

آزمون آزمایشی ۶ تیر ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

مرحله ۱۹

دفترچه شماره ۱

ریاضیات

زمان پیشنهادی ۷۰

۱- حاصل عبارت $(\sqrt{7} + \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}) \left(\frac{2\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}{9 + \sqrt{14}} \right)$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) ۵

۲- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + (4-a)x + 3a + 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب سه عدد $\alpha - 1$ ، $\alpha - 1$ و $\beta - 1$ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

- (۱) ۱ و ۵ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۱ و ۵

۳- فاصله نقطه A روی خط $y = x + 1$ از خط $y = 2 - 5x$ برابر $\sqrt{20}$ است. مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) ۱۳ یا ۲۷ (۲) -۱۳ یا ۲۷ (۳) ۹ یا -۳۱ (۴) -۹ یا ۳۱

۴- تابع $f(x) = |3x + 6| - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ در یک بازه اکیداً نزولی است. وارون این تابع در این بازه کدام است؟

- (۱) $y = \frac{-x-9}{2}; x \geq -5$ (۲) $y = \frac{-x-9}{2}; x \leq -2$
 (۳) $y = \frac{x-3}{4}; x \geq -5$ (۴) $y = \frac{x-3}{4}; x \leq -2$

۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور طول‌ها، یک واحد در جهت منفی منتقل کرده، سپس قرینه آن نسبت به محور عرض‌ها را در امتداد محور عرض‌ها $1/5$ واحد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از یکدیگر کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{13}}{6}$ (۲) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

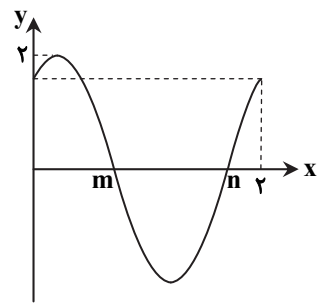
۶- اگر α ریشه مثبت و β ریشه منفی معادله $9(2^x - 1) = 2^{2x+1}$ باشند، کدام رابطه بین α و β برقرار است؟

- (۱) $\alpha = 2\beta - 1$ (۲) $\alpha + \beta = \frac{9}{2}$ (۳) $\alpha\beta = -\frac{9}{2}$ (۴) $\alpha = \beta + 1$

۷- اگر زاویه α در ربع دوم به گونه‌ای باشد که $2 = \sqrt{10}(\sin \alpha + \cos \alpha)$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) -۵ (۳) -۳ (۴) $-\frac{1}{3}$

۸- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = a \cos(\pi x + \frac{5\pi}{4})$ را در یک دوره تناوب نشان می‌دهد. مقدار $\frac{a}{mn}$ کدام است؟



- (۱) $1/8$ (۲) $-1/8$ (۳) $3/6$ (۴) $-3/6$

محل انجام محاسبات

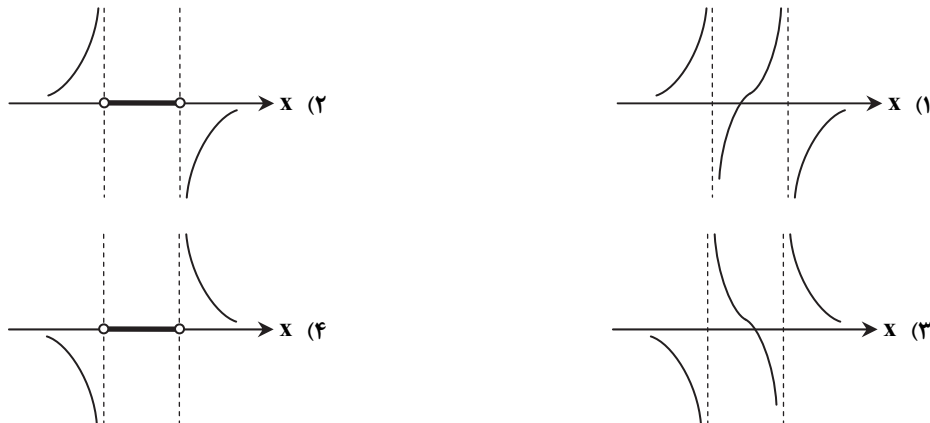
۹- اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x}$ ، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(\cos x)}{f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} - 2$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ (۴) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۰- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [2x] - \left[\frac{x}{2}\right]$ روی بازه $(-1, 3)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 \left[\frac{1}{x} \right] - x \left[-\frac{2x}{3} \right] + 2x^2}{|2x^2 + 3x + 1|}$ در اطراف مجانب‌های قائم خود چگونه است؟



۱۲- اگر خط $y = bx + 11$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار $f(x) = \frac{ax+1}{x-1}$ مماس باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۱۰ (۳) -۶ (۴) ۵

۱۳- اگر تابع f به گونه‌ای باشد که $f'(x) = \tan \pi x$ ، آنگاه مشتق تابع $y = f(\cos^2 x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\pi$

۱۴- اگر $f(x) = \sqrt[3]{2x-3} |x-4|$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(2+h) - 8}{h(2+h)}$ کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۲ (۳) -۷ (۴) ۷

۱۵- دو نقطه با طول‌های -۴ و ۲ اکسترم‌های نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ هستند. عرض نقطه عطف این تابع کدام است؟

- (۱) -۲۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

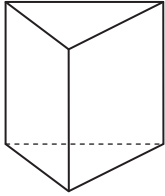
محل انجام محاسبات

۱۶- تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ روی بازه (a, b) اکیداً نزولی و تقعر آن روبه بالا است. اگر a و b اعدادی منفی باشند، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $3 - \sqrt{3}$ (۳) $2 - \sqrt{3}$ (۴) ۲

۱۷- در ساخت یک منشور مقوایی در باز به شکل منشور قائم با قاعده مثلث متساوی الاضلاع و حجم یک واحد، حداقل مقوای استفاده شده چند واحد مربع است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$



هندسه

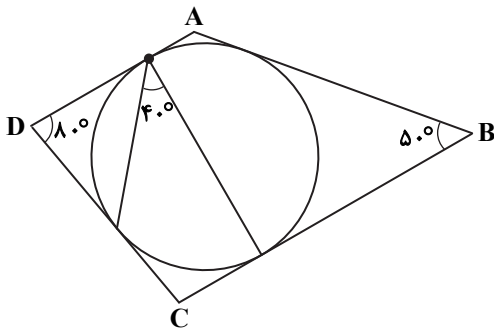
جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

۱۸- در مثلثی به طول اضلاع ۱۰، ۶ و ۸، فاصله محل هم‌رسی عمود منصف‌ها تا محل هم‌رسی ارتفاع‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) ۵ (۳) $\frac{10}{3}$ (۴) ۶

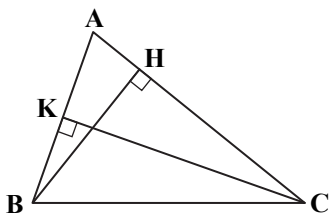
۱۹- زاویه A در چهارضلعی ABCD کدام است؟

- (۱) 100° (۲) 110° (۳) 120° (۴) 130°



۲۰- در مثلث شکل روبه‌رو $AH = 2$ ، $AK = 3$ و $AC = 9$ است. محیط مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴) ۲۲



محل انجام محاسبات

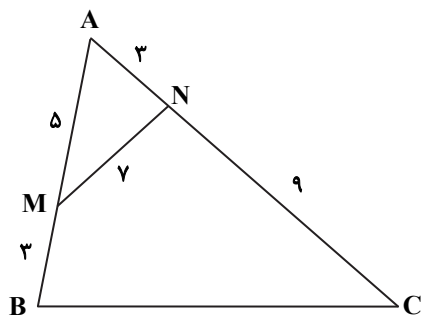
۲۱- صفحه P، خط d داخل صفحه و نقطه A خارج خط و صفحه مفروض اند. اگر از نقطه A عمود AH را بر صفحه P و از نقطه H عمود HK را در صفحه P بر خط d رسم کنیم، در این صورت: (H و K دو نقطه متمایزند.)

- AK ⊥ KH (۴) AK ⊥ d (۳) KH ⊥ P (۲) AK ⊥ P (۱)

۲۲- مربع ABCD به ضلع ۲ را حول مرکز آن ۴۵° دوران داده‌ایم. مساحت ناحیه مشترک بین مربع و تصویرش کدام است؟

- ۸(√۲ - ۱) (۴) ۸√۲ (۳) ۴(√۲ - ۱) (۲) ۴√۲ (۱)

۲۳- در شکل روبه‌رو مساحت چهارضلعی BMNC چند برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است؟



۶۴ (۱)

۷۲ (۲)

۷۸ (۳)

۸۱ (۴)

۲۴- کدام یک از تعاریف زیر مشخص کننده ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ است؟

- $a_{ij} = \begin{cases} i+1 & i < j \\ j+1 & i \geq j \end{cases}$ (۲) $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ i+1 & i \geq j \end{cases}$ (۱)
 $a_{ij} = \begin{cases} j+1 & i > j \\ i+j & i \leq j \end{cases}$ (۴) $a_{ij} = \begin{cases} j+i & i > j \\ 1+j & i \leq j \end{cases}$ (۳)

۲۵- مربع ABCD به طول ضلع ۲ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که از قطر BD به فاصله ۱ باشد؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $AB(2I - A)^{-1} = A^2 + 2A$ باشد، ماتریس B کدام است؟

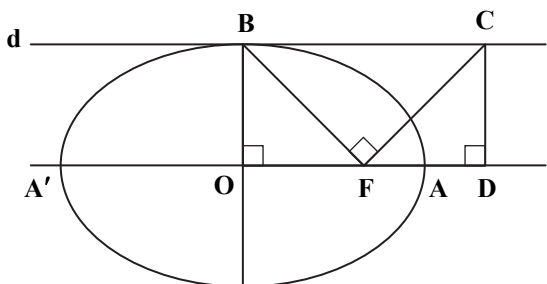
- A (۴) ۳I (۳) \bar{O} (۲) I (۱)

محل انجام محاسبات

۲۷- اگر سه بردار غیرموازی و غیرصفر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} در رابطه $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ صدق کنند، حاصل $\frac{2|\vec{b} \times \vec{c}| - 3|\vec{c} \times \vec{a}|}{|\vec{b} \times \vec{a}|}$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) -۱

۲۸- در شکل زیر خط d بر بیضی مماس است و $\widehat{BFC} = 90^\circ$ است. اگر $CD = OF$ باشد، حاصل $\frac{2A'F}{AD}$ کدام است؟ (F کانون بیضی و $d \parallel A'D$ است.)



(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{2} + 2$

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) $3\sqrt{2} + 4$

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

۲۹- اگر گزاره $r \Leftrightarrow (p \vee q)$ نادرست باشد، با کدام احتمال ارزش گزاره $(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ نادرست است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۳۰- در مجموعه مرجع $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیرمجموعه مانند A وجود دارد به طوری که رابطه $A \cup \{6, 7\} = A \cap \{1, 3, 4, 6, 7\}$ برقرار باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۳۱- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد مضرب ۳، سه برابر احتمال وقوع سایر برآمدها است. این تاس را پرتاب می‌کنیم، اگر مضرب ۳ بیاید سه سکه می‌ریزیم و در غیر این صورت، شش سکه می‌ریزیم. با کدام احتمال دقیقاً یک «رو» ظاهر می‌شود؟

- (۱) $\frac{21}{80}$ (۲) $\frac{9}{80}$ (۳) $\frac{13}{80}$ (۴) $\frac{39}{320}$

۳۲- تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا سه بار عدد مربع کامل بیاید. با چه احتمالی در پنج پرتاب، این اتفاق رخ می‌دهد؟

- (۱) $\frac{11}{81}$ (۲) $\frac{13}{27}$ (۳) $\frac{14}{243}$ (۴) $\frac{8}{81}$

محل انجام محاسبات

ورایگان

انتخاب رشته دقیق با گزینه دو همزمان با اعلام نتایج اولیه کنکور ۱۴۰۲



- انتخاب رشته بر اساس علاقه مندی های شما
- امکان اولویت بندی رشته ها و شهرهای مورد نظر
- دریافت لیست اولویت بندی شده رشته محل بر اساس نتایج پذیرش کنکور ۱۴۰۱
- ارائه حدود رتبه آخرین قبولی های کنکور ۱۴۰۱
- ارائه کارنامه های کنکور ۱۴۰۱ با امکان جستجو بر اساس رتبه و رشته
- معرفی کامل رشته ها و دانشگاه ها
- دسترسی به مقالات و فیلم های مشاوره انتخاب رشته

gozine2.ir

انتخاب رشته، آخرین گام موفقیت در
آزمون سراسری است.

در این مسیر همراه شما خواهیم بود



جهت کسب اطلاعات بیشتر کد بالا را اسکن نمایید

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آزمون آزمایشی ۶ تیر ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسش‌ها: ۶۵		مدت پاسخ‌گویی: ۷۵ دقیقه		

همچنین، شما می‌توانید با اسکن تصویر روبه‌رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک‌ها، پیش‌آزمون‌های آنلاین، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و... با استفاده از شماره داوطلبی (به‌عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به‌عنوان رمز عبور) وارد وب‌سایت گزینه‌دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت‌نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.

مرحله ۱۹

دفترچه شماره ۲

۴۱- شکل زیر، صفحه نمایشگر یک فشارسنج دیجیتالی (رقمی) را نشان می‌دهد. این نمایشگر، حداکثر و حداقل فشاری که خون به دیواره رگ‌ها وارد می‌کند (SYS و DIA) و تعداد ضربان قلب در هر دقیقه (Pulse/min) را نشان می‌دهد. دقت اندازه‌گیری فشارخون در این وسیله چند سانتی‌متر جیوه است؟

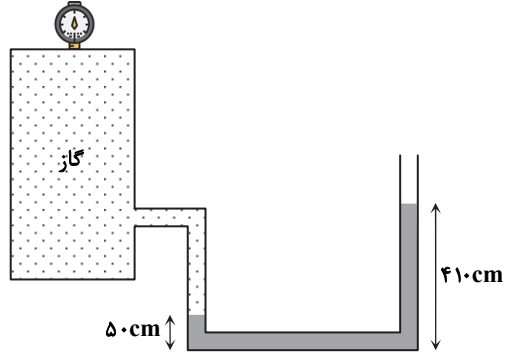
SYS (mmHg)	140
DIA (mmHg)	088
Pulse / min	086

- (۱) ۱
- (۲) ۰/۱
- (۳) ۰/۰۱
- (۴) ۱۰

۴۲- ۵ لیتر از مایع A به چگالی $\frac{1}{2} \frac{g}{cm^3}$ و ۱۵ لیتر از مایع B به چگالی $\frac{1}{6} \frac{g}{cm^3}$ را در ظرف استوانه‌ای شکلی با قطر سطح مقطع ۱۰cm ریخته‌ایم. اگر مایع‌ها با یکدیگر مخلوط نشوند، فشار در کف ظرف چند پاسکال است؟ ($P_0 = 10^5 Pa$ ، $g = 10 \frac{N}{kg}$ و $\pi = 3$)

- (۱) $1/2 \times 10^5$
- (۲) $1/4 \times 10^5$
- (۳) $1/6 \times 10^5$
- (۴) $1/8 \times 10^5$

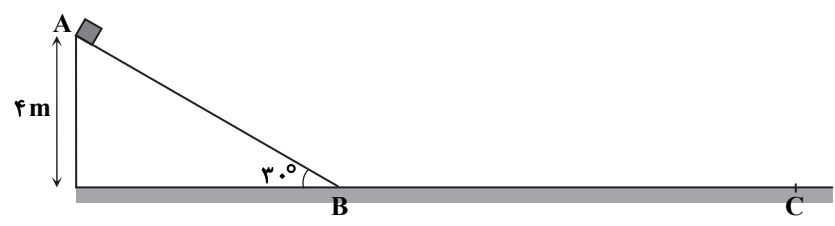
۴۳- مطابق شکل اگر فشارسنج روی مخزن گاز عدد ۴۵ کیلوپاسکال را نشان دهد، چگالی مایع درون لوله U شکل چند کیلوگرم بر لیتر است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$ و فشار هوا در این محل ۹۰ کیلوپاسکال است.)



- (۱) ۱/۲۵
- (۲) ۱/۵۰
- (۳) ۱/۷۵
- (۴) ۲/۰۰

۴۴- مطابق شکل، از بالای یک سرسره (نقطه A) جسمی به جرم ۵ kg از حال سکون به حرکت درمی‌آید و روی سطح افقی در نقطه C متوقف می‌شود. اگر $BC = 12 m$ و اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم در کل مسیر ABC ثابت باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح

افقی کدام است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- (۱) ۰/۲۰
- (۲) ۰/۲۵
- (۳) ۰/۴۰
- (۴) ۰/۵۰

محل انجام محاسبات

۴۵- برای آنکه خودرویی از حال سکون به تندی v_1 برسد، باید کار کل W_{1t} روی آن انجام شود. برای آنکه تندی همان خودرو از v_1 به v_2

برسد، باید کار کل W_{2t} روی آن انجام شود. اگر $\frac{W_{1t}}{W_{2t}} = \frac{1}{8}$ باشد، نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) $\sqrt{8}$ (۳) ۹ (۴)

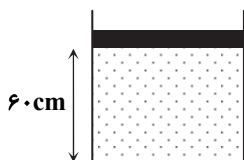
۴۶- دمای یک میله فلزی را از -20°C به 100°C می‌رسانیم. اگر در این مدت طول میله 5 mm افزایش یافته باشد، در چه دمایی طول میله 3 mm نسبت به حالت اولیه افزایش یافته است؟

- 68°C (۱) 48°C (۲) 72°C (۳) 52°C (۴)

۴۷- درون یک کتری برقی با توان الکتریکی 2 kW و ظرفیت گرمایی $500 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ، 1 kg آب 20°C در تعادل گرمایی است. کتری را روشن می‌کنیم و بعد از 3 دقیقه، کتری و آب داخل آن به دمای 80°C می‌رسند. با چشم‌پوشی از تبخیر سطحی، در این مدت چند کیلوژول انرژی به محیط اطراف داده شده است؟ $(c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}})$

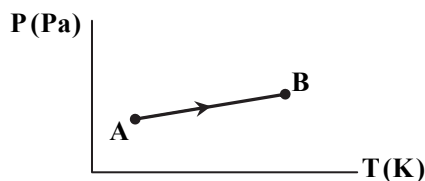
- ۷۸ (۱) ۱۰۸ (۲) ۲۷۶ (۳) ۲۸۲ (۴)

۴۸- در شکل زیر، مقداری گاز آرمانی، زیر پیستون بدون اصطکاک قرار دارد. اگر وزنه‌ای به جرم m روی آن قرار دهیم، پیستون 20 سانتی‌متر پایین می‌آید. اگر وزنه مشابه دیگر روی آن قرار دهیم، پیستون چند سانتی‌متر دیگری پایین می‌آید؟ (دمای گاز را در تمامی حالت‌ها یکسان در نظر بگیرید.)



