

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آزمون آزمایشی ۳۰ خرداد ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

مرحله ۱۷



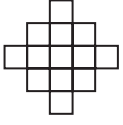
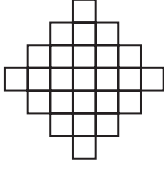
دفترچه شماره ۱



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

۱- اگر طول ضلع مربع‌های کوچک ۱ واحد باشد، با توجه به الگوی زیر محیط شکل مرحله دهم کدام است؟

				...	۷۴ (۱)
مرحله (۱)	مرحله (۲)	مرحله (۳)	مرحله (۴)		۸۰ (۲)
					۷۶ (۳)
					۸۴ (۴)

۲- اگر یکی از ریشه‌های معادله $\frac{x}{x+1} + \frac{k}{x-1} = \frac{8}{3}$ برابر ۲ باشد، ریشه دیگر این معادله کدام است؟

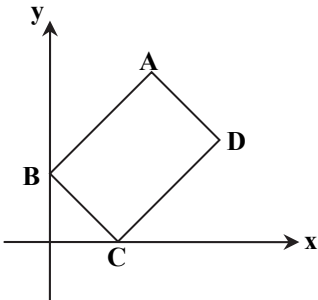
$-\frac{14}{5}$ (۴)	$\frac{14}{5}$ (۳)	$-\frac{7}{10}$ (۲)	$-\frac{7}{5}$ (۱)
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)

۳- معادله $\sqrt{3-x} = |x| + 1$ ، چند جواب دارد؟

۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادله $y = (2-m)x^2 + 3x + 1 + m$ محور طول‌ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

$m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ (۲)	$m \in (-1, 2)$ (۱)
$m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (۴)	$m \in (-2, 1)$ (۳)

۵- اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد، به طوری که $A(3, 5)$ و $B(0, 2)$ ، مختصات رأس D کدام است؟



$D(6, 3)$ (۱)
$D(6, 2/5)$ (۲)
$D(5, 3)$ (۳)
$D(5, 4)$ (۴)

۶- اگر دامنه $y = 3f(2x-1)$ بازه $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = \frac{1}{3}f(1-x) + 1$ کدام است؟

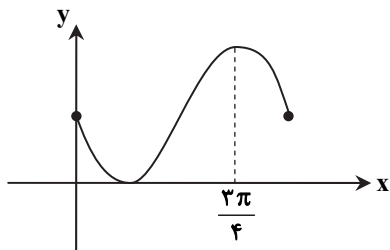
$(-3, 2]$ (۴)	$(-3, 1]$ (۳)	$(-2, 3]$ (۲)	$(-2, 4]$ (۱)
---------------	---------------	---------------	---------------

۷- اگر $3^x = 36$ و $y = \log_2 12$ ، حاصل $(y-2)(x-2)$ برابر با کدام است؟

۴ (۴)	۶ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

محل انجام محاسبات

۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = (\sin ax + \cos ax)^2$ به صورت روبه‌رو است. مقدار $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ کدام است؟



- (۱) $1/5$
- (۲) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $0/5$
- (۴) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

۹- مجموع جواب‌های معادله $\cos x(\tan x + \cot x) = -2$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$
- (۲) 2π
- (۳) 3π
- (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۱۰- جمع بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = \cos 2x + 2\sin x + a$ برابر $\frac{5}{2}$ است. a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۲) 2
- (۳) $\frac{5}{2}$
- (۴) 4

۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 + \cos 4x}}{1 - \tan x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $-\sqrt{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲- اگر تابع f در $x = 2$ پیوسته و $\lim_{a \rightarrow -\infty} a\left(f\left(2 - \frac{1}{a}\right) - 3\right) = 4$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1}$ چقدر است؟

- (۱) -8
- (۲) 8
- (۳) -4
- (۴) 4

۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + ax & x \leq 1 \\ bx^3 + c & x > 1 \end{cases}$ ، در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر از مرتبه دوم است. مقدار c کدام است؟

- (۱) 1
- (۲) -1
- (۳) 3
- (۴) -3

۱۴- اگر $g(x) = f(x^2) + f(3x - 1)$ و $f'(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x+8}}$ ، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

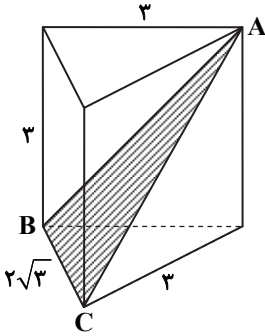
- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۲) $-\frac{3}{2}$
- (۳) $\frac{5}{2}$
- (۴) $-\frac{5}{2}$

۱۵- اگر $f(x) = \left(\frac{2x}{x-1}\right)^2$ ، فاصله نقطه مینیمم نسبی تا مجانب افقی تابع f ، چند برابر فاصله مینیمم نسبی تا مجانب قائم آن است؟

- (۱) 1
- (۲) 2
- (۳) 3
- (۴) 4

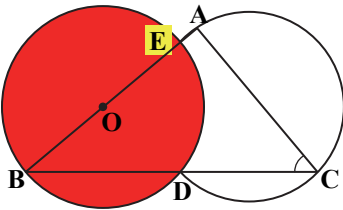
محل انجام محاسبات

۲۲- مطابق شکل، در منشور سه پهلوی قائم، صفحه برش مایل، سطح مقطعی مثلثی ایجاد کرده است. در این مقطع، کسینوس کوچک ترین زاویه، کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (۴) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

۲۳- در شکل زیر دو دایره متقاطع اند و امتداد قطر BE از دایره بزرگ تر، دایره کوچک تر را در نقطه A و امتداد وتر BD آن را در C قطع کرده است. اگر کمان ED در دایره بزرگ تر برابر 80° باشد. اندازه زاویه C چند درجه است؟



- (۱) 80°
- (۲) 60°
- (۳) 50°
- (۴) 40°

۲۴- اگر دستگاه
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = m^2 \end{cases}$$
 فاقد جواب باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$
- (۲) $\{2\}$
- (۳) $\{1, 2\}$
- (۴) $\{-1, 2\}$

۲۵- اگر A ماتریس مربعی از مرتبه ۳ بوده و داشته باشیم: $|A^{-1}| = 3$ و $B = A^2$ ، آنگاه مقدار $|9|A|B|$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۹
- (۳) ۳
- (۴) ۲۷

۲۶- نقطه ای به طول $\sqrt{5}$ ، مرکز دایره ای است که بر دو خط $y = 2x$ و $x = 2y$ مماس است. شعاع دایره کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۶

۲۷- در یک سهمی قائم روجه پایین که رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد، از کانون خطی موازی خط هادی رسم کرده ایم تا سهمی را در نقاط $A(-6, -3)$ و $B(6, -3)$ قطع کند. کدام نقطه زیر روی این سهمی قرار دارد؟

- (۱) $(8, -8)$
- (۲) $(10, -10)$
- (۳) $(12, -12)$
- (۴) $(16, -16)$

۲۸- برای سه بردار غیر صفر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} ، حاصل عبارت $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot ((\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a}))$ کدام است؟

- (۱) $5\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- (۲) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- (۳) $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$
- (۴) $3\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

۲۹- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ دامنه متغیر گزاره نما باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

- (۱) $\exists x \in A, \forall y \in A; x^2 < y$
- (۲) $\forall x \in A, \forall y \in A; x^2 + y^2 < 16$
- (۳) $\exists x \in A, \exists y \in A; x > y + 2$
- (۴) $\forall x \in A, \exists y \in A; x + y = 4$

محل انجام محاسبات

۳۰- اگر $A = \{2, x, z + 1, 5\}$ و $B = \{x + 3, 4, y\}$ و رابطه $A \times B = B \times A$ برقرار باشد، مقدار $x + y + z$ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۰ (۳) ۷ (۴) ۱۲

۳۱- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که $P(A|B') = \frac{2}{9}$ و $P(A-B) = \frac{1}{8}$ ، آنگاه مقدار $P(B')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{16}$ (۲) $\frac{7}{22}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{65}{72}$

۳۲- تاسی را پرتاب می‌کنیم، سپس هر عددی ظاهر شد به همان تعداد سکه پرتاب می‌کنیم. اگر ۴ تا رو ظاهر شود، احتمال آنکه عدد روی تاس ۵ ظاهر شده باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{29}$ (۲) $\frac{15}{64}$ (۳) $\frac{19}{64}$ (۴) $\frac{10}{29}$

۳۳- نرگس، نگار و چهار نفر دیگر می‌خواهند به ترتیب وارد کلاس شوند. در چند حالت نرگس قبل از نگار وارد کلاس می‌شود؟

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۲۰

۳۴- جدول فراوانی نسبی ۴۰ داده آماری به صورت زیر است. واریانس داده‌ها، کدام است؟

داده‌ها	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی نسبی	۰/۱	a	۰/۲	۰/۴۵

(۱) ۱۷/۲

(۲) ۱۷/۴

(۳) ۱۷/۶

(۴) ۱۷/۸

۳۵- در جامعه‌ای با داده‌های $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، یک نمونه دو عضوی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این نمونه، میانگین را عددی بیشتر از ۳ برآورد کند، کدام است؟

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴۵ (۴) ۰/۵

۳۶- باقی‌مانده تقسیم عدد $11! + 1000^{71}$ بر ۱۳ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

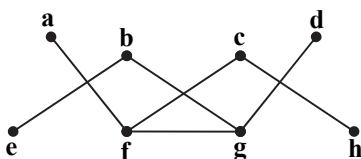
۳۷- اگر a مجموع اعداد حاصل از پرتاب دو تاس سالم باشد، احتمال اینکه معادله سیاله $ax + 6y = 10$ در \mathbb{Z} دارای جواب باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{11}$ (۲) $\frac{6}{11}$ (۳) $\frac{7}{11}$ (۴) $\frac{8}{11}$

۳۸- در گراف ساده و همبند G ، $p + q = 21$ است. اگر این گراف دارای حداقل یال‌های ممکن باشد، چند یال به آن اضافه کنیم تا تبدیل به یک گراف کامل شود؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۴۳ (۴) ۴۴

۳۹- در گراف زیر کدام مجموعه، احاطه‌گر مینیمال نیست؟



(۱) $\{e, f, g, h\}$

(۲) $\{a, b, c, g\}$

(۳) $\{b, d, f, h\}$

(۴) $\{a, b, c, d, f\}$

۴۰- به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین سه نفر توزیع کرد به طوری که به نفر اول فقط یک کتاب و به بقیه افراد حداقل یک کتاب برسد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۳۵ (۳) ۷۰ (۴) ۷۲

محل انجام محاسبات

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آزمون آزمایشی ۳۰ خرداد ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسشها: ۶۵		مدت پاسخ گویی: ۷۵ دقیقه		

همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozineh2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

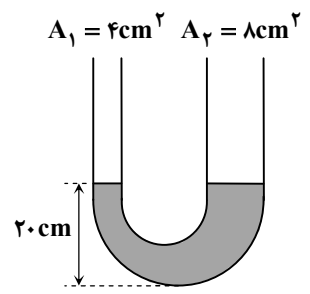
مرحله ۱۷

دفترچه شماره ۲

۴۱- یکای فرعی انرژی کدام است؟

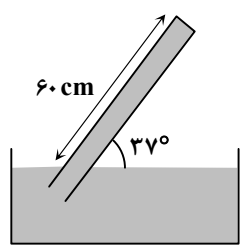
- (۱) J (۲) $\frac{kg}{ms^2}$ (۳) $\frac{kg.m^2}{s^2}$ (۴) $\frac{kg.m}{s^2}$

۴۲- مطابق شکل، در یک لوله U شکل، جیوه در حال تعادل است. در شاخه سمت راست چند سانتی متر مکعب از مایعی به چگالی $\frac{1}{5} \frac{g}{cm^3}$ بریزیم تا اختلاف سطح جیوه در دو طرف ۲ cm شود؟ $(\rho_{\text{جیوه}} = 13500 \frac{kg}{m^3})$



- (۱) ۱۴۴
(۲) ۷۲
(۳) ۳۶
(۴) ۱۰۸

۴۳- در شکل روبه‌رو، مساحت انتهای بسته لوله ۱ cm² است. اگر فشار هوا ۷۶ cmHg باشد، نیرویی که به انتهای بسته لوله وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ $(\sin 37^\circ = 0.6)$ ، $g = 10 \frac{N}{kg}$ و $\rho_{\text{جیوه}} = 13600 \frac{kg}{m^3}$

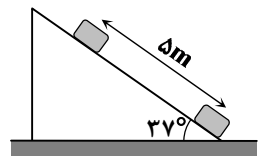


- (۱) ۳/۴۲
(۲) ۴/۸
(۳) ۵/۴۴
(۴) ۶/۲۸

۴۴- از بالای یک بام به ارتفاع ۴۰ متر از سطح زمین، یک گلوله به جرم ۵۰۰ گرم با تندی $12 \frac{m}{s}$ به‌طور مایل به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. اگر گلوله با تندی $28 \frac{m}{s}$ به زمین برسد، کار نیروی مقاومت هوا روی گلوله از لحظه پرتاب تا رسیدن به زمین چند ژول بوده است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

- (۱) -۴۰ (۲) -۶۰ (۳) -۸۰ (۴) -۱۲۰

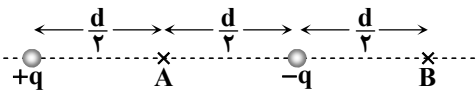
۴۵- مطابق شکل، جسمی به جرم ۲ kg را از پایین سطح شیب‌داری که با راستای افق زاویه ۳۷° می‌سازد، با تندی $10 \frac{m}{s}$ روی سطح به‌سمت بالا پرتاب می‌کنیم. این جسم پس از ۵ متر حرکت روی سطح شیب‌دار متوقف می‌شود. کار نیروی اصطکاک وارد بر این جسم تا لحظه توقف چند ژول است؟ $(\sin 37^\circ = 0.6)$



- (۱) -۴۰
(۲) -۸۰
(۳) -۱۰۰
(۴) -۱۲۰

محل انجام محاسبات

۵۱- مطابق شکل، دو بار ناهم نام و هم اندازه، در فاصله d از یکدیگر قرار دارند. اگر اندازه میدان الکتریکی خالص در نقطه A برابر $\frac{1}{8} \times 10^4 \frac{N}{C}$ باشد، اندازه میدان الکتریکی خالص در نقطه B چند نیوتون بر کولن است؟



- (۱) صفر
- (۲) 8×10^3
- (۳) 12×10^3
- (۴) 18×10^3

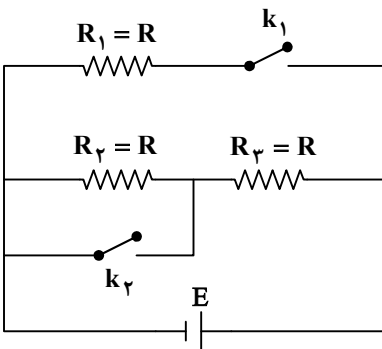
۵۲- یک خازن تخت بدون دی الکتریک با ظرفیت $6pF$ را به اختلاف پتانسیل $18V$ وصل کرده ایم. اگر مساحت هر صفحه خازن $30cm^2$ باشد، اندازه میدان الکتریکی در فضای بین صفحات این خازن چند ولت بر متر $(\frac{V}{m})$ است؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{F}{m})$

- (۱) 4×10^3
- (۲) 6×10^3
- (۳) 4×10^4
- (۴) 6×10^4

۵۳- اگر چگالی مس $9 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ و مقاومت ویژه آن $1/8 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ باشد، مقاومت یک سیم مسی به جرم $540g$ با شعاع مقطع $2mm$ چند اهم است؟ $(\pi = 3)$

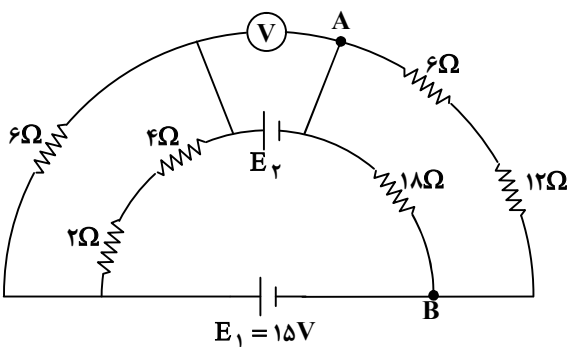
- (۱) $1/5 \times 10^{-2}$
- (۲) $1/5 \times 10^{-3}$
- (۳) $7/5 \times 10^{-2}$
- (۴) $7/5 \times 10^{-3}$

۵۴- در شکل روبه رو، مقاومت‌ها مشابه‌اند. اگر کلیدهای k_1 و k_2 را ببندیم، توان مصرفی مدار چند برابر می‌شود؟ (باتری آرمانی است.)



- (۱) ۲
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۴
- (۴) $\frac{1}{4}$

۵۵- باتری‌ها و ولت‌سنج نشان داده شده در شکل، آرمانی هستند. اگر ولت‌سنج $3V$ را نشان دهد، $V_A - V_B$ چند ولت خواهد بود؟



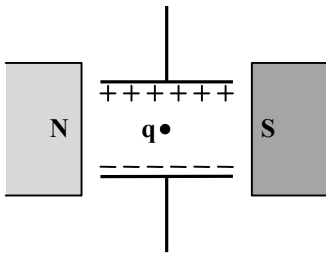
- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۵

محل انجام محاسبات

دفترچه شماره ۲- آزمون اختصاصی ۳۰ خرداد ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۰۱

۵۶- مطابق شکل، یک ذره باردار q ، در وسط فضایی با میدان‌های یکنواخت الکتریکی و مغناطیسی قرار دارد. از این نقطه، بار را با تندی v در کدام جهت پرتاب کنیم تا نیروی خالص وارد بر آن از طرف دو میدان، بیشینه باشد؟

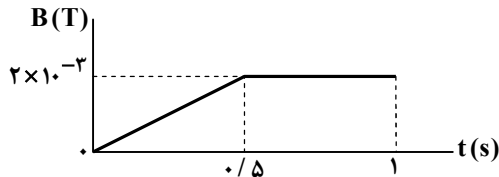


- (۱) راست
- (۲) چپ
- (۳) برون‌سو
- (۴) درون‌سو

۵۷- یک سیم‌لوله آرمانی که دارای ۸ حلقه در هر سانتی‌متر است و یک پیچۀ مسطح با قطر 10 cm که دارای ۲۰۰ حلقه است را در اختیار داریم. اگر جریان گذرنده از پیچه، 4 A و اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچه با اندازه میدان مغناطیسی روی محور سیم‌لوله برابر باشد، جریان عبوری از سیم‌لوله چقدر خواهد بود؟

- (۱) 2 A
- (۲) 4 A
- (۳) 10 A
- (۴) 12 A

۵۸- حلقه‌ای با مقاومت الکتریکی $R = 20\ \Omega$ و مساحت $A = 5\text{ cm}^2$ ، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. اگر اندازه میدان مغناطیسی در مدت زمان $\Delta t = 1\text{ s}$ مطابق نمودار تغییر کند، در بازه زمانی $t_1 = 0/25\text{ s}$ تا $t_2 = 0/75\text{ s}$ چند نانوکولن بار الکتریکی در حلقه شارش می‌شود؟

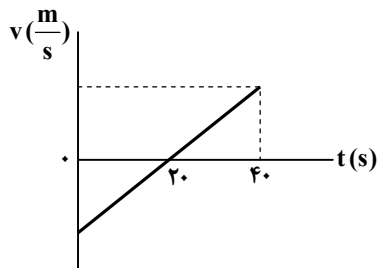


- (۱) ۱۵
- (۲) ۲۵
- (۳) ۳۵
- (۴) ۵۰

۵۹- ضریب القاوری یک سیم‌لوله با متناسب است و با نسبت وارون دارد.

- (۱) تعداد حلقه‌ها - سطح مقطع حلقه
- (۲) مربع تعداد حلقه‌ها - طول سیم‌لوله
- (۳) سطح مقطع سیم‌لوله - مربع طول سیم‌لوله
- (۴) مربع تعداد حلقه‌ها - سطح مقطع حلقه

۶۰- نمودار سرعت-زمان متحرکی که از مکان $x = 0$ روی خط راست به حرکت درمی‌آید، مطابق شکل است. اگر متحرک در $t = 10\text{ s}$ از نقطه $x = -300\text{ m}$ عبور کند، در مدت $t = 0$ تا $t = 40\text{ s}$ ، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) چند متر است؟



- (۱) ۶۰۰
- (۲) ۴۰۰
- (۳) ۸۰۰
- (۴) ۱۲۰۰

۶۱- متحرکی در مسیر مستقیم با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مسافت طی‌شده توسط متحرک در مدت $t_1 = 0$ تا $t_2 = 6\text{ s}$ برابر ۱۰۰ متر و جابه‌جایی آن در این مدت برابر $\Delta x = +60\text{ m}$ است. معادله سرعت-زمان این متحرک در SI کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) $v = -5t + 20$
- (۲) $v = -10t + 40$
- (۳) $v = -10t + 30$
- (۴) $v = -5t + 15$

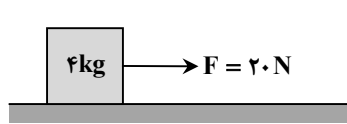
محل انجام محاسبات

۶۲- گلوله‌ای از ارتفاع h نسبت به سطح زمین رها می‌شود و در لحظه‌ای که ارتفاع آن نسبت به زمین $\frac{9}{25}h$ است، تندی آن به $28 \frac{m}{s}$ می‌رسد.

با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، از لحظه رها شدن گلوله تا رسیدن آن به زمین، چند ثانیه طول می‌کشد؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- ۳ (۱) ۳/۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴)

۶۳- مطابق شکل، وزنه‌ای توسط نیروی F از حال سکون به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی، نیروی F قطع می‌شود و وزنه با طی مسافتی متوقف می‌شود. اگر بزرگی شتاب وزنه از شروع حرکت تا توقف، یکسان باشد، ضریب اصطکاک جنبشی میان وزنه و سطح افقی تکیه‌گاه کدام است؟



($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- ۰/۱۵ (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۴ (۴) ۰/۲۵ (۳)

۶۴- طول عادی یک فنر 60 cm و جرم آن ناچیز است. وقتی وزنه‌ای به جرم m را به وسیله این فنر از سقف اتاق می‌آویزیم، طول فنر در حال تعادل 65 cm می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم 2 m توسط این فنر از سقف آسانسور آویخته شود و آسانسور به صورت تندشونده با شتاب ثابت

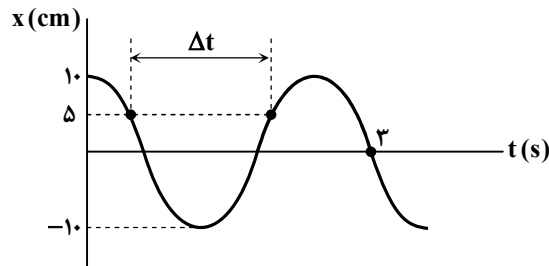
$2 \frac{m}{s^2}$ بالا برود، طول فنر چند سانتی‌متر می‌شود؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- ۷۰ (۱) ۷۲ (۲) ۷۴ (۳) ۷۶ (۴)

۶۵- دو ماهواره A و B روی مدارهای دایره‌ای به دور زمین می‌گردند. اگر جرم ماهواره A نصف جرم ماهواره B و انرژی جنبشی ماهواره A دو برابر انرژی جنبشی ماهواره B باشد، دوره حرکت ماهواره A چند برابر دوره حرکت ماهواره B است؟

- $\frac{1}{16}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

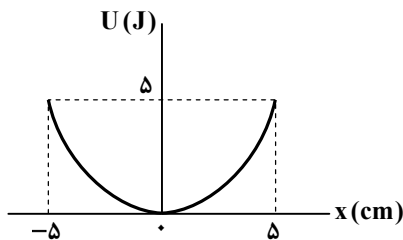
۶۶- اگر نمودار مکان- زمان متحرکی در یک حرکت هماهنگ ساده به شکل روبه‌رو باشد، Δt چند ثانیه است؟



- ۲/۴ (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۸ (۳) ۱/۶ (۴)

۶۷- در یک حرکت هماهنگ ساده، نمودار انرژی پتانسیل بر حسب مکان نوسانگر مطابق شکل است. اگر جرم نوسانگر 250 g گرم باشد، بسامد

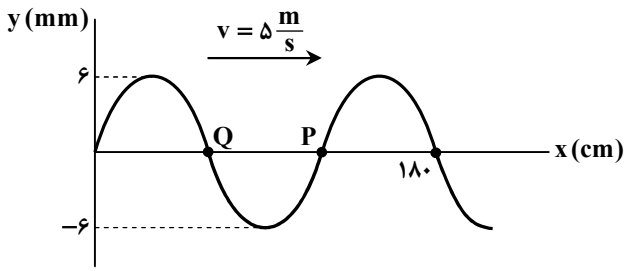
حرکت آن چند هرتز است؟ ($\pi = \sqrt{10}$)



- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴)

محل انجام محاسبات

۶۸- نمودار یک موج عرضی منتشرشده، در لحظه $t = t_1$ مطابق شکل است. اگر موج با تندی $v = 5 \frac{m}{s}$ هم‌سو با محور x منتشر شود، در لحظه $t = t_1 + 180 \text{ ms}$ وضعیت نقاط Q و P کدام است؟



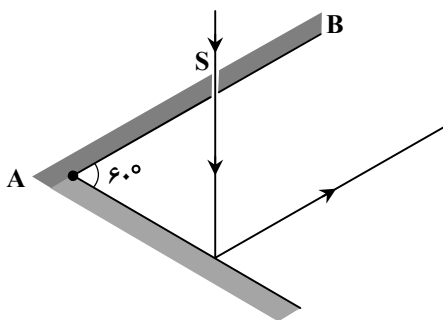
(۱) $y_Q = 0$ و $y_P = 0$

(۲) $y_Q = -6 \text{ mm}$ و $y_P = +6 \text{ mm}$

(۳) $y_Q = +6 \text{ mm}$ و $y_P = -6 \text{ mm}$

(۴) $y_Q = -6 \text{ mm}$ و $y_P = -6 \text{ mm}$

۶۹- در شکل روبه‌رو، پرتوی نور از شکاف S عبور می‌کند و پس از بازتاب از آینه تخت، موازی سطح کدر AB می‌شود. بدون تغییر وضعیت سطح کدر AB و پرتوی تابش اولیه، آینه را چند درجه حول نقطه A و در چه جهتی بگردانیم تا پرتوی نور پس از بازتاب از آینه، از همان شکاف S خارج شود؟



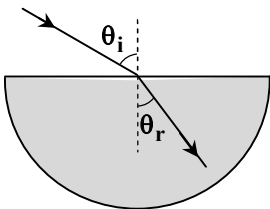
(۱) 30° ، ساعت‌گرد

(۲) 30° ، پادساعت‌گرد

(۳) 15° ، ساعت‌گرد

(۴) 15° ، پادساعت‌گرد

۷۰- در شکل زیر، پرتوی نوری با زاویه تابش θ_i از هوا به مرکز تیغه نیم‌دایره شفاف با ضریب شکست $1/6$ می‌تابد. اگر پرتوی شکست، نیمساز زاویه بین خط عمود بر مرز جداکننده دو محیط و امتداد پرتوی تابش باشد، زاویه تابش چند درجه است؟ ($\cos 37^\circ = \sin 53^\circ = 4/5$)



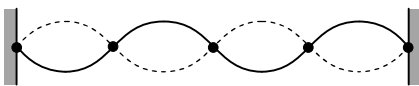
(۱) 37°

(۲) 53°

(۳) 74°

(۴) $18/5$

۷۱- یک تار با دو انتهای بسته هنگام ارتعاش با بسامد 600 هرتز به وضعیت شکل زیر درمی‌آید. نیروی کشش این تار را چند برابر کنیم تا هنگام ارتعاش با بسامد 360 هرتز، مجموع تعداد گره‌ها و شکم‌های آن 7 عدد شود؟



(۲) $\frac{25}{9}$

(۱) $\frac{16}{9}$

(۴) $\frac{9}{16}$

(۳) $\frac{16}{25}$

محل انجام محاسبات

۷۲- تابع کار یک فلز 5 eV است. اگر پرتویی با طول موج 150 nm بتابد، بیشینه تندی فوتوالکترون‌ها تقریباً چند متر بر ثانیه می‌شود؟

$(h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$ و $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ، $m_e = 9 \times 10^{-28} \text{ g}$)

- (۱) 1.6×10^6 (۲) 5×10^5 (۳) 8×10^5 (۴) $1/3 \times 10^6$

۷۳- جذب یک فوتون با طول موج 434 nm نانومتر می‌تواند سبب گذار الکترون اتم هیدروژن از مدار n_1 به مدار n_2 شود. n_1 و n_2 کدام هستند؟ $(hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm})$

- (۱) $n_1 = 2$ و $n_2 = 3$ (۲) $n_1 = 2$ و $n_2 = 5$ (۳) $n_1 = 3$ و $n_2 = 5$ (۴) $n_1 = 4$ و $n_2 = 3$

۷۴- اگر جرم یک هسته به اندازه $3/2 \times 10^{-27}$ گرم از جرم نوکلئون‌های سازنده آن کمتر باشد، انرژی بستگی این هسته چند میلیون

الکترون ولت (MeV) است؟ $(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C})$

- (۱) 1800 (۲) 180 (۳) 18 (۴) $1/8$

۷۵- از یک نوع ماده پرتوزا، در مدت t تعداد 48×10^{24} هسته واپاشیده می‌شود و به دنبال آن در مدت t بعدی، 12×10^{24} هسته دیگر واپاشیده می‌شود. نیمه عمر ماده پرتوزا چند برابر t است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $1/2$ (۴) 4

۳. شیمی

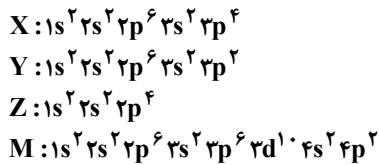
زمان پیشنهادی

جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

۷۶- در یون X^{3+} ، تعداد الکترون‌های لایه سوم، $2/25$ برابر تعداد الکترون‌های لایه دوم است. عدد اتمی X کدام است و به کدام گروه جدول تناوبی تعلق دارد؟

- (۱) $30 - 12$ (۲) $31 - 13$ (۳) $29 - 11$ (۴) $28 - 8$

۷۷- با توجه به آرایش الکترونی عنصرها، کدام مطلب درست است؟



(۱) خواص شیمیایی Z و X برخلاف M و Y ، مشابه یکدیگر است.

(۲) X جزو دسته‌ای از عنصرها است که سطح صیقلی و براق دارند.

(۳) عنصرهای X و Z می‌توانند با یکدیگر مولکولی قطبی با ساختار خمیده به فرمول XZ_2 تشکیل دهند.

(۴) عنصر M برخلاف عنصرهای X ، Y و Z ، در طبیعت به حالت خالص یافت نمی‌شود.

۷۸- معادله انحلال پذیری پتاسیم کلرید و سدیم نیترات بر حسب دما (درجه سلسیوس) به ترتیب به صورت $S_1 = 0/20 + 27$ و

$S_2 = 0/80 + 72$ است. کدام موارد درست هستند؟

(الف) در هر دمایی، انحلال پذیری پتاسیم کلرید کمتر از سدیم نیترات است.

(ب) درصد جرمی محلول سیرشده پتاسیم کلرید در دمای 40°C تقریباً برابر 51 است.

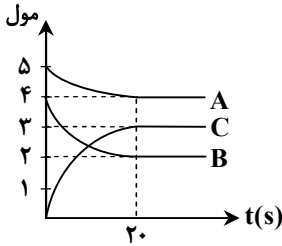
(پ) تأثیر دما بر انحلال پذیری سدیم نیترات کمتر از پتاسیم کلرید است.

(ت) اگر 145 گرم محلول سیرشده پتاسیم کلرید را از دمای 60°C تا 30°C سرد کنیم، 9 گرم رسوب تشکیل می‌شود.

- (۱) الف و ب (۲) پ و ت (۳) الف و ت (۴) ب و پ

محل انجام محاسبات

۷۹- با توجه به نمودار روبه‌رو، سرعت متوسط واکنش برحسب مول بر ثانیه کدام است؟



- (۱) ۰/۱
(۲) ۰/۰۵
(۳) ۰/۱۵
(۴) ۰/۰۲

۸۰- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) شمار اتم‌های سازنده آهن (II) هیدروکسید و کلسیم نیتريد، برابر است.
(ب) شکل هندسی یون‌های کربنات، نیترات و سولفات، مشابه است.
(پ) برای شناسایی آب دریا از آب مقطر می‌توان از محلول نقره نیترات استفاده کرد.
(ت) آب تولیدشده در فرایند تصفیه به‌روش صافی کربن برخلاف روش تقطیر، نیاز به کلرزنی ندارد.
- (۱) الف و پ (۲) ب و ت (۳) الف و ت (۴) ب و پ

۸۱- برای تهیه ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۲ مولار نیتريك اسید، چند میلی‌لیتر محلول ۵۰ درصد جرمی آن با چگالی $1/26 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ لازم است؟

($\text{HNO}_3 = 63 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۸۲- اگر در سوختن ۲ مول بوتان، ۵۰ درصد اتم‌های کربن به کربن دی‌اکسید و ۵۰ درصد آن‌ها به کربن مونوکسید تبدیل شوند، در این فرایند سرعت متوسط مصرف گاز اکسیژن چند برابر سرعت متوسط مصرف بوتان خواهد بود؟

- (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶ (۴) ۶/۵

۸۳- چگالی بنزین (C_8H_{18}) برابر $0.8 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ و جرم مولی آن برابر $114 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است. اگر از سوختن هر مول از این ماده، ۵۴۵۰ کیلوژول گرما آزاد شود، برای سوختن $4/56 \text{ L}$ بنزین در شرایط STP چند لیتر هوا نیاز است و طی این فرایند، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟

- (۱) ۱۷۴۴۰۰ ، ۴۴۸۰۰ (۲) ۳۴۸۸۰۰ ، ۸۹۶۰ (۳) ۸۷۲۰۰ ، ۲۲۴۰۰ (۴) ۱۷۴۴۰۰ ، ۸۹۶۰

۸۴- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- خلعت نافلزی عنصری با آرایش الکترونی $[\text{He}]2s^2 2p^5$ بیشتر از عنصری با آرایش الکترونی $[\text{Ne}]3s^2 3p^4$ است.
- در مقایسه شعاع اتمی دو عنصر، عنصری که دارای تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده بیشتری است، شعاع بزرگ‌تری دارد.
- در عنصرهای دوره چهارم جدول دوره‌ای، تنها یک عنصر دارای یون پایدار با ۱۰ الکترون در زیرلایه ۳d است.
- اغلب فلزهای واسطه در طبیعت به‌شکل ترکیب‌های یونی یافت می‌شوند.

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

۸۵- مقدار آب تولیدشده در سوختن کامل یک مول از کدام ترکیب زیر، بیشتر است؟

- (۱) چهارمین عضو خانواده آلکن‌ها (۲) اتیلن گلیکول
(۳) استر موجود در آناناس (۴) ترکیب آلی موجود در بادام

۸۶- آنتالپی‌های پیوند $\text{C}=\text{C}$ ، $\text{C}-\text{C}$ ، $\text{C}-\text{H}$ ، $\text{C}-\text{O}$ ، $\text{O}-\text{H}$ به ترتیب برابر ۶۱۲، ۳۴۸، ۴۱۲، ۳۶۰ و ۴۶۳ کیلوژول بر مول است. آنتالپی واکنش $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{g}) \rightarrow \text{C}_2\text{H}_4(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{g})$ چند کیلوژول است؟

- (۱) +۴۵ (۲) -۴۵ (۳) +۶۵ (۴) -۶۵

محل انجام محاسبات

۸۷- ۵۰۰ میلی لیتر محلولی از سود با چگالی $1.02 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ با $7/3$ میلی گرم هیدروکلریک اسید ۵۰ درصد خالص خنثی می شود. غلظت سود

در محلول اولیه بر حسب ppm کدام است؟ ($\text{Cl} = 35.5, \text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{H} = 1: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

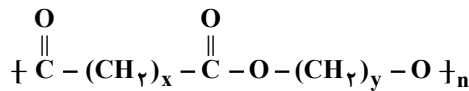
- (۱) ۴ (۲) $7/84$ (۳) $1/46$ (۴) $3/92$

۸۸- اگر به جای هیدروژن های ساده ترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها، گروه متیل قرار گیرد، ترکیبی به دست می آید که

- (۱) نام آن، متیل متانوات است.
 (۲) مجموع عددهای اکسایش اتم های کربن در آن برابر با ۲+ است.
 (۳) نقطه جوش کمتری نسبت به پروپانویک اسید دارد.
 (۴) در ساختار آن، ۱۲ پیوند اشتراکی وجود دارد.

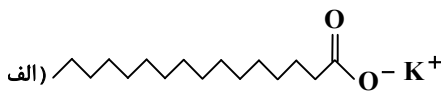
۸۹- در واحد تکرار شونده پلی استر زیر، درصد جرمی اکسیژن $6/4$ برابر درصد جرمی هیدروژن است. مجموع شمار اتم های هیدروژن در

ساختار مونومرهای سازنده این پلی استر کدام است؟ ($\text{H} = 1, \text{O} = 16: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

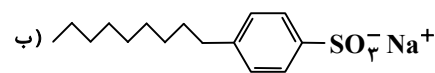


- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۹۰- با توجه به شکل های داده شده، کدام مطلب درست است؟



- (۱) بخش آب گریز هر دو ترکیب یکسان است.
 (۲) شکل های (الف) و (ب) به ترتیب ساختار پاک کننده غیرصابونی و صابون را نشان می دهند.
 (۳) جزء آنیونی هر دو، دارای دو بخش قطبی و ناقطبی است.
 (۴) در شکل (ب)، چربی به گروه SO_3^- می چسبد، سپس در آب پراکنده می شود.



۹۱- pH محلول 0.01 مولار هیدرویدیک اسید (HI) در دمای اتاق، $\frac{1}{5}$ برابر pH محلول 0.02 مولار باز ضعیف BOH است. درصد یونش این

باز در محلول، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) 0.2 (۴) 0.5

۹۲- کدام مطلب درست است؟

- (۱) محلول آبی اتانول و استون، رسانای جریان برق هستند.
 (۲) همه محلول های یونی، رسانایی الکتریکی یکسانی ندارند.
 (۳) همه الکترولیت های قوی، رسانای خوب جریان برق هستند.
 (۴) برخی ترکیب های مولکولی مانند HCl، الکترولیت ضعیف هستند.

۹۳- کدام مطلب نادرست است؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{N} = 14, \text{O} = 16: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- (۱) در شرایط یکسان، حجم ۸ گرم گاز متان با حجم $3/01 \times 10^{23}$ اتم گاز نئون برابر است.
 (۲) در شرایط STP، حجم ۱۰ گرم گاز کربن مونوکسید با حجم ۱۰ گرم گاز نیتروژن برابر است.
 (۳) جرم 0.25 مول پروپان با جرم 0.25 مول گاز کربن دی اکسید برابر است.
 (۴) تعداد اتم ها در 0.5 مول گاز اکسیژن با تعداد اتم ها در 0.25 مول گاز اوزون با یکدیگر برابر است.

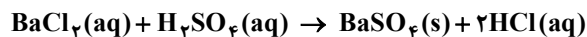
محل انجام محاسبات

۹۴- از واکنش گاز گوگرد دی‌اکسید با آهن، ترکیب جامد کلسیم سولفیت (CaSO_3) تولید می‌شود. اگر این فرایند برای جلوگیری از ورود گاز گوگرد دی‌اکسید به هواکره در خروجی دودکش کارخانه‌ها استفاده شود، در شرایطی که حجم مولی گازها ۲۸ L است، برای جذب

۱۴۰۰ میلی‌لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید به چند گرم آهن نیاز است؟ ($\text{O} = ۱۶, \text{S} = ۳۲, \text{Ca} = ۴۰: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

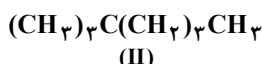
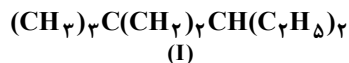
(۱) ۲۸ (۲) ۸۴ (۳) ۸/۴ (۴) ۲/۸

۹۵- اگر در واکنش ۲۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار باریم کلرید با سولفوریک اسید، ۱۹۱۰/۶ میلی‌گرم ترکیب نامحلول در آب تشکیل شود، بازده درصدی این واکنش کدام است؟ ($\text{O} = ۱۶, \text{S} = ۳۲, \text{Cl} = ۳۵/۵, \text{Ba} = ۱۳۷: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(۱) ۸۰ (۲) ۸۲ (۳) ۸۴ (۴) ۸۶

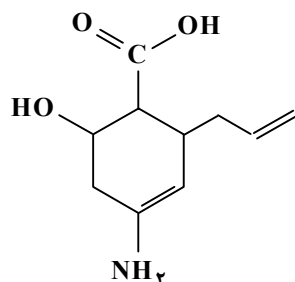
۹۶- چه تعداد از عبارتهای زیر درباره دو ترکیب داده شده، درست است؟



- تفاوت شمار اتم‌های کربن زنجیر اصلی این دو ترکیب، برابر با ۱ است.
- نسبت شمار پیوندهای C-H به C-C در ترکیب (II) بیشتر از این نسبت در ترکیب (I) است.
- در نام هر دو ترکیب، از «دی‌متیل» استفاده می‌شود.
- تفاوت جرم مولی دو ترکیب با جرم مولی پروپین برابر است.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۴

۹۷- با توجه به ساختار روبه‌رو، کدام مطلب نادرست است؟



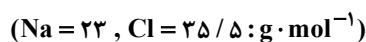
(۱) نسبت شمار گروه‌های CH به CH_2 در آن برابر ۲/۵ است.

(۲) به دلیل داشتن عامل آمینی، قابلیت واکنش با اسیدها را دارد.

(۳) به دلیل داشتن عامل اسیدی، قابلیت واکنش با بازها را دارد.

(۴) فرمول مولکولی آن، $\text{C}_9\text{H}_{15}\text{NO}_3$ و دارای گروه عاملی هیدروکسیل است.

۹۸- اگر در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، $12/04 \times 10^{21}$ الکترون مبادله شود، چند گرم سدیم کلرید مذاب مصرف خواهد شد؟



(۱) ۱/۱۷ (۲) ۲/۳۴ (۳) ۴/۶۸ (۴) ۵/۸۵

۹۹- وقتی تیغه‌ای از جنس فلز M را در محلولی از یون‌های X^{2+} قرار می‌دهیم، با گذشت زمان رنگ محلول تغییر می‌کند و وقتی تیغه‌ای از جنس فلز X را در محلولی از یون‌های Y^{2+} وارد می‌کنیم، واکنشی رخ نمی‌دهد. بر این اساس، کدام مطلب به یقین درست است؟

(۱) فلز M کاهنده قوی‌تری نسبت به فلز Y است.

(۲) در سلول گالوانی Y-X، نیم‌سلول X نقش آند را ایفا می‌کند.

(۳) یون‌های Y^{2+} اکسنده قوی‌تری از یون‌های X^{2+} هستند.

(۴) محلول دارای یون‌های M^{2+} را می‌توان در ظرفی از جنس فلز X نگهداری کرد.

محل انجام محاسبات

۱۰۰- کدام گزینه درست است؟

- (۱) در همه مولکول‌های سه‌اتمی، هسته هر سه اتم سازنده بر روی یک خط راست قرار دارد.
 (۲) کربونیل سولفید همانند گوگرد تری‌اکسید، دارای گشتاور دوقطبی صفر است.
 (۳) مولکول‌های خمیده فاقد گشتاور دوقطبی صفر هستند.

(۴) با توجه به نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی، بار جزئی اتم مرکزی در مولکول‌های خطی منفی است.

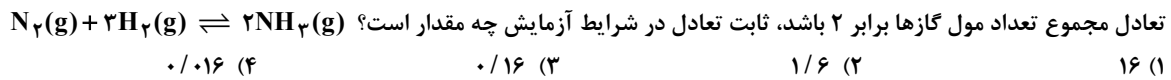
۱۰۱- آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب‌های سدیم اکسید و پتاسیم فلئورید به ترتیب برابر با ۲۴۸۸ و ۸۱۵ کیلوژول بر مول است. بر این اساس، کدام عددها را می‌توان برای آنتالپی فروپاشی شبکه بلور پتاسیم اکسید و سدیم فلئورید در نظر گرفت؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید).

- (۱) ۲۱۲۰، ۹۲۶ (۲) ۲۱۲۰، ۹۲۶ (۳) ۲۰۸۰، ۷۸۵ (۴) ۷۸۵، ۲۰۸۰

۱۰۲- تعادل گازی $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$ در یک ظرف یک لیتری برقرار است. اگر ۱ مول گاز اکسیژن به ظرف اضافه شود، همه تغییرات زیر حاصل می‌شوند، به جز

- (۱) ۲ مول SO_3 مصرف می‌شود تا تعادل جدید برقرار گردد.
 (۲) غلظت تعادلی O_2 و SO_3 نسبت به تعادل اولیه بیش تر و غلظت تعادلی SO_2 نسبت به تعادل اولیه، کم تر می‌شود.
 (۳) واکنش در جهت رفت جابه‌جا شده اما ثابت تعادل، تغییری نمی‌کند.
 (۴) فشار تعادلی افزایش می‌یابد.

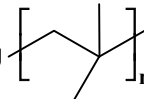
۱۰۳- مخلوط ۱ مول گاز نیتروژن و ۲ مول گاز هیدروژن را تا رسیدن به حالت تعادل در یک ظرف سربسته یک لیتری گرم می‌کنیم. اگر در حالت تعادل مجموع تعداد مول گازها برابر ۲ باشد، ثابت تعادل در شرایط آزمایش چه مقدار است؟



۱۰۴- با توجه به واکنش‌های زیر، چند مورد از مطالب داده شده درست است؟

- I) $2 + H_2 \rightarrow$ بوتن
 II) $2 + HCl \rightarrow$ بوتن
 III) $n(2 - \text{بوتن}) \xrightarrow{\text{گرما و فشار}}$
 IV) $2 + Br_2 \rightarrow$ بوتن
 V) $2 + H_2O \rightarrow$ بوتن

- از فرآورده واکنش‌های (II) و (IV)، می‌توان به‌عنوان مونومر در واکنش پلیمری شدن استفاده کرد.
 ■ تفاوت جرم مولی فرآورده حاصل از واکنش‌های (I) و (V)، با جرم مولی گاز اکسیژن برابر است.

■ ساختار فرآورده واکنش (III) به صورت  به صورت است.

- مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در فرآورده واکنش‌های (II) و (V) برابر است.

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۰۵- اگر همه پیوندهای $C=C$ موجود در ساختار مولکول نفتالن بر اثر واکنش با گاز هیدروژن به پیوندهای $C-C$ تبدیل شوند، کدام گزینه

در مورد ترکیب حاصل نادرست است؟ ($H=1, C=12: g \cdot mol^{-1}$)

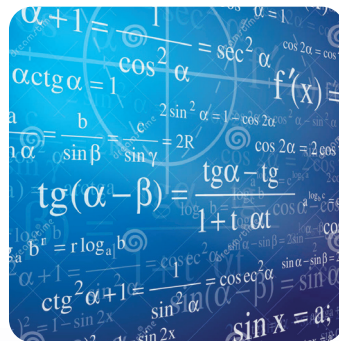
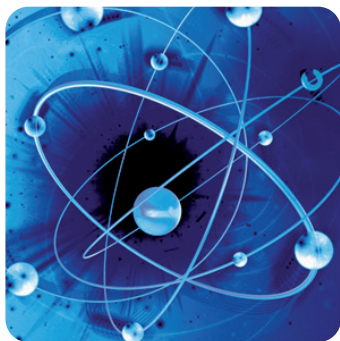
- (۱) جرم مولی آن، ۱۳۸ گرم است.
 (۲) شمار اتم‌های هیدروژن آن، دو برابر شمار اتم‌های کربن است.
 (۳) شمار پیوندهای $C-C$ آن، برابر با ۱۱ است.
 (۴) در ساختار آن، ۲۹ پیوند اشتراکی (کووالانسی) وجود دارد.

محل انجام محاسبات

دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۳۰ خرداد ۱۴۰۲ (مرحله ۱۷)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)
گروه آزمایشی علوم ریاضی



ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱، درس ۳ ریاضی ۱

کافی است دقت کنید که با توجه به چند شکل داده شده الگویی مناسب برای محیط هر شکل با توجه به شماره مرحله به دست آوریم:

شماره مرحله	۱	۲	۳	۴	...	n
محیط	4×1	4×2	4×3	4×4	...	$4 \times (2n - 1)$

پس جمله عمومی محیط شکل‌ها برابر با $a_n = 4n$ است، بنابراین محیط شکل دهم برابر با ۷۶ است.

۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱، درس ۳ حسابان ۱

$x = 2$ یک ریشه معادله است، پس در آن صدق می‌کند. مقدار x را ۲ قرار می‌دهیم تا مقدار k به دست آید:

$$\frac{2}{3} + \frac{k}{1} = \frac{8}{3} \Rightarrow k = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{6}{3} = 2$$

حال با قرار دادن مقدار k ، معادله را حل کرده و ریشه دیگر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{x(x-1) + 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 6 = 8x^2 - 8 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{یا} \\ x = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * فصل ۱، درس ۲ حسابان ۱

راه حل اول:

نکته: برای حل معادلات رادیکالی ابتدا با توان رسانی و... رادیکال‌ها را از بین می‌بریم و سپس معادله را حل می‌کنیم. در نهایت چک می‌کنیم جواب‌های به دست آمده در معادله اولیه صدق کنند، زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

ابتدا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم. دقت داریم که دامنه تابع رادیکالی به صورت $x \leq 3$ است.

$$(\sqrt{3-x})^2 = (|x+1|)^2 \Rightarrow 3-x = x^2 + 2|x| + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0: 3-x = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} & \checkmark \\ \text{یا} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} & \times \end{cases} \\ x < 0: 3-x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \times \\ \text{یا} \\ x = -1 & \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

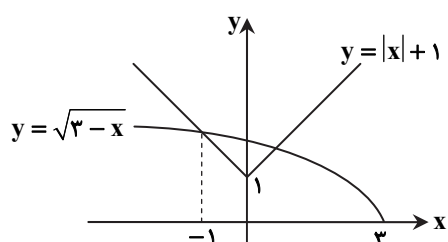
بنابراین این معادله دو جواب قابل قبول دارد.

راه حل دوم:

نکته: جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ محل تلاقی نمودارهای دو تابع f و g است.

کافی است نمودار تابع دو طرف تساوی را رسم کنیم:

با توجه به نمودار، دو تابع در دو نقطه با یکدیگر تقاطع دارند، بنابراین این معادله دارای دو جواب است.



برای آنکه نمودار یک سهمی محور طول‌ها را در طرفین مبدأ مختصات قطع کند، باید یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد، پس باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 9 - 4(2-m)(1+m) > 0 \Rightarrow 9 - (4 + 4m - 4m^2) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0 \Rightarrow (2m-1)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها منفی‌ها} \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1+m}{2-m} < 0$$

	-1	2	
1+m	-	+	+
2-m	+	+	-
1+m	-	+	+
2-m	-	+	+

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \quad (2)$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

چون چهارضلعی مستطیل است، پس اضلاع روبه‌رو با هم موازیند و شیب خط‌های گذرنده از آن‌ها برابر است:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-5}{0-3} = 1 \Rightarrow m_{BC} = -1$$

$$y = 2 - x \Rightarrow C(2, 0)$$

حال می‌توانیم معادله خط BC را بنویسیم:

از طرفی معادله دو خط AD و DC را به دست می‌آوریم. از تلاقی آن‌ها مختصات رأس D به دست می‌آید:

$$CD: \begin{cases} m = 1 \\ C(2, 0) \end{cases} \Rightarrow y = x - 2$$

$$AD: \begin{cases} m = -1 \\ A(3, 5) \end{cases} \Rightarrow y = -x + 8$$

با حل دستگاه زیر مختصات D را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 8 \end{cases} \Rightarrow x - 2 = -x + 8 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین مختصات نقطه D به صورت D(5, 3) است.

راه حل اول: ابتدا دامنه f(x) و سپس دامنه تابع داده شده را به دست می‌آوریم:

$$-1 \leq x < 2 \Rightarrow -3 \leq 2x - 1 < 3 \Rightarrow -3 \leq 1 - x < 3 \Rightarrow -2 < x \leq 4$$

راه حل دوم: نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ ، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه |k| واحد به سمت راست انجام می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ ، کافیست نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

با توجه به نکات و مراحل رسم داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x-1 & \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} & x-1 & \xrightarrow{x \rightarrow x+2} & x+1 & \xrightarrow{x \rightarrow -x} & -x+1 \\ [-1, 2) & & [-2, 4) & & [-4, 2) & & (-2, 4] \end{array}$$

$$\text{نکته: } \log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c$$

$$\text{نکته: } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}, \quad \log_b a^n = n \log_b a$$

با استفاده از تساوی‌های داده شده، ابتدا مقادیر $x-2$ و $y-2$ را به دست می‌آوریم:

$$3^x = 36 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 3^2} \frac{3^x}{3^2} = \frac{36}{3^2} \Rightarrow 3^{x-2} = 4 \Rightarrow x-2 = \log_3 4 \Rightarrow x-2 = 2 \log_3 2$$

$$y = \log_2 12 \Rightarrow y-2 = \log_2 12 - 2 = \log_2 12 - \log_2 4 = \log_2 3$$

$$(y-2)(x-2) = \log_2 3 \times 2 \log_3 2 = \log_2 3 \times \frac{2}{\log_2 3} = 2$$

بنابراین:

نکته: در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ مقدار ماکسیمم برابر $|a| + c$ ، مقدار مینیمم برابر $-|a| + c$ و دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin^2 ax + \cos^2 ax + 2 \sin ax \cos ax = 1 + \sin 2ax$$

راه حل اول: با توجه به نمودار، $a < 0$ است. به ازای $x > 0$ ، در نقطه $x = \frac{3\pi}{4}$ اولین ماکزیمم تابع اتفاق افتاده است:

$$2ax = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2a\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \sin \frac{14a\pi}{12} = 1 - \sin \frac{7\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|2a|} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2a|} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

راه حل دوم: با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع $T = \pi$ است، یعنی:

با توجه به نمودار $a < 0$ و $a = -1$ قابل قبول است. ادامه راه حل مشابه است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فصل ۲، درس ۲ حسابان ۲

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k + 1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$. ابتدا معادله را ساده و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$\cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = -2 \Rightarrow \cos x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \right) = -2 \Rightarrow \cos x \times \frac{1}{\cos x \sin x} = -2 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = -2$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & x \in (0, 2\pi) \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} & x \in (0, 2\pi) \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین مجموع این جواب‌ها برابر با 3π است. $\frac{11\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} = 3\pi$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فصل ۵، درس ۱ حسابان ۲

نکته: برای به دست آوردن اکستریم‌های مطلق یک تابع در بازه $[a, b]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه به دست آورده و سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به دست می‌آوریم و سپس اکستریم‌ها را مشخص می‌کنیم. چون دوره تناوب تابع 2π است، پس ابتدا تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ مورد بررسی قرار می‌دهیم و نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x + a \Rightarrow f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + a + 1$$

$$f'(x) = -4\sin x \cos x + 2\cos x = 2\cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

به ازای $\cos x = 0$ ، مقدار $\sin x$ یا برابر ۱ یا برابر -۱ است. مقادیر تابع به ازای این دو مقدار برابر $a + 1$ و $a - 3$ است. از طرفی مقدار تابع

به ازای $\sin x = \frac{1}{2}$ برابر $a + \frac{3}{2}$ است. همچنین برای نقاط ابتدا و انتهای بازه داریم:

$$f(0) = a + 1, \quad f(2\pi) = a + 1$$

بنابراین مینیمم تابع $a - 3$ و ماکزیمم تابع $a + \frac{3}{2}$ است و مجموع این دو مقدار برابر $\frac{5}{2}$ شده است، یعنی:

$$a - 3 + a + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۵، درس ۴ حسابان ۱

نکته: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

با استفاده از نکته، حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2\cos^2 2x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2} |\cos 2x|}{\cos x - \sin x} \stackrel{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-}{\sim} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2} \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{2} \cos x (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \sqrt{2} \cos x (\cos x + \sin x) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

در حد داده شده اگر فرض کنیم $\frac{1}{a} = h$ ، آنگاه چون $a \rightarrow -\infty$ پس $h \rightarrow 0^-$. حال حد را بر حسب h بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{h} \times f(2-h) - 3 \right) = 4 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-h) - 3}{h} = 4 \Rightarrow -f'_-(2) = 4 \Rightarrow f'_-(2) = -4$$

حال حاصل حد خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f\left(\frac{2}{x}\right) - 3}{x^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{f(t) - 3}{\frac{4}{t^2} - 1} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{f(t) - 3}{\frac{4 - t^2}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{f(t) - 3}{t - 2} \times \frac{t^2}{-(2+t)} = f'_-(2) \times \left(\frac{4}{-4}\right) = -f'_-(2) = 4$$

برای اینکه تابع f در $x = 1$ دو بار مشتق پذیر باشد باید f در $x = 1$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و f' نیز در $x = 1$ پیوسته و مشتق پذیر باشد. ابتدا مشتق اول و دوم را حساب می‌کنیم و شروط گفته شده را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} -6x + a & x \leq 1 \\ 3bx^2 & x > 1 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} -6 & x \leq 1 \\ 6bx & x > 1 \end{cases}$$

اکنون هر سه شرط را لحاظ می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow -3 + a = b + c \quad (1)$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow -6 + a = 3b \quad (2)$$

$$f''_-(1) = f''_+(1) \Rightarrow -6 = 6b \Rightarrow b = -1 \xrightarrow{(2)} a = 3 \xrightarrow{(1)} c = 1$$

نکته: $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$

ابتدا مشتق تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = f(x^2) + f(3x-1) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2) + 3f'(3x-1) \xrightarrow{x=-1} g'(-1) = -2f'(1) + 3f'(-4)$$

با توجه به ضابطه $f'(x)$ داریم:

$$\begin{cases} f'(1) = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \\ f'(-4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow g'(-1) = -2 \times 2 + 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

نکته: اگر f' در $x = a$ از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت دهد، آن $x = a$ را طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی (مینیمم نسبی) تابع f گویند. نکته: خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \end{array}$$

نکته: خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار تابع $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$\begin{cases} x = 1 & \text{مجانِب قائم} \\ y = 4 & \text{مجانِب افقی} \end{cases}$$

ابتدا خطوط مجانب تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2 \left(\frac{2x}{x-1} \right) \times \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

برای یافتن مختصات اکسترمم نسبی تابع، مشتق را به دست می‌آوریم:

طبق جدول تعیین علامت، نقطه $M(0,0)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است.

x	0
f'	$- \quad \quad +$
f	$\searrow \quad \quad \nearrow$

فاصله M ، تا مجانب افقی و مجانب قائم تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{فاصله } d = 4 \text{ تا مجانب افقی} \\ \text{فاصله } d' = 1 \text{ تا مجانب قائم} \end{cases} \Rightarrow d = 4d'$$

نکته: فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:
الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.
ب) جهت تغير f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.
ابتدا توابع f' و f'' را به دست می آوریم تا نقاط عطف به دست آید:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + a$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

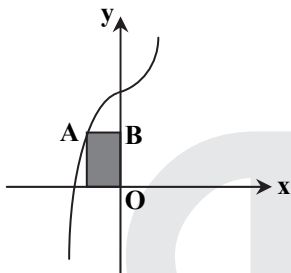
چون قرار است خطوط مماس بر تابع f در نقاط عطف عمود بر هم باشند، داریم:

$$f'(0) \cdot f'(-1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = a \\ f'(-1) = a + 2 \end{cases} \Rightarrow a(a+2) = -1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

نکته: در مسائل بهینه سازی برای ماکسیم یا مینیم کردن یک عبارت، ابتدا تابع آن عبارت را بر حسب یکی از متغیرهای مسئله می نویسیم و سپس با استفاده از مشتق و... جواب مسئله را به دست می آوریم.

نقطه $A(x, x^3 + 8)$ را روی تابع در نظر می گیریم. مساحت مستطیل را به عنوان تابعی بر حسب x می نویسیم: ($x < 0$)

$$S(x) = OB \cdot AB = -x(x^3 + 8) = -x^4 - 8x$$



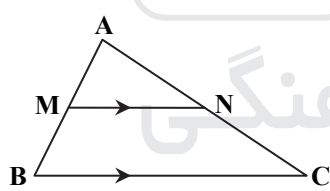
دقت کنید چون مساحت مقداری مثبت است و اینجا $x < 0$ است یک منفی در تابع مساحت قرار دادیم. حال برای به دست آوردن بیشترین مقدار مساحت کافی است مشتق تابع را به دست آورده و ریشه آن را در تابع قرار دهیم:

$$S'(x) = -4x^3 - 8$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow S(-\sqrt[3]{2}) = (8-2)\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار مساحت برابر $6\sqrt[3]{2}$ است.

نکته (قضیه تالس و تعمیم آن): اگر در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند؛ آنگاه روابط زیر برقرار است:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \text{نسبت جزء به جزء) : } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \text{نسبت جزء به کل) : } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot h = S_{\Delta MNC} \Rightarrow S_{\Delta MNC} = 6$$

ابتدا با توجه به اینکه $S_{\Delta MNP} = 6$ داریم:

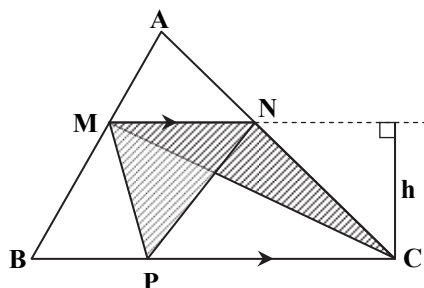
از طرفی طبق تالس می توان نوشت:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = 2$$

$$\frac{S_{\Delta MNC}}{S_{\Delta AMN}} = \frac{NC}{AN} = 2 \Rightarrow \frac{6}{S_{\Delta AMN}} = 2 \Rightarrow S_{\Delta AMN} = 3$$

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{3}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 27$$



نکته: هر n ضلعی محدب دارای $\frac{n(n-3)}{2}$ قطر است.

$$\frac{n(n-3)}{2} > 100 \Rightarrow n(n-3) > 200$$

طبق فرض داریم:

بهتر است به جای حل این نامعادله، از طریق امتحان کردن گزینه‌ها از کوچک به بزرگ جواب را به دست بیاوریم:

$$n = 15: \quad n(n-3) = 15 \times 12 = 180 < 200 \quad \times \qquad n = 16: \quad n(n-3) = 16 \times 13 = 208 > 200 \quad \checkmark$$

بنابراین حداقل مقدار n برابر ۱۶ است.

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

نکته: در هر مثلث هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از مجموع آن‌ها کوچک‌تر است.

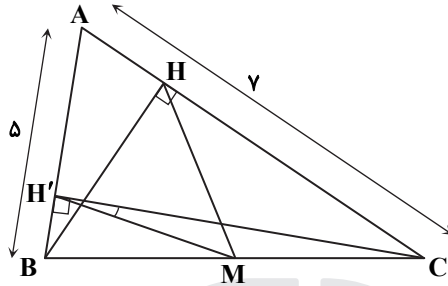
MH' میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه $CH'B$ است، پس داریم:

$$MH' = \frac{1}{2} BC$$

همچنین MH میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه CHB است، پس داریم:

$$MH = \frac{1}{2} BC$$

$$MH + MH' = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} BC = BC \quad (**)$$



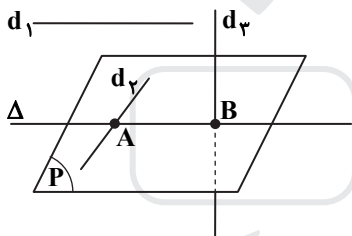
در مثلث ABC ، طبق نکته دوم داریم: $2 < BC < 12 \xrightarrow{(*)} 2 < MH + MH' < 12$ با توجه به گزینه‌ها، $MH + MH'$ نمی‌تواند برابر $12/5$ باشد.

نکته ۱: دو خط را که نقطه اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید، اگر هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آن‌ها باشد، آن دو خط را متناظر می‌نامیم.

نکته ۲: از دو خط متقاطع، فقط یک صفحه می‌گذرد.

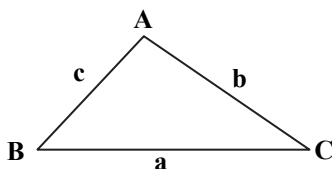
فرض می‌کنیم خط Δ که در نقاط A و B به ترتیب خطوط d_1 و d_2 را قطع کرده است، جواب مسئله باشد. اینک با توجه به نکات، از Δ و صفحه P می‌گذرد که خط d_1 چون با AB موازی است، پس با صفحه P موازی می‌شود، بنابراین برای رسم خط Δ ، باید ابتدا صفحه‌ای شامل d_1 موازی d_2 را رسم کنیم.

نقطه تلاقی این صفحه با صفحه d_2 نقطه B است که از B در صفحه P خط Δ را موازی d_1 رسم می‌کنیم تا خط d_2 را در A قطع کند، این خط جواب مسئله است. واضح است که این خط منحصر به فرد است. بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.



نکته ۱: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

نکته ۲: طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC با اضلاع a, b, c ، داریم:



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

مطابق شکل روبه‌رو و به کمک قضیه فیثاغورس، داریم:

$$\Delta AEB: AB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

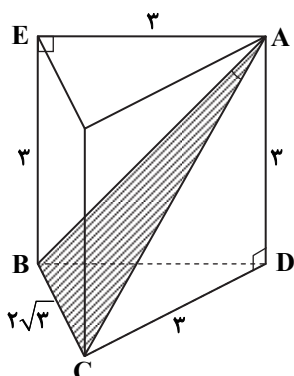
$$\Delta ADC: AC = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

و در مثلث ABC ، با توجه به نکته ۲، خواهیم داشت:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 12 = 18 + 18 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos \hat{A} = 36 - 36 \cos \hat{A}$$

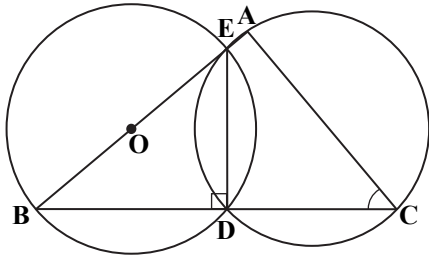
$$\Rightarrow 36 \cos \hat{A} = 24 \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$



نکته: زاویه محاطی برابر با نصف کمان مقابلش است.

نکته: در چهارضلعی محاطی، زوایای مقابل مکمل اند.

در شکل زیر با رسم پاره خط ED در دایره بزرگ تر، چون زاویه محاطی \widehat{EDB} رو به قطر است، برابر با 90° است و داریم:



$$\widehat{B} = \frac{1}{2} \widehat{ED} = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$$

$$\widehat{BED} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AED} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

چهارضلعی AEDC در دایره کوچک تر محاطی است، پس:

$$\widehat{AED} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 130^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 50^\circ$$

نکته: برای دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ سه حالت امکان پذیر است:

(الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، آنگاه دستگاه یک جواب یکتا دارد.

(ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آنگاه دستگاه فاقد جواب است.

(پ) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، آنگاه دستگاه بی شمار جواب دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = m^2 \end{array} \right. \quad \text{داشته باشیم:} \quad \frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} \neq \frac{2}{m^2} \quad \text{با توجه به نکته، باید در دستگاه}$$

$$\frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 - m = 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

اکنون قابل قبول بودن هریک از این مقادیر را بررسی می کنیم.

$$\frac{m-1}{2} = \frac{1}{m} \neq \frac{2}{m^2} : \left\{ \begin{array}{l} m = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \times \\ m = -1 \Rightarrow \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{1} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

بنابراین فقط $m = -1$ قابل قبول است.

$$1 \text{ نکته: } (k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \quad |kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$$

$$2 \text{ نکته: } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$3 \text{ نکته: } (n \in \mathbb{N}): |A^n| = |A|^n$$

با توجه به نکته ۲، داریم:

$$|A^{-1}| = 2 \Rightarrow \frac{1}{|A|} = 2 \Rightarrow |A| = \frac{1}{2}$$

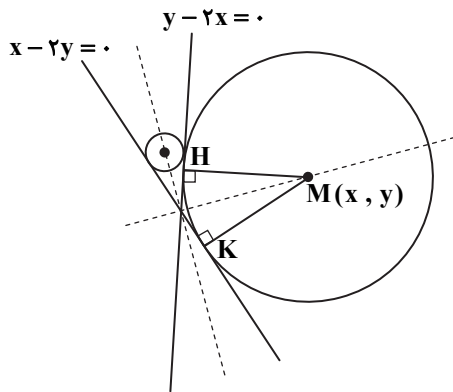
با توجه به نکته ۳، داریم:

$$B = A^2 \Rightarrow |B| = |A^2| \Rightarrow |B| = |A|^2 = \frac{1}{4}$$

و در نهایت با توجه به نکته ۱، خواهیم داشت:

$$|9|A|| = (9|A|)^3 |B| = (9 \times \frac{1}{2})^3 \times \frac{1}{4} = 3^3 \times \frac{1}{4} = \frac{27}{4} = 3$$

مرکز دایره‌هایی که بر دو خط $y = 2x$ و $x = 2y$ مماس‌اند، روی نیمسازهای زوایای بین دو خط قرار دارند. اگر مختصات مرکز دایره به صورت $M(x, y)$ باشد، طبق شکل چون فاصله M از دو خط $y = 2x$ و $x = 2y$ برابر است، داریم:



$$MH = MK$$

$$\frac{|y - 2x|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|x - 2y|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = x - 2y \\ y - 2x = 2y - x \end{cases}$$

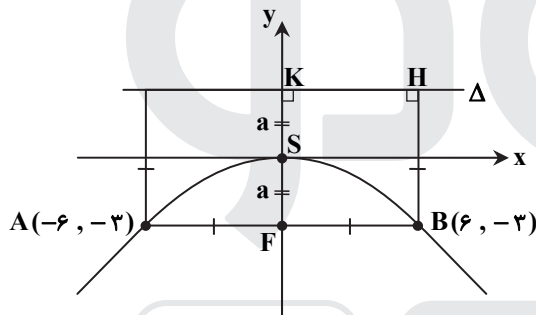
$$\Rightarrow \text{معادلات نیمسازها: } \begin{cases} 3x = 3y \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{5}, \sqrt{5}) \\ (\sqrt{5}, -\sqrt{5}) \end{cases}$$

فاصله نقطه M از خط $y = 2x$ همان شعاع دایره است، پس:

$$R = MH \Rightarrow \begin{cases} M(\sqrt{5}, \sqrt{5}) \Rightarrow MH = \frac{|\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 1 \\ M(\sqrt{5}, -\sqrt{5}) \Rightarrow MH = \frac{|\sqrt{5} + 2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 3 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: معادله سهمی قائم به رأس مبدأ مختصات و فاصله کانونی a که دهانه آن روبه پایین (بالا) است به صورت $x^2 = -4ay$ ($x^2 = 4ay$) می‌باشد که مختصات کانون آن $F(-a, 0)$ ($F(a, 0)$) و معادله خط هادی آن $y = a$ ($y = -a$) و معادله محور تقارن آن $x = 0$ است. مطابق اطلاعات سؤال و نکته می‌توان نوشت:



$$F = \frac{A+B}{2} = (0, -3)$$

بر طبق تعریف سهمی $BH = BF$ و در نتیجه $BHKF$ یک مربع است و داریم:

$$FB = 2a \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$S(0, 0) \Rightarrow x^2 = -12y$$

از بین گزینه‌ها، فقط گزینه ۳ که نقطه $(12, -12)$ است، در معادله

سهمی صدق می‌کند.

نکته: برای دو بردار \vec{a} و \vec{b} داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\text{نکته: } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

ابتدا حاصل عبارت $(\vec{b} - \vec{c}) \times (3\vec{c} + \vec{a})$ را می‌یابیم.

$$(\vec{b} - \vec{c}) \times (3\vec{c} + \vec{a}) = 3\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{c} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{a} = 3\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{a}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{a}) = 3\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + 6\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + 2\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$= 3\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = 3\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - 2\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

برای اثبات درستی سور عمومی « \forall » باید بتوانیم آن را به‌ازای تمام مقادیر ثابت کنیم و اگر حتی یک مثال نقض پیدا کنیم سور عمومی نادرست می‌شود، ولی در سورهای وجودی « \exists » اگر حتی یک مثال درست پیدا کنیم آن سور درست خواهد شد. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱ نادرست است: زیرا به‌ازای $x, y = 1$ وجود ندارد که $x^2 < y$ برقرار باشد.

گزینه ۲ نادرست است: زیرا: $x = 4, y = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 < 16$

گزینه ۳ درست است: زیرا: $x = 4, y = 1 \Rightarrow x > y + 2$

گزینه ۴ نادرست است: زیرا اگر $x = 4$ باشد، هیچ y وجود ندارد که رابطه $x + y = 4$ برقرار باشد.

نکته: اگر A و B ناتهی باشند و $A \times B = B \times A$ ، آنگاه: $A = B$
 طبق نکته باید دو مجموعه $A = \{2, x, z + 1, 5\}$ و $B = \{x + 3, 4, y\}$ برابر باشند.
 تمام حالات را بررسی می‌کنیم، باید $x + 3$ و y از مجموعه B ، با ۲ و ۵ از مجموعه A برابر باشند:

$$1) \begin{cases} x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \{2, -1, z + 1, 5\} \\ B = \{2, 4, 5\} \end{cases} \Rightarrow A = B \text{ غیرممکن است}$$

$$2) \begin{cases} x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \{2, z + 1, 5\} \\ B = \{5, 4, 2\} \end{cases} \Rightarrow z + 1 = 4 \Rightarrow z = 3 \quad \checkmark$$

$$x + y + z = 2 + 2 + 3 = 7$$

در نتیجه:

نکته: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ و $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ و $P(A') = 1 - P(A)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، پیشامدهای « A و « B و « A' و « B' و « A و « B' نیز مستقل اند.

$$P(A|B') = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{P(A)P(B')}{P(B')} = \frac{2}{9} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{9}$$

پیشامدهای A و B مستقل اند، در نتیجه:

$$P(A - B) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) - P(A)P(B) = \frac{1}{8}$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow \frac{2}{9} - \frac{2}{9}P(B) = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2}{9}P(B) = \frac{2}{9} - \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2}{9}P(B) = \frac{7}{72} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{16}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

بنابراین:

نکته: فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

دلخواه A ، داریم:

نکته: فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد

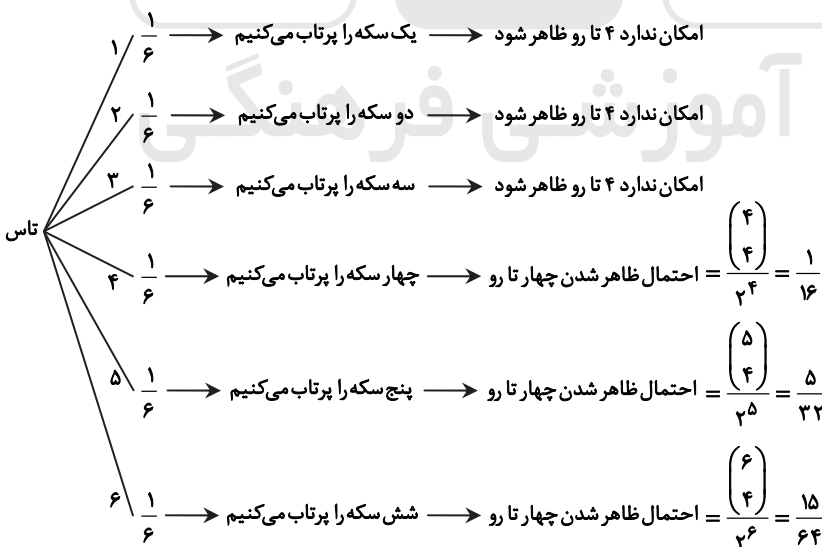
$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:نکته: احتمال k بار موفقیت در n پرتاب

$$\binom{n}{k}$$

یک سکه برابر است با:

چون احتمال شرطی داریم که فضای نمونه‌ای آن به ۶ حالت مجزا افراز می‌شود، پس طبق نمودار درختی زیر و با استفاده از نکته فوق داریم:



بنابراین:

$$P(\text{تاس عدد ۵ ظاهر شود} | \text{تاس عدد ۵ ظاهر شود}) = \frac{P(\text{تاس عدد ۵ ظاهر شود}) \cdot P(\text{تاس عدد ۵ ظاهر شود})}{P(\text{تاس عدد ۵ ظاهر شود})}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{32}}{\frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{32} + \frac{1}{6} \times \frac{15}{64}} = \frac{\frac{5}{32}}{\frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{15}{64}} = \frac{10}{29}$$

۳۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۲)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$
 نرگس، نگار و چهار نفر دیگر روی هم ۶ نفر هستند که می‌خواهند به ترتیب وارد کلاس شوند و به $6! = 720$ حالت می‌توانند این کار را انجام دهند.
 در نصف این ۷۲۰ حالت نرگس قبل از نگار وارد کلاس می‌شود و در نصف دیگر نگار قبل از نرگس وارد کلاس می‌شود.

پس جواب $\frac{720}{2} = 360$ = حالت است.

۳۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)

نکته ۱: فراوانی نسبی هر داده برابر است با خارج‌قسمت تقسیم فراوانی آن داده به تعداد کل داده‌ها.
 نکته ۲: در هر بررسی آماری، مجموع فراوانی‌های نسبی همواره برابر یک است.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

نکته ۳: میانگین داده‌های x_1 تا x_n با فراوانی f_1 تا f_n برابر است با:

نکته ۴: واریانس n داده x_1 تا x_n با فراوانی f_1 تا f_n را با σ^2 نمایش داده و برابر است با:

$\cdot/1 + a + \cdot/2 + \cdot/45 = 1 \Rightarrow a = \cdot/25$

با توجه به نکته ۲، داریم:

اینک با توجه به نکته ۱، فراوانی هر داده را به دست می‌آوریم:

$f_1 = \cdot/1 \times 40 = 4$, $f_2 = \cdot/25 \times 40 = 10$, $f_3 = \cdot/2 \times 40 = 8$, $f_4 = \cdot/45 \times 40 = 18$

اینک با توجه به نکته ۳، میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$\bar{x} = \frac{(4 \times 1) + (10 \times 2) + (8 \times 16) + (18 \times 20)}{40} = \frac{32 + 20 + 128 + 360}{40} = \frac{540}{40} = 13.5$

و در نهایت با توجه به نکته ۴، واریانس داده‌ها، برابر است با:

$\sigma^2 = \frac{4(1-13.5)^2 + 10(2-13.5)^2 + 8(16-13.5)^2 + 18(20-13.5)^2}{40} = \frac{256 + 160 + 0 + 288}{40} = \frac{704}{40} = 17.6$

۳۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۴، درس ۲)

نکته: برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی آماره نمونه.

در ابتدا می‌دانیم تعداد کل نمونه‌های ۲ عضوی، برابر است با: $n(S) = \binom{5}{2} = 10$

و اینک با توجه به نکته، واضح است که نمونه‌های ۲ عضوی که میانگین را بیشتر از ۳ برآورد کنند، عبارتند از:

$A = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$; $n(A) = 4$

$P(A) = \frac{4}{10} = \cdot/4$

پس احتمال موردنظر، برابر است با:

۳۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکته:
$$a \equiv b \Rightarrow a^m \equiv b^m \text{ و } a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d \\ ac \equiv bd \end{cases}$$

ابتدا باقی‌مانده تقسیم 1000^{71} و $11!$ را بر 13 جداگانه محاسبه می‌کنیم:
 $1000 \equiv 13$, $1000 - 13 \times 76 \equiv 12 \equiv -1 \Rightarrow 1000^{71} \equiv -1$
 برای $11! = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ داریم:

$$\begin{cases} 11 \times 7 \equiv 77 - 6 \times 13 \equiv -1 \\ 10 \times 9 \equiv 90 - 7 \times 13 \equiv -1 \\ 8 \times 5 \equiv 40 - 3 \times 13 \equiv 1 \Rightarrow 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \equiv (-1) \times (-1) \times 1 \times (-1) \times (-1) \Rightarrow 11! \equiv 1 \\ 6 \times 2 \equiv -1 \\ 3 \times 4 \equiv -1 \end{cases}$$

بنابراین: $1000^{71} + 11! \equiv -1 + 1 \equiv 0$

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که: $(a, b) | c$ با توجه به فرض سؤال، a می تواند یکی از اعضای مجموعه زیر باشد:

$$a \in \{2, 3, \dots, 12\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 11$$

با توجه به نکته داریم:

$$ax + 6y = 10 \xrightarrow{\text{شرط جواب}} (a, 6) | 10$$

مقادیری از a که در رابطه فوق صدق می کنند عبارتند از $A = \{2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ ، بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = \frac{7}{11}$$

نکته: تعداد یال های گراف کامل K_p برابر است با:

$$q = \binom{p}{2} = \frac{P(p-1)}{2}$$

نکته: اگر گراف همبند G دارای حداقل یال های ممکن باشد، داریم: $q = p - 1$

با استفاده از نکته فوق داریم:

$$p + q = 21 \Rightarrow p + p - 1 = 21 \Rightarrow 2p = 22 \Rightarrow p = 11, q = 10$$

تعداد یال ها در گراف کامل K_{11} را محاسبه می کنیم:

$$\binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

بنابراین تعداد یال هایی که باید اضافه کنیم، برابر است با:

$$55 - 10 = 45$$

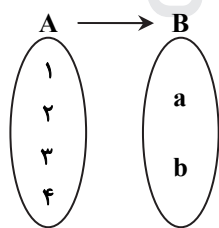
نکته: یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر مینیمال می نامیم. در گزینه ۴ با حذف رأس f از مجموعه احاطه گر، مجموعه باقی مانده باز هم احاطه گر خواهد بود، پس مینیمال نیست.

$$\text{نکته: } |(A \cup B)'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

$$\text{نکته: } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ابتدا به تعداد $\binom{5}{1} = 5$ حالت یکی از کتاب ها را انتخاب کرده و به نفر اول می دهیم، سپس ۴ کتاب متفاوت دیگر را می خواهیم بین دو نفر

پخش کنیم به طوری که به هر نفر حداقل یک کتاب برسد، تعداد جواب های این مسئله با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۲ عضوی برابر است.



$$\text{تعداد کل توابع: } |S| = 2^4 = 16$$

$$|A_1| = 1^4 = 1 \text{ : تعداد توابعی که } a \text{ را نمی پوشاند}$$

$$|A_2| = 1^4 = 1 \text{ : تعداد توابعی که } b \text{ را نمی پوشاند}$$

$$|A_1 \cap A_2| = 0 \text{ : تعداد توابعی که } a \text{ و } b \text{ را نمی پوشانند.}$$

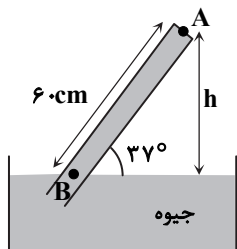
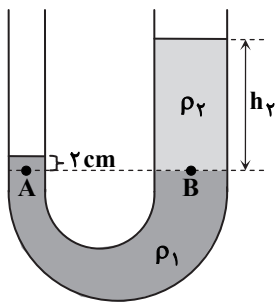
$$|\overline{A_1 \cap A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 16 - 1 - 1 + 0 = 14$$

بنابراین تعداد حالت های توزیع ۵ کتاب بین ۳ نفر با شرط داده شده برابر است با:

$$14 \times \binom{5}{1} = 70$$

“ فیزیک ”

ژول (J) یکای SI انرژی بوده و یکای فرعی آن $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ است.



۴۲- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

فشار در نقاط A و B باید برابر باشد. توجه کنید که فشار مایع به شکل ظرف و مساحت مقطع آن بستگی ندارد.

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Rightarrow 13/5 \times 2 = 1/5 h_2$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{13/5 \times 2}{1/5} = 9 \times 2 = 18 \text{ cm}$$

$$V_2 = A_2 h_2 = 8 \times 18 = 144 \text{ cm}^3$$

۴۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

$$\sin 37^\circ = \frac{h}{6.0} = 0.6 \Rightarrow h = 3.6 \text{ cm}$$

$$P_0 = P_B = P_A + 3.6 \text{ cmHg} \Rightarrow P_A = 76 - 3.6 = 72.4 \text{ cmHg}$$

$$P_A = \rho g h = 13600 \times 10 \times \frac{72.4}{100} = 98464 \text{ Pa}$$

$$F = PA = 98464 \times 1 \times 10^{-4} = 9.8464 \text{ N}$$

۴۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_f = K_2 - K_1$$

انرژی جنبشی به جهت حرکت بستگی ندارد و کار نیروی وزن نیز به مسیر بستگی ندارد.

$$mg \cos 0^\circ + W_f = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow 0.5 \times 10 \times 40 + W_f = \frac{1}{2} \times 0.5 \times (28^2 - 12^2)$$

$$\Rightarrow 20 + W_f = \frac{1}{4} (28 + 12)(28 - 12) = 10 \times 16 \Rightarrow W_f = -40 \text{ J}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$\frac{h}{d} = \sin \theta \Rightarrow h = d \sin \theta = 5 \times 0.6 = 3 \text{ m}$$

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{f_k} + W_{\text{وزن}} + W_{\text{عمودی سطح}} = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\Rightarrow W_{f_k} - mg \Delta h = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W_{f_k} - 2 \times 10 \times 3 = -\frac{1}{2} \times 2 \times 100 \Rightarrow W_{f_k} - 60 = -100 \Rightarrow W_{f_k} = -40 \text{ J}$$

۴۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$\text{گرماسنج: } \begin{cases} C_1 = 84 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \\ \theta_1 = 10^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$\text{آب: } \begin{cases} m_2 = 480 \text{ g} \\ \theta_2 = 10^\circ\text{C} \\ c_2 = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} \end{cases}$$

$$\text{گلوله: } \begin{cases} C_3 = 210 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \\ \theta_3 = ? \end{cases}$$

دمای تعادل: $\theta_e = 12^\circ\text{C}$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow C_1(\theta_e - \theta_1) + m_2 c_2(\theta_e - \theta_2) + C_3(\theta_e - \theta_3) = 0$$

$$\Rightarrow 84(12 - 10) + 480 \times 4/2(12 - 10) + 210(12 - \theta_3) = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 96 + 60 - 5\theta_3 = 0 \Rightarrow 160 = 5\theta_3 \Rightarrow \theta_3 = \frac{160}{5} = 32^\circ\text{C}$$

طرفین را بر ۴۲ تقسیم می‌کنیم:

۴۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$20^\circ\text{C} \text{ آب} \xrightarrow{Q_1} 40^\circ\text{C} \text{ آب}$$

$$50^\circ\text{C} \text{ آب} \xrightarrow{Q_2} 40^\circ\text{C} \text{ آب}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 c \Delta \theta_1 + m_2 c \Delta \theta_2 = 0 \Rightarrow c(m_1 \times (40 - 20) + m_2 \times (40 - 50)) = 0 \Rightarrow 2m_1 - 10m_2 = 0 \Rightarrow 2m_1 = 10m_2$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $m_1 + m_2 = 600 \text{ g}$ در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 600 \text{ g} \\ m_2 = 2m_1 \end{cases} \Rightarrow 3m_1 = 600 \text{ g} \Rightarrow m_1 = 200 \text{ g}$$

$$P = P_0 + \frac{mg}{A} = 1.0^5 + \frac{2.0}{1.0 \times 10^{-4}} = 1/2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

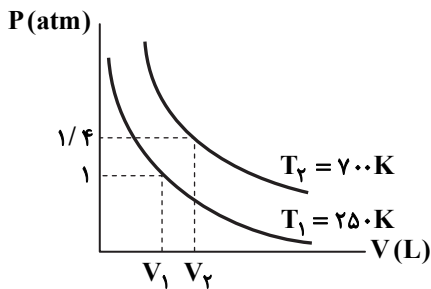
گاز زیر پیستون فرایندی هم فشار را انجام می دهد:

ارتفاع ستون گاز زیر پیستون پس از ۲۰ درصد کاهش برابر است با:

$$h_2 = 0.8 h_1 = 0.8 \times 40 = 32 \text{ cm}$$

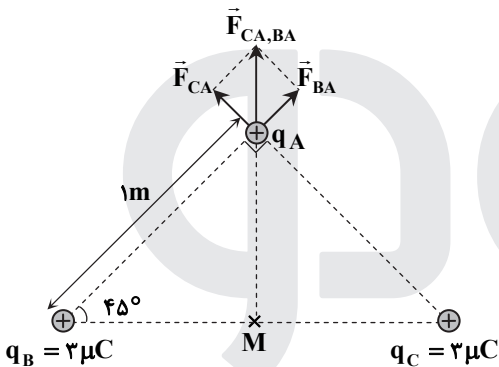
$$W = -P\Delta V = -PA\Delta h = -1/2 \times 10^5 \times 1.0 \times 10^{-4} \times (32 - 40) \times 10^{-2} = +9/6 \text{ J}$$

$$W' = -W = -9/6 \text{ J}$$



می دانیم در نمودارهای هم دمای گاز کامل در صفحه P-V، منحنی بالاتر مربوط به دمای بیشتر است.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1 \times V_1}{250} = \frac{1/4 \times V_2}{700} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 2$$



$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

$$F_{CA} = F_{BA} = k \frac{|q_B| |q_A|}{1^2} \Rightarrow F_{BA,CA} = \sqrt{F_{CA}^2 + F_{BA}^2} = \sqrt{2} F_{CA}$$

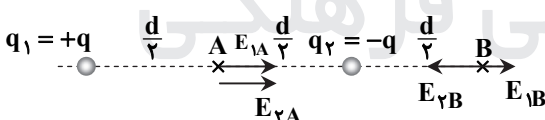
$$AM = AB \sin 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

باید $F_{MA} = F_{CA,BA}$ باشد تا برابری نیروهای وارد بر q_A برقرار شود.

$$k \times \frac{|q_M| |q_A|}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{2} \times k \times \frac{2 \times 10^{-6} \times |q_A|}{1^2} \Rightarrow |q_M| = 1/5 \sqrt{2} \times 10^{-6} \text{ C} = 1/5 \sqrt{2} \mu\text{C}$$

با توجه به شکل، نیروی \vec{F}_{MA} لازم است رو به پایین باشد؛ بنابراین q_M و q_A ناهم نام هستند، پس:

$$q_M = -1/5 \sqrt{2} \mu\text{C}$$



$$E_{TA} = E_{1A} + E_{2A} = k|q| \left| \frac{4}{d^2} + \frac{4}{d^2} \right| = \frac{8k|q|}{d^2}$$

$$E_{TB} = |E_{1B} - E_{2B}| = k|q| \left| \frac{4}{9d^2} - \frac{4}{d^2} \right| = \frac{32k|q|}{9d^2}$$

$$\frac{E_{TA}}{E_{TB}} = \frac{\frac{8k|q|}{d^2}}{\frac{32k|q|}{9d^2}} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1/8 \times 10^4}{E_{TB}} = \frac{9}{4} \Rightarrow E_{TB} = 8 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow 6 \times 10^{-12} = 1 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{3.0 \times 10^{-4}}{d} \Rightarrow d = 4/5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$|\Delta V| = Ed \Rightarrow 18 = E \times 4/5 \times 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow E = \frac{18}{4/5 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$A = \pi r^2 = \pi (2 \times 10^{-3})^2 = 12 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

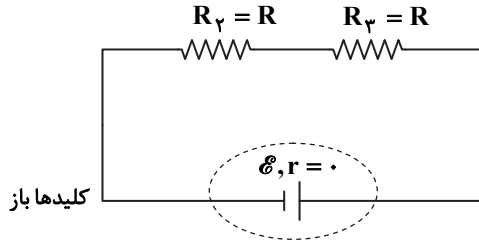
$$m = \rho V \Rightarrow 540 \times 10^{-3} = 9 \times 10^3 \times V \Rightarrow V = 6 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$V = AL \Rightarrow 6 \times 10^{-5} = 12 \times 10^{-6} \times L \Rightarrow L = 5 \text{ m}$$

$$R = \rho' \frac{L}{A} = 1/8 \times 10^{-8} \times \frac{5}{12 \times 10^{-6}} = 7/5 \times 10^{-3} \Omega$$

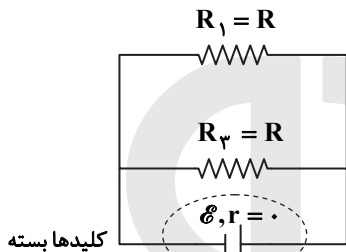
در پاسخ این سؤال برای اینکه نمادهای چگالی و مقاومت ویژه متفاوت باشند، مقاومت ویژه را با ρ' نشان دادیم.

هنگامی که کلیدها باز هستند، مدار در واقع به شکل روبه‌رو است:



$$R_{eq1} = 2R$$

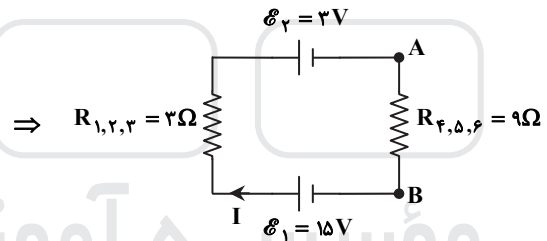
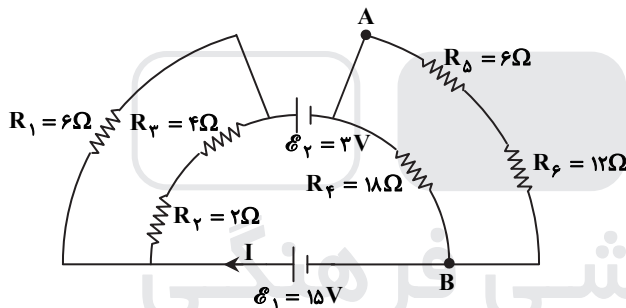
با بستن کلید k_p ، دو سر مقاومت R_p با سیم بدون مقاومت به یکدیگر متصل شده‌اند، لذا اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر می‌شود و اصطلاحاً می‌گوییم مقاومت، «اتصال کوتاه» شده است.



$$R_{eq2} = \frac{R}{2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{E^2}{R_{eq2}}}{\frac{E^2}{R_{eq1}}} = \frac{R_{eq1}}{R_{eq2}} = \frac{2R}{R/2} = 4$$

با توجه به آرمانی بودن ولت‌سنج، درمی‌یابیم که $\mathcal{E}_2 = 3V$ است و می‌توان مدار را به صورت زیر ساده کرد.



$$R_{2,3} = R_2 + R_3 = 2 + 4 = 6 \Omega, \quad \frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{2,3}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow R_{1,2,3} = 3 \Omega$$

$$R_{5,6} = R_5 + R_6 = 6 + 12 = 18 \Omega, \quad \frac{1}{R_{4,5,6}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{5,6}} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \Rightarrow R_{4,5,6} = 9 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_{1,2,3} + R_{4,5,6}} = \frac{15 - 3}{3 + 9} = 1A \Rightarrow V_A - V_B = R_{4,5,6} I = 9 \times 1 = 9V$$

اگر بار مثبت باشد، نیروی الکتریکی به طرف پایین صفحه بر آن وارد می‌شود و برای آنکه نیروی مغناطیسی هم به طرف پایین صفحه باشد، طبق قاعده دست راست، باید بار درون سو پرتاب شود.

اگر بار منفی باشد، جهت هر دو نیرو 180° تغییر می‌کند؛ یعنی هر دو نیرو به طرف بالای صفحه وارد می‌شود و در نتیجه، باز هم جهت حرکت بار در این حالت باید درون سو باشد. (بنابراین، نوع بار برای بیشینه شدن نیرو مهم نیست ولی اگر جهت معینی برای نیرو مدنظر بود، نوع بار هم مهم می‌شد).

$$B_{سیم‌لوله} = B_{پیچه} \Rightarrow \left(\frac{\mu_0 NI}{l}\right)_{سیم‌لوله} = \left(\frac{\mu_0 NI}{rR}\right)_{پیچه} \Rightarrow \frac{8}{.01} I_{سیم‌لوله} = \frac{200 \times 4}{10 \times 10^{-2}} \Rightarrow I_{سیم‌لوله} = 10A$$

اندازه میدان مغناطیسی در لحظه $t_1 = 0/25$ s نصف اندازه میدان مغناطیسی در لحظه $t_2 = 0/5$ s است.

$$\Delta B = 2 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3} = 1 \times 10^{-3} \text{ T}$$

$$\Phi = BAC \cos \theta = BA$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \Delta(BA) = (\Delta B) \times A = 1 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

$$\bar{I} = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{-N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}}{R} \Rightarrow \bar{I} = \frac{N}{R} \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{1}{20} \times \frac{5 \times 10^{-7}}{0/75 - 0/25} = 5 \times 10^{-8} \text{ A}$$

$$q = \bar{I} \Delta t = 5 \times 10^{-8} \times 0/5 = 2/5 \times 10^{-8} \text{ C} = 25 \text{ nC}$$

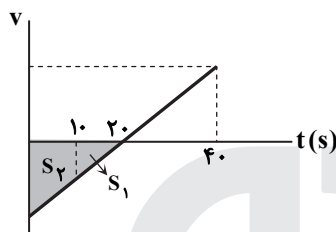
طبق رابطه $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$ ، گزینه ۲ صحیح است.

متحرک در مدت $t = 0$ تا $t = 40$ s یک حرکت با شتاب ثابت دارد. با توجه به تقارن نمودار سرعت- زمان در این ۴۰ ثانیه می توان گفت که در $t = 20$ s حرکت (علامت سرعت) عوض می شود. پس بیشترین فاصله متحرک از نقطه شروع در $t = 20$ s است.

$$S_2 = |\Delta x| = 300 \text{ m}$$

برای بازه $t = 0$ تا $t = 10$ s:

با توجه به تشابه مثلث ها، می توان نوشت:



$$\frac{S_1}{S_1 + S_2} = \left(\frac{10}{20}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_1 + 300} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_1 = 100$$

$$\Rightarrow |\Delta x_{(0,20s)}| = S_1 + S_2 = 400 \Rightarrow |x_{t=20s} - x_0| = 400 \text{ m}$$

راه حل دوم:

$$v = at + v_0 \text{ و } v_{t=20s} = 0 \Rightarrow 20a + v_0 = 0$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow -300 = 50a + 10v_0 \Rightarrow 5a + v_0 = -30$$

$$\left. \begin{aligned} v = at + v_0 \text{ و } v_{t=20s} = 0 \Rightarrow 20a + v_0 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow -300 = 50a + 10v_0 \Rightarrow 5a + v_0 = -30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ و } v_0 = -40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{t=20s} - x_0 = \frac{1}{2} \times 2 \times 20^2 + 20 \times (-40) = -400 \text{ m} \Rightarrow |x_{t=20s} - x_0| = 400 \text{ m}$$

با توجه به اینکه جابه جایی و مسافت طی شده هم اندازه نیستند، معلوم می شود که در مدت $t_1 = 0$ تا $t_2 = 6$ s جهت حرکت عوض می شود و از آنجا که شتاب حرکت ثابت است (نمودار $v-t$ خط مستقیم مایل است) و با توجه به اینکه علامت شتاب در هر چهار گزینه منفی است، شکل نمودار به صورت روبرو است.

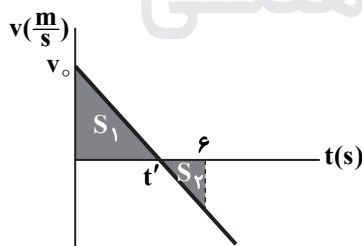
$$\left. \begin{aligned} l = S_1 + S_2 = 100 \\ d = S_1 - S_2 = 60 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_1 = 80 \text{ m}, S_2 = 20 \text{ m}$$

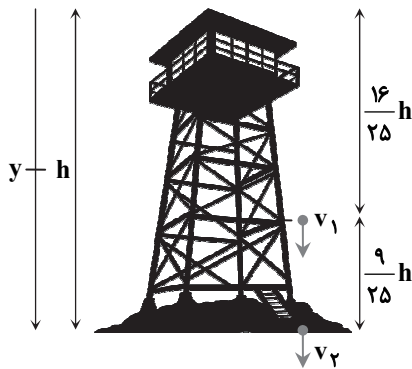
حالا به تشابه دو مثلث توجه کنید. با توجه به اینکه مساحت مثلث دوم $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اولی است، پس می توان گفت نسبت تشابه ۱ به ۲ است.

$$\frac{t'}{6-t'} = \frac{2}{1} \Rightarrow t' = 4 \text{ s}$$

$$S_1 = \frac{v_0 \times t'}{2} \Rightarrow 80 = \frac{v_0 \times 4}{2} \Rightarrow v_0 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v(4) = 0 \Rightarrow 4a + 40 = 0 \Rightarrow a = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$





$$v^2 = 2g\Delta y \Rightarrow \begin{cases} v_1^2 = 2g\left(\frac{16}{25}h\right) \Rightarrow (28)^2 = 2g\left(\frac{16}{25}h\right) \\ v_2^2 = 2gh \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_2}{28}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{v_2}{28} = \frac{5}{4} \Rightarrow v_2 = 35 \frac{m}{s}$$

$$v = gt \Rightarrow 35 = 10t \Rightarrow t = 3.5s$$

جهت مثبت محور y را روبه پایین در نظر گرفته‌ایم.

حالت اول: $F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma_1$ اندازه شتاب در حالت اول است.حالت دوم: $F_{net} = ma \Rightarrow f_k = ma_2$ اندازه شتاب در حالت دوم است.

$$a_1 = a_2 \Rightarrow F - f_k = f_k \Rightarrow F = 2f_k \Rightarrow f_k = 10N$$

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \Rightarrow 10 = 40\mu_k \Rightarrow \mu_k = 0.25$$

حالت اول: $F_{e1} - mg = 0 \Rightarrow F_{e1} = mg$ حالت دوم: $F_{e2} - 2mg = 2ma \Rightarrow F_{e2} = 2m(g+a)$

$$\frac{F_{e2}}{F_{e1}} = \frac{2m(g+a)}{mg} = \frac{2 \times (10+2)}{10} = \frac{24}{10}$$

$$F_e = kx \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{F_{e2}}{F_{e1}} \Rightarrow \frac{x_2}{65-60} = \frac{24}{10} \Rightarrow x_2 = 12cm$$

$$L_2 = L_0 + x_2 = 60 + 12 = 72cm$$

در گردش ماهواره به دور زمین اگر r شعاع مدار ماهواره و M_e جرم زمین باشد، داریم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

دوره و تندی ماهواره به جرم ماهواره بستگی ندارد.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \cdot \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{r_A}{r_B}} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{8}$$

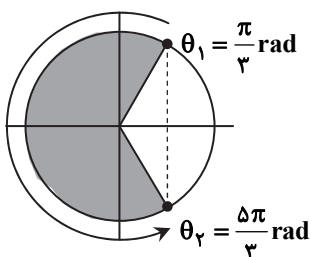
$$\Delta \frac{T}{4} = 3 \Rightarrow T = 2/4s$$

$$x(t) = A \cos \omega t \Rightarrow \Delta = 10 \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{1}{2}$$

روی دایره مثلثاتی، $\cos \theta = \frac{1}{2}$ در ربع اول و چهارم جواب دارد. Δt مدت زمانی است که زاویه $\theta = \omega t$ از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{3}$ تغییر می‌کند.

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 = \omega t_2 - \omega t_1 = \omega \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \Delta t \Rightarrow \Delta t = 1/6s$$



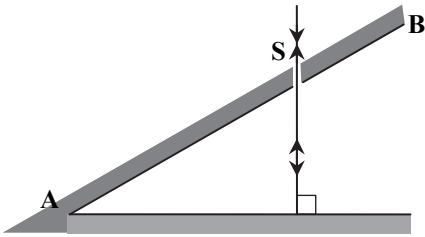
$$E = 2\pi^2 m f^2 A^2 \Rightarrow \Delta = 2 \times 10^{-8} \times 0.25 \times f^2 \times \left(\frac{\Delta}{100}\right)^2 \Rightarrow f^2 = 400 \Rightarrow f = 20 \text{ Hz}$$

$$\frac{3}{2} \lambda = 180 \Rightarrow \lambda = 120 \text{ cm} = 1.2 \text{ m}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow 1.2 = \Delta T \Rightarrow T = \frac{1.2}{\Delta} = 0.24 \text{ s} = 240 \text{ ms}$$

۱۸۰ ms برابر $\frac{3T}{4}$ است. بنابراین پس از گذشت $\frac{3T}{4}$ ، نقطه P به وضعیت $y_P = +6 \text{ mm}$ و نقطه Q به وضعیت $y_Q = -6 \text{ mm}$ می‌رسد.

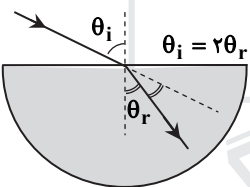
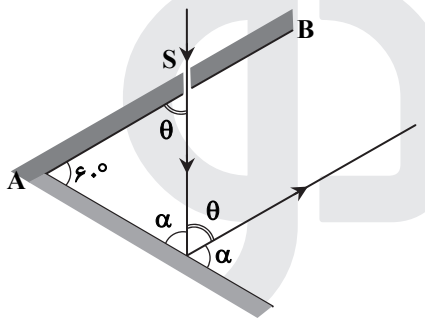
برای آنکه پرتوی نور روی خودش برگردد، باید بر سطح آینه تخت عمود باشد؛ یعنی شکل روبه‌رو.



اما در شکل اولیه وضعیت به ترتیب زیر بوده است:

$$\begin{cases} \alpha + \theta + 60^\circ = 180^\circ \\ \alpha + \theta + \alpha = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = \theta = 60^\circ$$

از مقایسه این دو وضعیت معلوم می‌شود که آینه نسبت به وضعیت اولیه، 30° پادساعت‌گرد چرخیده است.



$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin 2\theta_r}{\sin \theta_r} = \frac{1/6}{1} \Rightarrow \frac{2 \sin \theta_r \cos \theta_r}{\sin \theta_r} = 1/6$$

$$\Rightarrow \cos \theta_r = 0.8 \Rightarrow \theta_r = 37^\circ \Rightarrow \theta_i = 2\theta_r = 74^\circ$$

در حالت اول، تار در هماهنگ چهارم است.

$$f_4 = 60 \text{ Hz} \Rightarrow 4f_1 = 60 \Rightarrow f_1 = 15 \text{ Hz}$$

در حالت دوم، ۴ گره و ۳ شکم تشکیل می‌شود (تعداد گره‌ها در تار دو سر بسته، یکی بیشتر از تعداد شکم‌ها است)؛ یعنی هماهنگ سوم.

$$f_3 = 36 \text{ Hz} \Rightarrow 3f_1 = 36 \Rightarrow f_1 = 12 \text{ Hz}$$

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow \frac{f_1 \text{ جدید}}{f_1 \text{ اولیه}} = \frac{v \text{ جدید}}{v \text{ اولیه}} = \sqrt{\frac{F \text{ جدید}}{F \text{ اولیه}}} \Rightarrow \frac{120}{150} = \sqrt{\frac{F \text{ جدید}}{F \text{ اولیه}}} \Rightarrow \frac{F \text{ جدید}}{F \text{ اولیه}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 \Rightarrow K_{\max} = \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{150 \times 10^{-9}} - 5 = 8 - 5 = 3 \text{ eV} = 3 \times 1.6 \times 10^{-19} = 4.8 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times v^2 = 4.8 \times 10^{-19} \Rightarrow v^2 = \frac{9.6 \times 10^{-19}}{9 \times 10^{-31}} = \frac{9.6}{9} \times 10^{12} = 1.06 \times 10^{12} \Rightarrow v = 1.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

جذب فوتون سبب بالا رفتن تراز انرژی الکترون می شود، پس گزینه ۴ نادرست است.

$$\text{انرژی فوتون جذب شده: } \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240}{434} \approx 2/86 \text{ eV}$$

$$E_3 - E_2 = \frac{-13/6}{9} - \frac{-13/6}{4} = \frac{5}{36} \times 13/6 \approx 1/89 \text{ eV}$$

$$E_5 - E_2 = \frac{-13/6}{25} - \frac{-13/6}{4} = \frac{21}{100} \times 13/6 \approx 2/86 \text{ eV}$$

البته نیازی به حساب کردن $E_5 - E_3$ نیست؛ زیرا $E_5 - E_2$ با انرژی فوتون جذب شده برابر است.

$$E_5 - E_3 = \frac{-13/6}{25} - \frac{-13/6}{9} = \frac{16 \times 13/6}{225} \approx 0/97 \text{ eV}$$

نکته: طول موج ۴۳۴ نانومتر مرئی بوده، در نتیجه مربوط به یکی از خط‌های طیفی رشته‌ی بالمر ($n' = 2$) است. پس کافی است یکی از گزینه‌های ۱ و ۲ را بررسی کنیم. البته نادرستی گزینه ۱ بدون محاسبه هم معلوم است؛ چون به ازای $n_U = 3$ ، بلندترین طول موج مرئی مربوط به $n' = 2$ حدود ۶۶۰ نانومتر به دست می‌آید.

کاستی جرم هسته برابر تفاوت جرم هسته با مجموع جرم نوکلئون‌های سازنده آن است. انرژی بستگی هسته برابر انرژی معادل کاستی جرم هسته است.

$$E = mc^2 = 13/2 \times 10^{-27} \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 \Rightarrow E = 3/2 \times 9 \times 10^{-14} \text{ J}$$

$$E = 3/2 \times 9 \times 10^{-14} \times \frac{1 \text{ eV}}{1/6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 18 \times 10^5 \text{ eV} = 1/8 \text{ MeV}$$

$$N = \frac{N_0}{2^n} \quad \text{تعداد هسته‌های باقی مانده}$$

$$N' = N_0 - \frac{N_0}{2^n} = N_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{تعداد هسته‌های واپاشیده شده}$$

$$\text{رابطه (۱): } 48 \times 10^{24} = N_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{در مدت } t$$

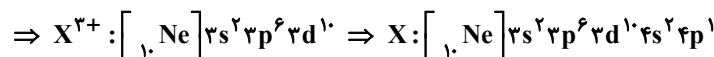
$$\text{رابطه (۲): } 48 \times 10^{24} + 12 \times 10^{24} = 60 \times 10^{24} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \times N_0 = N_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{در مدت } 2t$$

$$\frac{48 \times 10^{24}}{60 \times 10^{24}} = \frac{N_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{N_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{t}{n} = \frac{t}{2}$$

شیمی

$$\frac{\text{تعداد الکترون‌های لایه سوم}}{8} = 2/25 \Rightarrow \text{تعداد الکترون‌های لایه سوم} = 18$$



$$\Rightarrow \text{عدد اتمی} = 31 \quad \text{شماره گروه} = 13$$

X و Z به ترتیب گوگرد و اکسیژن هستند که می‌توانند با یکدیگر مولکول قطبی SO_2 که ساختاری خمیده دارد را تشکیل دهند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

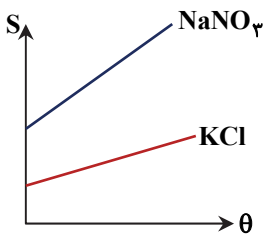
(۱) عنصرهای M و Y نیز مانند عنصرهای Z و X، هم‌گروه هستند و خواص شیمیایی یکسانی دارند.

(۲) X جزو نافلزها است که سطح صیقلی و براق ندارند.

(۴) عنصر Y سیلیسیم است که در طبیعت به حالت خالص یافت نمی‌شود.

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

الف) عرض از مبدأ نمودار پتاسیم کلرید کمتر از نمودار سدیم نیترات است و از طرفی شیب نمودار آن نیز کمتر است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در هر دمایی، انحلال‌پذیری پتاسیم کلرید کمتر است.



$$S_1 = 0.3\theta + 27 \xrightarrow{\theta=40} S_1 = (0.3 \times 40) + 27 = 39 \quad (\text{ب})$$

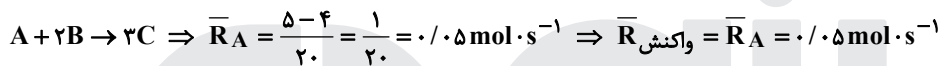
در دمای ۴۰ درجه سلسیوس، انحلال‌پذیری KCl برابر ۳۹ گرم نمک در ۱۰۰ گرم آب است.

$$\text{درصد جرمی} = \frac{39 \text{ (گرم حل‌شونده)}}{139 \text{ (گرم محلول)}} \times 100 = 28$$

پ) تأثیر دما بر انحلال‌پذیری سدیم نیترات بیشتر است، زیرا شیب نمودار آن بیشتر می‌باشد.
ت)

$$S_1 = 0.3\theta + 27 \begin{cases} \theta = 60 \Rightarrow S_1 = 45 \text{ (محلول 145g)} \\ \theta = 30 \Rightarrow S_1 = 36 \text{ (محلول 136g)} \end{cases} \Rightarrow 145 - 136 = 9 \text{g رسوب}$$

با توجه به تغییرات مقدار مول مواد بر روی نمودار، معادله واکنش به صورت زیر است:



عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) شمار اتم‌ها در $\text{Fe}(\text{OH})_3$ و Ca_3N_2 برابر ۵ است.

ب) شکل هندسی یون سولفات (SO_4^{2-}) متفاوت از CO_3^{2-} و NO_3^- است.

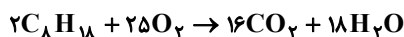
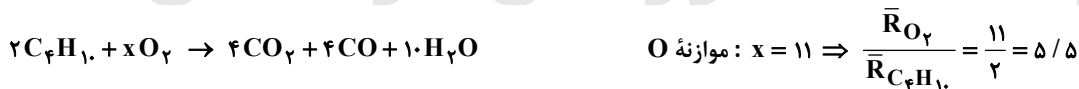
پ) آب دریا دارای Cl^- است و با AgNO_3 ، رسوب AgCl تشکیل می‌دهد.

ت) در همه روش‌های تصفیه آب، میکروب‌ها در آب باقی می‌مانند و نیاز به کلرزنی است.

$$\text{mol HNO}_3 = 2 \times 0.1 = 0.2 \Rightarrow \text{جرم HNO}_3 = 0.2 \times 63 = 12.6 \text{g}$$

$$12.6 \text{g HNO}_3 \times \frac{100 \text{g محلول}}{50 \text{g HNO}_3} \times \frac{1 \text{mL محلول}}{1.26 \text{g محلول}} = 20 \text{mL محلول}$$

۲ مول بوتان شامل ۸ مول اتم کربن است که ۴ مول آن به CO_2 و ۴ مول آن به CO تبدیل می‌شود و ۲۰ مول اتم H نیز به H_2O تبدیل می‌شوند.



$$4/56 \text{L C}_8\text{H}_{18} \times \frac{1000 \text{mL C}_8\text{H}_{18}}{1 \text{L C}_8\text{H}_{18}} \times \frac{0.18 \text{g C}_8\text{H}_{18}}{1 \text{mL C}_8\text{H}_{18}} \times \frac{1 \text{mol C}_8\text{H}_{18}}{114 \text{g C}_8\text{H}_{18}} \times \frac{25 \text{mol O}_2}{2 \text{mol C}_8\text{H}_{18}} \times \frac{22.4 \text{L O}_2}{1 \text{mol O}_2} \times \frac{100 \text{L هوا}}{20 \text{L O}_2} = 44800 \text{L هوا}$$

$$4/56 \text{L C}_8\text{H}_{18} \times \frac{1000 \text{mL C}_8\text{H}_{18}}{1 \text{L C}_8\text{H}_{18}} \times \frac{0.18 \text{g C}_8\text{H}_{18}}{1 \text{mL C}_8\text{H}_{18}} \times \frac{1 \text{mol C}_8\text{H}_{18}}{114 \text{g C}_8\text{H}_{18}} \times \frac{545 \text{kJ}}{1 \text{mol C}_8\text{H}_{18}} = 17440 \text{kJ}$$

عبارت‌های اول و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

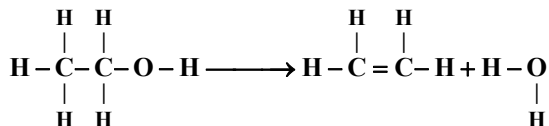
عبارت دوم: این رابطه همواره برقرار نیست. برای نمونه، هرچند تعداد لایه‌های الکترونی اشغال شده Sr ۳۸ بیشتر از K ۱۹ است، اما این عنصر شعاع اتمی کوچک‌تری دارد.

عبارت سوم: کاتیون‌های Zn^{2+} ، Cu^+ و Ga^{3+} ، دارای ۱۰ الکترون در زیرلایه $3d$ هستند.

۸۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۳ شیمی ۲

- (۱) چهارمین عضو خانواده آلکن‌ها، C_4H_8 است که از سوختن هر مول از آن، ۵ مول آب تولید می‌شود.
 (۲) از سوختن ۱ مول اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$)، ۳ مول آب تولید می‌شود.
 (۳) استر موجود در آناناس، اتیل بوتانوات ($C_4H_8O_2$) است که از سوختن هر مول از آن، ۶ مول آب تولید می‌شود.
 (۴) ترکیب آلی موجود در بادام، بنزآلدهید (C_7H_6O) است که از سوختن هر مول از آن، ۳ مول آب تولید می‌شود.

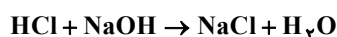
۸۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۲ شیمی ۲



۴ پیوند C-H، ۱ پیوند O-H در هر دو طرف معادله، قابل حذف شدن هستند و در محاسبات دخالتی ندارند.

$$\Rightarrow \Delta H = [(C-H) + (C-C) + (C-O)] - [(C=C) + (O-H)] \quad \Delta H = (412 + 348 + 360) - (612 + 462) = +45 \text{ kJ}$$

۸۷- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱ شیمی ۲



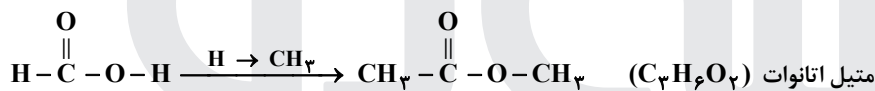
$$\frac{7/3 \times 10^{-3}}{36/5} \times \frac{50}{100} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = 4 \times 10^{-3} \text{ g NaOH}$$

$$\text{جرم محلول} = 50 \times 1/0.2 = 510 \text{ g}$$

$$\text{ppm}(\text{NaOH}) = \frac{4 \times 10^{-3}}{510} \times 10^6 = 7/84$$

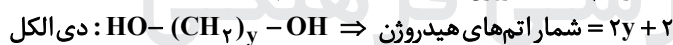
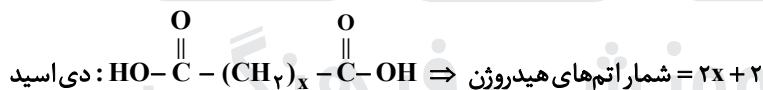
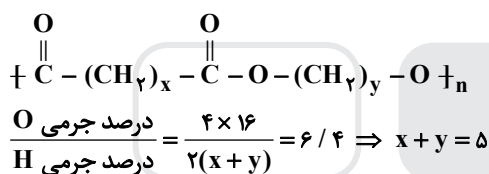
۸۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۳ شیمی ۲ و فصل ۲ شیمی ۳

ساده‌ترین عضو خانواده اسیدهای آلی، متانوئیک اسید است.



متیل اتانوات با پروپانوئیک اسید ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{COOH}$) ایزومر است، اما برخلاف آن، نمی‌تواند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار کند؛ به همین دلیل نقطه جوش کمتری دارد.

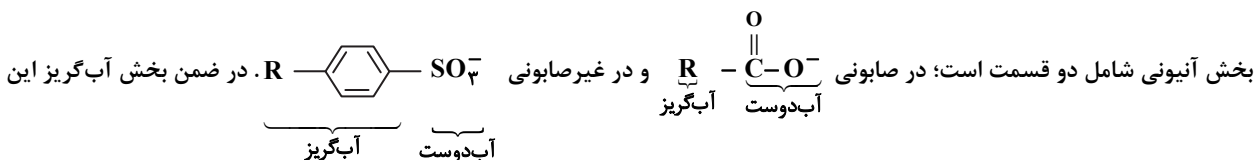
۸۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فصل ۳ شیمی ۲



$$\text{مجموع شمار اتم‌های هیدروژن} = 2x+2y+4 = 2(x+y)+4 = 14$$

۹۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فصل ۱ شیمی ۳

در پاک‌کننده صابونی، CO_3^{2-} و در پاک‌کننده غیرصابونی، SO_3^{2-} وجود دارد؛ پس «الف» صابونی و «ب» غیرصابونی است، اما در هر دو،



و پاک‌کننده، یکسان نیست.

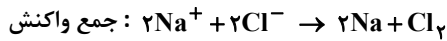
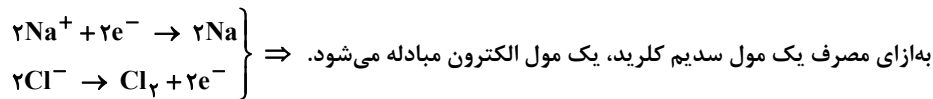
به‌طور کلی در پاک‌کننده‌ها، چربی جذب بخش آب‌گریز می‌شود، سپس به‌واسطه حضور بخش آب‌دوست، مجموعه حاصل در آب پراکنده می‌گردد.

۹۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱ شیمی ۳

pH محلول ۰/۰۱ مولار هیدروویدیک اسید برابر با ۲ است و pH محلول باز برابر با ۱۰ است:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-10} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = \alpha \cdot M \Rightarrow \alpha = \frac{10^{-4}}{0.02} = 5 \times 10^{-3} \Rightarrow \% \alpha = 0/5$$



$$12 / 0.4 \times 10^{21} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6 / 0.2 \times 10^{23} e^-} \times \frac{58 / 5 \text{ g NaCl}}{1 \text{ mol } e^-} = 1 / 17 \text{ g NaCl}$$

بر اساس داده‌های سؤال می‌توان نتیجه گرفت:

■ فلز M کاهنده‌تر از فلز X و یون‌های X^{2+} اکسندۀتر از یون‌های M^{2+} هستند.

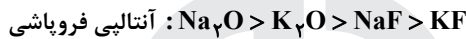
■ فلز Y کاهنده‌تر از فلز X و یون‌های X^{2+} اکسندۀتر از یون‌های Y^{2+} هستند.

■ قدرت کاهندگی فلزهای M و Y و همچنین قدرت اکسندگی کاتیون‌های آن‌ها بر اساس این داده‌ها قابل مقایسه نیست.

گزینه ۱: هسته اتم‌های سازنده مولکول‌های سه‌اتمی خمیده، بر روی یک خط راست قرار نمی‌گیرد، مانند H_2O

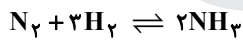
گزینه ۲: گشتاور دوقطبی کربونیل سولفید صفر نیست و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

گزینه ۴: بار جزئی اتم مرکزی در مولکول‌های خطی، می‌تواند مثبت یا منفی باشد.



طبق اصل لوشاتلیه، ۱ مول O_2 اضافه شده به ظرف تا برقراری تعادل جدید، به‌طور کامل مصرف نمی‌شود، در نتیجه از مقدار SO_2 نیز

۲ مول مصرف نمی‌شود.



$$1-x \quad 2-3x \quad 2x$$

$$1-x + 2-3x + 2x = 2 \Rightarrow x = 0.5$$

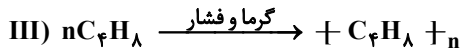
$$[\text{N}_2] = 1-x = 0.5$$

$$[\text{H}_2] = 2-3x = 0.5$$

$$[\text{NH}_3] = 2x = 1$$

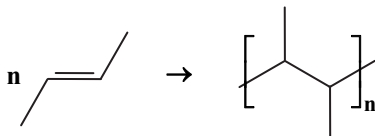
$$K = \frac{[\text{NH}_3]^2}{[\text{N}_2][\text{H}_2]^3} = \frac{(1)^2}{(0.5)(0.5)^3} = 16$$

فقط عبارت چهارم درست است.



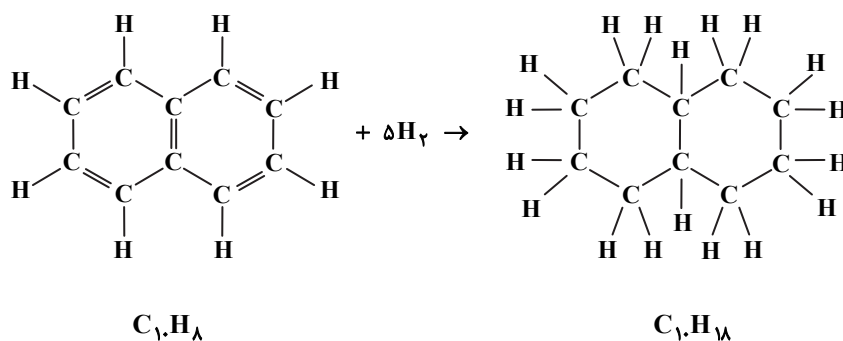
■ فرآورده واکنش‌های (II) و (IV)، سیر شده هستند و از آن‌ها نمی‌توان به‌عنوان مونومر استفاده کرد.

■ تفاوت جرم مولی C_4H_{10} و $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$ در جرم ۱ مول O است، نه جرم ۱ مول O_2 !



$$\text{C}_4\text{H}_9\text{Cl}: 4\text{C} + 9(+1) + (-1) = 0 \Rightarrow 4\text{C} = -8$$

$$\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}: 4\text{C} + 10(+1) + (-2) = 0 \Rightarrow 4\text{C} = -8$$



بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) جرم مولی C_6H_{12} برابر با $96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

(۳) در ساختار ترکیب به دست آمده، ۱۱ پیوند C-C وجود دارد.

(۴) از آنجایی که هر اتم کربن، ۴ و هر اتم هیدروژن، ۱ الکترون ظرفیت دارد و برای تشکیل هر پیوند اشتراکی، ۲ الکترون به اشتراک گذاشته می‌شود، از رابطه زیر می‌توان برای شمارش پیوندهای اشتراکی در یک هیدروکربن استفاده کرد:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(\text{تعداد کربن‌ها} \times 4) + (\text{تعداد هیدروژن‌ها} \times 1)}{2} \Rightarrow \frac{(4 \times 6) + (12 \times 1)}{2} = 18$$

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی