

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آزمون آزمایشی ۲ تیر ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس [gozine2.ir](http://gozine2.ir) شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

مرحله ۱۸

دفترچه شماره ۱

# ریاضیات

## ۷.

زمان پیشنهادی

۱- مجموعه اعداد طبیعی را به گونه‌ای دسته‌بندی کرده‌ایم که هر دسته به عددی مربع کامل ختم شود:

$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$

مجموع اعداد دسته دهم کدام است؟

۱۷۲۹ (۴)                      ۱۷۱۰ (۳)                      ۱۶۸۹ (۲)                      ۱۵۴۷ (۱)

۲- مقدار عبارت گویای  $A = \frac{a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5}{a^2 + ab + b^2}$  به ازای  $a = 5$  و  $b = -4$  کدام است؟

۸۱ (۴)                      ۶۱ (۳)                      ۴۱ (۲)                      ۲۱ (۱)

۳- اگر مجموعه جواب نامعادله  $3 < \frac{x-1}{x+3} < -1$  به صورت  $\mathbb{R} - [a, b]$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

-۱۰ (۴)                      -۸ (۳)                      -۶ (۲)                      -۴ (۱)

۴- به ازای کدام مقدار  $k$  معادله  $\sqrt{2\sqrt{x-5} - x + 4} = x + k$  تنها یک جواب دارد؟

۵ (۴)                      -۵ (۳)                      ۶ (۲)                      -۶ (۱)

۵- اگر  $m = \log_9 75$  باشد، حاصل  $\log_{27} 45$  کدام است؟

$\frac{m+11}{6}$  (۴)                       $\frac{m+2}{6}$  (۳)                       $\frac{2m+11}{6}$  (۲)                       $\frac{2m+3}{6}$  (۱)

۶- دو سهمی  $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$  و  $g(x) = ax^2 + 2ax + c$  از رأس یکدیگر عبور می‌کنند. مقدار  $(f+g)(3)$  کدام است؟

۱۴ (۴)                      ۱۲ (۳)                      ۲۰ (۲)                      ۲۲ (۱)

۷- اگر  $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{\frac{3}{4-x^2}}$ ، آنگاه دامنه تابع  $g \circ f$  شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)                      ۳ (۳)                      ۲ (۲)                      ۵ (۱)

۸- اگر  $f(x) = \sqrt{3-x} - 1$ ، آنگاه معادله  $\frac{2}{x} + 3 = (f \circ f^{-1})(x)$  چند جواب دارد؟

صفر (۴)                      بی‌شمار (۳)                      ۲ (۲)                      ۱ (۱)

۹- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + \sqrt{-3x}}{x^2 - x + \frac{36}{x}}$  کدام است؟

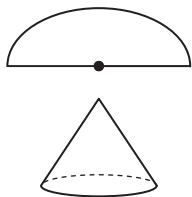
$\frac{1}{44}$  (۴)                       $-\frac{1}{22}$  (۳)                       $\frac{5}{42}$  (۲)                       $-\frac{5}{66}$  (۱)

۱۰- اگر تابع  $f(x) = \frac{x\sqrt{ax^2 - 24x + c}}{(x+3)|x-3|}$  فقط دارای دو مجانب  $y = 2$  و  $x = -3$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  کدام است؟

-۳ (۴)                      ۳ (۳)                      -۱ (۲)                      ۱ (۱)

محل انجام محاسبات

۱۱- اگر توسط یک نیم‌دایره با شعاع دلخواه یک مخروط بسازیم، ارتفاع مخروط چند برابر شعاع قاعده آن مخروط است؟



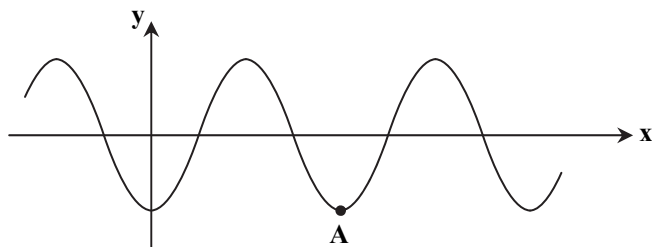
(۱)  $\sqrt{2}$

(۲) ۲

(۳)  $\sqrt{3}$

(۴) ۳

۱۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \sin(\pi(x + \frac{1}{4})) \times \sin(\pi(x - \frac{1}{4}))$  است. مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟



(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴)  $-\frac{3}{2}$

۱۳- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cot^2 x = \sin x + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۵

۱۴- مقدار مشتق تابع  $y = \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}$  به ازای  $x = \frac{5\pi}{36}$  کدام است؟

(۴) ۴

(۳)  $\frac{5}{3}$

(۲) ۱۲

(۱)  $\frac{4}{3}$

۱۵- در تابع با ضابطه  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی x از عدد ۱ به  $1+h$  تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در  $x = 2$  است. مقدار h کدام است؟

(۴)  $\frac{5}{2}$

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱)  $\frac{3}{2}$

۱۶- در تابع  $f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x}$  نقطه بحرانی با طول منفی چه نقطه‌ای است؟

(۴) اکستریم مطلق

(۳) عطف

(۲) مینیمم نسبی

(۱) ماکزیمم نسبی

۱۷- اگر نقطه‌ای به طول  $\frac{7\pi}{12}$  نقطه عطف تابع  $f(x) = ax^2 + \sin(2x)$  باشد، مقدار a کدام است؟

(۴) ۴

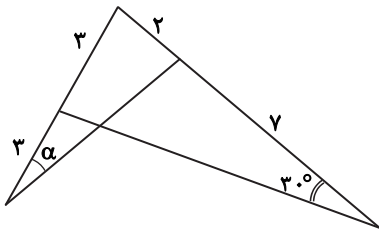
(۳) -۱

(۲) -۲

(۱) ۱

محل انجام محاسبات

۱۸- در شکل زیر با توجه به اندازه پاره‌خطها، زاویه  $\alpha$  کدام است؟

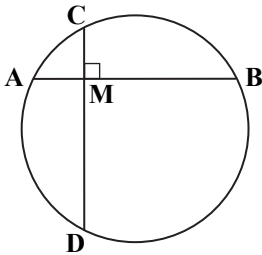


- (۱)  $15^\circ$
- (۲)  $30^\circ$
- (۳)  $20^\circ$
- (۴)  $45^\circ$

۱۹- در یک دوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل می‌کند، مساحت آن را به نسبت ۵ به ۷ تقسیم می‌کند، نسبت قاعده‌های دوزنقه کدام است؟

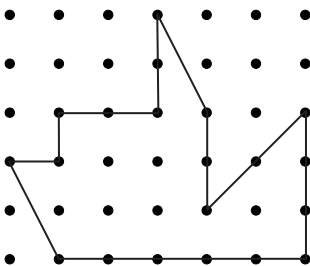
- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{2}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{3}$
- (۴)  $\frac{5}{7}$

۲۰- در شکل زیر  $AB$  و  $CD$  به طول‌های ۸ برهم عمودند. اگر  $MA = MC = 2$  باشد، قطر دایره کدام است؟



- (۱)  $2\sqrt{5}$
- (۲)  $\sqrt{5}$
- (۳)  $4\sqrt{5}$
- (۴)  $\sqrt{10}$

۲۱- در نقاط شبکه‌ای شکل زیر، زمینی داریم که می‌خواهیم با کمک تبدیل هندسی مناسب، بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع، مساحت آن را افزایش دهیم. مساحت زمین جدید کدام است؟



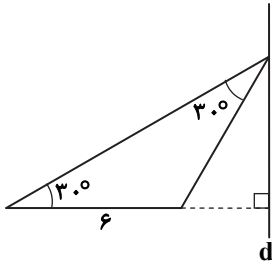
- (۱) ۲۰
- (۲) ۲۲
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲۶

۲۲- در چهارضلعی  $ABCD$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $\hat{C} = 135^\circ$  و  $AB = AD = 6$ . طول قطر  $AC$  کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

۲۲- در شکل زیر، حجم حاصل از دوران مثلث حول خط  $d$  کدام است؟



(۱)  $56\sqrt{3}\pi$

(۲)  $48\pi$

(۳)  $72\pi$

(۴)  $72\sqrt{3}\pi$

۲۴- اگر از نقطه  $A(2, 3)$  مماسی بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  رسم کنیم، کدام نقطه روی این خط مماس قرار دارد؟

(۴)  $(5, 0)$

(۳)  $(4, 2)$

(۲)  $(6, 0)$

(۱)  $(3, 2)$

۲۵- مجموع درایه‌های ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

(۴)  $4040$

(۳)  $5050$

(۲)  $4042$

(۱)  $5052$

۲۶- اگر  $2A = \begin{bmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $||A|A|A|$  کدام است؟

(۴)  $2^7$

(۳)  $2^6$

(۲)  $2^5$

(۱)  $2^4$

۲۷-  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار با طول ۴ هستند که با یکدیگر زاویه  $30^\circ$  می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای  $\vec{a} - 2\vec{b}$  و  $3\vec{a} + 2\vec{b}$  ساخته می‌شود کدام است؟

(۴)  $36$

(۳)  $32$

(۲)  $24$

(۱)  $20$

۲۸- یک پرتو نور در راستای خط  $y = 4$  بر سهمی  $y^2 = 16x$  می‌تابد. این پرتو، بعد از دوبار بازتابش در راستای کدام خط باز می‌گردد؟

(۴)  $y = -16$

(۳)  $y = -12$

(۲)  $y = -8$

(۱)  $y = -4$

## ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

۲۹- اگر هر دو گزاره  $(p \vee q) \Rightarrow r$  و  $q \Rightarrow (p \vee r)$  نادرست باشند، آنگاه ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

(۴)  $q \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r)$

(۳)  $(p \wedge q) \Rightarrow r$

(۲)  $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$

(۱)  $(q \vee r) \Rightarrow p$

۳۰- کدام گزینه نادرست است؟

(۲)  $A \subseteq B \Rightarrow B - A = B$

(۱)  $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

(۴)  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$

(۳)  $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

محل انجام محاسبات

۳۱- عددی به تصادف از مجموعه  $\{201, 202, 203, \dots, 500\}$  انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۶ بخش پذیر است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$      
  (۲)  $\frac{1}{6}$      
  (۳)  $\frac{1}{12}$      
  (۴)  $\frac{1}{4}$

۳۲- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد در فضای نمونه‌ای  $S$  بوده و داشته باشیم  $P(A \cup B) = 0.75$ ،  $P(A \cup B') = 0.8$  و  $P(A' \cup B) = 0.65$ ، آنگاه با کدام احتمال حداقل یکی از پیشامدهای  $A$  یا  $B$  رخ می‌دهد؟

- (۱)  $0.65$      
  (۲)  $0.8$      
  (۳)  $0.75$      
  (۴)  $0.5$

۳۳- اگر داده‌های ۱۲، ۷، ۱۵، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۴، ۱۱، ۷، ۹، ۱۰، ۱۰، ۱۰ را با نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم، واریانس داده‌های داخل جعبه تقریباً چقدر است؟

- (۱)  $1/2$      
  (۲)  $1/8$      
  (۳)  $1/5$      
  (۴)  $1/6$

۳۴- اگر  $a$ ، کوچک‌ترین جواب طبیعی دو رقمی معادله هم‌نهمستی  $3^{11}x \equiv 1^{11} (135792468)$  باشد، باقی‌مانده تقسیم  $a^n$  بر ۹ به ازای مقادیر طبیعی  $n$ ، چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱     
  (۲) ۲     
  (۳) ۳     
  (۴) ۴

۳۵- در تقسیم عدد ۶۸۳ بر عدد طبیعی  $b$ ، خارج‌قسمت برابر ۱۷ است. رقم یکان مجموع مقادیر ممکن برای مقسوم‌علیه این تقسیم، کدام است؟

- (۱) ۴     
  (۲) ۷     
  (۳) ۵     
  (۴) ۶

۳۶- با مجموعه رئوس  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  چند گراف ساده به اندازه ۶ می‌توان ساخت به طوری که  $|N_G[v_6]| = 5$  باشد؟

- (۱) ۲۰۰     
  (۲) ۲۱۵     
  (۳) ۲۲۵     
  (۴) ۲۳۵

۳۷- در یک گراف ۳-منتظم مرتبه  $n$ ، داریم:  $\gamma = 5$ . چه تعداد از اعضای مجموعه  $\{16, 17, \dots, 24\}$  می‌تواند مقدار  $n$  باشد؟

- (۱) ۱     
  (۲) ۲     
  (۳) ۳     
  (۴) ۴

۳۸- در نوشتن جایگشت‌های مختلف حروف کلمه **PRESSURE**، در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار گرفته و حروف غیریکسان هم کنار هم هستند؟

- (۱) ۲۴     
  (۲) ۴۸     
  (۳) ۹۶     
  (۴) ۱۲۰

۳۹- اگر دو مربع لاتین زیر، متعامد باشند، مقدار  $x + y + z$  کدام است؟

- (۱) ۶

- (۲) ۷

- (۳) ۸

- (۴) ۵

	۱	
۳		
	۳	

		۱
x	y	
	z	

۴۰- در رنگ‌آمیزی هریک از یال‌های گراف کامل مرتبه ۸ با رنگ‌های آبی، قرمز و سبز حداقل  $m$  یال هم‌رنگ شده‌اند، کمترین مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) ۷     
  (۲) ۸     
  (۳) ۹     
  (۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

گزینه دو



داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آزمون آزمایشی ۲ تیر ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسشها: ۶۵		مدت پاسخ گویی: ۷۵ دقیقه		

همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس [gozineh2.ir](http://gozineh2.ir) شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

مرحله ۱۸

دفترچه شماره ۲

۴۱- آزمایشگری در تکرار یک آزمایش برای اندازه‌گیری طول یک جسم به کمک یک خط‌کش به نتایج زیر رسیده است:

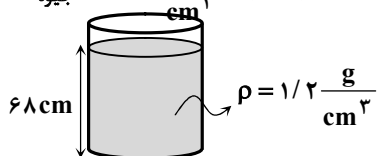
۱۰/۱cm , ۹/۹cm , ۱۰/۲cm , ۸/۴cm , ۱۰/۲cm , ۱۰/۰cm

نتیجه این اندازه‌گیری باید به چه صورت گزارش شود؟

۱۰/۲cm (۱)      ۱۰/۱cm (۲)      ۱۰/۰cm (۳)      ۹/۸cm (۴)

۴۲- مطابق شکل، مایعی با چگالی  $\rho = 1/2 \frac{g}{cm^3}$  ظرف استوانه‌ای شکلی را تا ارتفاع ۶۸cm پر کرده است. اگر فشار هوای محیط ۶۴cmHg

باشد، برای آنکه فشار کل در کف ظرف را ۲ درصد کاهش دهیم، تقریباً چند سانتی‌متر از ارتفاع مایع را باید کم کنیم؟ ( $\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{g}{cm^3}$ )



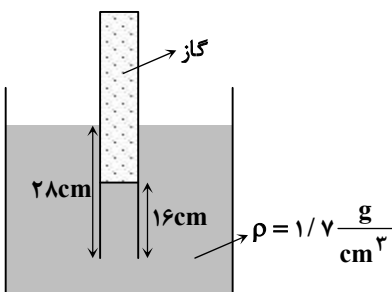
۱۶ (۱)

۴۸ (۲)

۵۲ (۳)

۶۴ (۴)

۴۳- در شکل روبه‌رو، فشار هوای محیط ۷۶cmHg است. فشار گاز محبوس درون لوله چند سانتی‌متر جیوه است؟



( $\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{g}{cm^3}$  و  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )

۷۷ (۱)

۷۷/۵ (۲)

۷۸ (۳)

۷۸/۵ (۴)

۴۴- بالونی به جرم ۲۰۰kg با تندی ثابت  $2 \frac{m}{s}$  به‌طور قائم به‌طرف آسمان در حرکت است. اگر نیروی متوسط مقاومت هوا بر بالون، به‌سمت زمین و

برابر با ۴۰۰N باشد، توان متوسط نیروی بالابرنده بالون چند کیلووات است؟ ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )

۶/۴ (۴)

۴/۸ (۳)

۳/۲ (۲)

۱/۶ (۱)

۴۵- از پایین یک سطح شیب‌دار با زاویه  $37^\circ$  نسبت به افق، یک وزنه به جرم ۵ کیلوگرم را با تندی  $10 \frac{m}{s}$  روی سطح به‌طرف بالا پرتاب می‌کنیم.

اگر وزنه حداکثر مسافت ۵ متر را در طول سطح بالا برود و مجدداً به محل پرتاب برگردد، در بازگشت به نقطه شروع، تندی آن چند متر بر ثانیه

است؟ ( $\sin 37^\circ = 0/6$  و  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )

$2\sqrt{5}$  (۴)

$5\sqrt{2}$  (۳)

$4\sqrt{2}$  (۲)

$4\sqrt{5}$  (۱)

۴۶- دمای یک میله فلزی را از  $-20^\circ C$  به  $100^\circ C$  می‌رسانیم. اگر در این مدت طول میله ۵mm افزایش یافته باشد، در چه دمایی طول میله

۳mm نسبت به حالت اولیه افزایش یافته است؟

$52^\circ C$  (۴)

$72^\circ C$  (۳)

$48^\circ C$  (۲)

$68^\circ C$  (۱)

محل انجام محاسبات

۴۷- در چاله کوچکی مقداری آب  $0^{\circ}\text{C}$  قرار دارد. اگر بر اثر تبخیر سطحی مقداری از آب تبخیر شود و بقیه آن یخ ببندد، تقریباً چند درصد آب اولیه یخ می‌زند؟ ( $L_V = 2490 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$  و  $L_F = 332 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$  و فرض کنید تمام گرمای لازم برای تبخیر سطحی از آب گرفته شده است).

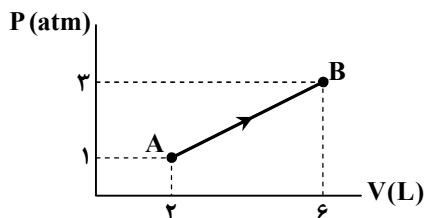
۸۸ (۴)

۸۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۴۸- شکل زیر، نمودار  $P-V$  فرایند ترمودینامیکی یک گاز کامل را نشان می‌دهد. اگر انرژی درونی گاز در نقطه A برابر  $300\text{J}$  باشد، گرمای داده شده به گاز در فرایند AB کدام خواهد بود؟



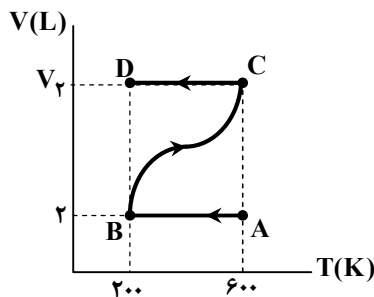
۱۲۰۰ J (۱)

۱۶۰۰ J (۲)

۲۴۰۰ J (۳)

۳۲۰۰ J (۴)

۴۹- مطابق شکل، مقداری گاز کامل (آرمانی) فرایندهایی را در مسیر ABCD طی می‌کند. اگر انرژی درونی گاز در فرایند AB، به اندازه  $4800\text{J}$  کاهش یابد، گاز در فرایند CD چند ژول گرما از دست داده است؟



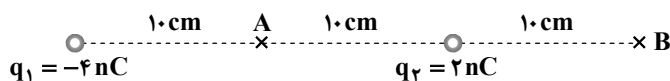
۲۴۰۰ (۱)

۳۶۰۰ (۲)

۴۸۰۰ (۳)

۵۴۰۰ (۴)

۵۰- مطابق شکل، دو بار نقطه‌ای  $q_1$  و  $q_2$  روی یک خط راست قرار دارند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه A چند برابر بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه B است؟ ( $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$ )



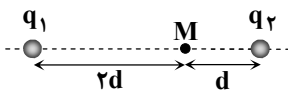
$\frac{13}{17}$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)

$\frac{11}{9}$  (۴)

$\frac{27}{7}$  (۳)

۵۱- در شکل روبه‌رو میدان الکتریکی برآیند در نقطه M برابر  $\vec{E}$  است. اگر بدون تغییر  $q_2$  مقدار  $q_1$  را ۵ برابر کنیم، میدان در نقطه M برابر  $3\vec{E}$  می‌شود. نسبت  $\frac{q_2}{q_1}$  کدام است؟



$-\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

$-\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

محل انجام محاسبات

۵۲- در خازنی با ظرفیت  $10\mu F$  فاصله بین صفحات برابر  $2\text{ cm}$  است. اگر بار ذخیره شده در این خازن  $50\mu C$  باشد، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات خازن چند نیوتون بر کولن است؟

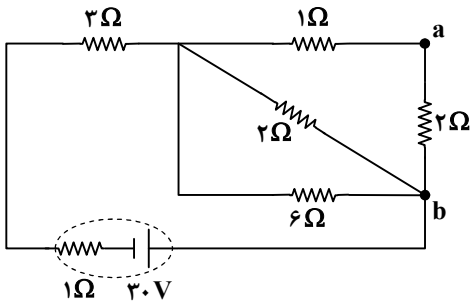
۱۰۰۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۲۵۰ (۲)

۲۵۰۰ (۱)

۵۳- در مدار روبه‌رو، اختلاف پتانسیل دو نقطه  $a$  و  $b$  چند ولت است؟



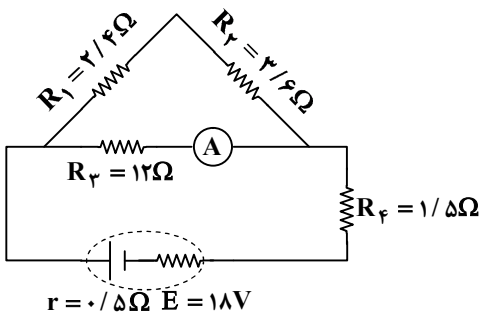
۱/۵ (۱)

۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۵۴- در مدار شکل روبه‌رو، آمپرسنج آرمانی چه عددی را نشان می‌دهد؟



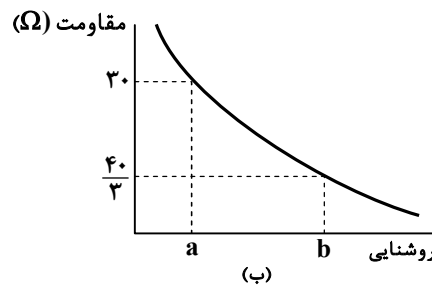
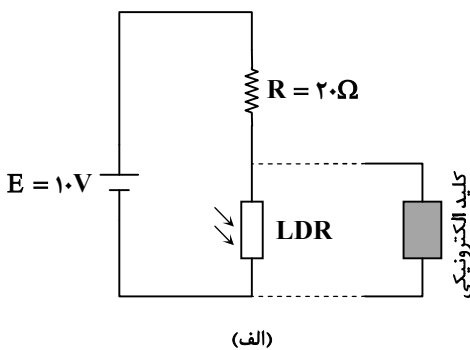
۱A (۱)

۲A (۲)

۳A (۳)

۴A (۴)

۵۵- در مدار شکل (الف) حداقل ولتاژ کلید الکترونیکی باید ۶ ولت باشد تا کلید فعال شود. اگر نمودار مقاومت LDR برحسب روشنایی به صورت شکل (ب) باشد، به ازای کدام محدوده روشنایی کلید الکترونیکی قطعاً فعال می‌شود؟ (مقاومت کلید بسیار زیاد و جریان عبوری از آن ناچیز است).



(۱) روشنایی بیشتر از  $a$  باشد.

(۲) روشنایی کمتر از  $a$  باشد.

(۳) روشنایی بیشتر از  $b$  باشد.

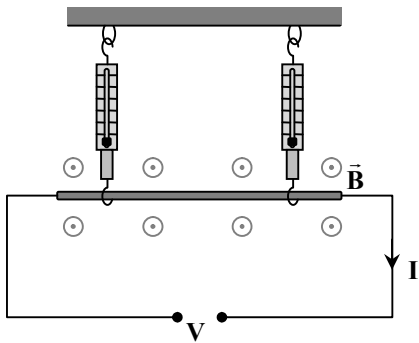
(۴) روشنایی کمتر از  $b$  باشد.

محل انجام محاسبات

دفترچه شماره ۲- آزمون اختصاصی ۲ تیر ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۰۱

۵۶- مطابق شکل از سیمی به طول  $40\text{ cm}$  که به طور افقی درون یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی  $10^{-2}\text{ T}$  قرار دارد، جریان  $2\text{ A}$  در جهت نشان داده شده عبور می‌کند. اگر جرم سیم  $5\text{ g}$  باشد، عددی که هر کدام از نیروسنج‌ها نشان می‌دهند، چند میلی‌نیوتون است؟ (نیروسنج‌ها مشابه، جرم سیم‌های رابط ناچیز و  $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  فرض شود).



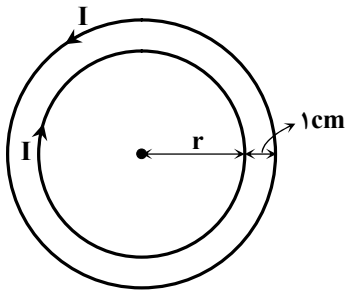
(۱) ۲/۱

(۲) ۲/۹

(۳) ۲۱

(۴) ۲۹

۵۷- از دو حلقه هم‌مرکز جریان‌های یکسان  $I = 6\text{ A}$  مطابق شکل، عبور می‌کند. اگر اندازه میدان مغناطیسی برابری در مرکز حلقه‌ها  $\pi \times 10^{-5}\text{ T}$  باشد، شعاع حلقه کوچک ( $r$ ) چند سانتی‌متر است؟ ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$ )



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۵۸- مساحت سطح یک حلقه که درون میدان مغناطیسی با بزرگی  $3\text{ T}$  قرار دارد، با آهنگ  $0.2\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  افزایش می‌یابد. چنانچه زاویه بین خطوط میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه برابر  $60^\circ$  باشد، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در یک بازه زمانی معین، چند میلی‌ولت است؟

(۴)  $3\sqrt{3}$

(۳) ۳

(۲)  $6\sqrt{3}$

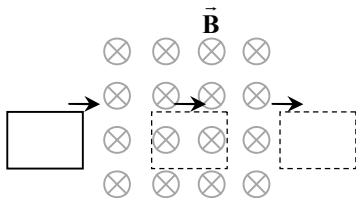
(۱) ۶

۵۹- مطابق شکل، حلقه‌ای مربعی با سرعت ثابت وارد ناحیه‌ای می‌شود که دارای میدان مغناطیسی یکنواخت  $B$  است و سپس از آن خارج می‌شود. در کدام یک از زمان‌های زیر، در حلقه نیروی محرکه القا می‌شود؟

(الف) مدت زمانی که حلقه وارد میدان می‌شود.

(ب) مدت زمانی که تمام حلقه درون میدان بوده و درون میدان حرکت می‌کند.

(پ) مدت زمانی که حلقه از میدان خارج می‌شود.



(۱) الف - ب

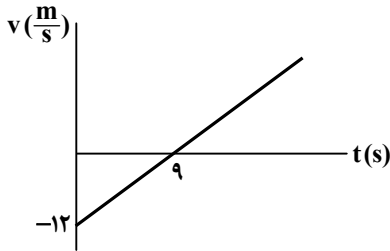
(۲) الف - پ

(۳) ب - پ

(۴) الف - ب - پ

محل انجام محاسبات

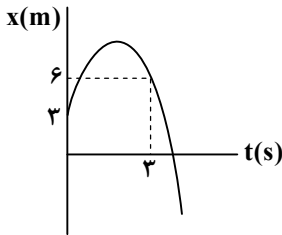
۶۰- نمودار سرعت- زمان در یک حرکت بر خط راست مطابق شکل روبه‌رو است. متحرک در  $t = 3s$  از نقطه  $x = 10m$  می‌گذرد. در چه لحظه‌ای متحرک مجدداً از همان نقطه خواهد گذشت؟



- (۱)  $t = 15s$
- (۲)  $t = 12s$
- (۳)  $t = 18s$

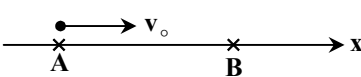
(۴) متحرک هیچ‌گاه به نقطه A برنمی‌گردد.

۶۱- نمودار مکان- زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت سهمی و مطابق شکل است. اگر بزرگی شیب خط مماس بر نمودار در لحظه  $t = 3s$ ، برابر ۴ واحد SI باشد، ذره در لحظه  $t = 9s$  در چند متری مبدأ مختصات قرار دارد؟



- (۱) ۵۸
- (۲) ۶۸
- (۳) ۷۸
- (۴) ۹۸

۶۲- مطابق شکل متحرکی از نقطه A با سرعت اولیه  $v_0$  به صورت کندشونده با شتاب ثابت a به حرکت درمی‌آید. اگر متحرک در لحظه‌های  $t_1 = 3s$  و  $t_2 = 5s$  از نقطه B، در فاصله  $7/5$  متری نقطه A عبور کند، بزرگی شتاب حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟



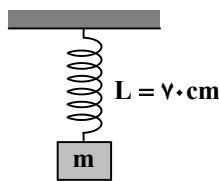
- (۱) ۱
- (۲)  $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴)  $\frac{3}{2}$

۶۳- از بالای یک برج، دو سنگ را به فاصله زمانی ۳ ثانیه رها می‌کنیم. اگر بیشترین فاصله دو سنگ از یکدیگر، ۲ ثانیه بعد از رها کردن سنگ دوم باشد، تندی سنگ دوم هنگام رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )

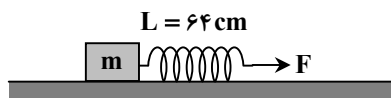
- (۱) ۶۰
- (۲) ۵۰
- (۳) ۴۰
- (۴) ۳۰

۶۴- جرم یک فنر ناچیز و طول عادی آن ۶۰ cm است. وقتی وزنه‌ای به جرم m را به انتهای فنر می‌آویزیم، در حالتی که وزنه ساکن است، مطابق شکل «الف» طول فنر ۷۰ cm می‌شود. وقتی مطابق شکل «ب» وزنه را به وسیله همان فنر با تندی ثابت  $5 \frac{m}{s}$  روی سطح افقی می‌کشیم، طول فنر ۶۴ cm می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان وزنه و سطح افقی کدام است؟

شکل (الف)



شکل (ب)



- (۱)  $0/3$
- (۲)  $0/4$
- (۳)  $0/6$
- (۴)  $0/8$

محل انجام محاسبات

۶۵- شخصی به جرم  $50\text{ kg}$  روی یک ترازوی فنری درون آسانسور ایستاده است. در کدام حالت، ترازو،  $600\text{ N}$  را نشان می‌دهد؟  $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

- (۱) آسانسور سرعت ثابت  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به طرف پایین داشته باشد. (۲) آسانسور سرعت ثابت  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به طرف بالا داشته باشد.  
 (۳) آسانسور شتاب ثابت  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  به طرف پایین داشته باشد. (۴) آسانسور شتاب ثابت  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  به طرف بالا داشته باشد.

۶۶- دو ماهواره A و B به دور زمین می‌گردند. اگر جرم ماهواره A دو برابر جرم ماهواره B و فاصله ماهواره A از سطح زمین  $\frac{1}{3}$  شعاع زمین و

فاصله ماهواره B از سطح زمین  $\frac{1}{6}$  شعاع زمین باشد، انرژی جنبشی ماهواره B چند برابر انرژی جنبشی ماهواره A است؟

- (۱)  $\frac{3}{7}$  (۲)  $\frac{6}{7}$  (۳)  $\frac{7}{8}$  (۴)  $\frac{4}{7}$

۶۷- در یک حرکت هماهنگ ساده، جرم متحرک  $800$  گرم و معادله مکان- زمان آن در SI به صورت  $x = 0.05 \cos(10\pi t)$  است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر  $400$  میلی‌ژول می‌شود، تندی آن چند متر بر ثانیه است؟  $(\pi = \sqrt{10})$

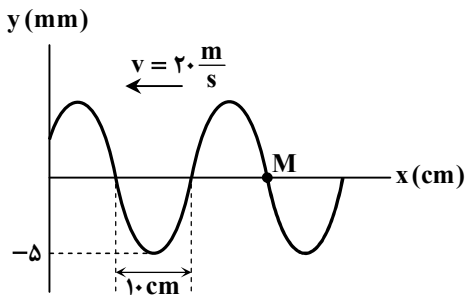
- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶۸- اگر طول یک آونگ ساده را  $48$  سانتی‌متر افزایش دهیم و جرم وزنه آن را نصف کنیم، تعداد نوسان‌های آونگ در یک مدت معین، نصف می‌شود. قبل از انجام این تغییرات، دوره نوسان‌های آونگ چند ثانیه بوده است؟  $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  و  $\pi = \sqrt{10})$

- (۱)  $1/2$  (۲)  $0/8$  (۳)  $0/6$  (۴)  $0/4$

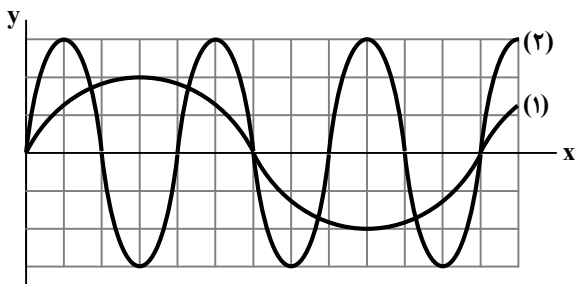
۶۹- شکل روبه‌رو، مربوط به انتشار یک موج عرضی در یک تار در لحظه  $t = t_1$  است.

در این لحظه نقطه M با تندی چند متر بر ثانیه و به کدام طرف حرکت می‌کند؟



- (۱)  $3/14$ ، بالا  
 (۲)  $3/14$ ، پایین  
 (۳)  $1/57$ ، بالا  
 (۴)  $1/57$ ، پایین

۷۰- موج‌های (۱) و (۲) در دو تار کاملاً مشابه منتشر شده‌اند و نمودار جابه‌جایی- مکان آن‌ها مطابق شکل است. اگر بیشینه تندی نوسان ذرات موج (۱) نصف بیشینه تندی نوسان ذرات موج (۲) باشد، بزرگی نیروی کشش در تار (۲) چند برابر بزرگی نیروی کشش در تار (۱) است؟

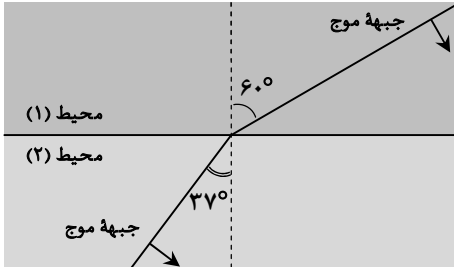


- (۱) ۱۶  
 (۲)  $\frac{16}{81}$   
 (۳)  $\frac{4}{9}$   
 (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۷۱- کدام گزینه در مورد آزمایش یانگ درست است؟

- (۱) این آزمایش بیانگر این است که نور یک موج الکترومغناطیسی است.
  - (۲) اگر آزمایش با نور سفید انجام شود، محل نوارهای روشن و تاریک بهتر از وقتی که آزمایش با نور تک‌رنگ انجام شود، قابل مشاهده است.
  - (۳) اگر بدون تغییر در سایر موارد، آزمایش را به جای نور آبی با نور قرمز انجام دهیم، فاصله نوارهای روشن از یکدیگر زیاد می‌شود.
  - (۴) آنچه در این آزمایش اتفاق می‌افتد، تداخل موج‌های نور است و پدیده پراش نقشی در آن ندارد.
- ۷۲- وضعیت یک جبهه موج تخت هنگام عبور از مرز دو محیط همراه با یک خط عمود بر مرز (خط چین) در شکل نشان داده شده است. طول موج در محیط (۲) چند برابر طول موج در محیط (۱) است؟  $(\sin 37^\circ = 0.6)$



- (۱)  $\frac{1}{5}$
- (۲)  $\frac{5\sqrt{3}}{6}$
- (۳)  $\frac{6}{5\sqrt{3}}$
- (۴)  $\frac{5}{8}$

۷۳- یک لامپ ۱۰ وات، نوری با طول موج ۶۴۰ نانومتر را در تمام جهات تابش می‌کند و روزنه‌ای دایره‌ای به شعاع ۱ cm در فاصله ۱۰۰ متری لامپ قرار دارد. مرتبه بزرگی تعداد فوتون‌هایی که در هر ساعت از این روزنه عبور می‌کند، کدام است؟ (از جذب انرژی و بازتاب نور در محیط صرف نظر کنید،  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$  و  $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$  و  $4 \times 10^{15} eV \cdot s$ )

- (۱)  $1/5 \times 10^{14}$
- (۲)  $2/4 \times 10^{14}$
- (۳)  $3 \times 10^{14}$
- (۴)  $4/8 \times 10^{14}$

۷۴- در اتم هیدروژن، اگر گذار الکترون از مدار  $n_U$  به  $n_L$  سبب گسیل فوتونی با طول موج  $\frac{2944}{3}$  نانومتر شود،  $n_U$  و  $n_L$  کدام هستند؟

( $hc = 1242 eV \cdot nm$  و  $E_R = 13/5 eV$ )

- (۱) ۱ و ۴
- (۲) ۲ و ۵
- (۳) ۱ و ۳
- (۴) ۲ و ۴

۷۵- اگر یک هسته پرتوزا یک ذره آلفا و یک پوزیترون گسیل نماید، از هسته چند پروتون و چند نوترون کم می‌شود؟

- (۱) ۳ پروتون و ۲ نوترون
- (۲) ۱ پروتون و ۳ نوترون
- (۳) ۳ پروتون و ۱ نوترون
- (۴) ۲ پروتون و ۳ نوترون

۳۰

شیمی

زمان پیشنهادی

جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

۷۶- نقطه جوش کدام ترکیب بالاتر است؟

- (۱)  $CH_3 - O - CH_3$
- (۲)  $CH_3 - OH$
- (۳)  $C_2H_5OH$
- (۴)  $C_2H_8$

۷۷- کدام گزینه در مورد نفت خام درست است؟

- (۱) به علت کم بودن مقدار نمک و اسید در نفت خام، لازم نیست قبل از پالایش آن‌ها را جداسازی کنند.
- (۲) یکی از برش‌های نفت خام، نفت سفید است که شامل آلکان‌هایی با ۲۲ تا ۳۲ اتم هیدروژن است.
- (۳) هیدروکربن‌های سیرنشده، بخش عمده نفت خام را تشکیل می‌دهند.
- (۴) در حدود  $\frac{3}{4}$  نفت خام، صرف سوزاندن و تأمین انرژی می‌شود.

محل انجام محاسبات

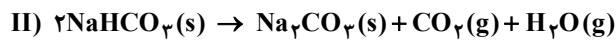
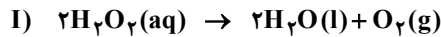
۷۸- ۱ مول از هر یک از فلزهای آهن و منیزیم را به ترتیب در دو ظرف A و B محتوی هیدروکلریک اسید ۱ مولار وارد می‌کنیم. کدام مطلب درست است؟

- ۱) سرعت تولید گاز هیدروژن در هر دو ظرف برابر است.
- ۲) سرعت تولید گاز هیدروژن در ظرف B کم‌تر است.
- ۳) در بازه زمانی یکسان (قبل از پایان واکنش)، مقدار  $H_2$  تولیدی در ظرف B بیش‌تر است.
- ۴) در پایان واکنش، حجم گاز تولیدی در ظرف A کم‌تر است.

۷۹- نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در مولکول نفتالن، چند برابر شمار اتم‌های کربن به هیدروژن در مولکول هگزين است؟

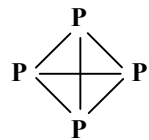
- (۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۸۰- سرعت تولید گاز اکسیژن (برحسب مول بر ثانیه) در تجزیه آب اکسیژنه در یک بازه زمانی معین، ۵ برابر سرعت تولید گاز کربن دی‌اکسید در تجزیه سدیم هیدروژن کربنات است. در این بازه زمانی، نسبت جرم آب حاصل از تجزیه سدیم هیدروژن کربنات به جرم آب حاصل از تجزیه آب اکسیژنه کدام است؟



- (۱)  $0.5$  (۲)  $0.3$  (۳)  $0.1$  (۴)  $0.05$

۸۱- اگر آنتالپی تصعید مولی فسفر سفید ( $P_4$ )، ۱۳ کیلوژول بر مول و آنتالپی پیوند فسفر (P-P) برابر ۴۹۰ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی واکنش  $P_4(s) \rightarrow 4P(g)$ ، برابر چند کیلوژول است؟



فسفر سفید

- (۱) ۲۹۵۳  
(۲) ۱۹۶۰  
(۳) ۲۹۲۷  
(۴) ۱۹۷۳

۸۲- به ۱۰۰ mL محلول نیتریک اسید با غلظت مولی  $2 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ ، چند mL محلول  $0.4 \text{ mol} \cdot L^{-1}$  آن را اضافه کنیم تا محلول حاصل بتواند ۲۰۰ mL محلول سود  $1/3$  مولار را خنثی کند؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۰۰

۸۳- چند مورد از مطالب زیر درباره یازدهمین فلز چهارمین دوره جدول دوره‌ای، درست است؟

- دارای عدد اتمی ۳۱ و یک الکترون با عددهای کوانتومی  $n = 4$  و  $l = 1$  است.
- بیستمین الکترون آن دارای  $n = 4$  و  $l = 0$  است.
- با عنصر  $Rg_{111}$ ، هم‌گروه است.
- کاتیون یک بار مثبت آن، فاقد الکترونی با  $n = 4$  است.
- می‌تواند اکسیدهایی با فرمول شیمیایی  $XO$  و  $X_2O$  تشکیل دهد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

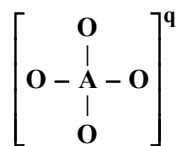
۸۴- مونومرهای نوعی پلی‌استر،  $C_7H_8O_2$  و  $C_7H_4O_4$  هستند. اگر زنجیر پلیمری شامل ۲۰۰ واحد تکرارشونده باشد، جرم مولی این پلی‌استر چند گرم بر مول است؟ ( $H = 1, C = 12, O = 16: g \cdot mol^{-1}$ )

- (۱) ۳۳۲۰ (۲) ۲۶۰۰ (۳) ۲۹۶۰۰ (۴) ۲۲۴۰۰

محل انجام محاسبات



۹۲- اگر در ساختار یون زیر، همه اتم‌ها از قاعده هشت تایی پیروی کنند، کدام گزینه درست است؟ (جفت الکترون‌های ناپیوندی نمایش داده نشده است.)



(۱) اگر در فرمول ترکیب حاصل از واکنش این یون و یون کلسیم، شمار کاتیون‌ها دو برابر شمار آنیون‌ها باشد، اتم A دارای ۶ الکترون ظرفیتی است.

(۲) اگر اتم مرکزی ۷ الکترون ظرفیتی داشته باشد، q برابر ۲- است.

(۳) اگر q برابر ۱- باشد، اتم مرکزی آن دارای ۵ الکترون ظرفیتی است.

(۴) اگر اتم A دارای ۵ الکترون ظرفیتی باشد، در فرمول ترکیب حاصل از واکنش آلومینیم با این یون، شمار کاتیون‌ها با شمار آنیون‌ها برابر است.

۹۳- تعادل  $A(g) + B(g) \rightleftharpoons 2C(g)$  در دمای  $70^\circ\text{C}$  با ۲ مول A، ۲ مول B و ۳ مول C در یک ظرف یک‌لیتری برقرار است. در صورتی که با افزایش دما تا  $100^\circ\text{C}$ ، مقدار K، ۴ برابر شود، غلظت تعادلی C در تعادل جدید چند مول بر لیتر خواهد شد؟

(۱) ۲/۴ (۲) ۳/۶ (۳) ۴/۲ (۴) ۴/۸

۹۴- چه تعداد از ویژگی‌های زیر را می‌توان به ایزوتوپی از هیدروژن که شمار ذرات زیراتمی آن با هم برابر است، نسبت داد؟ (الف) در طبیعت یافت می‌شود.

(ب) نیم‌عمر آن در حدود چند سال است.

(پ) پرتوزا است.

(ت) واکنش‌پذیری آن بیشتر از سایر ایزوتوپ‌های هیدروژن است.

(ث) فراوانی آن در مخلوط ایزوتوپ‌های طبیعی کمتر از ۱ درصد است.

(۱) سه (۲) چهار (۳) یک (۴) دو

۹۵- مجموع اعداد کوانتومی n و l الکترون‌های لایه ظرفیت در اتمی از دوره سوم (اتم X) برابر با ۲۲ است. فرمول شیمیایی ترکیب حاصل از آن با  $Na_{11}$  کدام است؟

(۱) NaX (۲)  $Na_2X$  (۳)  $Na_3X$  (۴)  $NaX_3$

۹۶- کدام گزینه دربارهٔ محلولی از کلسیم کلرید در آب با غلظت  $22/2 \text{ ppm}$  و چگالی ۱ گرم بر میلی‌لیتر، نادرست است؟

( $Cl = 35/5, Ca = 40 : g \cdot mol^{-1}$ )

(۱) غلظت یون کلرید در این محلول،  $44/4 \text{ ppm}$  است.

(۲) درصد جرمی کلسیم کلرید در این محلول،  $2/22 \times 10^{-3}$  است.

(۳) غلظت مولار یون کلرید در این محلول، دو برابر غلظت مولار یون کلسیم است.

(۴) غلظت مولار کلسیم کلرید در این محلول،  $2 \times 10^{-4}$  است.

۹۷- واکنش  $FeCl_3(aq) + KI(aq) \rightarrow FeCl_2(aq) + I_2(s) + KCl(aq)$ ، به‌طور طبیعی انجام‌پذیر است. بر اساس آن کدام عبارت درست است؟

(۱) بر اساس معادله موازنه‌شده، دو الکترون بین کاهنده و اکسنده مبادله می‌شود.

(۲) قدرت اکسندگی  $Fe^{3+}$  نسبت به  $I_2$  کمتر است.

(۳) قدرت کاهندگی  $I^-$  نسبت به  $Fe^{2+}$  کمتر است.

(۴) با انجام واکنش، غلظت مولی یون‌های  $K^+$  و  $I^-$ ، تغییری نمی‌کند.

محل انجام محاسبات

۹۸- در یک سلول گالوانی که نیم سلول استاندارد فلز M در مقابل SHE قرار گرفته است، الکتروود M نقش آند دارد. بر این اساس، .....

(۱) با گذشت زمان، الکتروولیت نیم سلول استاندارد هیدروژن اسیدی تر می شود.

(۲) غلظت یون های فلز M در الکتروولیت افزایش می یابد.

(۳) قدرت اکسندگی کاتیون فلز M بیشتر از یون  $H^+$  است.

(۴) پتانسیل استاندارد کاهش نیم سلول فلز M عددی مثبت است.

۹۹- با قرار دادن تیغه آلومینیومی در محلول مس (II) سولفات، پس از ۵ دقیقه جرم مواد جامد موجود در ظرف،  $2/76$  گرم تغییر می کند. در این مدت، چند مول الکترون مبادله شده است؟ (فرض کنید همه فلز تولید شده، روی تیغه رسوب می کند.)

( $Al = 27, Cu = 64 : g \cdot mol^{-1}$ )

۰/۲۴ (۴)

۰/۱۲ (۳)

۰/۰۶ (۲)

۰/۰۳ (۱)

۱۰۰- آهن گالوانیزه، نام دیگر ..... است و اگر در هوای مرطوب خراشی در سطح آن بوجود آید، در محل خراش یک سلول ..... به وجود می آید که در آن ..... است و ..... می شود.

(۲) حلبی، گالوانی، آهن، کاند، از خوردگی محافظت

(۱) حلبی، الکتروولیتی، قلع، قطب مثبت، خورده

(۴) آهن سفید، الکتروولیتی، روی، قطب مثبت، خورده

(۳) آهن سفید، گالوانی، آهن، کاند، از خوردگی محافظت

۱۰۱- چند درصد جرمی سدیم سیلیکات را کاتیون سدیم تشکیل می دهد؟ ( $O = 16, Na = 23, Si = 28 : g \cdot mol^{-1}$ )

۱۲/۵ (۴)

۷۵ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۱۰۲- از واکنش ۶۴۴ گرم صابون پتاسیم که دارای ۳۵ اتم هیدروژن است، با مقدار کافی محلول منیزیم کلرید،  $74/5$  گرم فرآورده محلول در آب به دست می آید. بازده درصدی این واکنش کدام است؟ (زنجر هیدروکربنی صابون را سیر شده در نظر بگیرید.)

( $H = 1, C = 12, O = 16, Cl = 35/5, K = 39 : g \cdot mol^{-1}$ )

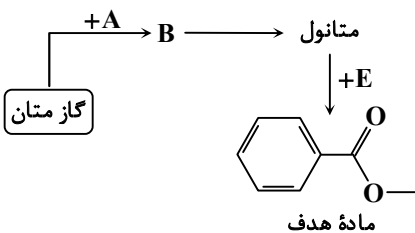
۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۱۰۳- طرح زیر مربوط به مراحل سنتز ماده هدف مشخص شده است. A، B و E به ترتیب از راست به چپ کدام مواد هستند؟



(۱) بخار آب - مخلوط گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن - بنزوئیک اسید

(۲) گاز اکسیژن در حضور کاتالیزگر - مخلوط گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن - بنزوئیک اسید

(۳) بخار آب - مخلوط گازهای کربن دی اکسید و هیدروژن - ترفتالیک اسید

(۴) گاز اکسیژن در حضور کاتالیزگر - مخلوط گازهای کربن دی اکسید و هیدروژن - ترفتالیک اسید

۱۰۴- گرمای سوختن مولی کدام هیدروکربن (متان، اتان، پروپان، بوتان) بیشتر است و در شمار مول های برابر، مقدار گاز کربن دی اکسید تولید شده در سوختن کامل کدام هیدروکربن، کمتر است؟

(۴) بوتان - متان

(۳) پروپان - اتان

(۲) اتان - پروپان

(۱) متان - بوتان

۱۰۵- اگر در یک لوله U شکل، در یک سمت آب خالص و در سمت دیگر محلول NaCl داشته باشیم و در بخش پایینی یک غشای نیمه تراوا عامل جداکننده باشد، کدام عبارت درست است؟

(۱) مولکول های آب، تنها از آب خالص به سمت محلول NaCl جابه جا می شوند.

(۲) مولکول های آب، تنها از محلول NaCl به سمت آب خالص جریان می یابند.

(۳) یون های  $Na^+$  وارد آب خالص می شوند و  $Cl^-$  در سمت خود باقی می ماند.

(۴) مولکول های آب خالص با عبور از غشای نیمه تراوا به هر دو سمت لوله، جریان می یابند.

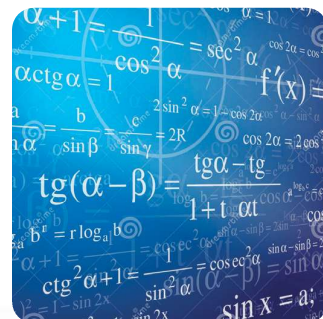
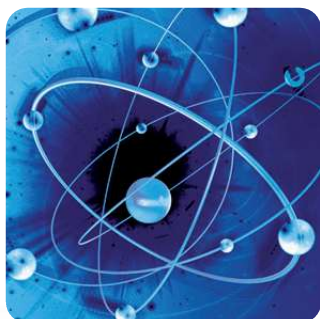
محل انجام محاسبات

# دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۲ تیر ۱۴۰۲ (مرحله ۱۸)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

گروه آزمایشی علوم ریاضی



## ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده \* حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۱)

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

نکته: مجموع جملات یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$ ، جمله آخر  $a_n$  و تعداد  $n$  برابر است با:

دسته دهم به عدد  $100 = 10^2$  ختم می‌شود و عدد ابتدایی آن برابر  $82 = 1 + 9^2$  است.

$$100 - 82 + 1 = 19$$

تعداد اعداد این دسته برابر است با:

(البته با توجه به اینکه تعداد اعداد هر دسته به ترتیب برابر با  $1, 3, 5, \dots$  است، تعداد اعداد دسته دهم برابر فاصله دو عدد مربع کامل یعنی

عدد فرد دهم  $19 = 10 \times 2 - 1$  است.)

$$S_n = \frac{19}{2}(82 + 100) = 19 \times \frac{182}{2} = 19 \times 91 = 1729$$

پس مجموع اعداد دسته دهم برابر است با:

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۲- پاسخ: گزینه ۳

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

نکته: به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ داریم:

راه حل اول:

با ضرب صورت و مخرج در عبارت  $a-b$  داریم:

$$A = \frac{(a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{a^6 - b^6}{a^3 - b^3} = \frac{(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)}{a^3 - b^3} = a^3 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = 5^3 + (-4)^3 = 125 - 64 = 61$$

مقدار عبارت به دست آمده به ازای  $a = 5$  و  $b = -4$  برابر است با:

راه حل دوم:

به روش دسته‌بندی عبارت صورت را تجزیه می‌کنیم.

$$A = \frac{(a^5 + a^4b + a^3b^2) + (a^2b^3 + ab^4 + b^5)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^2(a^3 + ab + b^2) + b^3(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a^3 + b^3)}{a^2 + ab + b^2} = a^3 + b^3$$

ادامه راه حل مشابه روش اول است.

▲ مشخصات سؤال: ساده \* ریاضی ۱ (فصل ۴، درس ۳)

۳- پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول: دو نامعادله را به صورت جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{x+3} < 3 \Rightarrow \frac{x-1}{x+3} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x-1-3x-9}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{-2x-10}{x+3} < 0 \Rightarrow x < -5 \text{ یا } x > -3$$

$x$	$-5$	$-3$
$f(x)$	+	-
	ت ن	

$$\frac{x-1}{x+3} > -1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x+2}{x+3} > 0 \Rightarrow x < -3 \text{ یا } x > -1$$

$x$	$-3$	$-1$
$f(x)$	-	+
	ت ن	

اشتراک دو محدوده به دست آمده برابر است با:

$$((-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)) \cap ((-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)) = (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty) = \mathbb{R} - [-5, -1]$$

بنابراین  $a = -5$  و  $b = -1$ ، پس:  $a + b = -6$

راه حل دوم: نامعادله داده شده، معادل نامعادله زیر است:

$$\left(\frac{x-1}{x+3} + 1\right)\left(\frac{x-1}{x+3} - 3\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{2x+2}{x+3}\right)\left(\frac{-2x-10}{x+3}\right) < 0 \Rightarrow \frac{(2x+2)(-2x-10)}{(x+3)^2} < 0$$

$$\Rightarrow 4(x+1)(-x-5) < 0 \Rightarrow x < -5 \text{ یا } x > -1$$

۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۳)

نکته: عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج حتماً باید نامنفی باشد.

ابتدا دامنه تعریف معادله را مشخص می‌کنیم. عبارت‌های زیر رادیکال باید نامنفی باشند، پس:

$$x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \quad 2\sqrt{x-5} - x + 4 \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-5} \geq x - 4$$

با توجه به اینکه  $x \geq 5$ ، پس عبارت  $x - 4$  در سمت راست نامساوی نیز مثبت است و می‌توان طرفین نامعادله را به توان دو رساند.

$$2\sqrt{x-5} \geq x - 4 \Rightarrow 4(x-5) \geq (x-4)^2 \Rightarrow 4x - 20 \geq x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 \leq 0 \Rightarrow (x-6)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 6$$

عدد  $x = 6$  تنها عددی است که سمت چپ معادله  $\sqrt{2\sqrt{x+5} - x + 4} = x + k$  را به عبارتی تعریف شده تبدیل می‌کند. پس تنها جواب معادله  $x = 6$  است.

$$\sqrt{2\sqrt{6-5} - 6 + 4} = 6 + k \Rightarrow 6 + k = 0 \Rightarrow k = -6$$

۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده \* حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

نکته:  $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$  ,  $\log_a a = 1$  ,  $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$  ,  $\log_b a^m = m \log_b a$

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$m = \log_a 75 \Rightarrow \log_a 75 + \log_a 3 = m \Rightarrow \log_{a^2} 75^2 + \log_{a^2} 3 = m \Rightarrow \frac{2}{2} \log_a 75 + \frac{1}{2} \log_a 3 = m$$

$$\Rightarrow \log_a 75 = m - \frac{1}{2} \Rightarrow \log_a 75 = \frac{2m-1}{2}$$

اکنون به محاسبه لگاریتم خواسته شده می‌پردازیم:

$$\log_{a^2} 75 = \log_{a^2} 9 + \log_{a^2} 5 = \frac{1}{2} (\log_a 9 + \log_a 5) = \frac{1}{2} (2 \log_a 3 + \log_a 5) = \frac{1}{2} (2 + \log_a 5) = \frac{1}{2} (2 + \frac{2m-1}{2}) = \frac{1}{2} (\frac{2m-1+4}{2}) = \frac{2m+3}{4}$$

۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* ریاضی ۱ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: طول رأس سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  برابر  $\frac{-b}{2a}$  است.

نکته: اگر رأس یک سهمی نقطه  $(h, k)$  باشد، معادله آن به صورت  $y = a(x-h)^2 + k$  است.

طول رأس سهمی  $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$  برابر  $\frac{-8}{2(-2)} = 2$  است. پس رأس تابع  $f$  نقطه  $(2, 5)$  است.

همچنین طول رأس سهمی  $g(x) = ax^2 + 2ax + c$  برابر  $\frac{-2a}{2 \times a} = -1$  است.

می‌دانیم  $f(-1) = -13$ ، پس از آنجا که  $f$  نیز از رأس  $g$  می‌گذرد، رأس  $g$  نقطه  $(-1, -13)$  است. یعنی معادله  $g$  به صورت

$$g(x) = a(x+1)^2 - 13 \quad \text{است. ضمناً سهمی } g \text{ از رأس } f \text{ یعنی } (2, 5) \text{ می‌گذرد. پس: } a(2+1)^2 - 13 = 5 \Rightarrow a(3)^2 - 13 = 5 \Rightarrow a(9) = 18 \Rightarrow a = 2$$

یعنی تابع  $g$  به صورت  $g(x) = 2(x+1)^2 - 13$  است.

مقدار خواسته شده برابر است با:  $(f+g)(3) = f(3) + g(3) = (-2 \times 9 + 8 \times 3 - 3) + (2(3+1)^2 - 13) = 3 + 19 = 22$

۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

نکته:  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

ابتدا دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f : 4x - x^2 \geq 0 \quad \begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ - \quad + \quad - \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

$$D_g : \frac{3}{4-x^2} \geq 0 \Rightarrow 4-x^2 > 0 \quad \begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} -2 \quad 2 \\ - \quad + \quad - \\ \text{تن} \quad \text{تن} \end{array} \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow D_g = (-2, 2)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{0 \leq x \leq 4 \mid -2 < \sqrt{4x-x^2} < 2\}$$

باید نامعادله  $-2 < \sqrt{4x-x^2} < 2$  را حل کنیم. توجه کنید نامعادله  $-2 < \sqrt{4x-x^2}$  بدیهی است و احتیاج به حل ندارد، داریم:

$$\sqrt{4x-x^2} < 2 \Rightarrow 4x-x^2 < 4 \Rightarrow x^2-4x+4 > 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0$$

$$D_{g \circ f} = \{0 \leq x \leq 4 \mid x \neq 2\} = [0, 4] - \{2\}$$

نامعادله آخر فقط به‌ازای  $x = 2$  برقرار نیست، پس:

این دامنه شامل ۴ عدد صحیح ۰، ۱، ۳، ۴ است.

نکته: اگر  $f$  تابعی وارون پذیر باشد، آنگاه به ازای هر  $x$  عضو  $D_{f^{-1}}$  داریم:  $(f \circ f^{-1})(x) = x$

نکته: دامنه تابع وارون برابر برد تابع اصلی است:  $D_{f^{-1}} = R_f$

می دانیم  $(f \circ f^{-1})(x) = x$  البته  $x$  باید عضوی از  $D_{f^{-1}}$  یعنی  $R_f$  باشد.

$$f(x) = \sqrt{3-x} - 1 \Rightarrow f(x) \geq -1 \Rightarrow R_f = [-1, +\infty)$$

پس به ازای هر  $x \geq -1$  داریم:  $(f \circ f^{-1})(x) = x$

اکنون به حل معادله داده شده می پردازیم:

$$2(f \circ f^{-1})(x) + 3 = \frac{2}{x} \Rightarrow 2x + 3 = \frac{2}{x} \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x = -2, \frac{1}{2}$$

با توجه به محدوده  $x \geq -1$  فقط جواب  $x = \frac{1}{2}$  قابل قبول است.

نکته: در حدهای مبهم رادیکالی می توان با ضرب و تقسیم در مزدوج عبارت رادیکالی و رفع ابهام حد، حاصل حد را محاسبه کرد.

با جای گذاری  $x = -3$  در حد متوجه می شویم که حاصل این حد مبهم است، پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + \sqrt{-3x}}{x^2 - x + \frac{36}{x}} \times \frac{x - \sqrt{-3x}}{x - \sqrt{-3x}} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - (-3x)}{(x^2 - x + \frac{36}{x})(x + \sqrt{-3x})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 3x)x}{(x^3 - x^2 + 36)(x + \sqrt{-3x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)x^2}{(x+3)(x^2 - 4x + 12)(x + \sqrt{-3x})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{(x^2 - 4x + 12)(x + \sqrt{-3x})} = \frac{9}{33 \times (-6)} = -\frac{1}{22} \end{aligned}$$

نکته: اگر  $f(x)$  تابعی چند جمله ای به صورت  $ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1$  باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

تابع  $f$  دارای مجانب افقی  $y = 2$  است، پس حد تابع  $f$  در بی نهایت برابر ۲ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{ax^2 - 24x + c}}{(x+3)|x-3|} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{ax})}{x \times x} = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

ضمناً تابع  $f$  فقط یک مجانب قائم  $x = -3$  دارد. با توجه به اینکه  $x = 3$  ریشه مخرج کسر در تابع  $f$  است ولی  $x = 3$  مجانب قائم  $f$  نیست، پس حد صورت کسر نیز در  $x = 3$  برابر صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} x\sqrt{4x^2 - 24x + c} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{36 - 72 + c} = 0 \Rightarrow c = 36$$

بنابراین تابع  $f$  به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{x\sqrt{4x^2 - 24x + 36}}{(x+3)|x-3|} = \frac{x\sqrt{(2x-6)^2}}{(x+3)|x-3|} = \frac{2|x-3|x}{(x+3)|x-3|} = \frac{2x}{x+3}$$

حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{6} = 1$$

نکته: اگر  $\theta$  اندازه یک زاویه بر حسب رادیان و  $R$  شعاع دایره باشد، طول کمان روبه رو به زاویه  $(\ell)$  برابر است با:

$$\ell = R\theta$$

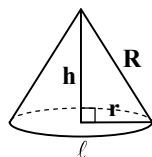
زاویه مرکزی یک نیم دایره برابر  $180^\circ$  یا  $\pi$  رادیان است. اگر شعاع نیم دایره را  $R$  بنامیم داریم:

محیط قاعده مخروط ساخته شده توسط این نیم دایره برابر کمان روبه رو به زاویه  $180^\circ$  در نیم دایره است. پس اگر شعاع قاعده مخروط را  $r$  بنامیم داریم:

$$2\pi r = \ell \Rightarrow 2\pi r = R\pi \Rightarrow 2r = R$$

ضمناً یال مخروط همان شعاع نیم دایره است. پس طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (2r)^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2 \Rightarrow \frac{h^2}{r^2} = 3 \Rightarrow \frac{h}{r} = \sqrt{3}$$



$$\text{نکته: } \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{Min} = c - |a|, \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

نکته: در تابع  $y = a \cos(bx) + c$  مقدار  $\text{Min}$  و دوره تناوب برابر است با:

ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = (\sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\pi x)) \times (\sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\pi x)) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi x)\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi x)\right) = \frac{1}{2} (\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)) = -\frac{1}{2} \cos(2\pi x) \end{aligned}$$

$$y_{\min} = 0 - \left|-\frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{2}$$

بنابراین ضابطه به صورت  $y = -\frac{1}{2} \cos(2\pi x)$  است. مقدار مینیمم این تابع برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$$

همچنین دوره تناوب این تابع برابر است با:

طول نقطه  $A$  برابر دوره تناوب تابع و عرض آن برابر مقدار مینیمم است. پس  $A\left(1, -\frac{1}{2}\right)$  و مجموع طول و عرض نقطه  $A$  برابر  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  است.

۱۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

$$\text{نکته: } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

نکته: اگر  $a$  عددی در محدوده  $(-1, 1)$  باشد، معادله  $\sin x = a$  در یک دوره تناوب  $[0, 2\pi)$  دو جواب دارد.

ابتدا معادله مورد نظر را فقط بر حسب  $\sin x$  بازنویسی می‌کنیم:

$$\cot^2 x = \sin x + 1 \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \sin x + 2 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x + 2$$

$$\frac{1}{t^2} = t + 2 \Rightarrow t^3 + 2t^2 - 1 = 0$$

با تغییر متغیر  $\sin x = t$  داریم:

$t = -1$  یکی از ریشه‌های این معادله درجه سوم است. برای یافتن سایر ریشه‌ها معادله را بر  $t + 1$  تقسیم می‌کنیم:

$$t^3 + 2t^2 - 1 = 0 \Rightarrow (t + 1)(t^2 + t - 1) = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ یا } t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

جواب  $t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  غیر قابل قبول است؛ زیرا  $t < -1$ ، پس  $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  یا  $\sin x = -1$ . تنها جواب معادله  $\sin x = -1$  در بازه

$[0, 2\pi]$  مقدار  $x = \frac{3\pi}{2}$  است و با توجه به اینکه  $1 < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 0$ ، دو زاویه در ربع‌های اول و دوم (که مکمل یکدیگر هستند) در معادله

$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  صدق می‌کنند. پس معادله اصلی در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای سه جواب است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

$$\text{نکته: } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{نکته: } (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$\text{نکته: } (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم. با توجه به اینکه  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$  داریم:

$$y = \frac{\tan^3 x - 1}{\tan^3 x + 1} = \frac{\tan^3 x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan^3 x \times \tan \frac{\pi}{4}} = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

اکنون به محاسبه مشتق می‌پردازیم:

$$y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y' = \left(1 + \tan^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \times 3$$

مقدار این مشتق به ازای  $x = \frac{5\pi}{36}$  برابر است با:

$$y' = \left(1 + \tan^2\left(3 \times \frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \times 3 = \left(1 + \tan^2\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \times 3 = 3 \left(1 + \tan^2\left(\frac{2\pi}{12}\right)\right) = 3 \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6}\right) = 3 \left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

نکته: آهنگ تغییر متوسط تابع روی بازه  $[a, b]$  برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در  $x = a$  برابر است با:

$$f'(a)$$

ابتدا آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در  $x = 2$  را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع روی بازه  $[1, 1+h]$  باید برابر  $\frac{3}{4}$  باشد:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{(1+h + \frac{1}{1+h}) - (1 + \frac{1}{1})}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{h - 1 + \frac{1}{1+h}}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{h^2 - 1 + 1}{1+h} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{h}{1+h} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4h = 3h + 3 \Rightarrow h = 3$$

نکته: اگر نقطه‌ای با طول  $c$  نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد، آنگاه  $f'(c)$  یا تعریف نشده است یا برابر صفر است.

نکته: اگر علامت مشتق تابع پیوسته  $f$  در نقطه بحرانی خود از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر کند، آن نقطه ماکزیمم نسبی (مینیمم نسبی) است.

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) f(x)$$

ابتدا مشتق تابع را محاسبه کرده و ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + (x^2 - 28) \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3 \times 2x \times \sqrt[3]{x^3} + (x^2 - 28)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x-2)(x+2)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

بنابراین سه نقطه با طول‌های صفر و  $\pm 2$  نقاط بحرانی تابع  $f$  هستند. جدول تغییرات تابع  $f$  به صورت زیر است.

$x$		$-2$	$0$	$2$	
$f'(x)$		$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

max نسبی
min نسبی

بنابراین نقطه بحرانی با طول  $-2$  ماکزیمم نسبی تابع  $f$  است.

نکته: اگر نقطه‌ای با طول  $a$  نقطه عطف تابع  $f$  باشد و  $f''(a)$  تعریف شده باشد، آنگاه  $f''(a) = 0$ .

$$(Cos x)' = -Sin x, (Sin x)' = Cos x$$

ابتدا مشتق دوم تابع  $f$  را محاسبه می‌کنیم:

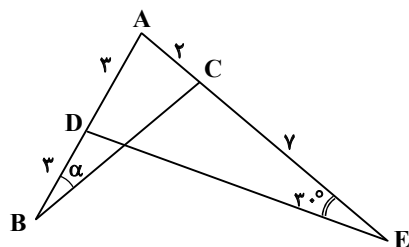
$$f(x) = ax^2 + Sin(2x) \Rightarrow f'(x) = 2ax + 2Cos 2x \Rightarrow f''(x) = 2a - 4Sin 2x$$

نقطه‌ای با طول  $\frac{7\pi}{12}$  نقطه عطف این تابع است، پس داریم:

$$f''(\frac{7\pi}{12}) = 0 \Rightarrow 2a - 4Sin \frac{7\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2a - 4 \times (-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

نکته: اگر یک زاویه از مثلثی با یک زاویه از مثلثی دیگر برابر باشد و اضلاع این زاویه در دو مثلث متناسب باشند، آنگاه دو مثلث متشابه‌اند.

مطابق شکل داریم:



$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$$

در دو مثلث  $ABC$  و  $ADE$ ، زاویه  $A$  مشترک و  $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ . پس این دو مثلث

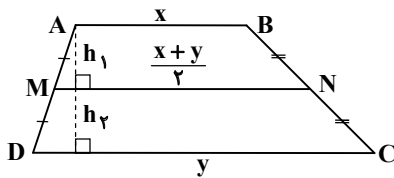
به حالت تساوی یک زاویه و تناسب اضلاع آن زاویه متشابه‌اند، بنابراین:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \hat{B} = \hat{E} = 30^\circ$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳، درس ۱ هندسه ۱

نکته: در دوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل می‌کند با قاعده‌ها موازی و برابر با نصف مجموع دو قاعده است.



$$MN = \frac{AB + DC}{2} = \frac{x + y}{2}$$

$$h_1 = h_2$$

طبق شکل داریم:

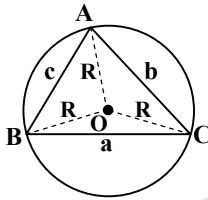
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{(x + \frac{x+y}{2}) \cdot \frac{h_1}{2}}{(y + \frac{x+y}{2}) \cdot \frac{h_2}{2}} = \frac{2x + x + y}{2y + x + y} = \frac{3x + y}{3y + x} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow 5(3y + x) = 7(3x + y) \Rightarrow 15y + 5x = 21x + 7y \Rightarrow 16x = 8y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

۲۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳، درس ۱ هندسه ۲

نکته (قضیه سینوس‌ها): در هر مثلث، نسبت اندازه هر ضلع، به سینوس زاویه مقابل به آن، برابر است با قطر دایره محیطی مثلث. (R، شعاع دایره محیطی است.)



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

مطابق شکل داریم:

$$MA = MC = 2 \Rightarrow MB = 6$$

مثلث MAC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس:

$$\hat{A} = 45^\circ$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه MBC داریم:

$$BC = \sqrt{MC^2 + MB^2} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

در مثلث ABC قضیه سینوس‌ها را می‌نویسیم:

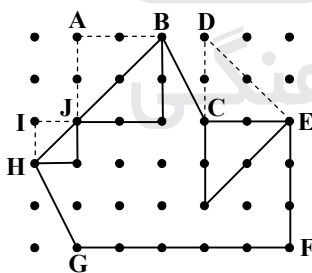
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{2\sqrt{10}}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{5}$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳، درس ۲ هندسه ۱ و فصل ۲، درس ۲ هندسه ۲

نکته: طبق قانون پیک، در یک چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط درونی i و تعداد نقاط مرزی b، مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$



نکته: یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است معروف به مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی که در این گونه مسائل هدف آن است که بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع چندضلعی، مساحت چندضلعی را تغییر دهیم.

باید با سه بازتاب، مطابق شکل، مساحت زمین را افزایش دهیم و مساحت ABCDEFGHIJ را طبق فرمول پیک محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} b = 20 \\ i = 15 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{20}{2} + 15 - 1 = 10 + 14 = 24$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۱، درس ۱ هندسه ۲

نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبه‌روی آن.

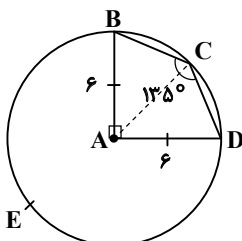
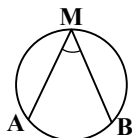
$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

مطابق شکل اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ رسم کنیم، این دایره از نقاط B و D می‌گذرد:

$$\widehat{BED} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

پس زاویه‌های محاطی روبه‌روی به این کمان ۱۳۵° هستند و چون  $\hat{C} = 135^\circ$  است، بنابراین C نیز روی این دایره قرار دارد و داریم:

$$AC = AB = AD = 6$$



نکته: از دوران یک مثلث حول هر یک از اضلاع آن، یک مخروط به وجود می‌آید.

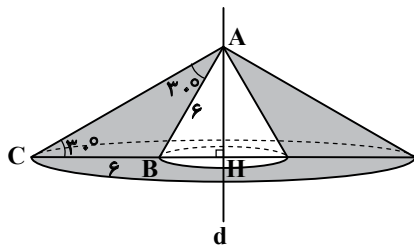
نکته: حجم هر مخروط قائم به شعاع قاعده  $r$  و ارتفاع  $h$  برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

برای محاسبه حجم شکل حاصل، باید حجم دو مخروط را از هم کم کنیم:

$$\angle ABH = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Delta ABH: \begin{cases} AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \\ BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \end{cases}$$



$$V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$$

$$V_{\text{مخروط بزرگ}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 9^2 \times 3\sqrt{3} = 81\sqrt{3}\pi$$

$$\text{حجم حاصل} = 81\sqrt{3}\pi - 9\sqrt{3}\pi = 72\sqrt{3}\pi$$

نکته: در هر دایره، شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

نقطه  $A(2, 3)$  در معادله  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  صدق می‌کند، پس  $A$  روی دایره است.

$$(x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 = 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

مرکز دایره  $O(1, 1)$  است، شیب  $OA$  را به دست آورده و قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب مماس به دست آید:

$$OA \text{ شیب} = \frac{1-3}{1-2} = 2 \Rightarrow D \text{ شیب} = -\frac{1}{2} \Rightarrow D: y-3 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

از بین نقاط گزینه‌ها، فقط نقطه  $(4, 2)$  در معادله خط  $D$  صدق می‌کند.

ابتدا چند ماتریس اول را در هم ضرب می‌کنیم تا الگوی ماتریس  $A$  مشخص شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2+3 & 1 \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2+\dots+100 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{100 \times 101}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5050 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس  $A$  برابر  $5052$  است.

نکته: دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  برابر است با:

$$|A| = ad - bc$$

نکته:  $|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$

مطابق نکات و فرض سؤال داریم:

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |2A| = |A| \times |A| + 2 \times 2 \Rightarrow 2^2 |A| = |A|^2 + 4$$

$$\Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

$$\| |A| A |A| = \| 2A |A| = |2^2 A| A = |2^2 A| = (2^2)^2 |A| = 2^6 |A| = 2^7$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳، درس ۲ هندسه ۳

۲۷- پاسخ: گزینه ۳

نکته: مساحت هر مثلث با اضلاع برداری  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که با یکدیگر زاویه  $\theta$  می‌سازند برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$$

نکته:  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

نکته:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

طبق نکات فوق داریم:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4, \quad \hat{\theta} = 30^\circ$$

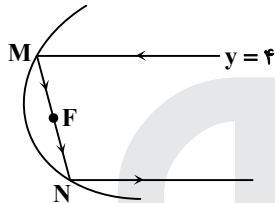
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(\vec{r}\vec{a} + \vec{r}\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{r}\vec{b})| = \frac{1}{2} |\vec{r}\vec{a} \times \vec{a} - \vec{r}\vec{a} \times \vec{b} + \vec{r}\vec{b} \times \vec{a} - \vec{r}\vec{b} \times \vec{b}| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}\vec{b} \times \vec{a} - \vec{r}\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{r}\vec{b} \times \vec{a} + \vec{r}\vec{b} \times \vec{a}| = \frac{1}{2} |2\vec{r}\vec{b} \times \vec{a}| = \vec{r} |\vec{b}| |\vec{a}| \sin 30^\circ = 4 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 32 \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۲، درس ۳ هندسه ۳

۲۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر پرتو نوری موازی محور سهمی بر آن بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

طبق اطلاعات مسئله، سهمی افقی رو به راست به شکل روبه‌رو است و داریم:



$$\begin{cases} y^2 = 16x \Rightarrow S(0, 0), & a = 4 \\ F(4, 0) \\ y_M = 4 \Rightarrow 4^2 = 16x \Rightarrow x_M = 1 \\ M(1, 4) \end{cases}$$

با مختصات  $M$  و  $F$  معادله خط  $MF$  را می‌نویسیم و بعد آن را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$\text{شیب } MF = \frac{4-0}{1-4} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y = -4(x - 4)$$

$$\begin{cases} y^2 = 16x \\ 3y = -4(x - 4) \end{cases} \Rightarrow 9y^2 = 16(x - 4)^2 = 9 \times 16x \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 9x$$

$$\Rightarrow x^2 - 17x + 16 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \\ x = 16 \Rightarrow 3y = -48 \Rightarrow y = -16 \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۲۹- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: گزاره مرکب  $p \vee q$  زمانی نادرست است که هر دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشند و در مابقی حالات، درست است.

نکته ۲: گزاره مرکب  $p \wedge q$  زمانی درست است که هر دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشند و در مابقی حالات، نادرست است.

نکته ۳: گزاره مرکب  $p \Rightarrow q$  فقط زمانی نادرست است که  $p$  درست و  $q$  نادرست باشد و در مابقی حالات، درست است.

با یک بررسی ساده متوجه می‌شوید که فقط با استفاده از نادرستی گزاره  $(p \vee r) \Rightarrow q$  به ارزش گزاره‌های  $p$ ,  $q$  و  $r$  پی خواهید برد که این ارزش‌ها در گزاره  $(p \vee q) \Rightarrow r$  نیز صدق می‌کنند.

$$q \equiv T \Rightarrow \begin{cases} q \equiv T \\ p \vee r \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv F \\ r \equiv F \end{cases} \end{cases}$$

اینک به بررسی ارزش هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

- ۱)  $(q \vee r) \Rightarrow p \equiv (T \vee F) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F$  \*
- ۲)  $\sim p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv T \Rightarrow (T \wedge F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$  \*
- ۳)  $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (F \wedge T) \Rightarrow F \equiv F \Rightarrow F \equiv T$  ✓
- ۴)  $q \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r) \equiv T \Rightarrow (T \Rightarrow F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$  \*

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

نکته ۱: به روش عضوگیری اثبات می شود که:

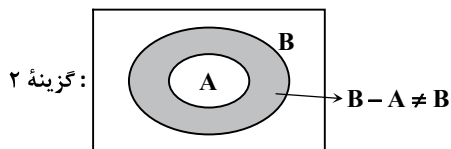
$$1) A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow \begin{cases} (A \cap C) \subseteq (B \cap D) \\ (A \cup C) \subseteq (B \cup D) \end{cases}, (A \cap C) \subseteq (B \cup D)$$

$$2) A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} (A \cap C) \subseteq (B \cap C) \\ (A \cup C) \subseteq (B \cup C) \end{cases}, (A \cap C) \subseteq (B \cup C)$$

نکته ۲: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آنگاه اشتراک آنها تهی است و در نتیجه، داریم:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$$

با توجه به نکات، گزینه های ۱، ۳ و ۴ درست هستند، اما گزینه ۲ نادرست است.



نکته ۱: اگر عددی به تصادف از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  انتخاب کنیم، احتمال اینکه بر عدد طبیعی k بخش پذیر باشد (مضرب k باشد)، برابر است با:

$$\frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n}$$

نکته ۲: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، احتمال اینکه فقط یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد یعنی فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد برابر است با:

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

اگر مجموعه A را اعداد بخش پذیر بر ۴ و مجموعه B را اعداد بخش پذیر بر ۶ در نظر بگیریم، واضح است که مجموعه  $A \cap B$  اعداد بخش پذیر بر ۱۲ هستند و داریم:

$$n(A) = \left[ \frac{500}{4} \right] - \left[ \frac{200}{4} \right] = 125 - 50 = 75$$

$$n(B) = \left[ \frac{500}{6} \right] - \left[ \frac{200}{6} \right] = 83 - 33 = 50$$

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{500}{12} \right] - \left[ \frac{200}{12} \right] = 41 - 16 = 25$$

$$n(S) = 500 - 200 = 300$$

همچنین، تعداد اعضای فضای نمونه ای، برابر است با:

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{75}{300} + \frac{50}{300} - 2\left(\frac{25}{300}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - 2\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}$$

و در نهایت، احتمال مورد نظر برابر خواهد بود با:

نکته: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ «حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.»}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ «فقط A رخ دهد.»}$$

$$P(A') = 1 - P(A) \text{ «A رخ ندهد.»}$$

نکته:

$$\text{قانون دمورگان: } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

به کمک نکات فوق، داریم:

$$P(A' \cup B') = 0.8 \Rightarrow P(A \cap B)' = 0.8 \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0.8 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2$$

$$P(A \cup B) = P(A' \cap B')' = P(B - A)' = 1 - P(B - A) = 0.75 \Rightarrow P(B - A) = 0.25$$

$$\Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0.25 \Rightarrow P(B) - 0.2 = 0.25 \Rightarrow P(B) = 0.45$$

$$P(A' \cup B) = P(A \cap B')' = P(A - B)' = 1 - P(A - B) = 0.65 \Rightarrow P(A - B) = 0.35$$

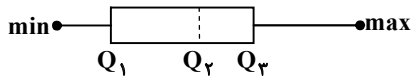
$$\Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0.35 \Rightarrow P(A) - 0.2 = 0.35 \Rightarrow P(A) = 0.55$$

و اینک احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.55 + 0.45 - 0.2 = 0.8$$

۳۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)

نکته ۱: نمودار جعبه‌ای، نموداری است به شکل زیر که پراکندگی داده‌ها را با پنج معیار کوچک‌ترین داده، چارک اول، میانه، چارک سوم و بزرگ‌ترین داده، نمایش می‌دهد:



نکته ۲: در داده‌های مرتب شده صعودی اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده وسط میانه است و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسط، میانه است.

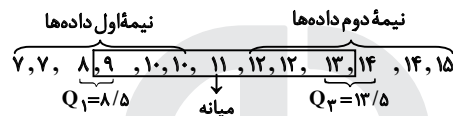
نکته ۳: میانه نیمه اول داده‌ها را چارک اول ( $Q_1$ ) و میانه نیمه دوم داده‌ها را چارک سوم ( $Q_3$ ) می‌نامیم.

نکته ۴: میانگین و واریانس  $n$  داده  $x_1$  تا  $x_n$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{میانگین}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{واریانس}$$

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کرده، میانه و چارک‌ها را مشخص می‌کنیم:



واضح است که داده‌های ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۱۰، ۹ داخل جعبه قرار دارند. اینک واریانس این داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{13 + 12 + 12 + 11 + 10 + 10 + 9}{7} = \frac{77}{7} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(13-11)^2 + 2(12-11)^2 + (11-11)^2 + 2(10-11)^2 + (9-11)^2}{7} = \frac{4 + 2(1) + 0 + 2(1) + 4}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

۳۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکته ۱: برای تعیین باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۱۱ ارقام آن عدد را از راست به چپ یکی در میان + و - قرار داده و حاصل را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم.

نکته ۲: باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.

نکته ۳: برای حل معادله هم‌نهستی، به طرفین معادله مضربی از پیمانانه را کم یا زیاد می‌کنیم تا دو طرف قابل تقسیم بر ضریب  $x$  باشند، آنگاه با تقسیم طرفین بر ضریب  $x$ ، دسته جواب  $x$  به دست می‌آید.

$$ac \equiv bc \xrightarrow[+c]{(c,m)=d} a \equiv b \quad \text{نکته ۴}$$

ابتدا به کمک قاعده بخش پذیری بر ۱۱، معادله هم‌نهستی را ساده می‌کنیم:

$$(8-6+4-2+9-7+5-3+1)1401x \equiv 3^{11} \Rightarrow 91401x \equiv 3^{11} \Rightarrow 32802x \equiv 3^{11} \xrightarrow{+3^{11}} 32791x \equiv 1$$

اینک بایستی باقی‌مانده تقسیم  $3^{2791}$  را بر ۱۱ به دست آوریم:

$$3^2 = 9 \equiv -2 \xrightarrow{\text{توان 5}} 3^{10} \equiv -32 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان 279}} 3^{2790} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{2791} \equiv 3$$

پس معادله هم‌نهستی را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$3x \equiv 1 \equiv 12 \xrightarrow[(3,11)=1]{+3} x \equiv 4 \Rightarrow x = 11k + 4 \xrightarrow{k=1} x = 15$$

پس کوچک‌ترین جواب طبیعی دو رقمی معادله،  $a = 15$  است و اینک بایستی باقی‌مانده تقسیم  $15^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) را بر ۹ به دست آوریم. به کمک قاعده بخش پذیری بر ۹ داریم:

$$15^n \equiv (1+5)^n \equiv 6^n \Rightarrow \begin{cases} n=1: \text{باقی‌مانده بر } 9 = 6 \\ n \geq 2: \text{باقی‌مانده بر } 9 = 0 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۳۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* ریاضیات گسسته (فصل ۱ درس ۲)

نکته: طبق قضیه تقسیم برای عدد صحیح  $a$  و عدد طبیعی  $b$  اعداد صحیح و منحصر به فرد  $q$  و  $r$  وجود دارند، به طوری که  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$  که در آن  $a$  را مقسوم،  $b$  را مقسوم علیه،  $q$  را خارج قسمت و  $r$  را باقی مانده می‌گوییم. طبق قضیه تقسیم، داریم:

$$683 = 17b + r ; 0 \leq r < b$$

$$r = 683 - 17b \Rightarrow 0 \leq 683 - 17b < b \Rightarrow \begin{cases} 683 - 17b \geq 0 \Rightarrow 17b \leq 683 \Rightarrow b \leq 40 \\ 683 - 17b < b \Rightarrow 18b > 683 \Rightarrow b \geq 38 \end{cases} \Rightarrow 38 \leq b \leq 40$$

$$\Rightarrow b \in \{38, 39, 40\}$$

مجموع این سه عدد، برابر است با:

$$38 + 39 + 40 = 117$$

که رقم یکان آن برابر ۷ است.

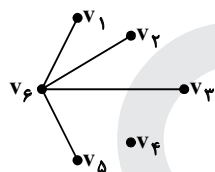
۳۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

نکته ۱: همسایگی بسته رأس  $v$  در گراف  $G$  را با  $N_G[v]$  نمایش می‌دهیم و مجموعه رئوس مجاور با  $v$  همراه با خود رأس  $v$  است.

نکته ۲: تعداد گراف‌های ساده با  $p$  رأس متمایز و  $q$  یال برابر است با  $\binom{p}{2}^q$ .

از آنجایی که  $|N_G[v_6]| = 5$ ، یعنی رأس  $v_6$  با ۴ رأس دیگر مجاور است. پس ابتدا از میان رئوس  $v_1$  تا  $v_5$  تعداد ۴ رأس انتخاب می‌کنیم تا به  $v_6$  وصل کنیم:



$$\binom{5}{4} = 5$$

حال که تکلیف رأس  $v_6$  روشن شد، کفایت از بین کلیه یال‌های موجود بین رئوس  $v_1$  تا  $v_5$  تعداد ۲ یال انتخاب کنیم:

$$\binom{\binom{5}{2}}{2} = \binom{10}{2} = 45$$

پس تعداد کل گراف‌های قابل رسم برابر است با:

$$5 \times 45 = 225$$

۳۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۲)

نکته ۱: در هر گراف با  $n$  رأس و ماکزیمم درجه  $\Delta$ ، یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری ( $\gamma$ ) برابر است با  $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$  یعنی  $\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ .  
نکته ۲: در هر گراف ساده، تعداد رئوس فرد، عددی زوج است.

می‌دانیم در هر گراف از مرتبه  $n$  با درجه ماکزیمم  $\Delta$  و عدد احاطه‌گری  $\gamma$  داریم:  $\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ ؛ بنابراین در این گراف ۳-منظم مرتبه  $n$ ، داریم:

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{3+1} \right\rceil \Rightarrow 5 \geq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \Rightarrow 4 < \frac{n}{4} \leq 5 \Rightarrow 16 < n \leq 20 \Rightarrow n \in \{17, 18, 19, 20\}$$

اما دقت کنید که  $n$  نمی‌تواند اعداد ۱۷ و ۱۹ باشد، زیرا در این صورت تعداد رئوس فرد، فرد است که غیر ممکن می‌باشد، پس مقدار  $n$  می‌تواند فقط اعداد ۱۸ و ۲۰ باشد.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۳۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* ریاضی ۱ (فصل ۶، درس‌های ۱ و ۲)

نکته ۱ (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول  $m$  روش و برای هر کدام از این  $m$  روش، مرحله دوم را بتوان به  $n$  روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با  $m \times n$  روش قابل انجام است.

نکته ۲: هر حالت از کنار هم قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز را یک جایگشت  $n$  تایی می‌گوییم که تعداد حالات آن برابر است با  $n!$ :

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

بایستی دو حرف R کنار هم، دو حرف S کنار هم، دو حرف E کنار هم و حروف P و U نیز کنار هم قرار گیرند که در این صورت تعداد جایگشت‌ها برابر است با:



$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

نکته ۱: یک جدول مربعی  $n \times n$  را مربع لاتین گوئیم هرگاه در هر سطر و هر ستون آن همه اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  موجود بوده و در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری نداشته باشیم.  
 نکته ۲: فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع  $A$  و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع  $B$  (و یا برعکس) است. در این صورت گوئیم دو مربع لاتین  $A$  و  $B$  «متعامدند» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.  
 نکته ۳: یک روش تشخیص برای متعامد بودن دو مربع لاتین آن است که هر دو درایه یکسان از یکی از مربع‌ها، باید درایه‌های متناظر متمایز در مربع دیگر داشته باشند، در غیر این صورت دو مربع متعامد نیستند.  
 با توجه به نکات و تعریف مربع لاتین و شرط متعامد بودن آن، دو مربع به صورت‌های زیر تکمیل می‌شوند:

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

یا

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

که در هر دو حالت داریم:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \Rightarrow x + y + z = 6 \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \Rightarrow x + y + z = 6 \\ z = 2 \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

۴۰- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر  $kn + 1$  کبوتر یا بیشتر بخواهند حداکثر در  $n$  لانه جای گیرند، در این صورت طبق تعمیم اصل لانه کبوتری لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل  $k + 1$  کبوتر جای می‌گیرند.  
 گراف کامل مرتبه ۸ تعداد  $\frac{8 \times 7}{2} = 28$  یال دارد و می‌خواهیم این ۲۸ یال را با ۳ رنگ، رنگ آمیزی کنیم، پس طبق اصل لانه کبوتری ۲۸ کبوتر داریم و ۳ لانه، پس:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 3 \\ \hline 27 & 9 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 9 + 1 = 10$$

یعنی حداقل ۱۰ یال هم‌رنگ هستند و کمترین مقدار  $m$  برابر ۱۰ است.

## “ فیزیک ”

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۱ (فصل ۱)

۴۱- پاسخ: گزینه ۲

برای کاهش خطا در اندازه‌گیری هر کمیت، معمولاً اندازه‌گیری آن را چند بار تکرار می‌کنند. میانگین عددهای حاصل از اندازه‌گیری به‌عنوان نتیجه اندازه‌گیری گزارش می‌شود. البته در میان عددهای متفاوت، اگر یک یا دو عدد اختلاف زیادی با بقیه داشته باشند، در میانگین‌گیری به حساب نمی‌آیند. در نتایج این آزمایش، عدد  $8/4 \text{ cm}$  اختلاف زیادتری با بقیه دارد و نباید در محاسبه میانگین در نظر گرفته شود.

$$\ell = \frac{10/1 + 9/9 + 10/2 + 10/2 + 10/0}{5} = \frac{50/4}{5} = 10/08 \text{ cm}$$

از آنجا که دقت وسیله اندازه‌گیری  $0/1 \text{ cm}$  است، نتیجه نهایی باید به صورت  $\ell = 10/1 \text{ cm}$  گزارش شود.

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۱ (فصل ۲)

۴۲- پاسخ: گزینه ۱

برای حل ساده‌تر، در رابطه  $P = P_0 + \rho gh$ ، هر سه جمله  $P$ ،  $P_0$  و  $\rho gh$  را بر حسب  $\text{cmHg}$  حساب می‌کنیم.

$$\rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2 \Rightarrow 1/2 \times 68 = 13/6 \times h_2 \Rightarrow h_2 = 6 \text{ cm} \Rightarrow P_{\text{مایع}}(6 \text{ cm}) = 6 \text{ cmHg}$$

$$P_{\text{کف ظرف}} = 64 + 6 = 70 \text{ cmHg}$$

$$\frac{2}{100} \times 70 = 1/4 \Rightarrow P_{\text{جدید کف ظرف}} = 70 - 1/4 = 68/6 \text{ cmHg}$$

$$P_{\text{جدید مایع}} = 4/6 \text{ cmHg} \Rightarrow P_{\text{جدید مایع}} + P_{\text{جدید مایع}} = P_{\text{هوای}} \Rightarrow 68/6 = 64 + P_{\text{جدید مایع}} \Rightarrow P_{\text{جدید مایع}} = 4/6 \text{ cmHg}$$

$$\rho_1 gh'_1 = \rho_2 gh_2 \Rightarrow 1/2 \times h'_1 = 13/6 \times 4/6 \Rightarrow h'_1 = 52 \text{ cm}$$

$$\Delta h = 68 - 52 = 16 \text{ cm}$$

اختلاف ارتفاع مایع در دو حالت را به دست می‌آوریم:

۴۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۱ (فصل ۲)

ابتدا فشار ۱۲ سانتی متر از مایع درون ظرف را بر حسب سانتی متر جیوه به دست می آوریم:

$$P_{\text{مایع}} = P_{\text{جیوه}} \Rightarrow (\rho gh)_{\text{مایع}} = (\rho gh)_{\text{جیوه}}$$

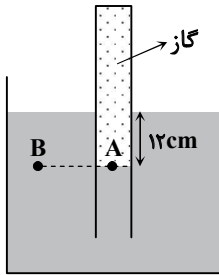
$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{(\rho h)_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} = \frac{1/7 \times 12}{13/6} = 1/5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow P_{\text{مایع}} = 1/5 \text{ cmHg}$$

در یک مایع ساکن، نقاط هم تراز هم فشارند.

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_{\text{مایع}} + P_0$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} = 1/5 + 76 = 77/5 \text{ cmHg}$$



۴۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$W_t = \Delta K: \text{ قضیه کار- انرژی جنبشی}$$

$$\Rightarrow W_{mg} + W_{\text{مقاومت هوا}} + W_{\text{نیروی بالا برنده}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow -mgh + (-f_D h) + W_{\text{نیروی بالا برنده}} = \frac{1}{2} \times 200 \times (2^2 - 2^2) = 0$$

$$\Rightarrow W_{\text{نیروی بالا برنده}} = (mg + f_D)h$$



$$P_{\text{av}} = \frac{(mg + f_D)h}{\Delta t} = (mg + f_D)v = (200 + 40) \times 2 = 480 \text{ W} = 4/8 \text{ kW}$$

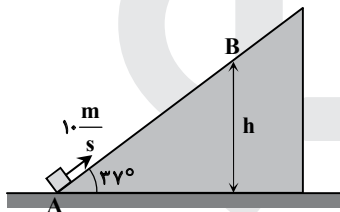
▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۱ (فصل ۳)

۴۵- پاسخ: گزینه ۴

$$AB = 5 \text{ m} \Rightarrow h = 5 \sin 37^\circ = 3 \text{ m}$$

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \begin{cases} W_{fk} + W_{mg} = K_B - K_A & \text{در مسیر بالا رفتن} \\ W_{fk} + W'_{mg} = K'_A - K_B & \text{در مسیر برگشتن} \end{cases}$$

منظور از  $W'_{mg}$ ، کار نیروی وزن در مسیر برگشت و منظور از  $K'_A$ ، انرژی جنبشی وزنه در بازگشت به نقطه A است.



$$\begin{cases} W_{fk} - mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \\ W_{fk} + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفریق دو رابطه}} 2mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_1^2 + v_2^2}{4g} \Rightarrow 3 = \frac{100 + v_2^2}{40} \Rightarrow v_2^2 = 20 \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۱ (فصل ۴)

۴۶- پاسخ: گزینه ۴

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta L'}{\Delta L} = \frac{\Delta \theta'}{\Delta \theta} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\theta' - (-20)}{100 - (-20)} \Rightarrow \theta' + 20 = 72 \Rightarrow \theta' = 52^\circ \text{C}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۱ (فصل ۴)

۴۷- پاسخ: گزینه ۴

مقداری از آب ( $m_1$ ) انرژی از دست می دهد و یخ می زند و بقیه آب ( $m_2$ ) همان انرژی را می گیرد و تبخیر می شود.

$$|Q_1| = Q_2 \Rightarrow m_1 L_F = m_2 L_V \Rightarrow m_1 \times 332 \times 10^3 = m_2 \times 2490 \times 10^3 \Rightarrow m_1 = 7/5 m_2$$

جرم کل آب اولیه  $m_1 + m_2$  است.

$$\text{درصد آب یخ زده} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times 100 = \frac{7/5 m_2}{7/5 m_2 + m_2} \times 100 \approx 88\%$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۱ (فصل ۵)

۴۸- پاسخ: گزینه ۴

مقدار کار محیط روی گاز در این فرایند برابر است با مساحت سطح زیر نمودار  $P-V$ ، است.

$$W = -S = -\left(\frac{3 \times 10^5 + 1 \times 10^5}{2}\right) \times (6-2) \times 10^{-3} = -800 \text{ J}$$

$$P_B V_B = (3P_A)(3V_A) = 9P_A V_A \Rightarrow U_B = 9U_A = 9 \times 300 = 2700 \text{ J}$$

$$\Delta U = 2700 - 300 = 2400 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 2400 = Q - 800 \Rightarrow Q = 3200 \text{ J}$$

۴۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۱ (فصل ۵)

دمای گاز در ابتدا و انتهای دو فرایند AB و CD یکسان است. از آنجایی که انرژی درونی مقدار معینی گاز آرمانی فقط به دما وابسته است، خواهیم داشت:

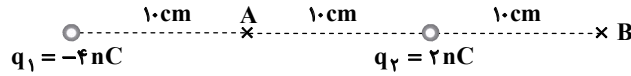
$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{CD} = -4800 \text{ J}$$

فرایند CD هم حجم است؛ پس کار آن صفر است.

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} + W_{CD} \Rightarrow -4800 = Q_{CD} + 0 \Rightarrow Q_{CD} = -4800 \text{ J}$$

علامت منفی نشان دهنده از دست دادن گرما است.

۵۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۲ (فصل ۱)



میدان خالص در نقطه A:  $E_A = E_1 + E_2 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} + k \frac{|q_2|}{r_2^2} = k \left( \frac{4 \times 10^{-9}}{10^{-2}} + \frac{2 \times 10^{-9}}{10^{-2}} \right) = 6 \times 10^{-7} \text{ k}$

میدان خالص در نقطه B:  $E_B = |E_1 - E_2| = k \frac{|q_1|}{r_1^2} - k \frac{|q_2|}{r_2^2} = k \left( \frac{4 \times 10^{-9}}{9 \times 10^{-2}} - \frac{2 \times 10^{-9}}{10^{-2}} \right) = \frac{14}{9} \times 10^{-7} \text{ k}$

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{6 \times 10^{-7} \text{ k}}{\frac{14}{9} \times 10^{-7} \text{ k}} = \frac{27}{7}$$

۵۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۲ (فصل ۱)

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت دوم: } \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \\ \text{حالت اول: } 5\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 3\vec{E} \end{array} \right\} \times (-3) \Rightarrow 3\vec{E}_1 - 3\vec{E}_2 = 0 \Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_1$$

$\vec{E}_1$  و  $\vec{E}_2$  هم جهت هستند، پس  $q_1$  و  $q_2$  ناهم نامند.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{|q_2|}{|q_1|} \cdot \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{|q_2|}{|q_1|} \times 4 \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = \frac{1}{4}$$

چون بارها ناهم نامند،  $\frac{q_2}{q_1} = -\frac{1}{4}$  است.

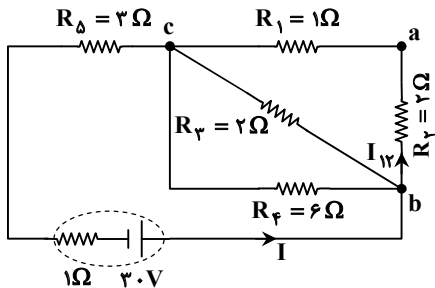
۵۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۲ (فصل ۱)

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{50}{10} = 5 \text{ V}$$

چون میدان بین صفحات خازن یکنواخت است، بنابراین:

$$V = Ed \Rightarrow 5 = E \times 2 \times 10^{-2} \Rightarrow E = \frac{5}{2 \times 10^{-2}} = 250 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

۵۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۲ (فصل ۲)



$$\left. \begin{array}{l} R_{12} = R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3 \Omega \\ \frac{1}{R_{1234}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow R_{1234} = 1 \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow R_{eq} = 1 + 3 = 4 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{20}{4 + 1} = 4 \text{ A}$$

$$V_b - V_c = R_{1234} I = 1 \times 4 = 4 \text{ V}$$

$$V_b - V_c = R_3 I_3 \Rightarrow 4 = 2 I_3 \Rightarrow I_3 = 2 \text{ A}$$

$$V_b - V_a = R_5 I_3 = 2 \times 2 = 4 \text{ V}$$

$$R_{1,2} = R_1 + R_2 = 2/4 + 3/6 = 6\Omega$$

$$\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_{1,2}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \Rightarrow R_{1,2,3} = 4\Omega$$

$$R_{eq} = R_{1,2,3} + R_4 = 4 + 1/5 = 5/5\Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{18}{5/5 + 0/5} = 3A$$

$$\begin{cases} I = I_3 + I_{1,2} \Rightarrow 3 = I_3 + I_{1,2} \\ R_3 I_3 = R_{1,2} I_{1,2} \Rightarrow 12 I_3 = 6 I_{1,2} \end{cases} \Rightarrow I_3 = 1A$$

چون LDR و کلید الکترونیکی موازی اند، اختلاف پتانسیل آن‌ها با هم برابر است؛ بنابراین کلید هنگامی فعال می‌شود که ولتاژ LDR بزرگ‌تر یا مساوی ۶ ولت باشد.

$$V_{LDR} + V_R = \mathcal{E} \Rightarrow V_{LDR} + 2 \cdot I = 10 \Rightarrow V_{LDR} = 10 - 2 \cdot I$$

$$V_{LDR} \geq 6V \Rightarrow 10 - 2 \cdot I \geq 6 \Rightarrow 2 \cdot I \leq 4 \Rightarrow I \leq 0.2A$$

یعنی اگر جریان مدار کمتر یا مساوی ۰/۲ A شود، کلید فعال خواهد شد؛ بنابراین داریم:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \leq 0.2 \Rightarrow \frac{10}{20 + R_{LDR}} \leq 0.2 \Rightarrow 10 \leq 4 + 0.2 R_{LDR} \Rightarrow R_{LDR} \geq 30\Omega$$

پس مقاومت LDR باید بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰Ω باشد تا کلید فعال شود. با توجه به نمودار، به‌ازای روشنایی کمتر از a این اتفاق رخ می‌دهد.

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم با توجه به قاعده دست راست به سمت پایین بوده و اندازه این نیرو برابر است با:

$$F_B = ILB \sin \theta = 2 \times 0.4 \times 10^{-2} \times 1 = 8 \times 10^{-3} N$$

چون سیم در حال تعادل است، مجموع نیروی نیروی سنج‌ها برابر مجموع دو نیروی  $\vec{F}_B$  و وزن سیم خواهد بود؛ پس:

$$2F_{\text{سنج}} = mg + F_B \Rightarrow F_{\text{سنج}} = \frac{mg + F_B}{2} \Rightarrow F_{\text{سنج}} = \frac{5 \times 10^{-3} \times 10 + 8 \times 10^{-3}}{2} = 29 \times 10^{-3} N = 29 mN$$

جهت میدان مغناطیسی دو حلقه در مرکز آن‌ها مخالف یکدیگر بوده و اندازه میدان حاصل از حلقه کوچک‌تر، بیشتر است (چرا؟)، پس در مورد میدان مغناطیسی برآیند می‌توان نوشت:

$$B_T = B_{\text{حلقه بزرگ}} - B_{\text{حلقه کوچک}} = \frac{\mu_0 I}{2 r_{\text{بزرگ}}} - \frac{\mu_0 I}{2 r_{\text{کوچک}}} = \frac{\mu_0 I}{2} \left( \frac{1}{r_{\text{کوچک}}} - \frac{1}{r_{\text{بزرگ}}} \right)$$

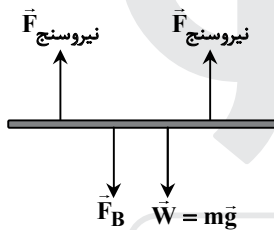
$$\xrightarrow{\text{برحسب سانتی‌متر}} B_T = \frac{\mu_0}{2} \times 6 \times \left( \frac{100}{r} - \frac{100}{r+1} \right) \Rightarrow \pi \times 10^{-5} = 2\pi \times 10^{-7} \times 600 \times \left( \frac{1}{r(r+1)} \right)$$

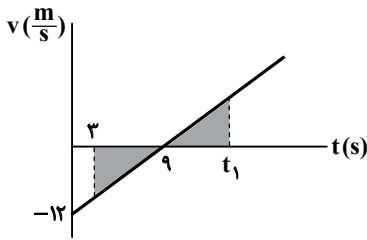
$$\Rightarrow r(r+1) = 12 \Rightarrow r^2 + r - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = -4 \text{ غق ق} \end{cases} \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

زاویه بین میدان و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه ۶۰° است.

$$|\vec{\mathcal{E}}| = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \left| -1 \times \frac{\Delta(BA \cos \theta)}{\Delta t} \right| = \left| -1 \times B C \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} \right| = 0.3 \times \cos 60^\circ \times 0.2 = 3 \times 10^{-3} V = 3 mV$$

در زمان‌هایی که حلقه وارد میدان می‌شود یا از آن خارج می‌شود، شار عبوری از حلقه تغییر می‌کند؛ لذا نیروی محرکه در حلقه القا می‌شود. ولی در زمانی که تمام حلقه درون میدان است و درون میدان حرکت می‌کند، با حرکت آهسته شار مغناطیسی ثابت است، پس نیروی محرکه‌ای القا نمی‌شود.





۶۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۱)

اگر متحرک دو بار از یک محل بگذرد، جابه جایی آن در فاصله زمانی بین این دو لحظه صفر است. از آنجا که جابه جایی برابر است با مساحت محصور بین منحنی سرعت- زمان و محور افقی باید اندازه مساحت های مثلث های هاشورزده شکل مقابل با هم برابر باشد که با توجه به تشابه مثلث ها معلوم می شود دو مثلث برابر (هم نهشت) هستند.

$$t_1 - 9 = 9 - 3 \Rightarrow t_1 = 15 \text{ s}$$

۶۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۱)

شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در لحظه  $t$  برابر سرعت در آن لحظه است. بنابراین سرعت در لحظه  $t = 3 \text{ s}$  برابر  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است. در بازه صفر تا  $t = 3 \text{ s}$  داریم:

$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t \Rightarrow 6 - 3 = \left(\frac{-4 + v_0}{2}\right) \times 3 \Rightarrow -4 + v_0 = 2 \Rightarrow v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow -4 = 3a + 6 \Rightarrow -10 = 3a \Rightarrow a = -\frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{t=9\text{s}} x = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{10}{3}\right) \times 81 + (6 \times 9) + 3 = -78 \text{ m} \Rightarrow |x| = 78 \text{ m}$$

۶۲- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۱)

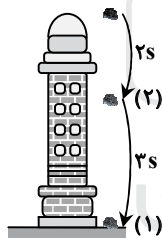
نقطه A را مبدأ محور مکان فرض می کنیم.

چون متحرک تغییر جهت داده است تا دو بار از نقطه B عبور کند، شتاب حرکت در خلاف جهت سرعت اولیه است.

$$x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + v_0t - x_B = 0$$

$t_1$  و  $t_2$  ریشه های این معادله، زمان هایی هستند که ذره از مکان B می گذرد.

$$t_1 t_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow t_1 t_2 = \frac{-x_B}{\frac{1}{2}a} = \frac{-2x_B}{a} \Rightarrow a = \frac{-2x_B}{t_1 t_2} = \frac{-2 \times 7/5}{3 \times 5} = -\frac{1}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



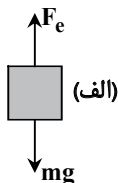
۶۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۱)

بیشترین فاصله دو سنگ زمانی اتفاق می افتد که سنگ اول به زمین می رسد. روشن است که سنگ دوم ۳ ثانیه بعد از سنگ اول به زمین می رسد، پس هر سنگ ۵ s طول می کشد تا به زمین برسد.

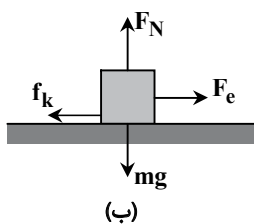
$$v = gt = 10 \times 5 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

جهت مثبت محور  $y$  رو به پایین در نظر گرفته شده است.

۶۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۲)



رابطه (۱)  $(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_e - mg = 0 \Rightarrow F_e = mg \Rightarrow kx_1 = mg$  در شکل (الف)



رابطه (۲)  $(F_{\text{net}})_x = 0 \Rightarrow F_e - f_k = 0 \Rightarrow f_k = kx_2 \xrightarrow{F_N = mg} \mu_k mg = kx_2$  در شکل (ب)

$$\frac{\mu_k mg}{mg} = \frac{kx_2}{kx_1} \Rightarrow \mu_k = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \mu_k = 0.4$$

از تقسیم دو رابطه (۱) و (۲) داریم:

بر شخصی که درون آسانسور قرار دارد، همواره نیروی وزن از طرف زمین (روبه پایین) و نیروی عمودی تکیه‌گاه از طرف ترازو (روبه بالا) وارد می‌شود. عدد ترازو همواره با نیروی عمودی تکیه‌گاه ( $F_N$ ) برابر است؛ چراکه واکنش همین نیرو بر ترازو سبب می‌شود که فنر ترازو فشرده شود و عددی را نشان دهد. حال چون  $F_N = 600\text{N}$  بیشتر از وزن شخص یعنی  $W = 500\text{N}$  است، برآیند نیروهای وارد بر شخص به‌طرف بالا و برابر  $100\text{N}$  است:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 100 = 50 \cdot a \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

به‌طرف بالا

لازم به ذکر است که جهت شتاب با جهت حرکت آسانسور می‌تواند متفاوت باشد.

$$F_{\text{net}} = m \frac{v^2}{r} = \frac{GM_e m}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e + h}} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{R_e + \frac{1}{3}R_e}{R_e + \frac{1}{6}R_e}} = \sqrt{\frac{6 \times 4}{3 \times 7}} = \sqrt{\frac{8}{7}}$$

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{m_B}{m_A} \cdot \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7} = \frac{4}{7}$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (10\pi)^2 \times (0.05)^2 = 0.4 \times 100 \times \pi^2 \times \frac{5 \times 5}{10^4} = 1\text{J}$$

$$U = 0.4\text{J} \Rightarrow K = E - U = 1 - 0.4 = 0.6\text{J}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow 0.6 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m/s}$$

دوره و بسامد آونگ ساده به جرم گلوله آن بستگی ندارد.

$$\left. \begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \\ T_2 &= 2T_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_2 = 4L_1 \Rightarrow L_1 + 4\lambda = 4L_1 \Rightarrow L_1 = 16\text{cm} = 0.16\text{m}$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.16}{10}} = 2\sqrt{0.16} = 2 \times 0.4 = 0.8\text{s}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 10\text{cm} \Rightarrow \lambda = 20\text{cm} = 0.2\text{m}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = v \cdot T \Rightarrow 0.2 = 20 \cdot T \Rightarrow T = 0.01\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.01} = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

نقطه M در این لحظه از وضع تعادل می‌گذرد، پس تندی آن  $v_{\text{max}}$  است.

$$v_{\text{max}} = A\omega = 5 \times 10^{-3} \times 200\pi \Rightarrow v_{\text{max}} = \pi = 3.14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

با توجه به جهت انتشار موج، نقطه M وضعیت نوسانی نقاط سمت راست خود را دنبال می‌کند؛ یعنی پایین می‌رود.

$$v_{\text{max}} = A\omega \Rightarrow v_{\text{max}_2} = 2v_{\text{max}_1} \Rightarrow A_2\omega_2 = 2A_1\omega_1 \xrightarrow{A_2 = \frac{3}{2}A_1} \omega_2 = \frac{4}{3}\omega_1 \xrightarrow{\omega = 2\pi f} f_2 = \frac{4}{3}f_1$$

$$\lambda_1 = 2\lambda_2 \Rightarrow \frac{v_1}{f_1} = \frac{2v_2}{f_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow v_2 = \frac{2}{3}v_1$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\mu_2 = \mu_1} \xrightarrow{v_2 = \frac{2}{3}v_1} F_2 = \frac{16}{81}F_1$$

۷۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۴)

- آزمایش یانگ اگرچه موجی بودن نور را بیان می‌کند، اما در مورد اینکه نور موج الکترومغناطیسی است، نشانه‌ای ارائه نمی‌کند (از نظر تاریخی این آزمایش قبل از نظریه الکترومغناطیسی ماکسول مطرح شده است).
  - آزمایش یانگ باید با نور تک‌رنگ انجام شود تا نوارهای روشن و تاریک به خوبی دیده شوند.
  - فاصله نوارها از یکدیگر متناسب با طول موج است.
  - در آزمایش یانگ پراش هم نقش دارد. (پخش شدن امواج نور پس از عبور از شکاف‌ها)
- ۷۲- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۴)

زاویه تابش و زاویه شکست، زاویه میان پرتوی موج با خط عمود بر مرز دو محیط است، پس در اینجا  $60^\circ$  و  $37^\circ$  متمم این زوایا هستند.

$$\theta_i = \theta_1 = 90 - 60 = 30^\circ \quad \theta_r = \theta_2 = 90 - 37 = 53^\circ \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{\sin 53^\circ} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{8}$$

در تغییر محیط، بسامد موج عوض نمی‌شود؛ پس طول موج به همان نسبت تندی انتشار موج تغییر می‌کند.  $(\lambda = \frac{v}{f})$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{8}{5}$$

۷۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۵)

$$P \cdot \Delta t = n \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow 10 \times 3600 = n \times \frac{1200}{660} \times 1/6 \times 10^{-19}$$

$$\Rightarrow n = 1/2 \times 10^{23}$$

مساحت کره =  $4\pi d^2$  مساحت روزنه =  $A \circ$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{2} \times 10^{23} \times \frac{S_{\text{روزنه}}}{S_{\text{سطح کره}}} = \frac{1}{2} \times 10^{23} \times \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{10^{-2}}{10^2}\right)^2 \times 1/2 \times 10^{23} = 3 \times 10^{14}$$

۷۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۵)

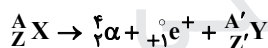
$$hf = E_U - E_L = -\frac{E_R}{n_U} - \left(-\frac{E_R}{n_L}\right) = E_R \left(\frac{1}{n_L} - \frac{1}{n_U}\right)$$

توجه کنید که طول موج‌های مربوط به گذار از ترازهای ۳ و ۴ و ۵ و ۶ به تراز ۲ در ناحیه مرئی طیف هستند، پس گزینه‌های ۲ و ۴ نادرست هستند. (طول موج  $\frac{2944}{3}$  از ۱۰۰ نانومتر کمتر و در ناحیه فرابنفش است.) پس با توجه به گزینه‌ها  $n_L = 1$  است:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_R \left(1 - \frac{1}{n_U}\right) \Rightarrow \frac{1242}{\frac{2944}{3} \times 13/5} = 1 - \frac{1}{n_U} \Rightarrow \frac{1}{n_U} = 1 - \frac{1242 \times 30}{2944 \times 13/5} = 1 - \frac{92 \times 30}{2944} = 1 - \frac{30}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_U} = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow n_U = 16$$

۷۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده \* فیزیک ۳ (فصل ۶)



$$\left. \begin{aligned} A &= 4 + 0 + A' \Rightarrow A' = A - 4 \\ Z &= 2 + 1 + Z' \Rightarrow Z' = Z - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{۳ پروتون و ۱ نوترون از هسته کم شده است}$$

## شیمی ۶۶

۷۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۲

- ترکیب گزینه ۴، ناقصی است و نقطه جوش پایین تری نسبت به سایر ترکیب‌ها دارد.
- بین گزینه‌های ۲ و ۳، نقطه جوش  $C_7H_5OH$  به دلیل جرم مولی بیشتر، بالاتر است. بین گزینه‌های ۱ و ۳ که ایزومر یکدیگرند، نقطه جوش  $C_7H_5OH$  (اتانول) به دلیل توانایی برقراری پیوند هیدروژنی بالاتر از  $CH_3-O-CH_3$  (دی‌متیل اتر) است.

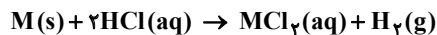
۷۷- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۲

- نفت سفید، شامل آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ کربن است و این آلکان‌ها دارای ۲۲ تا ۳۲ هیدروژن هستند. بررسی گزینه‌های نادرست:
- گزینه ۱: قبل از پالایش نفت خام، نمک و اسید آن را جدا می‌کنند.
- گزینه ۳: آلکان‌ها که هیدروکربن‌هایی سیر شده هستند، بخش عمده نفت خام را تشکیل می‌دهند.
- گزینه ۴: بیش از ۹۰ درصد نفت خام، صرف سوزاندن و تأمین انرژی می‌شود.

۷۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۲

چون منیزیم واکنش پذیری بیشتری دارد، سرعت واکنش آن با محلول اسید بیش تر است و در زمان برابر، حجم گاز هیدروژن حاصل در ظرف B بیش تر خواهد بود. در ضمن چون ظرفیت هر دو فلز +۲ است، در پایان واکنش، حجم گاز تولیدی در هر دو واکنش یکسان خواهد بود.



۷۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۲

فرمول مولکولی نفتالن،  $C_{10}H_8$  و فرمول مولکولی هگزین،  $C_6H_{10}$  است.

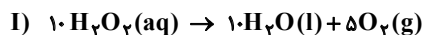
$$\frac{\text{تعداد اتم‌های هیدروژن نفتالن}}{\text{تعداد اتم‌های کربن نفتالن}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\text{تعداد اتم‌های هیدروژن هگزین}}{\text{تعداد اتم‌های کربن هگزین}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

۸۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۲

باید ضرایب مواد در واکنش‌ها را به گونه‌ای تغییر دهیم که ضریب O در معادله تجزیه  $H_2O_2$ ، ۵ برابر ضریب CO در تجزیه  $NaHCO_3$  باشد.

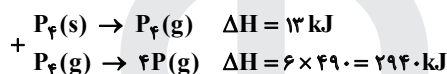


$$\frac{II \text{ حاصل از واکنش } H_2O}{I \text{ حاصل از واکنش } H_2O} = \frac{1(H_2O)}{10(H_2O)} = 0.1$$

۸۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۲

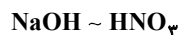
در فسفر سفید، ۶ پیوند P-P وجود دارد:



$$\Delta H = \Delta H_{P-P}(P_4) + \Delta H_{\text{تصدید}}(P_4) = 2940 + 13 = 2953 \text{ kJ}$$

۸۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۱



$$NaOH \text{ مول} = \frac{200}{1000} L \times \frac{1/3 \text{ mol}}{1L} = 0.0667 \text{ mol} \Rightarrow \text{mol } HNO_3 = 0.0667 \text{ mol}$$

$$V = 150 \text{ mL} \Rightarrow 0.0667 = \left(\frac{100}{1000} \times 2\right) + \left(\frac{V}{1000} \times 4\right)$$

۸۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۱

یازدهمین فلز دوره چهارم جدول،  $Cu$  ۲۹ است و عبارت‌های سوم تا پنجم در مورد آن، درست بیان شده‌اند. بیستمین الکترون اتم مس، دارای  $n=3$  و  $l=2$  است.



$Cu$  ۲۹ با  $Ag$  ۴۷،  $Au$  ۷۹ و  $Rg$  ۱۱۱ هم‌گروه است و یون  $Cu^+$  فاقد الکترونی با  $n=4$  است. اکسیدهای مس،  $CuO$  و  $Cu_2O$  هستند.

۸۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۲

$C_2H_2O_4$ ، دی‌اسید و  $C_3H_8O_2$ ، دی‌الکل سازنده پلی‌استر است؛ بنابراین فرمول پلیمر به صورت  $(C_5H_6O_4)_n$  است:

$$26000 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 200 \times [(5 \times 12) + (6 \times 1) + (4 \times 16)] = 26000 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

۸۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ تا ۳ شیمی ۳

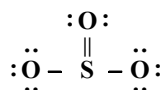
عبارت‌های اول و سوم درست هستند.

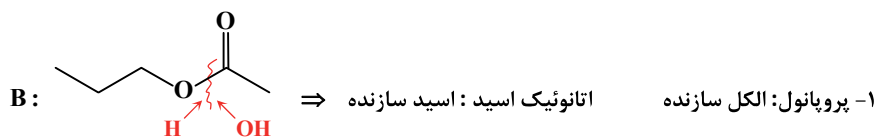
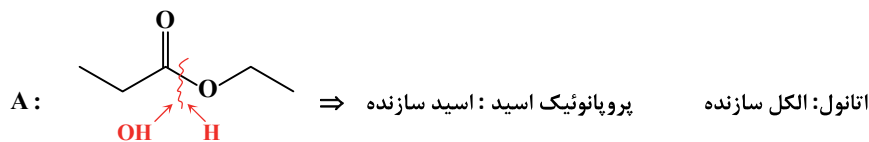
عبارت سوم: عدد اکسایش گوگرد در  $SO_3$ ، +۶ است که بالاترین عدد اکسایش ممکن برای گوگرد است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت دوم:  $SO_3$  ناقطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

عبارت چهارم: اتم مرکزی (گوگرد) در  $SO_3$ ، جفت الکترون ناپیوندی ندارد.





بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) تفاوت جرم مولی الکل سازنده A و اسید سازنده B، ۱۴ گرم بر مول است.

(ت) فرمول اسید سازنده ترکیب‌های A و B به ترتیب  $C_3H_6O_2$  و  $C_4H_8O_2$  است.

$$C_3H_6O_2: 3C + 6(+1) + 2(-2) = 0 \Rightarrow 3C = -2, \quad C_4H_8O_2: 4C + 8(+1) + 2(-2) = 0 \Rightarrow 4C = 0$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۳ ۸۷- پاسخ: گزینه ۱

$$[H_3O^+] = \sqrt{K_a \times M} = \sqrt{10^{-5} \times 10^{-1}} = 10^{-3}$$

$$pH = -\log[H_3O^+] = 3$$

اگر حجم محلول را ۱۰۰ برابر کنیم، غلظت مولی ۰/۰۱ برابر خواهد شد.

$$[H_3O^+] = \sqrt{10^{-5} \times 10^{-3}} = 10^{-4} \Rightarrow pH = 4$$

توجه کنید که اگر حجم یک اسید قوی را  $10^n$  برابر کنیم، pH محلول، n واحد زیاد می‌شود و اگر حجم اسید ضعیف را  $10^n$  برابر کنیم، pH محلول،  $\frac{n}{2}$  واحد زیاد خواهد شد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۱ ۸۸- پاسخ: گزینه ۱

در دما و فشار مشخص، حجم گاز به شمار مول‌های آن وابسته است و در شرایط STP هر مول گاز حجمی برابر با ۲۲/۴ لیتر دارد:

$$1/4 \text{ g } N_2 \times \frac{1 \text{ mol } N_2}{28 \text{ g } N_2} = 0.05 \text{ mol } N_2$$

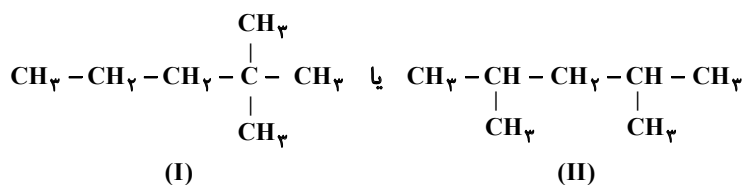
$$3/2 \text{ g } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} = 0.05 \text{ mol } O_2$$

$$\text{حجم مخلوط} = 0.15 \text{ mol گاز} \times \frac{22.4 \text{ L}}{1 \text{ mol گاز}} = 3.36 \text{ L}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۱ شیمی ۲ ۸۹- پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست هستند.

ساختار ترکیب موردنظر می‌تواند به یکی از دو شکل زیر باشد:



بررسی عبارت‌ها:

■ در هر دو حالت، ترکیب موردنظر دارای دو شاخه فرعی متیل خواهد بود.

■ دو ترکیب ممکن دارای نام‌های زیر هستند:

(I) ۲، ۲-دی‌متیل پنتان

(II) ۲، ۴-دی‌متیل پنتان

■ جهت شماره‌گذاری زنجیر اصلی در حالت (I) مهم است و از سمتی که زودتر به شاخه‌های فرعی برسد، صورت می‌گیرد.

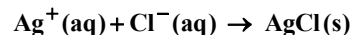
■ ترکیب موردنظر ۷ اتم کربن دارد و فرمول مولکولی آن،  $C_7H_{16}$  است.

می‌دانیم که اتانول در آب حل می‌شود، ولی یک الکل ۱۵ کربنه در آب حل نمی‌شود.



$$33/6L CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22/4L CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_{15}H_{31}OH}{15 \text{ mol } CO_2} \times \frac{228g C_{15}H_{31}OH}{1 \text{ mol } C_{15}H_{31}OH} = 22/8g C_{15}H_{31}OH$$

$$\text{جرم اتانول} = 114/8 - 22/8 = 92g$$



$$\text{مول } Cl^- \text{ در مخلوط} = 28/7g AgCl \times \frac{1 \text{ mol } AgCl}{143/5g AgCl} \times \frac{1 \text{ mol } Cl^-}{1 \text{ mol } AgCl} = 0/2 \text{ mol } Cl^-$$

$$CaCl_2 \text{ حاصل از } mol Cl^- = x \text{ mol } CaCl_2 \times \frac{2 \text{ mol } Cl^-}{1 \text{ mol } CaCl_2} = 2x \text{ mol } Cl^-$$

$$RbCl \text{ حاصل از } mol Cl^- = y \text{ mol } RbCl \times \frac{1 \text{ mol } Cl^-}{1 \text{ mol } RbCl} = y \text{ mol } Cl^-$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0/2 \\ 111x + 121y = 17/65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0/1 \text{ mol } RbCl \\ x = 0/05 \text{ mol } CaCl_2 \end{cases}$$

$$RbCl \text{ درصد جرمی} = \frac{0/1 \times 121}{17/65} \times 100 = \frac{1210}{17/65} \approx 68/5\%$$

مجموع تعداد الکترون‌های به کاررفته در ساختار لوویس (۳۲) - مجموع شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها = بار یون

اگر اتم A دارای ۵ الکترون ظرفیتی باشد، یون موردنظر آنیونی با بار ۳- است و در ترکیب کاتیون آلومینیم ( $Al^{3+}$ ) با این یون ( $AO_4^{3-}$ )، شمار کاتیون‌ها با شمار آنیون‌ها برابر است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

۱) اگر در ترکیب این یون و یون کلسیم، شمار کاتیون‌ها دو برابر شمار آنیون‌ها باشد، یعنی یون موردنظر باید دارای بار ۴- باشد که در این صورت با توجه به فرمول بالا، اتم A دارای ۴ الکترون ظرفیتی است.

۲) اگر اتم مرکزی ۷ الکترون ظرفیتی داشته باشد، بار یون چند اتمی موردنظر، با توجه به فرمول بالا ۱- است.

۳) اگر بار این یون ۱- باشد، اتم مرکزی آن طبق فرمول بالا، دارای ۷ الکترون ظرفیتی است.

	A	+	B	$\rightleftharpoons$	2C		
حالت ۱ (۷۰°C)	۲		۲		۳		$K = \frac{9}{4}$
حالت ۲ (۱۰۰°C)	۲-x		۲-x		۳+2x		$K = 9$

$$\Rightarrow \frac{(3+2x)^2}{(2-x)^2} = 9 \Rightarrow \frac{3+2x}{2-x} = 3 \Rightarrow 3+2x = 6-2x \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = 0/6 \Rightarrow [C] = 3+2(0/6) = 4/2$$

توجه: با افزایش دما، مقدار ثابت تعادل زیاد شده است، یعنی واکنش در جهت رفت جابه‌جا شده است.

ویژگی‌های «الف» و «ث» را می‌توان به ایزوتوپ  ${}^2H$  نسبت داد.

بررسی موارد نادرست:

ب و پ) این ایزوتوپ پایدار است و پرتوزا نیست.

ت) واکنش‌پذیری این ایزوتوپ با سایر ایزوتوپ‌های هیدروژن برابر است.

$$[Ne] 3s^1 \quad n+l=3$$

$$[Ne] 3s^2 \quad n+l=6$$

$$[Ne] 3s^2 3p^t \Rightarrow 6+4t=22 \Rightarrow t=4$$

$\Rightarrow$  گوگرد) S (گروه ۱۶، تناوب سوم

Na<sub>۳</sub>S : ترکیب Na با S

۹۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۱

در مقایسه غلظت‌هایی که بر مبنای جرم حل‌شونده تعریف می‌شوند، مانند ppm و درصد جرمی، هیچ‌گاه غلظت جزئی از حل‌شونده بیشتر از کل حل‌شونده نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) برای محاسبه درصد جرمی، باید جرم حل‌شونده را در ۱۰۰ گرم محلول به‌دست آوریم؛ بنابراین:

$$\text{ppm}(\text{CaCl}_2) = \frac{\text{جرم کلسیم کلرید}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 22/2 = \frac{x}{100} \times 10^6 \Rightarrow x = 2/22 \times 10^{-3}$$

(۳) با توجه به فرمول شیمیایی کلسیم کلرید (CaCl<sub>2</sub>)، پس از انحلال این ماده در آب، مقدار مول‌های تولیدی یون کلرید دو برابر یون کلسیم خواهد بود.

(۴) در هر ۱۰<sup>۶</sup> گرم از این محلول، ۲۲/۲ گرم کلسیم کلرید وجود دارد؛ بنابراین:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{22/2 \text{ g CaCl}_2}{10^6 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{1000 \text{ mL محلول}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{1 \text{ mol CaCl}_2}{111 \text{ g CaCl}_2} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

۹۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۳

بررسی گزینه‌ها:

(۱) معادله موازنه شده به صورت  $2\text{FeCl}_2(\text{aq}) + 2\text{KI}(\text{aq}) \rightarrow 2\text{FeCl}_2(\text{aq}) + \text{I}_2(\text{s}) + 2\text{KCl}(\text{aq})$  می‌باشد و تعداد الکترون‌های مبادله شده برابر است با تغییرات بار الکتریکی Fe یا I در تعداد آن‌ها که برابر ۲ الکترون است.

$$\Delta n(\text{Fe}) = 1, \text{Fe تعداد} = 2 \Rightarrow 2 \times 1 = 2$$

تعداد  $\Delta n(x) \times x$ : تعداد e<sup>-</sup> مبادله شده

$$\Delta n(\text{I}) = 1, \text{I تعداد} = 2 \Rightarrow 2 \times 1 = 2$$

(۲ و ۳) با توجه به انجام پذیر بودن واکنش، قدرت اکسندگی و کاهش‌دهنده‌ها از فرآورده‌ها بیشتر است.

قدرت اکسندگی:  $\text{Fe}^{3+} > \text{I}_2$  و قدرت کاهش‌دهنده:  $\text{I}^- > \text{Fe}^{2+}$

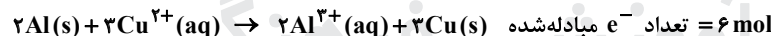
(۴) یون‌های K<sup>+</sup> و Cl<sup>-</sup> در هر دو طرف معادله به‌صورت محلول وجود دارند و غلظت آن‌ها، ثابت است، اما با مصرف I<sup>-</sup>(aq)، غلظت آن در محلول کاهش می‌یابد.

۹۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۳

از آنجایی که الکتروود M نقش آند دارد، می‌توان نتیجه گرفت فلز M کاهنده قوی تری از گاز هیدروژن است و پتانسیل استاندارد کاهش نیم‌سلول آن منفی‌تر از SHE، یعنی عددی منفی است.

با گذشت زمان، اتم‌های فلز M اکسایش یافته و به‌صورت کاتیون وارد الکترولیت می‌شوند و در مقابل، یون‌های هیدروژن الکترون گرفته و کاهش می‌یابند و خاصیت اسیدی الکترولیت نیم‌سلول استاندارد هیدروژن کاهش می‌یابد.

۹۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۳



$$(3 \times 64 - 2 \times 27) \text{ g}$$

$$6 \text{ mole } e^-$$

$$2/76 \text{ g}$$

$$x$$

$$\Rightarrow x = 0/12 \text{ mole } e^-$$

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده \* فصل ۲ شیمی ۳

حلبی (آهن + لایه نازکی از فلز قلع)	آهن گالوانیزه (آهن سفید) (آهن + لایه نازکی از فلز روی)	نوع آهن
فقط فیزیکی	فیزیکی + کاتدی	نوع حفاظت آهن
آهن	روی	آند
$\text{Fe}(\text{s}) \rightarrow \text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + 2e^-$	$\text{Zn}(\text{s}) \rightarrow \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2e^-$	نیم‌واکنش اکسایش
قلع	آهن	کاتد
$\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + 4e^- \rightarrow 4\text{OH}^-(\text{aq})$	$\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + 4e^- \rightarrow 4\text{OH}^-(\text{aq})$	نیم‌واکنش کاهش
Fe	Zn	گونه کاهنده
O <sub>۲</sub>	O <sub>۲</sub>	گونه اکسنده
آهن (III) هیدروکسید (Fe(OH) <sub>۳</sub> )	روی هیدروکسید (Zn(OH) <sub>۲</sub> )	رسوب تشکیل شده در پایان واکنش
ظروف بسته‌بندی مواد غذایی	تانکر آب و کانال کولر	کاربرد

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۲

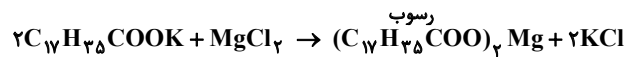
▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۳

$$\text{درصد جرمی Na}^+ \text{ در Na}_4\text{SiO}_4 = \frac{4 \times 23}{184} \times 100 = 50\%$$

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۳

ابتدا معادله واکنش را می نویسیم:



$$644\text{g صابون} \times \frac{1\text{mol صابون}}{322\text{g صابون}} \times \frac{2\text{mol KCl}}{2\text{mol صابون}} \times \frac{74/5\text{g KCl}}{1\text{mol KCl}} = 149\text{g KCl}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{74/5\text{g}}{149\text{g}} \times 100 = 50\%$$

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۴ شیمی ۳

گاز متان در اثر واکنش با بخار آب و در شرایط مناسب به گاز کربن مونوکسید و گاز هیدروژن تبدیل می شود و سپس از واکنش آن ها متانول تولید می شود.

از واکنش الکل یک عاملی با اسید آلی یک عاملی، استری با یک گروه عاملی استری تهیه می شود.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فصل ۲ شیمی ۲

هر چه تعداد اتم های کربن در یک آلکان بیشتر باشد، گرمای حاصل از سوختن ۱ مول از آن بیشتر است و هر چه تعداد اتم های کربن کمتر باشد، کربن دی اکسید کمتری در سوختن کامل آن تولید می شود.

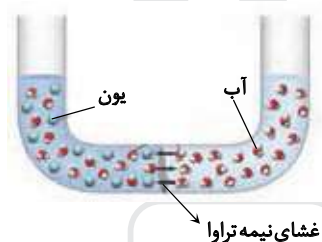
متان > اتان > پروپان > بوتان  
(CH<sub>4</sub>) > (C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>) > (C<sub>3</sub>H<sub>8</sub>) > (C<sub>4</sub>H<sub>10</sub>)

: گرمای سوختن مولی و مقدار CO<sub>2</sub> در سوختن ۱ مول

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فصل ۳ شیمی ۱

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۴

بر اساس شکل کتاب، مولکول های آب در هر دو مسیر جریان می یابند.



مؤسسه آموزشی فرهنگی