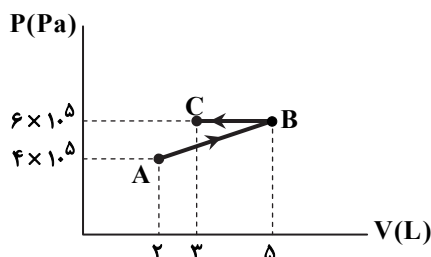
- ۱۰ (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۱۲ (۴)

۴۹- مقدار معینی گاز کامل مطابق شکل، از حالت A به حالت B می‌رود. در این فرایند



- (۱) دستگاه گرما می‌گیرد و کار انجام می‌دهد.
 (۲) دستگاه گرما می‌گیرد و بر روی دستگاه کار انجام می‌شود.
 (۳) دستگاه گرما از دست می‌دهد و کار انجام می‌دهد.
 (۴) دستگاه گرما از دست می‌دهد و بر روی دستگاه کار انجام می‌شود.

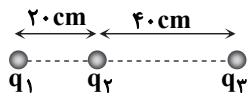
۵۰- مطابق شکل، یک گاز کامل فرایندی را روی مسیر ABC طی کرده است. در این فرایند، کار محیط روی گاز چند ژول است؟



- -300 (۱) $+500$ (۲) -800 (۳) $+2700$ (۴)

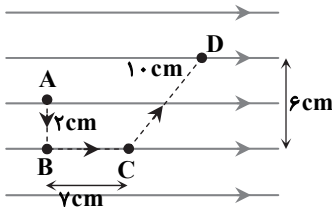
محل انجام محاسبات

۵۱- سه ذره باردار مطابق شکل در کنار هم قرار دارند و مجموعه در تعادل است چنانچه بار $q_3 = +1 \mu C$ باشد در این صورت مقدار بار ذره‌های q_1 و q_2 به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟



- (۱) $-4 nC$ و $-16 nC$ (۲) $-\frac{9}{4} nC$ و $-9 nC$
 (۳) $+\frac{9}{4} nC$ و $+9 nC$ (۴) $+16 nC$ و $-4 nC$

۵۲- یک بار الکتریکی $q = -2 \mu C$ در یک میدان الکتریکی به اندازه $E = 10^5 \frac{N}{C}$ مسیر ABCD را طی کرده است. کار میدان الکتریکی در این جابجایی چند میلی ژول است؟



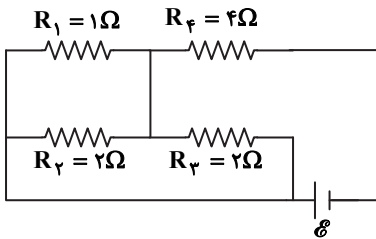
- (۱) ۳۸
 (۲) -۳۸
 (۳) ۳۰
 (۴) -۳۰

۵۳- ظرفیت یک خازن مسطح که هر صفحه آن از یک ورقه فلزی با ابعاد $2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ تشکیل شده برابر ۶ پیکوفاراد است، چنانچه ضریب

دی الکتریک بین صفحات خازن ۲ باشد، فاصله بین صفحات خازن چند میلی متر است؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2})$

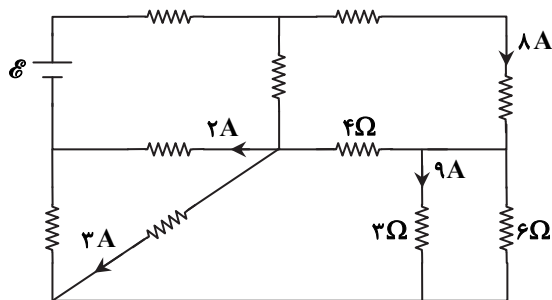
(۱) ۰/۸ (۲) ۱/۶ (۳) ۰/۹ (۴) ۱/۸

۵۴- در مدار روبه‌رو، جریان عبوری از مقاومت R_4 چند برابر جریان عبوری از مقاومت R_1 است؟



- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

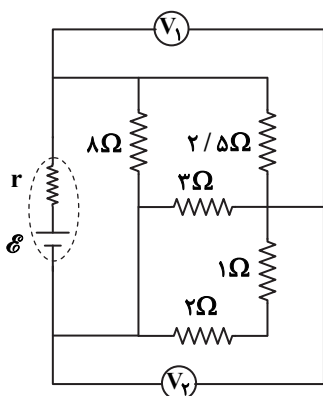
۵۵- در مدار شکل روبه‌رو، جریان گذرنده از مقاومت ۴ اهمی چند آمپر است؟



- (۱) ۱۰/۵
 (۲) ۹/۵
 (۳) ۸/۵
 (۴) ۶/۵

محل انجام محاسبات

۵۶- در مدار روبه‌رو، عددی که ولت‌سنج آرمانی V_1 بر حسب ولت نشان می‌دهد، چند برابر عددی است که ولت‌سنج آرمانی V_2 بر حسب ولت نشان می‌دهد؟



(۱) $\frac{5}{6}$

(۲) $\frac{4}{3}$

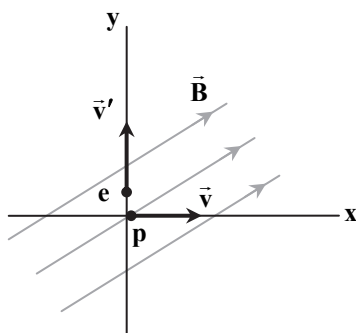
(۳) $\frac{5}{2}$

(۴) $\frac{8}{3}$

۵۷- مطابق شکل، میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 0.2 \text{ T}$ به پروتونی که با سرعت $\vec{v} = (5 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{i}$ حرکت می‌کند، نیرویی

به بزرگی $F = 9/6 \times 10^{-17} \text{ N}$ وارد می‌کند. این میدان به الکترونی که با تندی $v' = 1.0^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در جهت مثبت محور y ها حرکت می‌کند،

نیرویی به بزرگی نیوتون و در جهت وارد می‌کند. ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)



(۱) $2/56 \times 10^{-16}$ ، درون سو

(۲) $2/56 \times 10^{-16}$ ، برون سو

(۳) $1/28 \times 10^{-16}$ ، درون سو

(۴) $1/28 \times 10^{-16}$ ، برون سو

۵۸- از سیمی به طول 12 m ، سیم‌لوله‌ای آرمانی به قطر 4 cm و طول 40 cm ساخته و جریان 2 A را از آن عبور داده‌ایم. اندازه شار

مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله چند میکرووهر است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$)

(۴) 0.36

(۳) 0.72

(۲) 36

(۱) 72

۵۹- در پیچه‌ای با 5 دور سیم نازک، در اثر تغییر شار مغناطیسی، جریان $2/1$ آمپری القا شده است. چنانچه مقاومت الکتریکی پیچه برابر 8 اهم

باشد، آهنگ متوسط تغییر شار در پیچه، چند وهر بر ثانیه ($\frac{\text{Wb}}{\text{s}}$) است؟

(۴) $16/8$

(۳) $1/31$

(۲) $8/40$

(۱) $3/36$

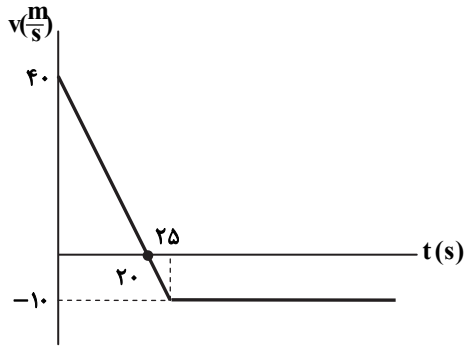
محل انجام محاسبات

۶۰- متحرکی که با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند در زمان‌های $t = 5s$ و $t = 10s$ از مکان‌های $x = 6m$ و $x = 96m$ می‌گذرد.

اگر سرعت متحرک در هنگام عبور از نقطه دوم $+28 \frac{m}{s}$ باشد، سرعت آن هنگام عبور از $x = 48m$ چند متر بر ثانیه است؟

- ۲۵ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۱۵ (۴)

۶۱- نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به شکل روبه‌رو است. اگر متحرک در $t = 0$ از $x = 200m$ عبور کند، در چه لحظه‌ای از $x = 500m$ خواهد گذشت؟



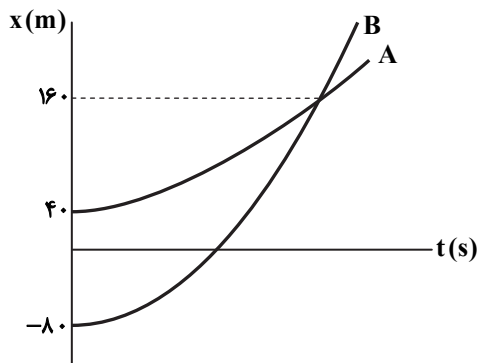
$t = 27/5 s$ (۱)

$t = 25/5 s$ (۲)

$t = 32/5 s$ (۳)

$t = 30/5 s$ (۴)

۶۲- دو متحرک A و B در $t = 0s$ از حال سکون به حرکت درمی‌آیند و نمودار مکان- زمان آن‌ها سهمی‌های شکل روبه‌رو است. اگر شتاب متحرک A برابر $2 \frac{m}{s^2}$ باشد، در لحظه عبور دو متحرک از کنار یکدیگر، تندی متحرک B چند متر بر ثانیه است؟



۱۶ (۱)

$4\sqrt{30}$ (۲)

۳۲ (۳)

$8\sqrt{30}$ (۴)

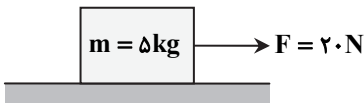
۶۳- گلوله‌ای از ارتفاعی معین نسبت به سطح زمین، رها می‌شود و در $\frac{1}{3}$ میانی مدت زمان سقوط خود، به اندازه ۵۰ متر سقوط می‌کند. کل

ارتفاع سقوط گلوله چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- ۱۰۰ (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۷۵ (۳) ۲۵۰ (۴)

محل انجام محاسبات

۶۴- مطابق شکل، نیروی افقی $F = 20\text{ N}$ بر جسمی به جرم ۵ کیلوگرم وارد شده و جسم را از حال سکون به حرکت درمی آورد. پس از ۶ ثانیه، ناگهان نیروی F بدون تغییر اندازه، تغییر جهت داده و روبه بالا بر جسم وارد می شود؛ در نتیجه بزرگی شتاب جسم سه برابر می شود. کل مسافتی که جسم از ابتدای حرکت تا لحظه توقف طی می کند، چند متر است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

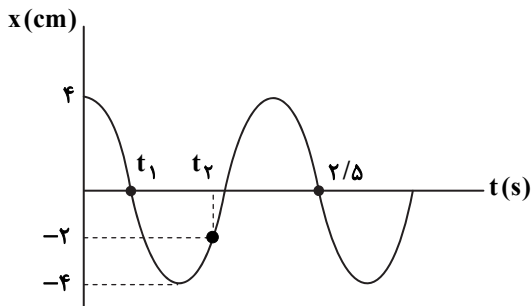


- ۸ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۶ (۳)
- ۱۸ (۴)

۶۵- اگر جرم یک ماهواره ۲ برابر شود و فاصله آن تا سطح زمین از $\frac{1}{5} R_e$ به $\frac{3}{5} R_e$ برسد، مدت هر دور چرخش آن به دور زمین چند برابر می شود؟ (R_e شعاع کره زمین است.)

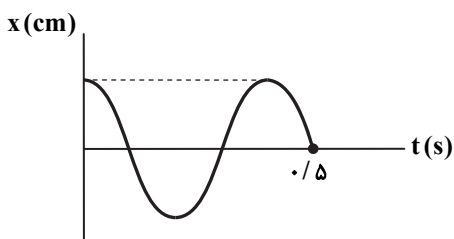
- $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۱)
- $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ (۲)
- $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ (۳)
- $\frac{8}{27}$ (۴)

۶۶- نمودار مکان- زمان در یک حرکت هماهنگ ساده مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در مدت t_1 تا t_2 چند سانتی متر بر ثانیه است؟



- ۸ (۱)
- $7/2$ (۲)
- $2/4$ (۳)
- ۴ (۴)

۶۷- نمودار مکان- زمان نوسانگری مطابق شکل بوده و بیشینه سرعت آن 30π سانتی متر بر ثانیه است. در لحظه $t = \frac{2}{15}$ s شتاب نوسانگر چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($\pi^2 = 10$)



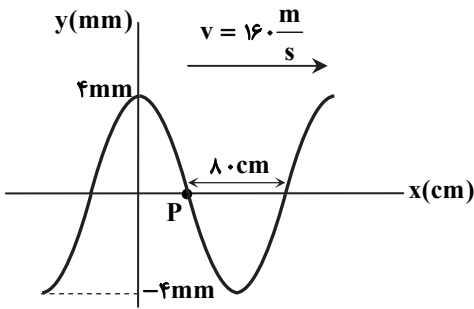
- $-2/5$ (۱)
- ۵ (۲)
- $7/5$ (۳)
- ۱۰ (۴)

۶۸- آونگ ساده A با طول نخ ۱ m و آونگ ساده B با طول نخ $1/21$ m، به طور هم زمان از یک وضعیت شروع به نوسان می کنند. در مدتی که آونگ B، ۲۵ نوسان انجام می دهد، آونگ A چند نوسان انجام می دهد؟

- $27/5$ (۱)
- $\frac{250}{11}$ (۲)
- $\frac{121}{4}$ (۳)
- $\frac{500}{121}$ (۴)

محل انجام محاسبات

۶۹- شکل روبه‌رو، نمودار جابه‌جایی- مکان را در یک لحظه برای موجی نشان می‌دهد که با تندی ۱۶۰ متر بر ثانیه در یک سیم نازک منتشر می‌شود. ۷/۵ میلی‌ثانیه بعد، نقطه P در کدام موقعیت است؟



(۱) $y = 0$ در حال بالا رفتن

(۲) $y = +4 \text{ mm}$

(۳) $y = -4 \text{ mm}$

(۴) $y = 0$ در حال پایین رفتن

۷۰- سیمی به طول ۸۰ سانتی‌متر و جرم ۵۰ گرم با نیروی کشش ۱۰۰ نیوتون از دو طرف ثابت شده است. با به ارتعاش در آمدن سیم و تشکیل موج ایستاده عرضی در طول آن ۵ گره ایجاد می‌شود. بسامد ارتعاشات سیم چند هرتز است؟

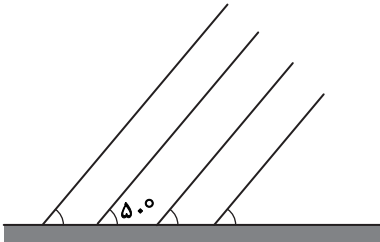
(۴) ۱۷۵

(۳) ۱۵۰

(۲) ۱۲۵

(۱) ۱۰۰

۷۱- وضعیت جبهه‌های موج تخت یک تابش الکترومغناطیسی بر سطح یک آینه مطابق شکل است. زاویه بین امتداد پرتوهای تابش و بازتابش چند درجه است؟



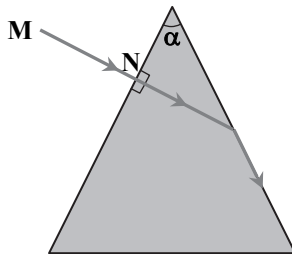
(۱) ۱۰۰

(۲) ۹۰

(۳) ۷۰

(۴) ۵۰

۷۲- مطابق شکل، پرتوی تک‌فام MN از هوا، به‌صورت عمود بر وجه منشوری با ضریب شکست $n = 2$ می‌تابد و به‌صورت مماس بر وجه مقابل منشور، از آن خارج می‌شود. زاویه α در منشور چند درجه است؟



(۱) ۳۰

(۲) ۳۷

(۳) ۴۵

(۴) ۶۰

۷۳- تعداد زیادی اتم هیدروژن برانگیخته شده و الکترون آن‌ها در دومین حالت برانگیخته قرار دارد. در بازگشت به حالت پایه چند نوع فوتون فرسرخ می‌تواند تابش شود؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

محل انجام محاسبات

۷۴- نمودار روبه‌رو، مربوط به آزمایش فوتوالکتریک با یک فلز معین است. اگر پرتو با طول موج $\lambda = 250 \text{ nm}$ بر سطح این فلز بتابد، بیشینه انرژی جنبشی الکترون‌های خروجی از فلز، چند الکترون‌ولت می‌شود؟ $(h = 4/1 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} , c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})$



(۴) با این طول موج، هیچ الکترونی از فلز خارج نمی‌شود.

۷۵- از دو ماده پرتوزای A و B نمونه‌هایی در اختیار داریم که تعداد اولیه هسته‌های آن‌ها یکسان و برابر N_0 است. اگر بعد از گذشتن ۳۰۰ سال، $\frac{7}{8} N_0$ از ماده A و $\frac{3}{4} N_0$ از ماده B واپاشیده باشد، چند سال دیگر باید بگذرد تا نسبت تعداد هسته‌های باقی‌مانده از ماده B به تعداد هسته‌های باقی‌مانده از ماده A برابر ۸ شود؟

- (۱) ۱۲۰۰ (۲) ۱۵۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۷۵۰

۳.

شیمی

زمان پیشنهادی

جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

۷۶- کدام مطلب درباره نخستین عنصر جدول تناوبی که دارای پنج الکترون با $n + l = 5$ است، درست است؟ (نماد عنصر ذکر شده را X در نظر بگیرید).
 (۱) شمار زیرلایه‌های الکترونی پر شده در آرایش الکترونی اتم آن، $3/5$ برابر شمار لایه‌های پر شده است.
 (۲) کاتیون X^{3+} برخلاف $^{31}\text{Ga}^{3+}$ و $^{31}\text{Sc}^{3+}$ ، به آرایش گاز نجیب (هشت تایی) نمی‌رسد.
 (۳) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت آن با عدد اتمی آن برابر است.
 (۴) می‌تواند ترکیبی با فرمول XCO_3 ایجاد کند که در لایه آخر کاتیون این ترکیب، دوازده الکترون وجود دارد.

۷۷- عنصر M دارای دو ایزوتوپ طبیعی ^{10}M و ^{11}M است و میانگین جرم هر اتم آن، در حدود $1/8 \times 10^{-23} \text{ g}$ می‌باشد. در یک نمونه طبیعی از عنصر M به جرم $5/4$ گرم، چند اتم از ایزوتوپ سنگین‌تر وجود دارد؟ $(N_A = 6 \times 10^{23}, 1 \text{ amu} = \frac{5}{3} \times 10^{-24} \text{ g})$

- (۱) 24×10^{22} (۲) 6×10^{22} (۳) 3×10^{23} (۴) 12×10^{23}

۷۸- چه تعداد از مطالب زیر درباره هیدروژن، درست است؟

- شمار نوترون‌های پایدارترین رادیوایزوتوپ آن، با شمار ایزوتوپ‌های پایدار آن برابر است.
 - همانند لیتیم، در گستره مرئی طیف نشری خطی آن، ۴ خط وجود دارد.
 - مورد از ایزوتوپ‌های آن، پرتوزا هستند که درصد فراوانی همه آن‌ها در طبیعت صفر است.
 - تفاوت عدد جرمی ناپایدارترین رادیوایزوتوپ آن با شمار نوترون‌های پایدارترین ایزوتوپ آن، برابر ۶ است.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

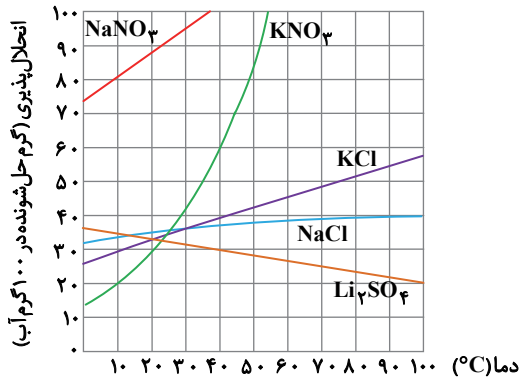
داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

۷۹- درباره استری با فرمول مولکولی $C_7H_4O_2$ ، کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

- (الف) الکل سازنده آن، همان الکل چوب است که برای بازیافت پلی اتیلن ترفتالات استفاده می شود.
 (ب) اسید سازنده آن، پرکاربردترین کربوکسیلیک اسید است که در اثر گزش مورچه سرخ وارد بدن می شود.
 (پ) با استیک اسید ایزومر است، ولی نقطه جوش کمتری نسبت به آن دارد.
 (ت) متیل فورمات نام دارد و به عنوان حلال چسب کاربرد دارد.

(۱) ب، ت (۲) ب، پ (۳) الف، ت (۴) الف، ب

۸۰- اگر ۵۰۰ گرم محلول ۴۰ درصد جرمی لیتیم سولفات را از دمای $40^\circ C$ تا دمای $70^\circ C$ گرم کنیم، با توجه به نمودار زیر، کدام مطلب درست است؟



(۱) ۱۲۵ گرم لیتیم سولفات دیگر می توان در آن حل کرد.

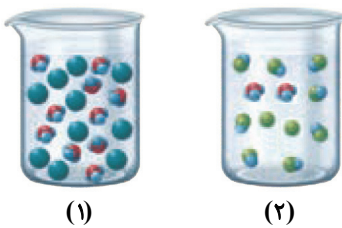
(۲) ۱۲۵ گرم از لیتیم سولفات حل شده، رسوب می کند.

(۳) ۷۵ گرم لیتیم سولفات دیگر می توان در آن حل کرد.

(۴) ۷۵ گرم از لیتیم سولفات حل شده، رسوب می کند.

۸۱- هر یک از شکل های زیر، ۵۰۰ میلی لیتر از محلول آبی یک اسید را در دمای اتاق نشان می دهد. با توجه به شکل های داده شده، کدام مطلب

نادرست است؟ (هر ذره را هم ارز 0.001 مول از آن گونه در نظر بگیرید.)



(۱) سرعت واکنش فلز منیزیم با محلول موجود در ظرف ۱ بیشتر است.

(۲) حجم گاز هیدروژن تولید شده در واکنش کامل هر دو محلول با فلز روی، با یکدیگر برابر است.

(۳) درصد یونش اسید در محلول (۱)، ۵ برابر درصد یونش اسید در محلول (۲) است.

(۴) pH محلول (۲) برابر $2/7$ و غلظت یون هیدروکسید در محلول (۱)، $10^{-12} \times 2$ مول بر لیتر است.

۸۲- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) آلکان $(CH_3)_3C(CH_2)_3CH(C_4H_9)_2$ با آلکان ۵- اتیل-۲، ۲- دی متیل هپتان، همپار است.

(ب) پنجمین عضو خانواده آلکن ها با سومین عضو خانواده سیکلو آلکن ها ایزومر است و هر دو، برم مایع را بی رنگ می کنند.

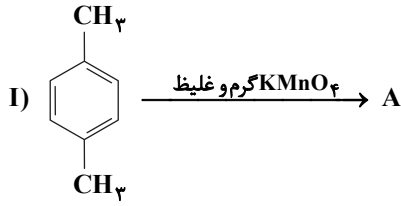
(پ) نسبت شمار اتم های هیدروژن به کربن در نفتالن با نسبت شمار اتم های کربن به هیدروژن در پارا زایلن برابر است و در هر دو ترکیب دو کربن به هیچ هیدروژنی متصل نیستند.

(ت) ۱- هگزن مایعی بی رنگ است که در حضور گاز هیدروژن و کاتالیزگر نیکل، به یک مایع بی رنگ سیر شده تبدیل می شود.

(۱) الف، پ و ت (۲) پ و ت (۳) الف و ب (۴) ب و پ

محل انجام محاسبات

۸۳- با توجه به واکنش‌های روبه‌رو، که در آن‌ها A و B ماده‌آلی هستند، کدام مطلب درست است؟

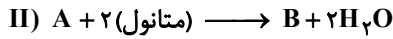


(۱) B، یک استر تک‌عاملی با فرمول $C_{11}H_{10}O_4$ است.

(۲) مجموع شماره اتم‌ها در فرمول شیمیایی A، $0/75$ برابر مجموع شماره اتم‌ها در فرمول شیمیایی B است.

(۳) واکنش (II) یک واکنش خنثی شدن است و در آن تبادل الکترون وجود ندارد.

(۴) ترکیب آلی B نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، انحلال‌پذیری بیشتری در آب دارد، زیرا شماره اتم‌های اکسیژن در ساختار آن بیشتر است.

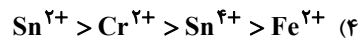
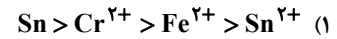
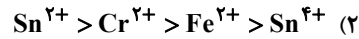
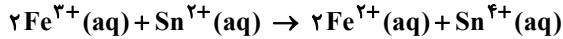
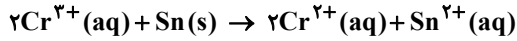
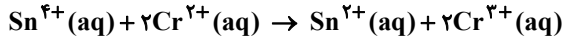


۸۴- ۲۵ گرم گاز HA را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را با افزودن آب به ۱۰ لیتر می‌رسانیم. اگر غلظت یون‌های A^- ، به اندازه $0/075$ مولار کمتر از غلظت مولکول‌های یونیده نشده HA باشد، ثابت یونش اسید و pH محلول به ترتیب کدام‌اند؟

($HA = 20 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- (۱) $1/3, 6/25 \times 10^{-3}$ (۲) $1/3, 5 \times 10^{-3}$ (۳) $1/6, 6/25 \times 10^{-3}$ (۴) $1/6, 5 \times 10^{-3}$

۸۵- با توجه به واکنش‌های زیر که به‌طور طبیعی انجام می‌شوند، کدام گزینه مقایسه قدرت کاهندگی گونه‌ها را به‌درستی نمایش می‌دهد؟



۸۶- با توجه به یون‌های پایدار عناصر روبه‌رو، کدام مطلب نادرست است؟

گروه \ دوره	۱	۲
۳	X	Y
۴	W	Z

گروه \ دوره	۱۶	۱۷
۲	A	B
۳	C	D

(۱) از بین همه ترکیبات ممکن، بیشترین نقطه ذوب متعلق به YA است.

(۲) از بین همه ترکیبات ممکن، کمترین آنتالپی فروپاشی متعلق به WD است.

(۳) کمترین شعاع در میان کاتیون‌ها، متعلق به Y و بیشترین شعاع در میان آنیون‌ها، متعلق به C است.

(۴) شعاع آنیون D، از شعاع اتم X بزرگ‌تر و از آنیون A کوچک‌تر است.

۸۷- با توجه به واکنش فرضی $A_2(g) + B_2(g) \rightarrow 2AB(g) + 240 \text{ kJ}$ ، اگر آنتالپی پیوند B-B، ۳ برابر آنتالپی پیوند A-A و $5/3$ برابر

آنتالپی پیوند A-B و ۴ برابر آنتالپی فرازش AB برحسب کیلوژول بر مول باشد، ΔH واکنش $A_2(g) + B_2(g) \rightarrow 2AB(s)$ ، چند کیلوژول است؟

(۴) -۲۱۰

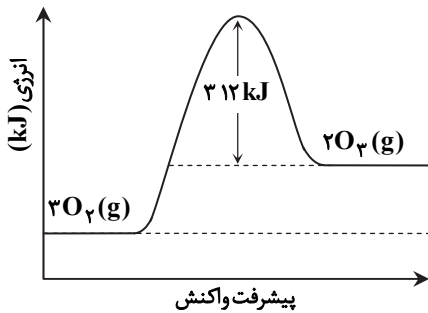
(۳) -۳۰۰

(۲) -۲۷۰

(۱) -۱۸۰

محل انجام محاسبات

۸۸- با توجه به نمودار زیر، اگر هنگام تولید یک مول گاز اوزون، انرژی به اندازه 143 kJ افزایش یابد، چند مورد از مطالب داده شده نادرست است؟



- ΔH واکنش برگشت، -286 kJ و انرژی فعال سازی واکنش رفت، 598 kJ است.
- اگر این واکنش درون سیلندر با پیستون روان به تعادل برسد، با افزایش فشار در دمای ثابت، شمار مول های اوزون کاهش می یابد.
- آنتالپی (محتوای انرژی) واکنش دهنده ها از فرآورده ها کمتر است و واکنش دهنده ها پایدارترند.
- مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش دهنده ها کوچک تر از فرآورده هاست.

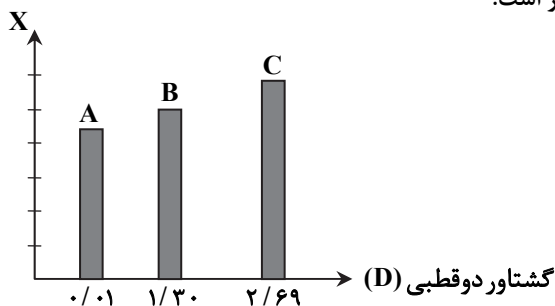
- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۸۹- کدام مطلب درست است؟

- (۱) سختی، نقطه ذوب و پایداری سیلیسیم کرید از الماس کمتر و از سیلیسیم بیشتر است.
- (۲) سیلیس نسبت به کربن دی اکسید نیروی بین مولکولی بسیار قوی تری دارد؛ از این رو سختی و نقطه ذوب آن بالاتر است.
- (۳) کوارتز (سیلیسیم خالص) به دلیل داشتن خواص نوری ویژه در ساخت منشور و عدسی کاربرد دارد.
- (۴) در ساختار فراوان ترین اکسید پوسته جامد زمین، هر اتم با ۴ پیوند به ۴ اتم دیگر متصل است.

۹۰- با توجه به نمودار روبه رو، چند مطلب زیر درست است؟

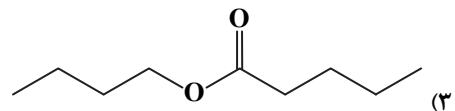
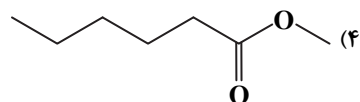
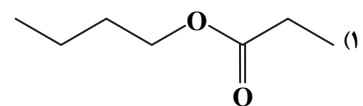
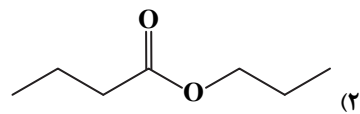
(جرم مولی هر سه ماده آلی تقریباً با هم برابر است.) ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



- انحلال پذیری ماده A در هگزان از انحلال پذیری مواد B و C در هگزان بیشتر است.
- جهت گیری C در میدان الکتریکی از B و A محسوس تر است.
- مؤلفه X می تواند قدرت نیروهای بین مولکولی یا نقطه جوش باشد.
- A می تواند دید باشد که هنگام انحلال آن در هگزان، مولکول های آن ماهیت خود را در محلول حفظ می کنند.

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۹۱- از واکنش مخلوطی به جرم $15/9$ گرم از متانول و یک اسید یک عاملی دارای زنجیر هیدروکربنی سیر شده، $13/2$ گرم استر به دست می آید. اسید سازنده این استر، با اسید سازنده کدام ترکیب زیر یکسان است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



محل انجام محاسبات

۹۲- در هر چهار میلی لیتر از محلولی، m میلی گرم لیتیم اکسید حل شده است. اگر pH محلول برابر $3/12$ باشد، m کدام است؟

($H=1, Li=7, O=16: g \cdot mol^{-1}$)

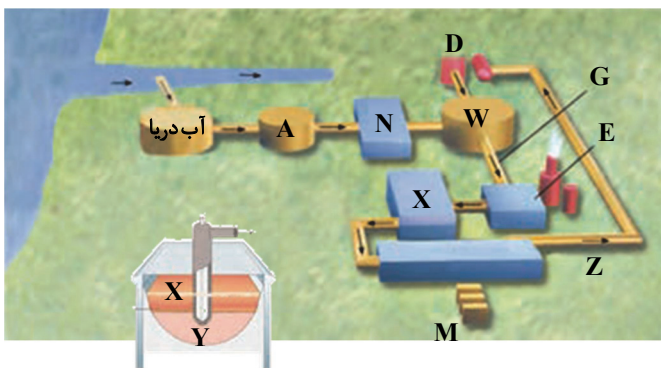
۰/۳ (۴)

۰/۶ (۳)

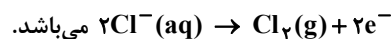
۱/۲ (۲)

۲/۴ (۱)

۹۳- با توجه به شکل زیر که فرایند تهیه منیزیم از آب دریا را نمایش می دهد، کدام مطلب درست است؟



(۱) گاز Z کلر است که حاصل نیم واکنش آندی



(۲) همان $MgCl_2$ است که فرآورده حاصل از

تبادل الکترون بین گونه های A و D است که ابتدا خشک و سپس ذوب می شود.

(۳) N صافی است که با آن رسوب را جدا کرده و

محلول صاف شده را آماده واکنش می کنند.

(۴) برخلاف فرایند حال، در این فرایند فلز تولید شده

چگالی کمتری نسبت به الکترولیت دارد.

۹۴- جدول زیر داده هایی را از قرار دادن برخی تیغه های فلزی درون محلول آهن (II) سولفات در دمای $30^{\circ}C$ را نشان می دهد. با توجه به آن چند مورد از مطالب زیر نادرست هستند؟ (فلزهای A, B و C جزء فلزهای واسطه هستند)

فلز	دمای مخلوط پس از مدتی ($^{\circ}C$)
A	۳۹
B	۳۶
C	۳۰

■ به یقین فلز لیتیم هر 3 کاتیون A^{a+}, B^{b+} و C^{n+} را کاهش می دهد.

■ در صورت اتصال آهن به فلز B در هوای مرطوب، فلز B آند و دچار اکسایش می شود، ولی از آهن محافظت می شود.

■ برای ساخت سلول گالوانی با بیشترین ولتاژ از فلزهای A, B, C و آهن، باید از نیم سلول های A و Fe استفاده کنیم.

■ در صورت اتصال آهن به فلز C در هوای مرطوب، خوردگی آهن شدت می گیرد و فلز C به عنوان کاتد کاهش می یابد.

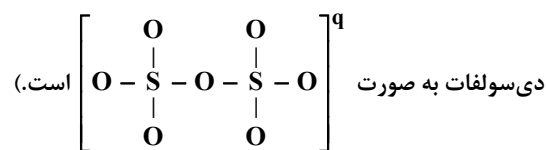
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۵- در هر واحد فرمولی از آمونیوم دی سولفات با رعایت قاعده هشت تایی، در مجموع، چه تعداد پیوند اشتراکی وجود دارد؟ (ساختار یون



۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۶ (۲)

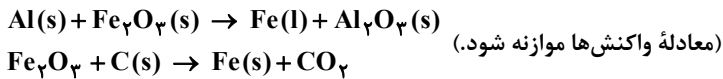
۱۲ (۱)

محل انجام محاسبات

داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

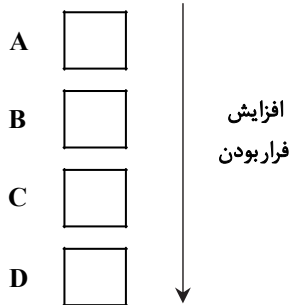
۹۶- اگر مقدار آهن تولیدشده از مصرف ۴ / ۵ گرم آلومینیم در واکنش ترمیت، ۲ برابر مقدار آهن حاصل از واکنش استخراج آهن در فولاد

مبارکه باشد، در فولاد مبارکه، چند گرم کربن با بازده ۵۰ درصد استفاده شده است؟ ($Al = 27, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)



(۱) ۷ / ۲ (۲) ۱ / ۸ (۳) ۳ / ۶ (۴) ۰ / ۶

۹۷- شکل زیر، ۴ جزء اصلی نفت خام (نفت سفید، نفت کوره، گازوئیل و خوراک پتروشیمی) را نشان می‌دهد. با توجه به آن کدام مطلب نادرست است؟



(۱) گرانروی، نقطه جوش و چسبندگی ترکیبات B از ترکیبات C بیشتر است.

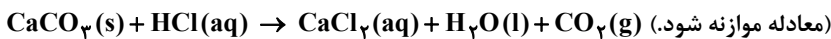
(۲) در نفت سنگین نسبت به نفت سبک، درصد ماده A بیشتر و درصد مواد B, C و D کمتر است.

(۳) در نفت برنت دریای شمال، درصد ماده A بیشتر از نفت کشورهای عربی و ایران است، به همین دلیل قیمت بالاتری دارد.

(۴) در برج تقطیر نفت خام، مواد D از قسمت‌های بالاتر و مواد A از قسمت‌های پایین تر برج خارج می‌شوند.

۹۸- با توجه به جدول زیر، چند مورد از مطالب داده شده، درباره واکنش کلسیم کربنات با هیدروکلریک اسید، درست است؟

($C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



زمان (ثانیه)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
جرم مخلوط واکنش (گرم)	۶۶ / ۲۶	۶۴ / ۸۸	۶۴ / ۵۵	B	۶۴ / ۵
جرم کربن دی‌اکسید (گرم)	۰	-	A	۱ / ۷۶	-

■ شیب نمودار «مول- زمان» برای هر سه فرآورده واکنش، یکسان است.

■ شیب نمودار «مول- زمان» CO_2 ، با گذشت زمان بیشتر می‌شود.

■ مقدار A برابر ۱ / ۷۱ گرم است.

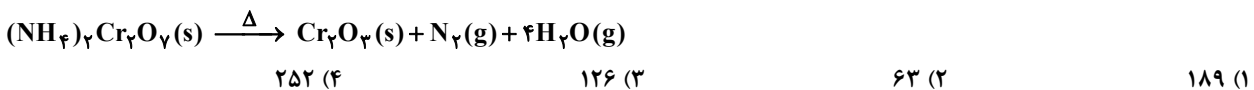
■ سرعت متوسط مصرف HCl از آغاز تا پایان واکنش $0.16 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۹- مقداری $(NH_4)_2Cr_2O_7$ جامد ۸۰ درصد خالص مطابق واکنش زیر به میزان ۵۰ درصد تجزیه می‌شود. اگر جرم جامد باقی‌مانده در ظرف

پس از انجام واکنش برابر ۵۳ گرم باشد، جرم $(NH_4)_2Cr_2O_7$ اولیه چند گرم بوده است؟ (هیچ فرآورده جانبی گازی شکل تولید

نمی‌شود.) ($H = 1, N = 14, O = 16, Cr = 52 : g \cdot mol^{-1}$)



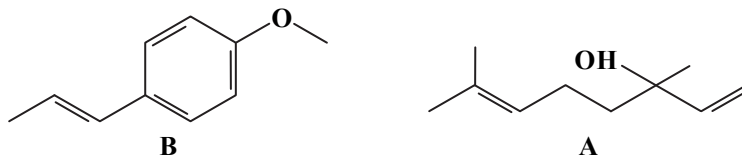
محل انجام محاسبات

۱۰۰- چند مورد از مطالب زیر درباره تولید پلی اتن از گاز اتن، درست است؟

- تجربه نشان می دهد که جرم مولی میانگین پلی اتن، به مقدار کاتالیزگرهای استفاده شده بستگی دارد.
- واکنش در دما و فشار اتاق، به آسانی قابل انجام است.
- اگرچه جرم مولی پلی اتن ها با یکدیگر متفاوت است، ولی چگالی آن ها یکسان است، زیرا چگالی به جنس ماده بستگی دارد.
- فرآورده واکنش را می توان در حالت مذاب، در دستگاهی با عمل دمیدن هوا، به ورقه نازک پلاستیکی تبدیل کرد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۱- با توجه به ساختارهای داده شده، چند مطلب زیر نادرست است؟



- هر دو ترکیب به دلیل داشتن گروه های آلکنی، رنگ قرمز برم را از بین می برند.
- ترکیب B با ۴ مولکول هیدروژن سیر شده و به فرآورده ای با فرمول مولکولی C_4H_8O تبدیل می شود.
- ترکیب A یک الکل سیر نشده و ترکیب B یک اتر آروماتیک است.
- اگرچه دو ترکیب ایزومر یکدیگرند، ولی ترکیب A نسبت به B، نقطه جوش بالاتری دارد.
- ترکیب A در واکنش با دو مول برم، فرآورده ای سیر شده با فرمول $C_4H_8Br_2O$ ایجاد می کند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۲- ارزش سوختی مخلوطی از گازهای اتان و اتن، $50/4$ کیلوژول بر گرم است. درصد جرمی گاز دارای واکنش پذیری بیشتر در این مخلوط

کدام است؟ (آنتالپی سوختن اتان و اتن، به ترتیب برابر با -1560 و -1400 کیلوژول بر مول است، $H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)

۱ (۱) ۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۲۵ (۴) ۷۵ (۴)

۱۰۳- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- همه مواد پیرامون ما، در دما و فشار اتاق، آنتالپی معینی دارند.
- در یک فرایند گرماده، سامانه به محیط گرما می دهد؛ بنابراین دمای سامانه کاهش یافته و $Q < 0$ است.
- گرمای مبادله شده در فشار ثابت، همان ΔH است که در دمای ثابت به طور عمده به انرژی گرمایی مواد بستگی دارد.
- در دمای ثابت در یک واکنش شیمیایی، تغییر مجموع انرژی جنبشی قابل چشم پوشی است؛ بنابراین ΔH واکنش تقریباً برابر صفر است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۴- چند گرم استیک اسید باید در ۴۹ گرم آب حل شود تا محلولی با غلظت ۲ مولار و چگالی $1/18 g \cdot mL^{-1}$ به دست آید؟

($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

۱ (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶ (۴)

۱۰۵- کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) با استفاده از ۳ روش صافی کربن، اسمز و تقطیر، می توان آب را تصفیه کرد که در هر ۳ روش، کلرزی آب الزامی است.
- (۲) روش صافی کربن نسبت به تقطیر، کارایی بیشتری دارد، زیرا برخلاف تقطیر، مواد آلی فرار را نیز از آب جدا می کند.
- (۳) در فرایند اسمز معکوس، فشار به محلول غلیظ وارد می شود.
- (۴) فرایند اسمز تا زمانی پیشروی می کند که شمار مولکول های آب عبوری در واحد زمان از دو سمت غشا، با یکدیگر برابر شود.

محل انجام محاسبات

ورایگان

انتخاب رشته دقیق با گزینه دو

همزمان با اعلام نتایج اولیه کنکور ۱۴۰۲



- انتخاب رشته بر اساس علاقه مندی های شما
- امکان اولویت بندی رشته ها و شهرهای مورد نظر
- دریافت لیست اولویت بندی شده رشته محل بر اساس نتایج پذیرش کنکور ۱۴۰۱
- ارائه حدود رتبه آخرین قبولی های کنکور ۱۴۰۱
- ارائه کارنامه های کنکور ۱۴۰۱ با امکان جستجو بر اساس رتبه و رشته
- معرفی کامل رشته ها و دانشگاه ها
- دسترسی به مقالات و فیلم های مشاوره انتخاب رشته

gozine2.ir

انتخاب رشته، آخرین گام موفقیت در
آزمون سراسری است.

در این مسیر همراه شما خواهیم بود



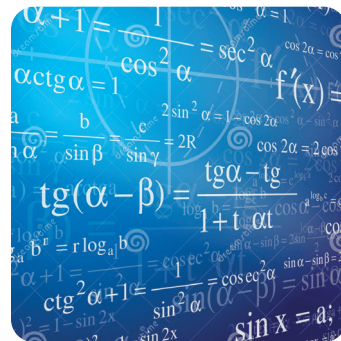
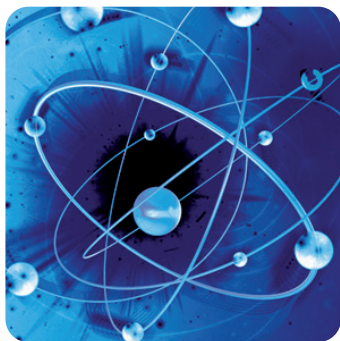
جهت کسب اطلاعات بیشتر کد بالا را اسکن نمایید

دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۶ تیر ۱۴۰۲ (مرحله ۱۹)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

گروه آزمایشی علوم ریاضی



تذکرات مهم ↓

➤ آزمون آزمایشی مرحله ۲۰ گزینه دو، در روز جمعه ۹ تیر ۱۴۰۲ برگزار می گردد.

➤ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ... ، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➤➤ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➤ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۱۹ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

ریاضیات

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۴)

۱- پاسخ: گزینه ۴

نکته:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

فرض کنید $A = \frac{7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}{9 + \sqrt{14}}$ و $B = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ ، ابتدا A و B را جداگانه ساده می‌کنیم.

برای ساده کردن A توجه کنید $\sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}$ و $\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$ ، پس داریم:

$$A = \frac{7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}{9 + \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7^3} - \sqrt{2^3}}{9 + \sqrt{14}} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(7 + \sqrt{7} \times \sqrt{2} + 2)}{9 + \sqrt{14}} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(9 + \sqrt{14})}{9 + \sqrt{14}} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$$

برای ساده کردن B آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$B^2 = (\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}})^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{4^2 - \sqrt{7}^2} = 8 - 2\sqrt{16 - 7} = 8 - 6 = 2$$

با توجه به مثبت بودن B ($4 + \sqrt{7} > 4 - \sqrt{7}$)، پس:

$$B = \sqrt{2}$$

اکنون به محاسبه مقدار خواسته شده می‌پردازیم:

$$\left(\frac{7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}{9 + \sqrt{14}}\right)(\sqrt{7} + \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}) = A - (\sqrt{7} + B) = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = \sqrt{7}^2 - \sqrt{2}^2 = 7 - 2 = 5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۲- پاسخ: گزینه ۲

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها به ترتیب برابر است با:

$$S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$$

نکته: اگر سه عدد a، b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، داریم:

$$b^2 = ac$$

سه عدد $\alpha - 1$ ، $a - 1$ و $\beta - 1$ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، پس:

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = (a - 1)^2 \Rightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = (a - 1)^2 \Rightarrow \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = (a - 1)^2$$

α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + (4 - a)x + (3a + 1) = 0$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-(4 - a)}{1} = a - 4, P = \alpha\beta = \frac{3a + 1}{1} = 3a + 1$$

بنابراین داریم:

$$3a + 1 - (a - 4) + 1 = (a - 1)^2$$

$$\Rightarrow 3a + 1 - a + 4 + 1 = a^2 - 2a + 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 5 = 0 \Rightarrow (a + 1)(a - 5) = 0$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = 5$$

توجه کنید اگر $a = 5$ معادله به صورت $x^2 - x + 16 = 0$ درمی‌آید. این معادله با توجه به علامت $\Delta = 1 - 4 \times 16 < 0$ جواب ندارد و $a = 5$ غیر قابل قبول است.

اما اگر $a = -1$ معادله به صورت $x^2 + 5x - 2 = 0$ درمی‌آید که دو ریشه متمایز دارد ($\Delta = 5^2 + 4 \times 2 > 0$) پس $a = -1$ تنها جواب قابل قبول است.

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نقطه A روی خط $y = x + 1$ است، پس اگر طول این نقطه را k بنامیم عرض آن برابر $k + 1$ است، یعنی: $A(k, k + 1)$ می‌خواهیم فاصله نقطه A را از خط $y = 0/5x - 2$ پیدا کنیم. ابتدا معادله خط را مرتب می‌کنیم:

$$y = 0/5x - 2 \xrightarrow{\times 2} 2y = x - 4 \Rightarrow x - 2y - 4 = 0$$

فاصله نقطه $A(k, k + 1)$ از خط $x - 2y - 4 = 0$ برابر $\sqrt{20}$ است، پس:

$$\frac{|k - 2(k + 1) - 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{20}$$

$$\Rightarrow |-k - 6| = \sqrt{20} \times \sqrt{5} \Rightarrow |k + 6| = \sqrt{100}$$

$$\Rightarrow k + 6 = \pm 10 \Rightarrow k = -4 \text{ یا } k = -16$$

بنابراین مختصات A به صورت $A(4, 5)$ یا $A(-16, -15)$ است و مجموع طول و عرض آن برابر $4 + 5 = 9$ یا $-16 - 15 = -31$ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۴- پاسخ: گزینه ۱

نکته: در تابع f اگر روی بازه (a, b) داشته باشیم $f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow x_2 > x_1, \forall x \in (a, b)$ ، آنگاه تابع f روی (a, b) اکیداً نزولی است.

ابتدا ضابطه تابع f را بدون قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = |3x + 6| - \sqrt{(x - 3)^2} = |3x + 6| - |x - 3| = \begin{cases} (3x + 6) - (x - 3) & x \geq 3 \\ (3x + 6) - (-x + 3) & -2 < x < 3 \\ (-3x - 6) - (-x + 3) & x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 9 & x \geq 3 \\ 4x + 3 & -2 < x < 3 \\ -2x - 9 & x \leq -2 \end{cases}$$

در فاصله $(-\infty, -2]$ تابع f ، تابعی خطی با شیب -2 است، پس در این فاصله، این تابع اکیداً نزولی است. اکنون به محاسبه وارون این خط می‌پردازیم:

$$y = -2x - 9 \Rightarrow y + 9 = -2x \Rightarrow x = \frac{y + 9}{-2}$$

توجه کنید وقتی $x \leq -2$ ، آنگاه $-2x \geq 4$ ، پس $-2x - 9 \geq -5$ یعنی $y \geq -5$ بنابراین با تعویض جای x و y ، وارون تابع در این فاصله برابر است با:

$$f^{-1}: y = \frac{-x - 9}{2}; x \geq -5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۵- پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار $y = f(x + k)$ به دست می‌آید.

نکته: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار $y = f(-x)$ به دست می‌آید.

نکته: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم نمودار $y = f(x) + k$ به دست می‌آید.

در اثر انتقال نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ به اندازه یک واحد به چپ نمودار تابع $f(x + 1) = \frac{1}{x + 1}$ به دست می‌آید. در اثر قرینه کردن این تابع

نسبت به محور عرض‌ها نمودار تابع $f(-x + 1) = \frac{1}{-x + 1}$ به دست می‌آید و اگر این تابع را $1/5$ واحد به بالا منتقل کنیم

$$f(-x + 1) + 1/5 = \frac{1}{-x + 1} + 1/5$$

برای یافتن محل تلاقی تابع به دست آمده با تابع $y = f(x)$ ، معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{-x + 1} + 1/5 = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{1 - x} + \frac{3}{5} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\times 2x(1-x)} 2x + 3x(1-x) = 2(1-x) \Rightarrow 2x + 3x - 3x^2 = 2 - 2x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \Rightarrow x = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow x = 2, \frac{1}{3}$$

پس دو نقطه تلاقی تابع‌ها با هم، $A(2, \frac{1}{2})$ و $B(\frac{1}{3}, 3)$ هستند. فاصله این دو نقطه برابر است با:

$$BA = \sqrt{(2 - \frac{1}{3})^2 + (3 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{(\frac{5}{3})^2 + (\frac{5}{2})^2} = 5\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{13}}{6}$$

نکته: در حل معادلات نمایی می توان از رابطه $a^x = a^y$ نتیجه گرفت $x = y$.

نکته: $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$

نکته: $a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$

نکته: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

می خواهیم با استفاده از تغییر متغیر $2^x = t$ معادله مورد نظر را حل کنیم.

$$2^{2x+1} = 9(2^x - 1) \Rightarrow 2^{2x} \times 2^1 = 9 \times 2^x - 9 \Rightarrow (2^x)^2 \times 2 = 9 \times 2^x - 9 \xrightarrow{2^x=t} 2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 2 \times 9}}{2 \times 2} \Rightarrow t = \frac{9 \pm 3}{4} \Rightarrow t = 3, \frac{3}{2}$$

پس $2^x = 3$ یا $2^x = \frac{3}{2}$ یعنی دو ریشه معادله اصلی $\alpha = \log_2 3$ و $\beta = \log_2 \frac{3}{2}$ است. (توجه کنید $\log_2 3$ عددی مثبت و $\log_2 \frac{3}{2}$ عددی منفی است.) با توجه به ویژگی های لگاریتم داریم:

$$\beta = \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - \log_2 2 = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = \beta + 1$$

نکته: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

نکته: $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$, $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

راه حل اول:

دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می رسانیم:

$$(\sqrt{10}(\sin \alpha + \cos \alpha))^2 = 2^2 \Rightarrow 10(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) = 4 \Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = 0/4 \Rightarrow \sin 2\alpha = -0/4$$

اکنون $\tan 2\alpha$ را محاسبه می کنیم تا با استفاده از آن $\tan \alpha$ را محاسبه کنیم:

$$1 + \cot^2 2\alpha = \frac{1}{\sin^2 2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2 2\alpha} = \frac{1}{(-0/4)^2} \Rightarrow \frac{1}{\tan^2 2\alpha} = \frac{100}{36} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\tan^2 2\alpha} = \frac{64}{36}$$

$$\Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \tan 2\alpha = \pm \frac{3}{4}$$

با توجه به رابطه $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}$ ، عبارت $\sin \alpha + \cos \alpha$ مقدار مثبت دارد. ضمناً می دانیم α در ربع دوم است، یعنی $\sin \alpha$ مثبت و $\cos \alpha$ منفی است. پس با توجه به مثبت بودن $\sin \alpha + \cos \alpha$ ، داریم $|\sin \alpha| > |\cos \alpha|$ ؛ یعنی زاویه α در نیمه اول ربع دوم قرار دارد؛ در نتیجه:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$$

یعنی 2α در ربع سوم قرار دارد و $\tan 2\alpha$ مقداری مثبت است، پس:

اکنون با استفاده از رابطه $\tan 2\alpha$ داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\tan \alpha = t} \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 - 3t^2 = 8t \Rightarrow 3t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3} \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6} \Rightarrow t = -3 \text{ یا } \frac{1}{3}$$

با توجه به اینکه α در ربع دوم قرار دارد، پس $\tan \alpha$ مقداری منفی است، پس $\tan \alpha = -3$ راه حل دوم:

اگر از رابطه $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ ، بعد از به دست آوردن $\sin 2\alpha$ استفاده کنیم مقدار $\tan \alpha$ راحت تر به دست می آید:

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{-6}{10} \xrightarrow{\tan \alpha = t} \frac{2t}{1 + t^2} = -\frac{3}{5} \Rightarrow -3 - 3t^2 = 10t \Rightarrow 3t^2 + 10t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} \Rightarrow t = -3 \text{ یا } -\frac{1}{3}$$

با توجه به اینکه α در نیمه اول ربع دوم قرار دارد تنها جواب $\tan \alpha = -3$ قابل قبول است.

راه حل سوم:

معادله را ساده کرده و طرفین آن را بر $\cos \alpha \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}} \xrightarrow{+\cos \alpha} \tan \alpha + 1 = \frac{2\sqrt{10}}{10 \cos \alpha} \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 2} \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha + 1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha + 1 = \frac{2}{5} (\tan^2 \alpha + 1) \Rightarrow \frac{3}{5} \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha + \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow 9 \tan^2 \alpha + 3 \cdot \tan \alpha + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (3 \tan \alpha + 1)(\tan \alpha + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{1}{3} \text{ (غرق)} \\ \tan \alpha = -3 \checkmark \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۸- پاسخ: گزینه ۲

نکته: در تابع $f(x) = a \sin(bx) + c$ یا $f(x) = a \cos(bx) + c$ مقدار ماکزیمم برابر $|a| + c$ و مقدار مینیمم برابر $-|a| + c$ است.

نکته: جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos x = 0$ به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ است.

با توجه به نمودار تابع ماکزیمم این تابع برابر ۲ است، پس:

$$|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2 \cos(\pi x + \frac{5\pi}{6})$ یا $f(x) = -2 \cos(\pi x + \frac{5\pi}{6})$ است. در حالت اول $f(0) = 2 \times \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و در حالت

$$\text{دوم } f(0) = -2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

با توجه به اینکه در نمودار داده شده $f(0)$ مقداری مثبت است (محور عرض‌ها را بالای مبدأ مختصات قطع کرده) پس حالت دوم مورد قبول است، یعنی:

$$f(x) = -2 \cos(\pi x + \frac{5\pi}{6})$$

برای یافتن m و n توجه می‌کنیم که آن‌ها محل تلاقی تابع f با محور طول‌ها بوده، پس جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2 \cos(\pi x + \frac{5\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \cos(\pi x + \frac{5\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \pi x + \frac{5\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{6} = k + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = k - \frac{1}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دو جواب مثبت ابتدایی به دست آمده به ترتیب m و n هستند یعنی $n = \frac{5}{3}$ و $m = \frac{2}{3}$ ، پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a}{mn} = \frac{-2}{\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}} = \frac{-2}{\frac{10}{9}} = \frac{-18}{10} = -1.8$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

۹- پاسخ: گزینه ۲

نکته: $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ ، $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\text{نکته: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مقدار حد خواسته شده برابر است با:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(\cos x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x} - \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x}} \times \frac{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x| - \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|}{(1 - x^2) - (1 - x)} \times (\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x}) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{-x^2 + x} (\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{x} \times \frac{(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x})}{-x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \times \frac{(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x})}{-x + 1} = (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{(\sqrt{1 + 1})}{1} \\ &= (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times 2 = -2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

نکته: اگر تابع f در $x = c$ پیوسته باشد، آنگاه: $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$

نکته: اگر تابع f در $x = a$ ناپیوسته و تابع g در $x = a$ پیوسته باشد، تابع $f \pm g$ حتماً در $x = a$ ناپیوسته است.

می‌دانیم تابع $y = [x]$ در نقاطی با طول صحیح ناپیوسته است، پس تابع $y = [2x]$ در نقاطی که نصف اعداد صحیح هستند ناپیوسته است

و تابع $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ در نقاطی که دو برابر اعداد صحیح هستند (اعداد زوج) ناپیوسته است.

در تابع $f(x) = [2x] - \left[\frac{x}{2} \right]$ روی بازه $(-1, 3)$ می‌دانیم در نقاط با طول‌های عضو مجموعه $\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}$ فقط تابع $[2x]$ ناپیوسته

است و تابع $\left[\frac{x}{2} \right]$ پیوسته است، پس تفاضل آن‌ها حتماً ناپیوسته است.

اما در نقاط با طول‌های $x = 2$ یا $x = 0$ که هر دو تابع $[2x]$ و $\left[\frac{x}{2} \right]$ ناپیوسته هستند ممکن است تفاضل آن‌ها پیوسته باشد که احتیاج به

بررسی دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = [4^+] - [1^+] = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [0^+] - [0^+] = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [4^-] - [1^-] = 3 - 0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [0^-] - [0^-] = -1 - (-1) = 0$$

$$f(2) = 4 - 1 = 3$$

$$f(0) = 0 - 0 = 0$$

پس تابع f در نقاط با طول‌های صفر و ۲ پیوسته است و فقط در ۵ نقطه با طول‌های $\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}$ ناپیوسته است.

نکته: خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

برای یافتن مجانب‌های قائم این تابع ریشه‌های مخرج کسر تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$|2x^2 + 3x + 1| = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \times 2} \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

اکنون به محاسبه حد راست و چپ تابع f در این دو نقطه می‌پردازیم؛ در اطراف $x = -1$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 [-1^-] - x \left[\frac{2}{3} \right] + 2x^2}{|2x^2 + 3x + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2x^2 + 0 \cdot x + 2x^2}{|2x^2 + 3x + 1|} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 [-1^+] - x \left[\frac{2}{3} \right] + 2x^2}{|(x+1)(2x+1)|} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 + 2x^2}{|x+1||2x+1|} = \frac{1}{0^+ \times 1} = +\infty$$

همچنین در اطراف $x = -\frac{1}{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{x^2 [-2^-] - x \left[\frac{1}{3} \right] + 2x^2}{|x+1||2x+1|} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{-3x^2 + 2x^2}{|x+1||2x+1|} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{x^2 [-2^+] - x \left[\frac{1}{3} \right] + 2x^2}{|x+1||2x+1|} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{-2x^2 + 0 + 2x^2}{|x+1||2x+1|} = 0$$

در واقع در فاصله $-\frac{1}{2} < x < -1$ تابع f با تابع ثابت $y = 0$ برابر است و نمودار تابع شبیه گزینه ۲ است.

۱۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

ابتدا مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{ax+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(x-1)-(ax+1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-a-1}{(x-1)^2}$$

شیب خط مماس $y = bx + 11$ (یعنی b) برابر $f'(2)$ است، پس:

$$b = \frac{-a-1}{(2-1)^2} \Rightarrow b = -a-1$$

همچنین تابع f و خط $y = bx + 11$ در نقطه‌ای به طول ۲ مشترک هستند، پس:

$$2b + 11 = \frac{2a+1}{2-1} \Rightarrow 2b + 11 = 2a + 1 \Rightarrow 2b + 10 = 2a \Rightarrow a = b + 5$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول به دست آمده، داریم $a = 2$ و $b = -3$ ، پس: $a \times b = -6$

۱۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

$$(f(u))' = f'(u) \times u'$$

نکته: اگر f' تابع مشتق f باشد، آنگاه داریم:

مقدار مشتق تابع خواسته شده به صورت زیر است:

$$y = f(\cos^2 x) \Rightarrow y' = f'(\cos^2 x) \times (\cos^2 x)' \Rightarrow y' = f'(\cos^2 x) \times 2 \cos x (-\sin x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y' = f'(\cos^2(\frac{\pi}{6})) \times 2 \cos \frac{\pi}{6} \times (-\sin \frac{\pi}{6}) \Rightarrow y' = f'((\frac{\sqrt{3}}{2})^2) \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\frac{1}{2}) \Rightarrow y' = f'(\frac{3}{4}) \times \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow y' = \tan \frac{3\pi}{4} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y' = -1 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: مشتق تابع f در $x = a$ طبق تعریف برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نکته: مشتق تابع $y = \sqrt[3]{u}$ برابر است با:

$$y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

ابتدا در حد خواسته شده تعریف مشتق را ایجاد می‌کنیم:

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(2+h) - 8}{h(2+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(2+h) - 2) \times (f^2(2+h) + 2f(2+h) + 4)}{h(2+h)}$$

با توجه به اینکه $f(2) = \sqrt[3]{4-3} |2-4| = 2$ ، پس حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 2}{h}$ برابر $f'(2)$ است.

می‌دانیم در اطراف $x = 2$ ، عبارت $(x-4)$ منفی است، پس در اطراف $x = 2$ داریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{2x-3} (4-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3)^2}} (4-x) + \sqrt[3]{2x-3} (-1) \Rightarrow f'(2) = \frac{2}{3 \times 1} \times 2 + 1 \times (-1) \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{3}$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$A = f'(2) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h) + 2f(2+h) + 4}{2+h} = \frac{1}{3} \times \frac{f^2(2) + 2f(2) + 4}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{2} = 2$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۲)

نکته: هر نقطه اکسترمم نسبی یک تابع، یکی از نقاط بحرانی آن تابع است.

نکته: اگر $x = a$ طول نقطه عطف تابع f بوده و $f''(a)$ موجود باشد، آنگاه: $f''(a) = 0$

نقاطی با طول‌های $x = 2$ و $x = -4$ اکسترمم‌های نسبی تابع f هستند، پس این دو عدد ریشه‌های تابع f' هستند.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(-4) = 0 \Rightarrow 3 \times 16 + 2a(-4) + b = 0 \Rightarrow 4a - b = 48 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \times 4 + 2a \times 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -24$$

بنابراین تابع f به صورت $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 8$ است.

در این تابع درجه سوم ریشه معادله $f''(x) = 0$ طول نقطه عطف است.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

البته طول نقطه عطف را می‌توانستیم با استفاده از این نکته هم به دست بیاوریم که در تابع درجه سوم طول نقطه عطف میانگین طول دو اکسترمم آن است.

طول نقطه عطف $= \frac{-4+2}{2} = -1$

$$f(-1) = -1 + 3 + 24 - 8 = 18$$

بنابراین عرض نقطه عطف برابر است با:

نکته: اگر روی بازه (a, b) داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است.
نکته: اگر روی بازه (a, b) داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، تابع f روی این بازه تقریبی روبه بالا دارد.
ابتدا نامعادله $f'(x) < 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{1 \times (x^2 + 3) - 2x \times x}{(x^2 + 3)^2} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 3}{(x^2 + 3)^2} < 0$$

x	$-\sqrt{3}$	$+$	$+\sqrt{3}$	
f'	$-$	$+$	$-$	

بنابراین تابع f در دو فاصله $x < -\sqrt{3}$ یا $x > \sqrt{3}$ اکیداً نزولی است.

اکنون به حل نامعادله $f''(x) > 0$ می‌پردازیم:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{-2x(x^2 + 3)^2 - 2(x^2 + 3) \times 2x(-x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^4} > 0 \Rightarrow \frac{-2x(x^2 + 3)((x^2 + 3) + 2(-x^2 + 3))}{(x^2 + 3)^4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x(-x^2 + 9)}{(x^2 + 3)^3} > 0$$

x	-3	0	$+3$	
f''	$-$	$+$	$-$	$+$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -3)$ و $(3, +\infty)$ دارای تقعر روبه بالا است.

پس تابع f در محدوده‌های $(-\infty, -\sqrt{3})$ و $(\sqrt{3}, +\infty)$ اکیداً نزولی و دارای تقعر روبه بالا است.

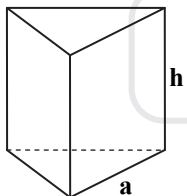
با توجه به منفی بودن a و b ، حداکثر مقدار $b - a$ وقتی است که $b = -\sqrt{3}$ و $a = -3$ و داریم:

$$b - a = -\sqrt{3} + 3$$

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

نکته: حجم یک منشور قائم برابر ارتفاع آن ضرب در مساحت قاعده آن است.

طول ضلع مثلث را a و ارتفاع منشور را h می‌نامیم. حجم این منشور باید یک واحد باشد، پس:



$$V = 1 \Rightarrow S \times h = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{4}{\sqrt{3}a^2}$$

مساحت جانبی و مساحت کف این منشور در باز برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3ah \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3a \times \frac{4}{\sqrt{3}a^2} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{4\sqrt{3}}{a}$$

برای یافتن مقداری از a که این مساحت را کمتر می‌کند، از حل معادله $S' = 0$ کمک می‌گیریم.

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2a - \frac{4\sqrt{3}}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{4\sqrt{3}}{a^2} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس به ازای $a = 2$ و $h = \frac{4}{\sqrt{3} \times 4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ مقدار مساحت جانبی و کف منشور و در نتیجه مقدار مقوا کمترین است. این کمترین مقدار برابر

است با:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 + 3 \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

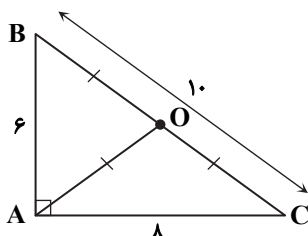
نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

مثلثی با طول اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ قائم‌الزاویه است. در مثلث قائم‌الزاویه، محل هم‌رسی

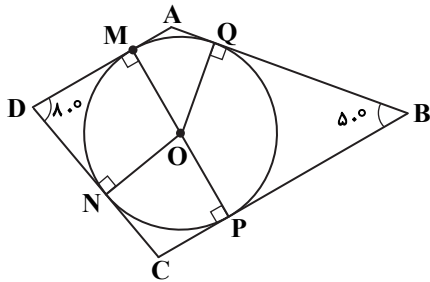
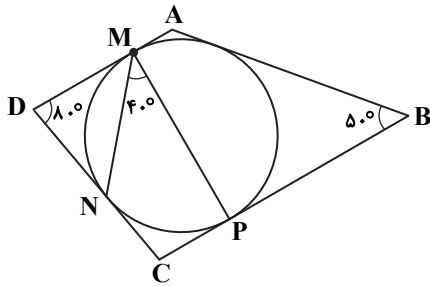
عمودمنصف‌ها وسط وتر و محل هم‌رسی ارتفاع‌ها، رأس قائمه است که مطابق شکل همان اندازه

میانه وارد بر وتر را می‌خواهیم، پس:

$$AO = \frac{1}{2}BC = \frac{10}{2} = 5$$



۱۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فصل ۱، درس ۱ هندسه ۲

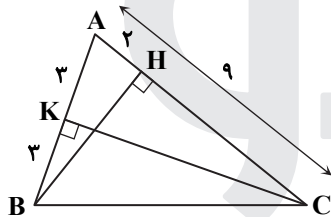


نکته: اندازه هر زاویه مرکزی برابر با کمان مقابل آن است.
نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان مقابل آن است.
با توجه به نکات فوق داریم:

$$\begin{aligned} \hat{M} = 40^\circ &\Rightarrow \widehat{NP} = 2 \times 40^\circ = 80^\circ \\ \text{از مرکز دایره، به تمام نقاط تماس وصل می‌کنیم، با توجه به چهارضلعی‌های} \\ \text{محاطی } AMOQ, BQOP, CPON, \text{ و } DMON \text{ داریم:} \\ \widehat{MON} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ &\Rightarrow \widehat{MN} = 100^\circ \\ \widehat{QOP} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ &\Rightarrow \widehat{PQ} = 130^\circ \\ \widehat{MN} + \widehat{NP} + \widehat{PQ} + \widehat{MQ} = 360^\circ \\ \Rightarrow 100^\circ + 80^\circ + 130^\circ + \widehat{MQ} = 360^\circ \\ \Rightarrow \widehat{MQ} = 50^\circ &\Rightarrow \widehat{MOQ} = 50^\circ \\ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \end{aligned}$$

۲۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۲، درس ۳ هندسه ۱

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه دو مثلث متشابه‌اند.
نکته: در دو مثلث متشابه اضلاع متناظر متناسب‌اند.
دو مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABH$ و $\triangle ACK$ در زاویه A مشترک‌اند، پس متشابه‌اند:

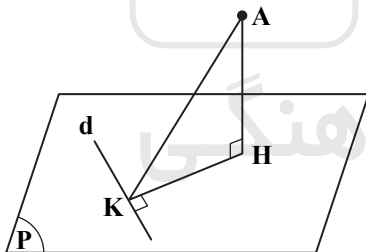


$$\begin{aligned} \triangle ABH \sim \triangle ACK &\Rightarrow \frac{AH}{AK} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AB}{9} \Rightarrow AB = 6 \\ \Rightarrow BK = AB - AK = 3 \\ \text{ارتفاع } CK, \text{ ضلع } AB \text{ را نصف کرده، پس ارتفاع، میانه هم می‌باشد و مثلث } ABC \text{ در رأس} \\ C \text{ متساوی‌الساقین است:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC = AC = 9 \\ \text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC = 6 + 9 + 9 = 24 \end{aligned}$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۴، درس ۱ هندسه ۱

نکته: اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، آنگاه بر همه خط‌های آن صفحه عمود است.
نکته: اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد، بر آن صفحه نیز عمود است.
طبق نکات فوق داریم:



$$\begin{aligned} AH \perp P &\Rightarrow AH \perp d \\ \text{طبق فرض: } KH &\perp d \\ \text{خط } d \text{ هم بر } AH \text{ و هم بر } KH \text{ عمود است، یعنی خط } d \text{ بر دو خط متقاطع صفحه } AKH \\ \text{عمود است و لذا خط } d \text{ بر صفحه } AKH \text{ عمود خواهد بود. در این صورت خط } d \text{ بر همه} \\ \text{خط‌های صفحه } AKH \text{ عمود است، بنابراین:} \\ d \perp AK \end{aligned}$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فصل ۲، درس ۱ هندسه ۲

طبق شکل روبه‌رو، ضلع مربع ABCD را $a = 2$ در نظر می‌گیریم:

$$\text{قطر مربع} = a\sqrt{2}$$

$$AH = OA - OH = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}A'B' = \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1$$

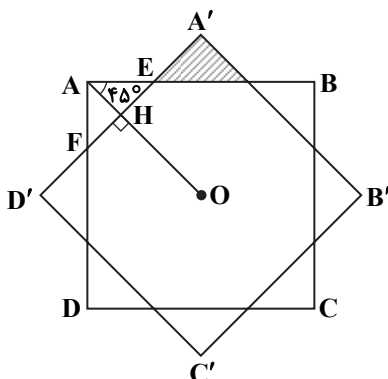
$$AH = HE = HF \Rightarrow EF = 2AH = 2(\sqrt{2} - 1)$$

مساحت مثلث هاشورزده با مساحت مثلث AEF برابر است، پس:

$$S_{\text{هاشورزده}} = \frac{1}{2}AH \times EF = (\sqrt{2} - 1)^2$$

اگر چهار برابر مساحت هاشورزده را از مساحت مربع ABCD کم کنیم، مساحت ناحیه مشترک دو مربع به دست می‌آید:

$$S = 2^2 - 4(\sqrt{2} - 1)^2 = 4 - 8 + 8\sqrt{2} - 4 = 8(\sqrt{2} - 1)$$



نکته (قضیه کسینوسها): در مثلث دلخواه ABC داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

نکته: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع آن در سینوس زاویه بین آن دو ضلع:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$$

در مثلث AMN قضیه کسینوسها را می‌نویسیم:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \alpha \Rightarrow 7^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 49 = 25 + 9 - 30 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

اکنون داریم:

$$S_{BMNC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \sin 120^\circ - \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \sin 120^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (8 \times 12 - 5 \times 3) = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فصل ۱، درس ۱ هندسه ۳

۲۴- پاسخ: گزینه ۳

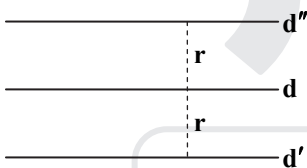
با توجه به درایه‌های ماتریس داده شده، مشخص است که پاسخ گزینه ۳ است:

$$a_{ij} = \begin{cases} j+i & i > j \\ 1+j & i \leq j \end{cases} : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فصل ۲، درس ۱ هندسه ۳

۲۵- پاسخ: گزینه ۴

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله r باشند، دو خط موازی در طرفین d و به فاصله r از آن هستند.



باید دو خط موازی BD به فاصله ۱ از آن را با محیط مربع قطع دهیم. مطابق شکل باید OA را با ۱ مقایسه کنیم:

$$OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} > 1$$

پس مطابق شکل ۴ نقطه جواب داریم.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱، درس ۲ هندسه ۳

۲۶- پاسخ: گزینه ۳

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \text{نکته:}$$

$$I^n = I \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{نکته:}$$

نکته: ماتریس مربعی A را وارون پذیر می‌گوییم، هرگاه: $|A| \neq 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$|A^2| = |I| \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ وارون پذیر است}$$

$$AB(2I - A)^{-1} = A^2 + 2A = A(A + 2I)$$

دو طرف این تساوی را از سمت راست در $2I - A$ ضرب می‌کنیم:

$$AB \underbrace{(2I - A)^{-1}(2I - A)}_I = A(A + 2I)(2I - A) \Rightarrow AB = A(4I^2 - A^2) \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}AB = A^{-1}A(4I^2 - A^2)$$

$$\Rightarrow B = 4I^2 - A^2 = 4I - I = 3I$$

نکته: $AI = IA = A$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فصل ۳، درس ۲ هندسه ۳

۲۷- پاسخ: گزینه ۴

نکته: $\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \pm \vec{a} \times \vec{c}$

نکته: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

نکته: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}} = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \times \vec{a} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} = \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} + \vec{b} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\frac{2|\vec{b} \times \vec{c}| - 2|\vec{c} \times \vec{a}|}{|\vec{b} \times \vec{a}|} = \frac{2|\vec{b} \times \vec{c}| - 2|\vec{b} \times \vec{c}|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{-|\vec{b} \times \vec{c}|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = -1$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فصل ۲، درس ۳ هندسه ۳

۲۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته: در بیضی به مرکز O مطابق شکل داریم:

$AA' = 2a$ (قطر بزرگ)

$BB' = 2b$ (قطر کوچک)

$FF' = 2c$ اندازه فاصله کانونی

$a^2 = b^2 + c^2$

با توجه به مفروضات سؤال داریم:

$CD = OB$, $CD = OF \Rightarrow OB = OF$

پس مثلث OBF قائم الزاویه متساوی الساقین است:

$\hat{B} = \hat{F} = 45^\circ \Rightarrow \hat{CFD} = 45^\circ$

پس مثلث CFD نیز قائم الزاویه متساوی الساقین است و $FD = CD$ است، پس:

$OB = b$, $OF = c \Rightarrow FD = CD = c$

$\Rightarrow AD = FD - FA = c - (a - c) = 2c - a \Rightarrow \frac{A'F}{AD} = \frac{a + c}{2c - a}$

رابطه بین a و c را پیدا می کنیم:

$OB = OF \Rightarrow b = c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c$

اکنون خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\frac{2A'F}{AD} = \frac{2(a+c)}{2c-a} = \frac{2(\sqrt{2}c+c)}{2c-\sqrt{2}c} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{4-2} = 3\sqrt{2}+4$$

۲۹- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱) و ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

نکته ۱: گزاره مرکب $p \vee q$ زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند و در مابقی حالات، درست است.

نکته ۲: گزاره مرکب $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند و در مابقی حالات، نادرست است.

نکته ۳: گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد و در مابقی حالات، درست است.

نکته ۴: اگر p و q هم ارزش باشند گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست و اگر p و q هم ارزش نباشند، گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ نادرست است.

ابتدا حالت هایی را بررسی می کنیم که گزاره $(p \vee q) \Leftrightarrow r$ نادرست است:

$(p \vee q) \Leftrightarrow r$																	
<table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>d</td><td>d</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>d</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>d</td><td>d</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>d</td><td>n</td></tr> </table>	d	d	n	n	d	n	n	n	d	d	n	n	n	n	d	n	$\Rightarrow n(S) = 4$
d	d	n	n														
d	n	n	n														
d	d	n	n														
n	n	d	n														

اینک باید ببینیم که از بین این چهار حالت، در چند حالت، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ نادرست می شود:

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$																					
<table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>d</td><td>d</td><td>d</td><td>n</td><td>✓</td></tr> <tr><td>d</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>✓</td></tr> <tr><td>d</td><td>d</td><td>d</td><td>d</td><td>*</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>d</td><td>✓</td></tr> </table>	d	d	d	n	✓	d	n	n	n	✓	d	d	d	d	*	n	n	n	d	✓	$\Rightarrow n(A) = 3$
d	d	d	n	✓																	
d	n	n	n	✓																	
d	d	d	d	*																	
n	n	n	d	✓																	

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

نکته: اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

برای آنکه رابطه $A \cup \{6, 7\} = A \cap \{1, 3, 4, 6, 7\}$ برقرار باشد با توجه به تعاریف اجتماع و اشتراک دو مجموعه داریم:

(۱) هر دو باید در A موجود باشند، پس هر کدام یک حالت دارند.

(۲) هیچ کدام نباید در A باشند، پس هر کدام یک حالت دارند.

(۳) هر کدام می‌توانند در A باشند یا نباشند، پس هر کدام دو حالت دارند.

بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد مجموعه‌های A برابر است با:

$$\begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & \times & 1 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 1 & \times & 1 & \times & 1 & \times & 1 & = & 8 \end{array}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۲، درس‌های ۲ و ۳)

۳۱- پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: اگر $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس باشد، داریم:

$$P(s_1) + P(s_2) + P(s_3) + \dots + P(s_n) = 1$$

نکته ۲: فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افزاز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

نکته ۳: در پرتاب n سکه، احتمال اینکه k سکه پشت (یا رو) بیاید، برابر است با:

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

ابتدا به کمک قوانین احتمال غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\text{غیرمضرب } 3) = 3P(\text{مضرب } 3)$$

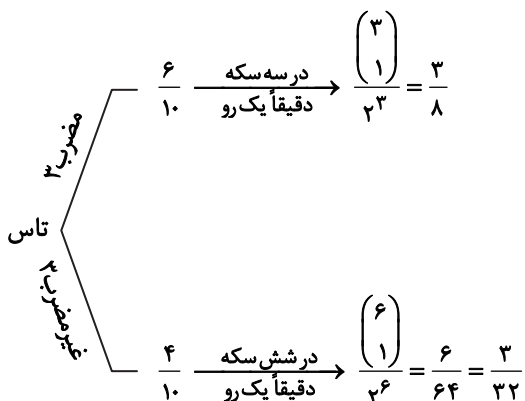
$$P(\text{غیرمضرب } 3) = x \Rightarrow P(\text{مضرب } 3) = 3x$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + x + 3x + x + x + 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(3) = P(6) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(\text{مضرب } 3 \text{ ها}) = P(\{3, 6\}) = P(3) + P(6) = \frac{6}{10} \\ P(1) = P(2) = P(4) = P(5) = \frac{1}{10} \Rightarrow P(\text{غیرمضرب } 3 \text{ ها}) = P(\{1, 2, 4, 5\}) = P(1) + P(2) + P(4) + P(5) = \frac{4}{10} \end{cases}$$

و اینک به کمک قانون احتمال کل، داریم:



و در نهایت، احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{32} = \frac{18}{80} + \frac{3}{80} = \frac{21}{80}$$

۳۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۲، درس‌های ۳ و ۴)

نکته: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه احتمال وقوع هریک در دیگری تأثیری نداشته باشد.

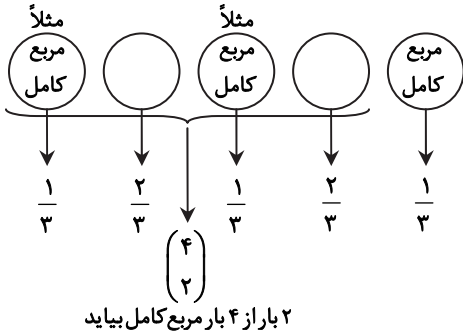
برای هر دو پیشامد مستقل A و B داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن عدد مربع کامل، برابر است با:

$$\{1, 4\}: P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

و احتمال ظاهر شدن عدد غیرمربع کامل برابر $\frac{2}{3}$ است.

حال اگر بخواهیم تاس را آنقدر پرتاب کنیم که سه بار مربع کامل بیاید و این اتفاق در پنج بار پرتاب، رخ دهد یعنی بار پنجم مربع کامل آمده و در چهار پرتاب اول نیز، دو بار مربع کامل آمده است، پس داریم:



و چون پرتاب‌ها مستقل از هم هستند، پس احتمال آن‌ها در هم ضرب می‌شود، داریم:

$$P(A) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} = \frac{8}{81}$$

۳۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۳، درس‌های ۱ و ۲)

نکته ۱: در هر بررسی آماری، مجموع فراوانی‌های نسبی برابر با یک است. $\sum_{i=1}^n \bar{f}_i = 1$

نکته ۲: میانگین داده‌های x_1 تا x_n با فراوانی‌های نسبی \bar{f}_1 تا \bar{f}_n برابر است با:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i x_i$$

ابتدا داده‌ها و فراوانی نسبی آن‌ها را در جدول تنظیم می‌کنیم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

x_i	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸
\bar{f}_i	۰/۱۵	a	۰/۳۵	۰/۱	۰/۱۵

$$0/15 + a + 0/35 + 0/1 + 0/15 = 1 \Rightarrow a = 0/25$$

اینک، میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = 0/15(12) + 0/25(16) + 0/35(20) + 0/1(24) + 0/15(28) = 1/8 + 4/7 + 2/4 + 4/2 = 19/4$$

۳۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

نکته ۱: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم a و b هر دو با هم صفر نیستند و می‌نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d | a, d | b$

ب) $\forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$

نکته ۲: برای اعداد صحیح a, b, c و am داریم:

۱) $a | b \Rightarrow a | mb$

۲) $a | b, a | c \Rightarrow a | b \pm c$

۳) $a | b, a | c \Rightarrow a | (b, c)$

با توجه به فرض مسئله $(m, n) = 1$ است. حال فرض می‌کنیم $d = (7m + n, 5m + 3n)$ و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d | 5m + 3n \xrightarrow{\times 7} d | 35m + 21n \xrightarrow{(-)} d | 16n \\ d | 7m + n \xrightarrow{\times 5} d | 35m + 5n \end{array} \right\} \Rightarrow d | (16n, 16m)$$

$$\left. \begin{array}{l} d | 5m + 3n \Rightarrow d | 5m + 3n \\ d | 7m + n \xrightarrow{\times 3} d | 21m + 3n \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d | 16m$$

$$\Rightarrow d | 16(m, n) \xrightarrow{(m, n)=1} d | 16 \Rightarrow d \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

پس ۴ مقدار زوج برای d وجود دارد.

نکته: معادله سیاله $ax + by = c$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است اگر و فقط اگر $c | (a, b)$.

معادله سیاله $119x + 51y = 3n + 5$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد، اگر داشته باشیم:

$$(119, 51) | 3n + 5 \Rightarrow (7 \times 17, 3 \times 17) | 3n + 5 \Rightarrow 17 | 3n + 5 \Rightarrow 17 | 3n - (-5) \Rightarrow 3n \equiv -5 \pmod{17} \Rightarrow 3n \equiv -5 + 17 \equiv 12 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow 3n \equiv 12 \pmod{17} \xrightarrow{+3} n \equiv 4 \pmod{17} \Rightarrow n = 17k + 4$$

واضح است که به ازای $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، پنج مقدار دورقمی برای n به دست می آید.

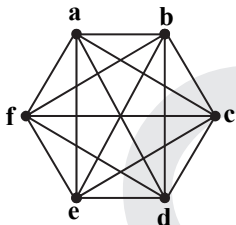
نکته ۱: گراف کامل مرتبه P را با K_P نمایش داده و عبارت است از گرافی که همه رئوسش با هم مجاورند. هر گراف کامل از مرتبه P تعداد

$$\binom{P}{2} \text{ یال دارد.}$$

نکته ۲: گراف تهی مرتبه P را با \bar{K}_P نمایش داده و عبارت است از گرافی که هیچ یالی ندارد و همه رئوس ایزوله هستند.

نکته ۳: یک زیرگراف از گراف G ، گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن نیز، زیرمجموعه یال‌های گراف G است.

گراف K_6 مطابق شکل روبه‌رو است:



(۱) تعداد $\binom{6}{1} = 6$ زیرگراف به صورت K_1 دارد.

(۲) تعداد $\binom{6}{2} = 15$ زیرگراف به صورت K_2 دارد.

(۳) تعداد $\binom{6}{3} = 20$ زیرگراف به صورت K_3 دارد.

(۴) تعداد $\binom{6}{4} = 15$ زیرگراف به صورت K_4 دارد.

(۵) تعداد $\binom{6}{5} = 6$ زیرگراف به صورت K_5 دارد.

(۶) تعداد $\binom{6}{6} = 1$ زیرگراف به صورت K_6 دارد.

در این میان ۶ گراف کامل مرتبه ۱، گراف تهی هستند و شمرده نمی‌شوند. بنابراین تعداد زیرگراف‌های کامل گراف K_6 که تهی نباشند، برابر است با:

$$15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 57$$

نکته ۱: در بین مجموعه‌های احاطه‌گر، مجموعه یا مجموعه‌هایی که کمترین عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم نامیده و تعداد اعضای آن‌ها را عدد احاطه‌گری می‌گوییم و با γ نمایش می‌دهیم.

نکته ۲: مجموعه احاطه‌گری که با حذف هر عضو دیگر احاطه‌گر نباشد، مجموعه احاطه‌گر مینیمال نام دارد.

نکته ۳: در هر گراف با n رأس و ماکزیمم درجه Δ ، یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری (γ) برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است و این یعنی

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$$

از روی شکل گراف، داریم:

$$n = 17, \Delta = 4$$

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{17}{4+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq 4$$

پس:

اما $\gamma \neq 4$ است؛ زیرا برای احاطه کردن کل رئوس حداقل به ۵ رأس نیاز داریم. به طوری که از هر مربع یک رأس برداریم که دو رأس مجاور را احاطه کند و رأس a را نیز برداریم که چهار رأس مجاورش را احاطه کند، یعنی مجموعه $\{g, j, m, p, a\}$ مجموعه احاطه‌گر مینیمم است و ۵ عضو دارد. پس $x = 5$.

از طرفی برای اینکه مجموعه احاطه‌گر مینیمال با حداکثر عضو داشته باشیم، بایستی از هر مربع ۲ رأس برداشته و رأس a را نیز برداریم یعنی مجموعه $\{h, f, k, i, n, l, o, q, a\}$ احاطه‌گر مینیمال است؛ زیرا با حذف هر عضو دیگر احاطه‌گر نیست و واضح است که این مجموعه ۹ عضو دارد، پس:

$$y = 9$$

$$y - x = 9 - 5 = 4$$

بنابراین:

۳۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس‌های ۱ و ۲)

نکته: هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی می‌گوییم که تعداد حالات آن برابر است با $n!$:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

دو حالت می‌تواند وجود داشته باشد:

(۱) اعداد با ۵ آغاز شوند ← ۵-۵-۵-۵-۵

(۲) اعداد با ۵ آغاز نشوند ← ۵-۵-۵-۵-۵

که در هر دو حالت ارقام متمایز در جاهای خالی قرار می‌گیرند و جایگشت آن‌ها ۴! است. بنابراین تعداد کل اعداد با شرایط مسئله برابر است با:

$$2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

نکته ۱: در تعیین تعداد جواب‌های معادلات سیاله چندمتغیره که در آن‌ها یک یا چند متغیر ضریب یا توان یا شرایط خاص دارند، به آن متغیرها اعداد مناسب داده و تعداد جواب‌های معادله را در این حالات به دست می‌آوریم و در نهایت جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

نکته ۲: تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است.

ابتدا برای اینکه معادله به فرم استاندارد در بیاید بایستی به جای متغیرهای x_3 و x_4 اعداد طبیعی قرار دهیم و تعداد جواب‌های معادله را در هر حالت، محاسبه کنیم، پس داریم:

$$x_1 + x_2 + (x_3 + x_4)^2 = 25$$

$$x_3 = x_4 = 1: x_1 + x_2 + 4 = 25 \Rightarrow x_1 + x_2 = 21$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{21-1}{2-1} = \binom{20}{1} = 20$$

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = 1, x_4 = 2 \\ x_4 = 1, x_3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + 9 = 25 \Rightarrow x_1 + x_2 = 16$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = 2 \binom{16-1}{2-1} = 2 \binom{15}{1} = 2 \times 15 = 30$$

$$x_3 = x_4 = 2: x_1 + x_2 + 16 = 25 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{9-1}{2-1} = \binom{8}{1} = 8$$

بنابراین، معادله تعداد $20 + 30 + 8 = 58$ جواب طبیعی دارد.

۴۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

نکته ۱: اگر m کبوتر بخواهند n لانه را اشغال کنند به طوری که $m > n$ ، طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل دو کبوتر جای می‌گیرد.

نکته ۲: اگر $kn + 1$ کبوتر یا بیشتر بخواهند حداکثر در n لانه جای گیرند، در این صورت طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $k + 1$ کبوتر جای می‌گیرد.

ابتدا زوج اعدادی را که مجموعشان ۴۰ می‌شود را مشخص می‌کنیم:

$$\{17, 23\}, \{18, 22\}, \{19, 21\}$$

اگر در بدترین حالت از هریک از زوج‌های بالا، یک عضو و همچنین عدد ۲۰ را انتخاب کنیم مجموعاً ۴ عضو برداشته‌ایم که مجموع هیچ دو تای آن‌ها برابر ۴۰ نیست. حال اگر یک عضو دیگر انتخاب کنیم مجموعش با یکی از عضوهای قبلی برابر ۴۰ خواهد شد. پس حداقل باید ۵ عضو انتخاب کنیم.

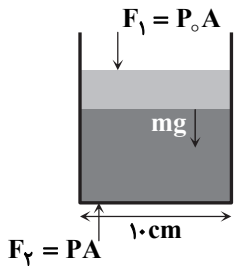
“ فیزیک ”

۴۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)

دقت اندازه‌گیری وسیلهٔ رقمی برابر با یک واحد از آخرین رقمی است که می‌خواند، یعنی دقت این وسیله 1 mmHg است که برابر 0.1 cmHg می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)



$$F_1 + mg = F_2 \Rightarrow P_0 A + mg = PA \Rightarrow P = P_0 + \frac{mg}{A}$$

$$m = m_A + m_B = \rho_A V_A + \rho_B V_B = 1/2 \times 5 + 1/6 \times 15 = 3 \text{ kg}$$

$$P = 1.5 + \frac{3 \times 10}{3 \times (5 \times 10^{-2})^2} = 1.5 + \frac{300}{3 \times 25 \times 10^{-4}} = 1/4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

■ توجه شود دو واحد $\frac{\text{kg}}{\text{L}}$ و $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ معادل هم هستند.

۴۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

فشارسنج روی مخزن گاز، فشار پیمانه‌ای گاز (P_g) را نشان می‌دهد.

۴۵ کیلوپاسکال فشار حاصل از ۳۶۰ سانتی‌متر ستون مایع است. ($410 - 50 = 360 \text{ cm}$)

فشار مطلق گاز فشار حاصل از ستون مایع

$$P_1 + P_0 = P$$

فشار هوا

$$\Rightarrow P_1 = P - P_0 = P_g = 45 \times 10^3 \Rightarrow \rho gh = 45 \times 10^3$$

$$\Rightarrow \rho \times 10 \times 3/6 = 45 \times 10^3 \Rightarrow \rho = 1250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1/25 \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

۴۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$d = AB + BC = \frac{h}{\sin 30^\circ} + BC = \frac{4}{1/2} + 12 = 20 \text{ m}$$

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{fk} = K_C - K_A \Rightarrow -mg\Delta h - f_k \cdot d = 0$$

$$\Rightarrow -50 \times (-4) - f_k \times 20 = 0 \Rightarrow f_k \times 20 = 200 \Rightarrow f_k = 10 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \Rightarrow 10 = \mu_k \times 50 \times 10 \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{5} = 0.2$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$\left. \begin{aligned} W_{1t} &= \Delta K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 \\ W_{2t} &= \Delta K_2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{W_{1t}}{W_{2t}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 8v_1^2 \Rightarrow v_2^2 = 9v_1^2$$

$$\Rightarrow v_2 = 3v_1 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 3$$

۴۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$\left\{ \begin{aligned} 100^\circ\text{C} \text{ تا } -20^\circ\text{C} \text{ دمای } \Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta \\ \theta \text{ تا } -20^\circ\text{C} \text{ دمای } \Delta L' = L_1' \alpha \Delta \theta' \end{aligned} \right. \xrightarrow{L_1 = L_1'} \frac{\Delta L}{\Delta L'} = \frac{\Delta \theta}{\Delta \theta'} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{120}{\Delta \theta'}$$

$$\Rightarrow \Delta \theta' = 72 \Rightarrow \theta - (-20) = 72 \Rightarrow \Delta \theta = 52^\circ\text{C}$$

۴۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$\Delta \theta \text{ کتری } Q_1 = m c_{\text{آب}} \Delta \theta + C \text{ کتری}$$

$$= 1 \times 4200 \times (80 - 20) + 500 \times (80 - 20) = 282000 \text{ J} = 282 \text{ kJ}$$

$$\text{انرژی الکتریکی مصرف شده } Q_2 = P \Delta t = 2000 \times 3 \times 60 = 360000 \text{ J} = 360 \text{ kJ}$$

$$\text{انرژی داده شده به محیط } Q_2 - Q_1 = 78 \text{ kJ}$$

۴۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

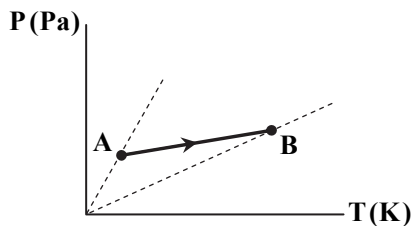
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\text{حالت اول: } P_1 \times 60 \text{ A} = (P_1 + P_W) \times 40 \text{ A} \Rightarrow 6P_1 = 4P_1 + 4P_W \Rightarrow P_W = \frac{1}{2} P_1$$

$$\text{حالت دوم: } P_1 \times 60 \text{ A} = P_2 \times V_2 \Rightarrow P_1 \times 60 \text{ A} = (P_1 + 2P_W) \times h \text{ A} \Rightarrow 6P_1 = 2P_1 h \Rightarrow h = 30 \text{ cm}$$

$$|\Delta h| = 40 - 30 = 10 \text{ cm}$$

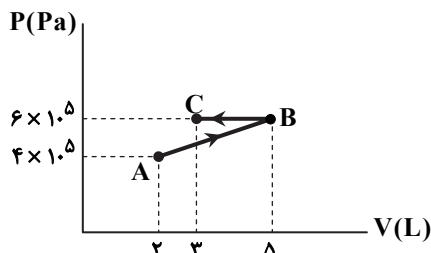
۴۹- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)



اگر فرایند AB در حجم ثابت صورت گیرد باید امتداد نمودار AB از مبدأ بگذرد که این گونه نیست و فرایند AB هم حجم نیست. دو نمودار هم حجم که از نقاط A و B بگذرد را رسم می کنیم؛ شیب هر خط برابر $\frac{nR}{V}$ خواهد بود. بنابراین خطی که شیب بیشتری دارد حجم کمتری خواهد داشت؛ یعنی $V_B < V_A$ است. بنابراین حجم گاز در فرایند AB افزایش یافته است؛ یعنی کار انجام شده روی دستگاه منفی است و دستگاه کار انجام داده است.

به عبارت دیگر کار انجام می دهد. طبق نمودار، چون $T_B > T_A$ است، انرژی درونی افزایش می یابد. طبق قانون اول ترمودینامیک $\Delta U = W + Q$ و با توجه به $\Delta U > 0$ و $W < 0$ ، باید $Q > 0$ باشد، یعنی دستگاه گرما می گیرد.

۵۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)



مساحت سطح زیر نمودار $P-V$ ، برابر کار انجام شده است.

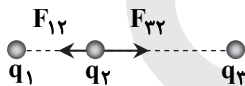
$$W_{AB} = -S_{AB} = -\frac{4 \times 10^5 + 6 \times 10^5}{2} \times (5 - 2) \times 10^{-3} = -1500 \text{ J}$$

$$W_{BC} = +S_{BC} = 6 \times 10^5 \times (5 - 3) \times 10^{-3} = +1200 \text{ J}$$

$$W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC} = -1500 + 1200 = -300 \text{ J}$$

۵۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

برای اینکه بار q_2 در تعادل باشد، باید بارهای q_1 و q_3 هم علامت باشند و چون با این فرض نیروی بین q_1 و q_3 دافعه است، برای تعادل بار q_3 باید نیروی بین q_2 و q_3 جاذبه باشد، بنابراین بارهای q_1 و q_3 هردو منفی هستند. برای تعادل q_2 می توان نوشت:



$$F_{12} = F_{23} \Rightarrow \frac{k|q_1 q_2|}{2.2} = \frac{k|q_2 q_3|}{4.2} \Rightarrow |q_3| = 4|q_1|$$

برای تعادل q_3 می توان نوشت:

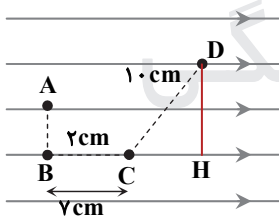


$$F_{23} = F_{13} \Rightarrow k \frac{|q_2 q_3|}{6.2} = k \frac{|q_1 q_3|}{4.2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{4.2} = \frac{1}{6.2}$$

$$\Rightarrow |q_1| = \frac{9}{4} nC \Rightarrow q_1 = -\frac{9}{4} nC$$

$$\Rightarrow |q_3| = 9 nC \Rightarrow q_3 = -9 nC$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)



بزرگی کار میدان در میدان های یکنواخت برابر $|W| = |q|Ed$ است که در آن، d جابه جایی در راستای میدان است.

$$CH = \sqrt{10^2 - 7^2} = 8 \Rightarrow d = BC + CH = 7 + 8 = 15 \text{ cm}$$

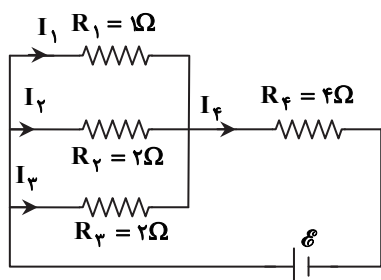
$$\Rightarrow |W| = 10^5 \times \frac{15}{100} \times 2 \times 10^{-6} = 3 \times 10^{-2} \text{ J} = 30 \text{ mJ}$$

با توجه به اینکه نیروی الکتریکی وارد بر ذره خلاف جهت جابه جایی است، پس کار میدان منفی و $W = -30 \text{ mJ}$ است.

۵۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow 6 \times 10^{-12} = 2 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{2 \times 3 \times 10^{-4}}{d} \Rightarrow d = 18 \times 10^{-4} \text{ m} = 1/8 \text{ mm}$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)



در این مدار دو سر مقاومت های R_1 ، R_2 و R_3 دوه دو به هم وصل هستند، پس این سه مقاومت با هم موازی اند و مدار را می توان به صورت روبه رو ساده کرد.

$$V_1 = V_2 = V_3 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

$$\Rightarrow 1 \times I_1 = 2 \times I_2 = 2 I_3 \Rightarrow I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2}$$

$$I_4 = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + \frac{I_1}{2} + \frac{I_1}{2} = 2 I_1 \Rightarrow I_4 = 2 I_1$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{v_{t=5s} + v_{t=10s}}{2} \times 5 = 96 - 6$$

$$\Rightarrow \frac{v_{t=5s} + v_{t=10s}}{2} \times 5 = 90 \Rightarrow v_{t=5s} + v_{t=10s} = 36 \frac{m}{s}$$

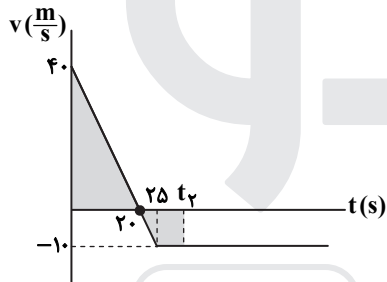
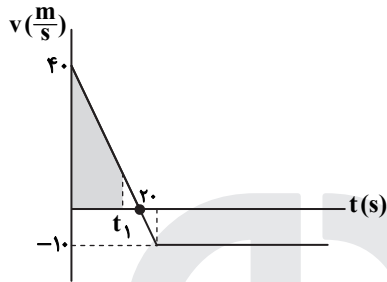
سرعت متحرک هنگام عبور از $x = 96 \text{ m}$ یعنی همان $v_{t=10s}$ که برابر $28 \frac{m}{s}$ است، پس $v_{t=5s}$ هم $8 \frac{m}{s}$ است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t=10s} - v_{t=5s}}{10 - 5} = \frac{28 - 8}{5} = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_2^2 - 8^2 = 2 \times 4 \times (48 - 6)$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 8 \times 42 + 64 = 16(21 + 4) = 16 \times 25 \Rightarrow v_2 = 4 \times 5 = 20 \frac{m}{s}$$

مساحت محصور بین نمودار سرعت- زمان با محور زمان، برابر جابه‌جایی (Δx) است.



بار اول عبور از $x = 500 \text{ m}$ در $t = t_1$ و بار دوم عبور از $x = 500 \text{ m}$ در $t = t_2$ است. توجه: با در نظر داشتن گزینه‌ها نیازی به محاسبه t_1 نیست (بار اول) و فقط t_2 لازم است.

$$500 - 200 = \frac{40 \times 20}{2} - \frac{(t_2 - 20) + (t_2 - 25)}{2} \times 10$$

$$\Rightarrow 100 = \frac{2t_2 - 45}{2} \times 10 \Rightarrow 2t_2 - 45 = 20 \Rightarrow t_2 = 32.5 \text{ s}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 40 \\ x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + (-80) \end{cases}$$

دو متحرک در مکان $x = 160 \text{ m}$ به همدیگر می‌رسند.

$$x_A = t^2 + 40 = 160 \Rightarrow t^2 = 120$$

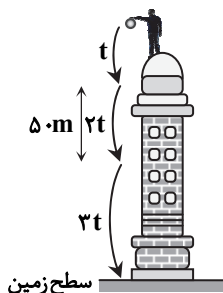
$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 - 80 = \frac{1}{2}a_B \times 120 - 80 = 160 \Rightarrow a_B = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$v_B = a_B t + v_{0B} = 4\sqrt{120} + 0 = 8\sqrt{30} \frac{m}{s}$$

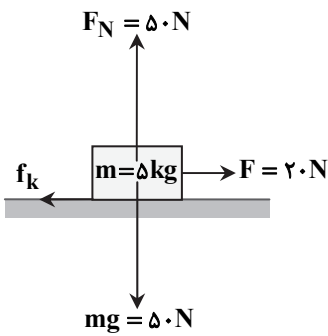
جهت مثبت محور حرکت را رو به پایین در نظر می‌گیریم.

$$y(2t) - y(t) = \frac{1}{2}g(2t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = 50 \Rightarrow \frac{3}{2}gt^2 = 50 \Rightarrow gt^2 = \frac{100}{3} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$y(3t) = \frac{1}{2}g \times (3t)^2 = \frac{9}{2}gt^2 \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} y(3t) = \frac{9}{2} \times \frac{100}{3} = 150 \text{ m}$$



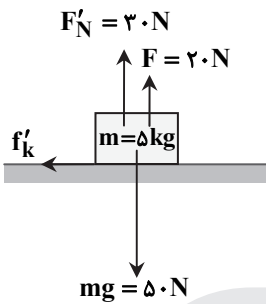
حالت اول:



$$(F_{net})_x = ma_1 \Rightarrow F - f_k = ma_1 \Rightarrow F - \mu_k F_N = ma_1$$

$$\xrightarrow{F_N = mg} 20 - 5 \cdot \mu_k = 5 a_1 \Rightarrow a_1 = 4 - 1 \cdot \mu_k$$

حالت دوم:



$$(F'_{net})_x = ma_2 \Rightarrow 0 - f'_k = ma_2 \Rightarrow -\mu_k F'_N = ma_2 \Rightarrow -\mu_k \times 30 = 5 a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = -6 \mu_k \Rightarrow |a_2| = 6 \mu_k$$

$$|a_2| = 3 a_1 \Rightarrow 6 \mu_k = 3(4 - 1 \cdot \mu_k) \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} \frac{m}{s^2} \text{ و } a_2 = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$v_1 = a_1 t_1 + v_{01} \Rightarrow v_1 = a_1 t_1 = \frac{2}{3} \times 6 = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{0+4}{2} \times 6 = 12 m$$

$$v_2 = a_2 t_2 + v_{02} \Rightarrow 0 = -2 t_2 + 4 \Rightarrow t_2 = 2 s \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{4+0}{2} \times 2 = 4 m$$

$$\Rightarrow \Delta x_{کل} = 12 + 4 = 16 m$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در گردش ماهواره به دور زمین، دوره حرکت ماهواره به جرم آن بستگی ندارد.

$$a_c = g_h \Rightarrow \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} = \sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{GM_e}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\left(R_e + \frac{3}{5} R_e\right)^3}{\left(R_e + \frac{1}{5} R_e\right)^3}} = \sqrt{\left(\frac{8}{6}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)



$$\frac{\Delta T}{T} = 2/5 \Rightarrow T = 2 s$$

در مدت t_1 تا t_2 مسافت طی شده برابر ۶ سانتی متر است.

$$l = 4 + |-2 - (-4)| = 4 + 2 = 6 cm$$

مدت زمان t_1 تا t_2 را به ترتیب روبه‌رو حساب می‌کنیم:

$$t_1 = \frac{T}{4} = 0.5 s$$

$$x = A \cos(\omega t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \xrightarrow{\text{محاسبه } t_2} -2 = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{2} \cdot t_2\right)$$

$$\Rightarrow \cos(\pi t_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \pi t_2 = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \\ \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \checkmark \end{cases} \Rightarrow t_2 = \frac{4}{3} s$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6} s$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{6}{\frac{5}{6}} = \frac{36}{5} = 7.2 \frac{cm}{s}$$

$$\frac{\Delta}{4} T = 0.5 \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{max}} = A\omega \Rightarrow 2.0\pi = A \times 5\pi \Rightarrow A = 0.4 \text{ cm}$$

$$x(t) = A \cos \omega t \Rightarrow x(t) = 0.4 \cos 5\pi t \Rightarrow x\left(\frac{2}{15}\right) = 0.4 \cos\left(5\pi \times \frac{2}{15}\right) = 0.4 \cos \frac{2\pi}{3} = -0.2 \text{ cm}$$

$$F_{\text{net}} = ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 x = -25\pi^2 \times \frac{-0.2}{100} = \frac{2}{4}\pi^2 = \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \\ T &= \frac{\Delta t}{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} = \frac{N_B}{N_A} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1/21}} = \frac{25}{N_A} \Rightarrow \frac{10}{11} = \frac{25}{N_A} \Rightarrow N_A = \frac{275}{10} = 27.5$$

$$\frac{\lambda}{2} = 80 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 160 \text{ cm} = 1.6 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{160}{1.6} = 100 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{100} \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

پس $\Delta t = 7.5 \text{ ms}$ برابر $\frac{3T}{4}$ است. نقطه P ابتدا در وضعیت $y = 0$ است و با توجه به جهت حرکت موج، در حال حرکت به سمت بالا است:

پس در مدت $\frac{3T}{4}$ حرکت‌های زیر را انجام می‌دهد.

$$y = 0 \xrightarrow{\frac{T}{4}} y = A \xrightarrow{\frac{T}{4}} y = 0 \xrightarrow{\frac{T}{4}} y = -A = -4 \text{ mm}$$

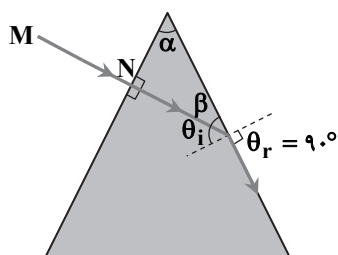
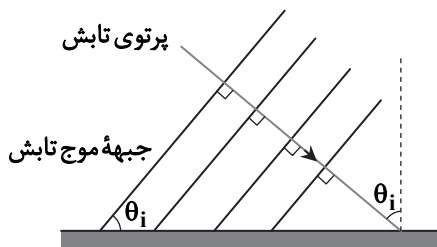
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{100 \times 0.1}{5 \times 10^{-2}}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4 \text{ (شماره هماهنگ)}$$

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f_4 = \frac{4 \times 40}{2 \times 0.1} = 100 \text{ Hz}$$

زاویه میان جبهه موج تخت و سطح آینه با زاویه تابش برابر است: $\theta_i = 50^\circ$

زاویه میان پرتوی تابش و بازتابش برابر $2\theta_i = 100^\circ$ است.



$$\frac{\sin \theta_i}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_i = 30^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \theta_i + \beta = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = \theta_i = 30^\circ$$

دومین حالت برانگیخته، یعنی $n = 3$ و وقتی الکترون در مدار مانای سوم قرار دارد، برای رسیدن به حالت پایه فقط سه نوع فوتون می‌تواند تابش کند (۱ → ۱,۳ → ۲,۲ → ۳) که دو نوع آن در رشته لیمان قرار دارد و در ناحیه فرابنفش است و یک نوع آن مربوط به رشته بالمر و در ناحیه مرئی است.

$$\left. \begin{aligned} hf - W_0 &= K_{\max} \\ \frac{hc}{\lambda} - W_0 &= K_{\max} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(f_1 - \frac{c}{\lambda_2}) = K_{\max_1} - K_{\max_2} \Rightarrow 4/1 \times 10^{-15} \times (1/5 \times 10^{15} - \frac{3 \times 10^8}{2/5 \times 10^{-7}}) = 2 - K_{\max_2}$$

$$\Rightarrow 4/1 \times (1/5 - \frac{3}{2/5}) = 2 - K_{\max_2} \Rightarrow 2 - 4/1 \times (1/5 - 1/2) = K_{\max_2} \Rightarrow K_{\max_2} = 0.77 \text{ eV}$$

A: $\frac{1}{4} N_0$ واپاشیده $\Rightarrow \frac{3}{4} N_0$ باقی مانده $\Rightarrow N = N_0 (\frac{1}{2})^{n_A} \Rightarrow \frac{1}{4} N_0 = N_0 (\frac{1}{2})^{n_A} \Rightarrow n_A = 2$

$t = n_A T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow 300 = 2 T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 150$ سال

B: $\frac{1}{4} N_0$ واپاشیده $\Rightarrow \frac{3}{4} N_0$ باقی مانده $\Rightarrow N = N_0 (\frac{1}{2})^{n_B} \Rightarrow \frac{1}{4} N_0 = N_0 (\frac{1}{2})^{n_B} \Rightarrow n_B = 2$

$t = n_B T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow 300 = 2 T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 150$ سال

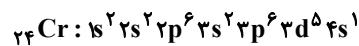
با توجه به اینکه نیمه عمر A برابر ۱۰۰ سال و نیمه عمر B برابر ۱۵۰ سال است، هر ۳۰۰ سال دو نیمه عمر B و سه نیمه عمر A می‌شود، یعنی با گذشت هر ۳۰۰ سال نسبت $\frac{N_B}{N_A}$ دو برابر می‌شود:

$$\left(\frac{N_B}{N_A} = 1 \right), \left(\frac{N_B}{N_A} = 2 \right), \left(\frac{N_B}{N_A} = 4 \right), \left(\frac{N_B}{N_A} = 8 \right)$$

در «سال $t = 900$ » یعنی ۶۰۰ سال دیگر، $\frac{N_B}{N_A}$ برابر ۸ می‌شود.

شیمی

زیرلایه‌هایی که $n+1=5$ دارند، عبارتند از ۳d، ۴p و ۵s که الکترون‌ها ابتدا ۳d را اشغال می‌کنند. نخستین عنصری که آرایش ۳d^۵ دارد، ۲۴Cr است:



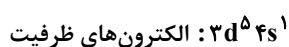
بررسی گزینه‌ها:

(۱) اتم کروم، ۵ زیرلایه و ۲ لایه الکترونی پر شده دارد.

$$\frac{5}{2} = 2.5$$

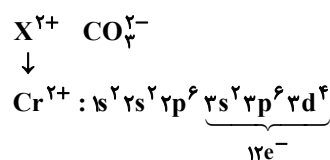
(۲) یون‌های Cr^{3+} و Ga^{3+} برخلاف Sc^{3+} ، به آرایش گاز نجیب نمی‌رسند.

(۳)



$$n+1 = 5(2+2) + (4+0) = 29$$

(۴)



ابتدا جرم اتمی میانگین عنصر M را بر حسب amu حساب می‌کنیم:

$$? \text{ amu} = \frac{1}{8} \times 10^{-23} \text{ g} \times \frac{1 \text{ amu}}{\frac{5}{3} \times 10^{-24} \text{ g}} = 10/8 \text{ amu}$$

حال با استفاده از جرم اتمی میانگین، فراوانی ایزوتوپها مشخص می‌شود:

$$M = M_1 + \frac{F_2}{100} (M_2 - M_1) \Rightarrow 10/8 = 10 + \frac{F_2}{100} \times 1 \Rightarrow F_2 = 80$$

$$\text{کل اتمها} = 5/4 \text{ g M} \times \frac{1 \text{ mol M}}{10/8 \text{ g M}} \times \frac{6 \times 10^{23} \text{ atom}}{1 \text{ mol M}} = 3 \times 10^{23} \text{ atom}$$

$${}^{11}\text{M} = 3 \times 10^{23} \times \frac{80}{100} = 24 \times 10^{22}$$

عبارت‌های اول و دوم درست هستند.

عبارت اول: پایدارترین رادیوایزوتوپ هیدروژن، ${}^3\text{H}$ است که دو نوترون دارد و ${}^1\text{H}$ و ${}^2\text{H}$ ، دو ایزوتوپ پایدار هیدروژن‌اند.

عبارت دوم: در طیف نشری خطی هیدروژن، همانند لیتیم، ۴ خط رنگی وجود دارد.

عبارت سوم: درصد فراوانی ${}^3\text{H}$ برخلاف ایزوتوپ‌های ساختگی، صفر نیست.

عبارت چهارم: ناپایدارترین ایزوتوپ هیدروژن، ${}^4\text{H}$ و پایدارترین ایزوتوپ آن، ${}^1\text{H}$ است که نوترون ندارد. ($4 - 0 = 4$)

۷۹- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۳ شیمی ۲ و فصل ۴ شیمی ۳

این استر، ساده‌ترین استر با ساختار $\text{H}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{O}-\text{CH}_3$ بوده و متیل فورمات (متانوات) نام دارد که الکل سازنده آن، متانول و اسید سازنده آن، فورمیک اسید است.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) درست، متانول الکل چوب است که برای بازیافت شیمیایی P.E.T استفاده می‌شود.

(ب) نادرست، پرکاربردترین اسید، استیک اسید است.

(پ) درست، زیرا هر دو فرمول $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$ دارند ولی استیک اسید برخلاف استر، میان مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند.

(ت) نادرست، متیل فورمات نام دارد، ولی حلال چسب، اتیل استات است.

۸۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۳ شیمی ۱

ابتدا مقدار آب و حل‌شونده را در 500 گرم محلول 40 درصد جرمی در دمای 40°C ، حساب می‌کنیم:

$$500 \text{ g محلول} \xrightarrow{\times \frac{40}{100}} 200 \text{ g Li}_2\text{SO}_4 \Rightarrow 300 \text{ g H}_2\text{O}$$

حال باید ببینیم در دمای 70°C ، در 300 گرم آب حداکثر چند گرم لیتیم سولفات حل می‌شود:

$$\frac{\text{Li}_2\text{SO}_4 \text{ گرم } 25 \text{ حداکثر}}{100 \text{ گرم آب}} = \frac{\text{Li}_2\text{SO}_4 \text{ گرم } x \text{ حداکثر}}{300 \text{ گرم آب}} \Rightarrow x = 75$$

پس به جای 200 گرم لیتیم سولفات، حداکثر 75 گرم از آن حل می‌شود و 125 گرم اضافی آن، رسوب می‌کند.

۸۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱ شیمی ۳

بررسی گزینه‌ها:

(۱) سرعت واکنش فلز با اسید به $[\text{H}^+]$ بستگی دارد و در ظرف (۱)، $[\text{H}^+]$ بیشتری است.

$$[\text{H}^+]_1 = \frac{(10 \times 0/00) \text{ mol}}{0/5 \text{ L}} = 0/2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad [\text{H}^+]_2 = \frac{(2 \times 0/00) \text{ mol}}{0/5 \text{ L}} = 0/04 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

(۲) با توجه به شکل‌ها، از هر دو اسید قبل از یونش، 10 ذره ($0/01$ مول) وجود داشته است و در صورت واکنش کامل هر دو اسید با فلز روی،



(۳)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \% \alpha = 100 \text{ (اسید (۱) به‌طور کامل یونیده شده)} \\ \Rightarrow \frac{100}{20} = 5 \text{ (در اسید (۲)، ۲ ذره از ۱۰ ذره یونیده شده)} \\ \Rightarrow \% \alpha = \frac{2}{10} \times 100 = 20 \end{array} \right.$$

(۴)

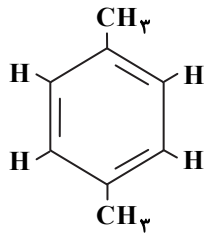
$$\text{pH}_2 = -\log [\text{H}^+]_2 = -\log 4 \times 10^{-3} = 3 - \log 4 = 2/4 \quad [\text{OH}^-]_1 \times [\text{H}^+]_1 = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-]_1 = 5 \times 10^{-13}$$

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

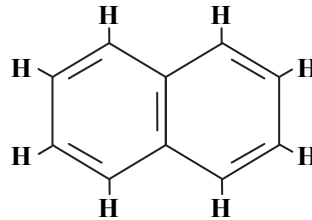
(الف) نادرست، زیرا فرمول مولکولی دو ترکیب متفاوت است.

(ب) نادرست، زیرا پنجمین عضو آلکن‌ها یعنی هگزن با چهارمین عضو سیکلو آلکن‌ها، یعنی سیکلو هگزان ایزومر است و هگزن برخلاف سیکلو هگزان، رنگ قرمز برم را از بین می‌برد.

(پ) درست

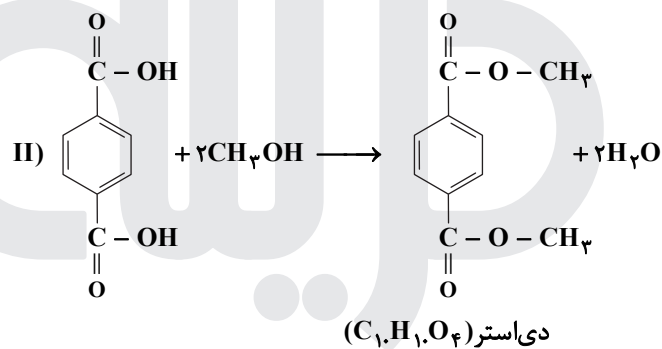
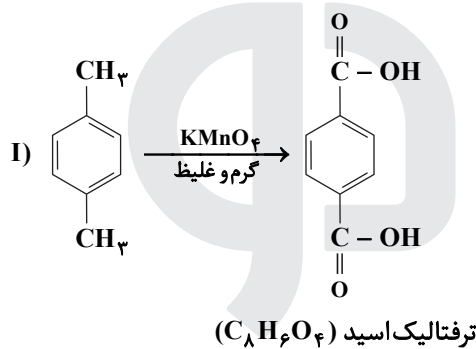
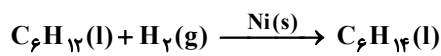


پاراایلن: C_8H_{10}



نفتالن: $C_{10}H_8$

(ت) درست، ۱- هگزن و هگزان هر دو مایع بی‌رنگ‌اند.



(۱) نادرست، B دی‌استری با فرمول $C_{10}H_{10}O_4$ است.

(۲) درست

$$\frac{\text{مجموع شماره اتم‌ها در } C_8H_6O_4}{\text{مجموع شماره اتم‌ها در } C_{10}H_{10}O_4} = \frac{8+6+4}{10+10+4} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0.75$$

(۳) نادرست، واکنش (II) خنثی شدن محسوب نمی‌شود، زیرا متانول ترکیبی خنثی است.

(۴) نادرست، از آنجا که استرها برخلاف الکل‌ها و اسیدها پیوند هیدروژنی تشکیل نمی‌دهند، قطبیت کمتری دارند و در آب کمتر حل می‌شوند.

ابتدا غلظت مولی HA را حساب می‌کنیم:

$$M_{HA} = 25 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{20 \text{ g}} \times \frac{1}{10 \text{ L}} = 0.125$$



حل شده	M	.	.
یونش	-x	x	x
تعادلی	M-x	x	x

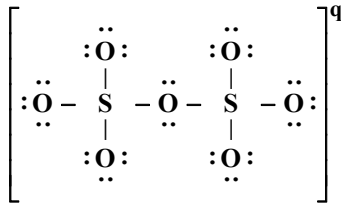
اختلاف غلظت A^- با HA یونیده نشده:

$$M-x-x = M-2x \Rightarrow 0.125 - 2x = 0.075 \Rightarrow 0.05 = 2x \Rightarrow x = 0.025$$

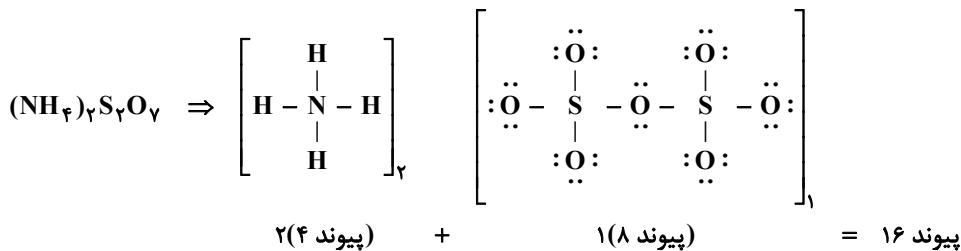
$$K_a = \frac{x \times x}{M-x} = \frac{0.025 \times 0.025}{0.125 - 0.025} = 6/25 \times 10^{-3}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(25 \times 10^{-3}) = 3 - \log 25 = 1/6$$

ابتدا باید بار یون دی سولفات را به دست آوریم:



$$q = (\text{مجموع شمار الکترون های پیوندی و ناپیوندی گونه}) - (\text{مجموع شمار الکترون های ظرفیتی اتم ها}) \\ = [2(6) + 7(6)] - [56] = 54 - 56 = -2$$



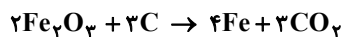
ابتدا آهن تولید شده از واکنش ترمیت را به دست می آوریم:



$$? \text{ mol Fe ترمیت} = 5 / 4 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{2 \text{ mol Fe}}{1 \text{ mol Al}} = 0.2 \text{ mol Fe}$$

با توجه به این ۰/۲ مول آهن، دو برابر آهن حاصل از واکنش استخراج فولاد مبارکه است، در واکنش استخراج فولاد مبارکه ۰/۱ مول آهن تولید شده است، ابتدا مقدار نظری آهن این واکنش را حساب می کنیم:

$$\frac{1}{100} = \frac{\text{عملی mol Fe}}{\text{نظری mol Fe}} \times 100 \Rightarrow \text{mol Fe نظری} = 0.2 \text{ mol}$$



$$? \text{ g C} = 0.2 \text{ mol Fe} \times \frac{3 \text{ mol C}}{4 \text{ mol Fe}} \times \frac{12 \text{ g C}}{1 \text{ mol C}} = 1.8 \text{ g}$$

A, B, C و D به ترتیب نفت کوره، گازوئیل، نفت سفید و خوراک پتروشیمی هستند.

(۱) درست، زیرا اندازه مولکول ها در گازوئیل بزرگ تر از نفت سفید است و نیروی بین ذره های آن قوی تر است.
 (۲) درست، درصد نفت کوره در نفت سنگین بیشتر از نفت سبک بوده و درصد سایر اجزا در نفت سبک نسبت به نفت سنگین بیشتر است.
 (۳) نادرست، در نفت برنت دریای شمال نسبت به نفت کشورهای عربی و ایران، خوراک پتروشیمی یعنی جز (D) بیشتری وجود دارد، به همین دلیل قیمت آن بالاتر است.

(۴) درست، در برج تقطیر نفت خام، مواد فرارتر مثل خوراک پتروشیمی از قسمت های بالاتر و نفت کوره از قسمت های پایین تر جدا می شوند.



عبارت اول: درست، زیرا ضریب هر ۳ فرآورده یکسان است.

عبارت دوم: نادرست، با گذشت زمان سرعت تولید CO_2 و شیب نمودار آن، کاهش می یابد.

عبارت سوم: درست، با توجه به اینکه از آغاز واکنش تا ثانیه ۲۰، جرم مخلوط واکنش از ۶۶/۲۶ گرم به ۶۴/۵۵ گرم رسیده و ۱/۷۱ گرم کاهش یافته، می توان دریافت که ۱/۷۱ گرم CO_2 تولید شده است.

عبارت چهارم: درست، با توجه به اینکه جرم مخلوط واکنش از لحظه ۳۰ به بعد تغییر نکرده است، پایان واکنش لحظه $t = 30 \text{ s}$ است.

$$B = 66 / 26 - 1 / 76 = 64 / 55$$

$$\bar{R}(\text{CO}_2) = \frac{1 / 76}{30} = 0.08 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1} \Rightarrow \bar{R}(\text{HCl}) = 2\bar{R}(\text{CO}_2) = 0.16 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

با توجه به واکنش داده شده می توان دریافت که اگر جرم اولیه $(NH_4)_2Cr_2O_7$ ، m گرم باشد، گازهای N_2 و H_2O از مخلوط اولیه جدا می شوند و بقیه مواد به عنوان جامد باقی مانده هستند، پس:

مجموع جرم گازهای H_2O و N_2 - جرم اولیه $(NH_4)_2Cr_2O_7$ = جرم جامد باقی مانده I

ابتدا جرم H_2O و N_2 را بر حسب m می یابیم، از m گرم اولیه ۸۰ درصد آن خالص است که ۵۰ درصد آن مصرف شده:

$$g \text{ مصرف شده } (NH_4)_2Cr_2O_7 = m \times \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} = 0.4m$$

$$N_2 \text{ و } H_2O \text{ جرم مجموع} = 0.4m \text{ g } (NH_4)_2Cr_2O_7 \times \frac{1 \text{ mol } (NH_4)_2Cr_2O_7}{252 \text{ g } (NH_4)_2Cr_2O_7} \times \frac{(1 \times 28) \text{ g} + (4 \times 18) \text{ g}}{1 \text{ mol } (NH_4)_2Cr_2O_7} = \frac{4 \cdot m}{252} = \frac{1 \cdot m}{63}$$

$$53 = m - \frac{1 \cdot m}{63} \Rightarrow 53 = \frac{63m - 1 \cdot m}{63} \Rightarrow m = 63 \text{ g}$$

- عبارت اول: درست، جرم مولی پلی اتن، به مقدار مول Al و مول Ti بستگی دارد.
- عبارت دوم: نادرست، واکنش در دما و فشار بالا انجام می شود.
- عبارت سوم: نادرست، چگالی پلی اتن شاخه دار و بی شاخه، متفاوت است.
- عبارت چهارم: درست

■ درست، زیرا هر دو ترکیب، پیوند (C=C) دارند.

■ درست



■ درست

■ نادرست، فرمول مولکولی A ($C_{10}H_{18}O$) و فرمول مولکولی B ($C_{10}H_{12}O$) است، پس ایزومر نیستند.

■ نادرست، ترکیب A در واکنش با دو مول Br_2 ، فرآورده ای با فرمول $C_{10}H_{18}Br_2O$ را ایجاد می کنند.

ابتدا ارزش سوختی هر دو ماده را حساب می کنیم:

$$(C_7H_4) : \text{ ارزش سوختی اتن} = \frac{1400}{28} = 50 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$$

$$(C_7H_6) : \text{ ارزش سوختی اتان} = \frac{1560}{3} = 52 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$$

جرم مخلوط اولیه را ۱ گرم در نظر می گیریم که انرژی حاصل از سوختن آن $50/4 \text{ kJ}$ است:

$$1 = x \text{ گرم اتن} + y \text{ گرم اتان}$$

$$50/4 = 50x + 52y \text{ انرژی اتان}$$

$$52x + 52y = 52$$

$$- \quad 50x + 52y = 50/4$$

$$2x = 1/6 \Rightarrow x = 0.083 \text{ g}$$

$$\text{درصد اتن} = \frac{\text{اتن g}}{\text{کل g}} \times 100 = \frac{0.083}{1} \times 100 = 8.3\%$$

عبارت های اول و دوم درست هستند.

بررسی عبارت های نادرست:

عبارت سوم: گرمای مبادله شده در فشار ثابت، همان ΔH است که در دمای ثابت به طور عمده به انرژی پتانسیل مواد بستگی دارد نه به انرژی گرمایی!

عبارت چهارم: در دمای ثابت نیز بین سامانه و محیط گرما مبادله می شود و ΔH برابر صفر نیست.

جرم اسید را x گرم در نظر می‌گیریم:

$$\text{محلول} = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{x+49}{1/1} = \frac{x}{1/1} \Rightarrow V = \frac{x+49}{1/1}$$

$$\text{مول استیک اسید (CH}_3\text{COOH)} = \frac{x}{60}$$

$$M = \frac{\text{mol}}{V(L)} \Rightarrow 2 = \frac{\frac{x}{60}}{\left(\frac{x+49}{1/1}\right) \times 10^{-3}} \Rightarrow 2x + 98 = \frac{55x}{3} \Rightarrow 98 = \frac{49x}{3} \Rightarrow x = 6g$$

راه حل دوم:

$$\frac{1/1 \times \text{درصد جرمی } 10 \times \text{چگالی} \times \text{درصد جرمی } 10 \times \text{غلظت مولی}}{\text{جرم مولی}} = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1/1 \times \text{درصد جرمی } 10 \times 10 \times \text{غلظت مولی}}{60}$$

$$\Rightarrow \text{درصد جرمی} = \frac{12}{1/1} = \frac{x}{49+x} \times 100 = \frac{12}{1/1} \Rightarrow x = 6g \text{ CH}_3\text{COOH}$$

با اسمز نمی‌توان آب را تصفیه کرد.

خریشه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی