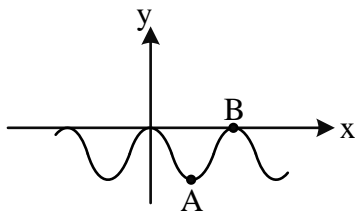
۱۷- هرگاه  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$  و  $g(x) = (\frac{12}{x} - 2)^2$  که  $x > 0$  دامنه تعریف  $f \circ g^{-1}(x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۲      (۴) بی شمار

۱۸- اگر  $0 < 4x < \pi$  و  $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ ، مقدار  $\cos^2 2x - \sin^2 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{9}$       (۲)  $-\frac{17}{81}$       (۳)  $-\frac{7}{9}$       (۴)  $\frac{17}{81}$

۱۹- بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a + \sin^2(bx - \frac{3\pi}{2})$  شکل مقابل است. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۲ باشد، طول



نقطه B کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) ۱      (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{3}{4}$

۲۰- جوابهای مشترک معادلات  $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \sin 2x = 0$  و  $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 2x = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چه تعدادی

است؟

- (۱) ۴      (۲) ۶      (۳) ۲      (۴) ۳

۲۱- اگر a و b اعداد حقیقی باشند و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{ax+b} - x}{x - \sqrt{x}} = b$ ، مقدار  $a + 2b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$       (۲)  $\frac{1}{9}$       (۳)  $\frac{4}{5}$       (۴)  $\frac{1}{5}$

۲۲- مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(\sqrt{4x^2 + 6} - 2x)$  چه عددی است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۳ (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) صفر

۲۳- خط  $y = x - 1$  بر نمودار تابع  $f$  در  $x = 5$  مماس است. اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - f(\Delta + bh)}{h} = \frac{3}{2}$  مقدار  $ab$  چه عددی است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) -۳

۲۴- اگر  $g(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{2x^2 - x - 6} = a$  به طوری که  $(fog)'(1) = \frac{7}{4}$ ، مقدار  $(gof)'(2)$  کدام است؟

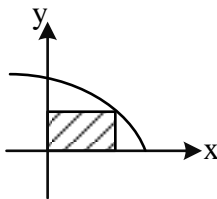
- (۱)  $\frac{2}{7}$  (۲)  $\frac{4}{7}$  (۳)  $\frac{7}{2}$  (۴)  $\frac{7}{4}$

۲۵- تابع  $f(x) = \sqrt{x}(2x + a)$  در بازه  $(0, 4)$  نزولی اکید است. حداکثر مقدار  $a$  چه عددی است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) -۱۲ (۴) -۲۴

۲۶- نمودار  $f(x) = \sqrt{k - 2x}$  و مستطیل محاط شده درون آن آورده شده، اگر بیشترین مساحت مستطیل برابر یک

باشد، عدد  $k$  کدام است؟

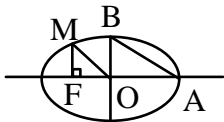


- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۹

۲۷- دایره با شعاع R محور طول‌ها را در نقاطی با طول ۳ و ۳- قطع کرده و بر خط  $y=9$  مماس است. مقدار R کدام است؟

- (۱) ۴      (۲) ۵      (۳) ۶      (۴) ۳

۲۸- در بیضی مقابل، اگر دو پاره‌خط OM و AB موازی هم باشند، خروج از مرکز بیضی چه عددی است؟



- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       (۲)  $\frac{1}{4}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

۲۹- A و B دو پیشامد مستقل از هم در فضای S هستند به طوری که  $P(A-B) = 0/3$  و  $P(A \cap B) = 0/2$ ، مقدار

$P(A \cup B')$  چه عددی است؟ منبع: آزمون وی ای پی

- (۱)  $0/72$       (۲)  $0/8$       (۳)  $0/9$       (۴)  $0/64$

۳۰- تعداد دانش‌آموزان تجربی ۳ برابر تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی است. احتمال آن که یک دانش‌آموز ریاضی به

درس فیزیک علاقه‌مند باشد ۳ برابر احتمال آن است که دانش‌آموز تجربی به درس فیزیک علاقه‌مند باشد،  $\frac{3}{10}$

دانش‌آموزان مدرسه به فیزیک علاقه‌مند هستند. اگر بدانیم دانش‌آموزی به فیزیک علاقه‌مند نیست به چه احتمال رشته

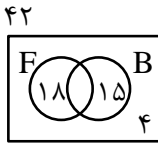
منبع: آزمون وی ای پی تجربی است؟

- (۱)  $\frac{6}{7}$       (۲)  $\frac{5}{7}$       (۳)  $\frac{5}{6}$       (۴)  $\frac{4}{7}$

## پاسخنامه

### ۱- پاسخ: گزینه ۲

$$18 + x + 15 + 4 = 42 \Rightarrow x = 5$$



پس  $n(F \cap B) = 5$ ، پس تعداد کسانی که به فوتبال علاقه‌مند هستند ۲۰ نفر و علاقه‌مندان به بسکتبال ۲۳ نفر هستند.

$$\frac{n(F)}{n(B)} = \frac{23}{20} = 1/15$$

### ۲- پاسخ: گزینه ۳

$$a_1 + a_r + a_r = 15 \Rightarrow 3a_r = 15 \Rightarrow a_r = 5$$

$$a_r^2 = a_1 a_{11} \Rightarrow (a_r + d)^2 = (a_r - d)(a_r + 9d)$$

$$(\delta + d)^2 = (\delta - d)(\delta + 9d) \Rightarrow 2\delta + d^2 + 10d = 2\delta - 9d^2 + 40d$$

$$\Rightarrow 10d^2 = 30d \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_n = 3n - 1$$

از طرفی، در اشکال داده شده  $b_n = n(n+1)$ :

$$b_r = 20 \Rightarrow 3n - 1 = 20 \Rightarrow n = 7$$

### ۳- پاسخ: گزینه ۲

مختصات رأس سهمی  $S$  است، پس  $f(x) = k(x-5)^2 + 9$ ، سهمی از  $B(3, 1)$  عبور می‌کند.

$$1 = k(4) + 9 \Rightarrow k = -2$$

$$f(x) = -2(x-5)^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{\sqrt{2}} + 5 \\ x_2 &= -\frac{3}{\sqrt{2}} + 5 \end{aligned} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \frac{10}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

### ۴- پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم ضلع هر مربع ۱ باشد، پس:  $AB = BC = \sqrt{5}$

$$AC = \sqrt{10}$$

$$S = \frac{1}{2}(AB)(AC) \sin A = \frac{1}{2}(AB)(BC) \sin B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} \sin B$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \sin A = \sqrt{5} \sin B \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin B$$

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵- پاسخ: گزینه ۱

فرض کنیم  $\alpha > \beta$ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}, \beta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

۶- پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{6}{A} + \frac{6}{B} + 2\left(\frac{25}{A}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{50}{A} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{50}{A} = \frac{5}{6} \Rightarrow A = 60 \Rightarrow B = 90$$

یعنی A به تنهایی در طری ۳۰ روز کار، کار را تمام می کند.

$$\frac{k}{A} + \frac{k}{B} + \frac{5}{90} = 1 \Rightarrow \frac{k}{36} = \frac{17}{18} \Rightarrow k = 34$$

یعنی بعد از ۳۲ روز کار مشترک

۷- پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt[3]{x} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = (1 - \sqrt{x})^3 = 1 - 3\sqrt{x} + 3x - x\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = \sqrt{x}(3 + x) \Rightarrow (2x + 1)^2 = (\sqrt{x}(x + 3))^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 = x(x^2 + 6x + 9) \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^3 + 6x^2 + 9x \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 5x = 1$$

۸- پاسخ: گزینه ۱

$$x \geq 0: 2x^2 + x - 4 + x < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$x < 0: -2x^2 - x - 4 + x < 0 \Rightarrow -2x^2 - 4 < 0$$

همواره قابل قبول است. یعنی جواب نامعادله  $(-\infty, 1)$  است، پس حداکثر مقدار  $\alpha$  برابر ۱ است.

۹- پاسخ: گزینه ۳

$$4! \times 4! \quad V_5 V_6 V_1 V_2 V_3 V_4 V_7 V_8 \\ R_1 R_2 R_3 R_4$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۳

$$4x + 3y = 3 \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \Rightarrow mm' = -1$$

$$3x + ay = 5 \Rightarrow m' = -\frac{3}{a}$$

$$-\frac{4}{3} \times \frac{-3}{a} = -1 \Rightarrow \frac{4}{a} = -1 \Rightarrow a = -4$$

$$3y + 4x - 3 = 0, A(2, 1) \Rightarrow d = \frac{8}{5}$$

$$3x - 4y - 5 = 0, A(2, 1) \Rightarrow d' = \frac{3}{5}$$

d و d' فاصله نقطه تلاقی قطرها تا هر ضلع مستطیل است، پس:

$$S = 4 \times dd' = 4 \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{96}{25}$$

۱۱- پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$f(2) = 0 \Rightarrow 1 + a \times 2^{2b+c} = 0 \Rightarrow a \times 2^c \times 2^{2b} = -1$$

$$f(0) = \frac{1}{8} \Rightarrow 1 + a \times 2^c = \frac{1}{8} \Rightarrow a \times 2^c = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8} \times 2^{2b} = -1 \Rightarrow 2^{2b} = 8 \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = 1 + a \times 2^c \times 2^{\frac{3}{2}x} \quad \text{منبع: آزمون وی ای پی}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + \underbrace{a \times 2^c}_{-\frac{1}{8}} \times 4 = \frac{1}{2}$$

۱۲- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$\log_7^3 = \log_5^3 \times \log_7^5 = ab$$

$$\log \frac{12}{16} = \frac{\log_7^{12}}{\log_7^{16}} = \frac{2 \log_7^3 + \log_7^3}{4} = \frac{2 + ab}{4}$$

$$\log \frac{12}{16} = \frac{1}{2} + \frac{ab}{4}$$

۱۳- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$2, 4, 6, 8 \Rightarrow \begin{cases} \text{سری اول } 1, 3, 5, 7 \\ \text{سری دوم } 3, 5, 7, 9 \end{cases}$$

$$\text{در سری اول: } \bar{x} = 4, \sigma^2 = \frac{9+1+1+9}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$\text{در سری دوم: } \bar{y} = 6, \sigma^2 = \frac{9+1+1+9}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{6}} = \frac{3}{2}$$

**۱۴- پاسخ: گزینه‌ی ۴**

دو مثلث  $AHB$  و  $CH'E$  متشابهند.

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CH'}{AH} \Rightarrow \frac{CE}{AB} = \frac{3}{4}$$

در مثلث  $BCE$  طبق فیثاغورس داریم:

$$BE = \sqrt{EC^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{16} + 1\right)BC^2} = \frac{5}{4}BC$$

$$CH' \cdot BE = EC \cdot BC \Rightarrow 3 \times \frac{5}{4}BC = EC \times BC \Rightarrow EC = \frac{15}{4}$$

از طرفی:

$$AB = \frac{4}{3}EC = \frac{4}{3} \times \frac{15}{4} = 5 \Rightarrow S = 25$$

**۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۳**

دو مثلث  $OHC$  و  $OAD$  متشابهند:

$$\frac{HC}{AD} = \frac{OH}{OD} \Rightarrow \frac{HC}{2} = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow HC = \frac{9}{2}$$

$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2}OH \times HC = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{4}$$

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}OD \times AD = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\frac{27}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{81}{16} \approx 5$$

**۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۴**

$$g(x) = -f(x-2) - 1 \Rightarrow g(x) = \alpha \Rightarrow g^{-1}(\alpha) = x$$

$$\alpha = -f(x-2) - 1 \Rightarrow f(x-2) = -\alpha - 1$$

$$f^{-1}(-\alpha - 1) = x - 2 \Rightarrow f^{-1}(-\alpha - 1) = g^{-1}(\alpha) - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-\alpha - 1) + 2 = g^{-1}(\alpha)$$

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow a - b = -1$$

**۱۷- پاسخ: گزینه‌ی ۴**

$$g(x) = \left(\frac{12}{x} - 2\right)^2, x > 0 \quad y = \left(\frac{12}{x} - 2\right)^2$$

$$\sqrt{y} = \frac{12}{x} - 2 \Rightarrow \frac{12}{x} = \sqrt{y} + 2 \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{y} + 2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{12}{\sqrt{x} + 2}$$

$$D_{f \circ g^{-1}} = \left\{ x : x \in D_{g^{-1}}, g^{-1} \in D_f \right\}$$

$$x \geq 0, \frac{12}{\sqrt{x} + 2} < 4 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 > 3$$

$$x > 1 \Rightarrow x > 1, D_{f \circ g^{-1}} = (1, +\infty)$$

### Azmonvip

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{16}{9}$$

$$\sin 2x = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos 2x = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 2x = \frac{25}{81} \\ \cos^2 2x = \frac{32}{81} \end{cases}$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{-17}{81}$$

۱۸- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$f(x) = a + \cos^2 bx, f(0) = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -1 + \cos^2 bx \Rightarrow A \begin{vmatrix} T \\ \frac{T}{2} \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} T \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$T = \frac{\pi}{b} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{\frac{T}{2}} = 2 \Rightarrow T = 1$$

$$\frac{\pi}{b} = 1 \Rightarrow b = \pi, a = -1$$

$$f(x) = -1 + \cos^2 \pi x, f(x) = 0 \Rightarrow \cos x$$

$$f(x) = -\sin^2 \pi x, f = 0, x = 1 \Rightarrow x_B = 1$$

۲۰- پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$$

۲۱- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$a + b = 1 \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{\sqrt[3]{(ax+b)^2}} - 1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} - 1 = \frac{b}{2} \Rightarrow 2a - 6 = 3b$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - 3b = 6 \end{cases} \Rightarrow \Delta a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{5}, b = -\frac{4}{5}$$

$$a + 2b = \frac{9}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$$

۲۲- پاسخ: گزینه‌ی ۲

به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(\sqrt{4x^2 + 6} - 2x) \cdot \frac{(\sqrt{4x^2 + 6} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 6} + 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \frac{4x^2 + 6 - 4x^2}{2x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x}{4x} = 3$$

۲۳- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$f(\Delta) = 2, f'(\Delta) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - f(\Delta + bh)}{h} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} = \lim_{h \rightarrow 0} -bf'(\Delta) = \frac{3}{2} \Rightarrow -b \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -3$$

$$ab = -6$$

۲۴- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = g'(1) f'(2)$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{(x-2)(2x+3)} = a \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 1 \\ f'(2) = 2a \end{cases}$$

از طرفی:

$$g'(1) \cdot f'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پس:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{y}{x}$$

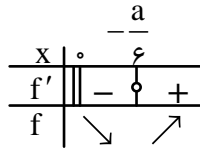
$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = f'(x)g'(1) = \frac{y}{x} \times \frac{1}{y} = \frac{y}{x}$$

۲۵- پاسخ: گزینه ۴

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+a) + 2\sqrt{x} = \frac{2x+a}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{4}$$

$$-\frac{a}{4} \geq 4 \Rightarrow a \leq -16$$



تابع در بازه  $(0, -\frac{a}{4})$  نزولی اکید است، پس:

پس حداکثر مقدار  $a$  برابر  $-16$  است.

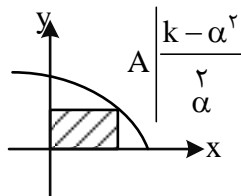
۲۶- پاسخ: گزینه ۳

$$S = \alpha \left( \frac{k - \alpha^2}{2} \right)$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(k\alpha - \alpha^3) \Rightarrow S'(\alpha) = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 = k$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{3}} \quad \max S' = \frac{1}{2} \left( k\sqrt{\frac{k}{3}} - \frac{k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}} \right)$$

$$\max S = \frac{1}{2} \times \frac{2k}{3} \sqrt{\frac{k}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{k^3}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{k^3}{3} = 9 \Rightarrow k = 3$$



۲۷- پاسخ: گزینه ۲

نقاط  $A$  و  $A'$  روی دایره هستند و  $A \left| \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right|$  و  $A' \left| \begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right|$  عمودمنصف  $AA'$  شامل مرکز دایره است، پس  $O \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right|$  مرکز دایره است.

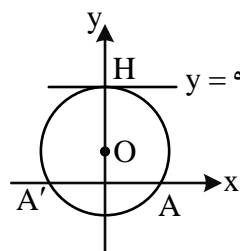
پس:

$$OH = 9 - \alpha = R$$

$$OA = \sqrt{9 + \alpha^2} = R$$

$$\sqrt{9 + \alpha^2} = 9 - \alpha \Rightarrow \alpha^2 + 9 = 81 - 18\alpha + \alpha^2$$

$$18\alpha = 72 \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow O \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix} \right|, R = 5$$



@AzmonViP

۲۸- پاسخ: گزینه ۳

خطوط  $OM$  و  $AB$  موازیند، پس  $\hat{M} = \hat{B}$  یعنی:

$$\tan \hat{M} = \frac{OF}{MF} = \frac{c}{b^2}$$

$$\tan \hat{M} = \tan \hat{B} \Rightarrow$$

$$\tan \hat{B} = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{ac}{b^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow c = b \Rightarrow a = \sqrt{2}c$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۹- پاسخ: گزینه ی ۲

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = 0/5$$

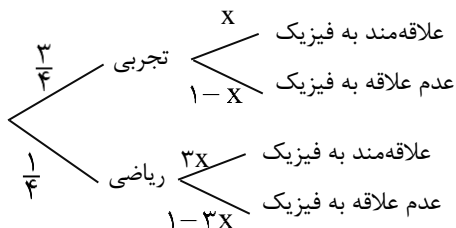
چون A و B مستقل از هم هستند.  $P(A).P(B) = P(A \cap B)$

$$\frac{1}{2}.P(B) = \frac{2}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{10}$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - P(A - B) = \frac{11}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$$

۳۰- پاسخ: گزینه ی ۱



$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \times 3x = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

احتمال علاقه مندی دانش آموز تجربی به فیزیک  $\frac{1}{5}$  است.

$$P(T | \text{علوم فیزیک}) = \frac{\frac{3}{4}(1-x)}{\frac{3}{4}(1-x) + \frac{1}{4}(1-3x)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{6}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{6}{7}$$