

آزمون آزمایشی ۳۱ خرداد ۱۴۰۱

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۱ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۵۰	۱۰۱	۱۵۰	۸۰ دقیقه

مرحله ۱۹

دفترچه شماره ۲



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی درس های عمومی و اختصاصی را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، سنجش های مستمر، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و... با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

ریاضیات

۸۰

زمان پیشنهادی

۱۰۱- فرض کنید $\sqrt{4a+1} + 2a = 7$ باشد. ریشه‌های کدام معادله زیر a و $a-1$ است؟

- $x^2 - 9x + 20 = 0$ (۴) $x^2 - 11x + 30 = 0$ (۳) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (۲) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (۱)

۱۰۲- مجموع دوازده جمله ابتدایی دنباله حسابی $b_n = 24, 27, \dots$ چندمین جمله دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ است؟

- ۸ (۴) ۶ (۳) ۷ (۲) ۵ (۱)

۱۰۳- دو ضلع مجاور مستطیلی با محیط ۸، بر دو خط $3x + 4y = 1$ و $4x + ay = b$ منطبق‌اند. اگر $A(1, 2)$ یک رأس غیرواقع بر دو خط مذکور باشد، مقدار b کدام است؟

- ۶ و ۸ (۴) ۸ و -۱۲ (۳) -۸ و ۱۲ (۲) -۸ و ۶ (۱)

۱۰۴- مجموعه جواب نامعادله $2 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$ به کدام صورت زیر است؟

- $(-\infty, -1)$ (۱) $(4, +\infty)$ (۲) $\mathbb{R} - [-1, 4]$ (۳) $(-1, 4)$ (۴)

۱۰۵- حاصل $P = \sqrt[3]{3\sqrt[4]{6}} \times 24^{\frac{1}{4}} \times 18^{\frac{1}{6}}$ برابر کدام است؟

- $6\sqrt{2}$ (۱) ۶ (۲) $6\sqrt{6}$ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴)

۱۰۶- حاصل عبارت $P = (\log_e 3)^2 + (\log_e 12) \cdot \log_e 108$ برابر کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۰۷- جواب معادله $2^{1-2x} = 3^{x+2}$ را به صورت $\log_{12} \alpha$ نوشته‌ایم. مقدار α کدام است؟

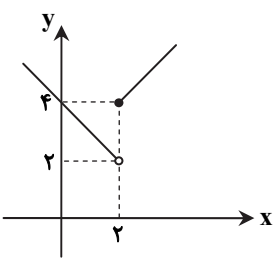
- $\frac{2}{9}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{54}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴)

۱۰۸- اگر $\frac{b \sin \frac{7\pi}{6} - a \cos \frac{5\pi}{3}}{a \sin \frac{4\pi}{3} + b \cos \frac{11\pi}{6}} = \tan \frac{2\pi}{3}$ باشد، مقدار a چند برابر مقدار b است؟

- $\sqrt{3}$ (۱) ۲ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۱۰۹- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو است. اگر تابع $g(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - f(x)}$ در $x=2$ پیوسته باشد، مقدار b کدام است؟

- ۴ (۱) -۴ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)



۱۱۰- با فرض $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = b$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{b(ax - |x|)}{x - 1} \right)$ کدام است؟

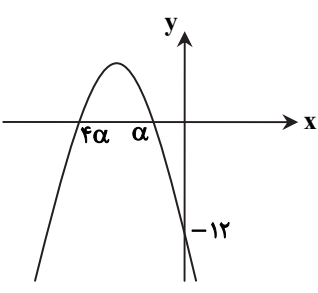
- $\frac{9}{4}$ (۴) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۱)

۱۱۱- با فرض $g(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{4-x}$ و دامنه تعریف تابع $y = (g \circ f)(x)$ کدام است؟

- $[\frac{1}{2}, 5]$ (۴) $[\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $[1, 5]$ (۲) $[5, +\infty)$ (۱)

۱۱۲- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. بیشترین مقدار عرض نقاط سهمی چقدر است؟

- $\frac{23}{4}$ (۱) $\frac{25}{4}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $\frac{21}{4}$ (۴)



۱۱۳- اولین جواب مثبت در معادله‌های $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ و $\cos(\alpha x + \frac{\pi}{12}) = -1$ یکسان است. حداقل مقدار مثبت α کدام است؟

- (۱) $\frac{23}{6}$ (۲) $\frac{11}{5}$ (۳) $\frac{5}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۱۱۴- اگر نقطه $A(-3, -23)$ اکسترمم نسبی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ باشد، عرض نقطه عطف تابع $g(x) = ax^3 - bx^2 + 4$ کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) -۱۴ (۳) -۲۲ (۴) ۱۴

۱۱۵- اگر نمودار تابع $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$ را k واحد به سمت پایین انتقال دهیم، بر محور x ها مماس می‌شود. k کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

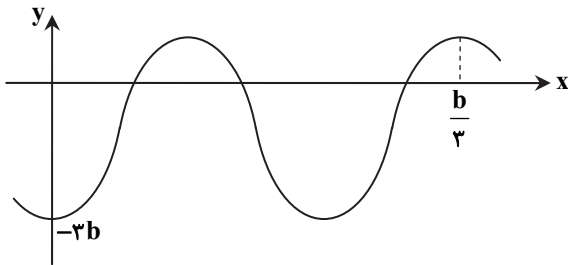
۱۱۶- اگر $f(x) = |x^2 - 4x|$ ، نمودار $f'(x)$ نمودار $f(x)$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۱۷- با فرض آنکه $f(x) = x + 1 + 2\sqrt{x+2}$ ، نمودار $y = f^{-1}(2x)$ نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۲ (۴) ۵

۱۱۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $g(x) = a\sin\pi(bx - \frac{1}{4})$ است. مقدار ab کدام است؟



- (۱) ۳
(۲) ۲۷
(۳) ۹
(۴) ۱۲

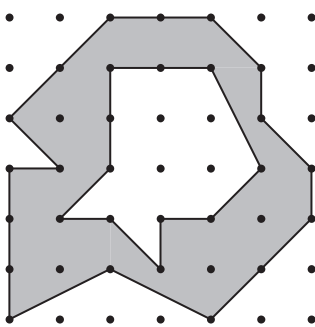
۱۱۹- تعداد اضلاع یک چندضلعی منتظم ۲۷ است، هر زاویه داخلی آن چند درجه است؟

- (۱) 120° (۲) 140° (۳) 135° (۴) 160°

۱۲۰- کدام چهارضلعی را همواره می‌توان در دایره محاط کرد؟

- (۱) دوزنقه (۲) لوزی (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) مستطیل

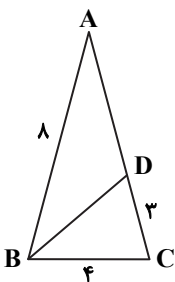
۱۲۱- در شکل روبه‌رو مساحت قسمت سایه یا رنگی کدام است؟



- (۱) ۱۶
(۲) ۱۷
(۳) ۱۸
(۴) ۱۹

۱۲۲- در مثلث متساوی‌الساقین ABC به طول قاعده ۴، اندازه BD کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) $\sqrt{17}$
(۳) ۶
(۴) $\sqrt{19}$



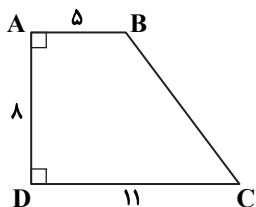
۱۲۳- خط d موازی صفحه P و نقطه O خارج خط و صفحه مفروض اند. چند خط از O می گذرد که با صفحه P موازی بوده و خط d را نیز قطع کند؟

- (۱) ۱ هیچ (۲) بی شمار (۳) بی شمار (۴) هیچ یا بی شمار

۱۲۴- دو دایره $C(O, 7)$ و $C'(O', 3)$ مماس خارج اند. اگر دوران یافته دایره C' در دوران 60° به مرکز O دایره C'' باشد، طول مماس مشترک داخلی دو دایره C' و C'' کدام است؟

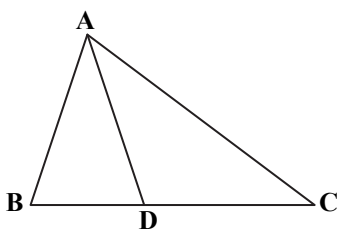
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۲۵- در دوزنقه $ABCD$ اگر عمود منصف BC ، قاعده DC را در نقطه M قطع کند، محیط $ABCD$ از محیط $ABMD$ چقدر بیشتر است؟



- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

۱۲۶- در شکل روبه رو مثلث های ABC و ADC متشابه اند. کدام نامساوی زیر می تواند درست نباشد؟



- (۱) $AB > AD$
(۲) $DC < AC$
(۳) $BC > AC$
(۴) $DC > AD$

۱۲۷- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', 2R)$ متخارج اند. برای رسم پاره خط AB به طول $\frac{OO'}{2}$ که یک سر آن روی دایره C و سر دیگر روی دایره C' باشد و $AB \parallel OO'$ نیز باشد، کدام تبدیل به کار می رود؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) تجانس

۱۲۸- در یک دوزنقه قائم الزاویه به طول قاعده های $AB = 1$ و $CD = 3$ ، نیم دایره ای به قطر AD ، بر ساق BC مماس است. شعاع این نیم دایره کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۹- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرائب دستگاه $AX = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع جواب های دستگاه کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر دوم و ستون دوم A^3 کدام است؟

- (۱) $4(a^2 + b^2)$ (۲) $4ab + 1$ (۳) $6(a^2 + b^2)$ (۴) $6ab + 1$

۱۳۱- اگر $a = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} x^{-1} & 1 & x \\ y^{-1} & 1 & y \\ z^{-1} & 1 & z \end{vmatrix}$ کدام است؟

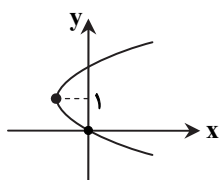
- (۱) a (۲) $\frac{a}{xyz}$ (۳) a^{-1} (۴) $a(xyz)$

۱۳۲- تمام نقاط واقع بر منحنی $2x^2 + 2y^2 + ax + by + c = 0$ از نقطه $(2, -1)$ به فاصله ۳ می باشند. $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) ۸ (۳) -۱۲ (۴) ۱۶

۱۳۳- رأس سهمی شکل روبه رو روی نیمساز محورهای دستگاه مختصات قرار دارد. معادله خط هادی این سهمی کدام است؟

- (۱) $2x + 3 = 0$
(۲) $4x + 5 = 0$
(۳) $3x + 7 = 0$
(۴) $2x + 5 = 0$



۱۳۴- اگر \bar{a} ، \bar{b} و \bar{c} سه بردار باشند به طوری که $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$ ، $|\bar{a}| = 5$ ، $|\bar{b}| = 6$ و $|\bar{c}| = 5$ ، آنگاه $|\bar{b} \times \bar{c}|$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

۱۳۵- ارزش کدام گزاره سوری، نادرست است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}; x - y < 0$ (۲) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}; x + y < 0$
 (۳) $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}; x(y + 2)^2 \leq 0$ (۴) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}; x(y + 2)^2 \leq 0$

۱۳۶- اگر $A = \{\{1, \{1\}\}\}$ و $B = \{\{\{1\}\}, \{\{1\}\}\}$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $B - A = \{\{1\}\}$ (۲) $A \cup \{\{\{1\}\}\} - \{1\} = B$
 (۳) $B \cup \{1\} - \{\{1\}\} = A$ (۴) $A \cup B = \{\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$

۱۳۷- در پرتاب دو تاس و سه سکه با هم، احتمال اینکه حداقل یکی از تاس‌ها عددی اول بیاید یا حداقل دو تا از سکه‌ها رو ظاهر شوند، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) $\frac{1}{2}$

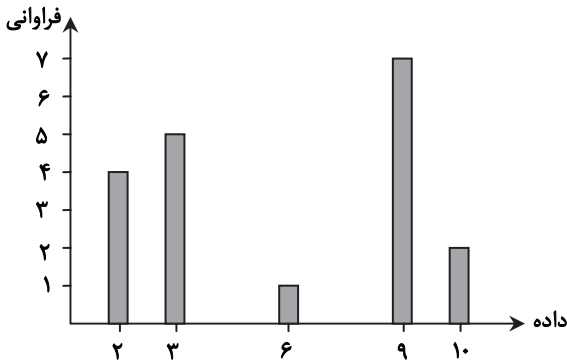
۱۳۸- یک عدد از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و دو عدد از مجموعه $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، مجموع سه عدد، زوج است؟

- (۱) $0/52$ (۲) $0/5$ (۳) $0/48$ (۴) $0/46$

۱۳۹- جعبه A شامل ۲ مهره سفید و ۴ مهره قرمز و جعبه B شامل ۳ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب کرده و ۲ مهره از آن خارج می‌کنیم. اگر بدانیم هر دو مهره سفید هستند، با کدام احتمال از جعبه A خارج شده‌اند؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{17}$ (۴) $\frac{3}{13}$

۱۴۰- اگر داده‌های درون نمودار میله‌ای زیر را با نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم، ضریب تغییرات داده‌های داخل جعبه، چند برابر $\sqrt{2}$ خواهد بود؟



- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۴۱- در جامعه‌ای با اعضای ۲، ۲، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶، ۶، ۶، احتمال اینکه نمونه هشت‌عضوی، میانگین جامعه را درست برآورد کند، کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{45}$ (۲) $\frac{4}{15}$ (۳) $\frac{2}{45}$ (۴) $\frac{2}{15}$

۱۴۲- اگر اعداد صحیح a، b و c چنان باشند که $a + b | b + c$ ، آنگاه کدام رابطه همواره برقرار است؟

- (۱) $a | c$ (۲) $a + b | a - c$ (۳) $a + b | a + c$ (۴) $b | c$

۱۴۳- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی n که به‌ازای آن ب.م.م دو عدد $7n + 3$ و $3n + 7$ برابر ۲۰ باشد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴۴- اگر به‌ازای اعداد صحیح x، y و z داشته باشیم $xy \equiv 154z$ و $y \equiv 154x$ ، آنگاه اعداد x و z در چه پیمانه‌ای همواره با هم همنهشت خواهند بود؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۱۵۴ (۳) ۱۴ (۴) ۶

۱۴۵- معادله $60x + 108y = 7n + 2$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است. چند مقدار طبیعی دورقمی برای n یافت می‌شود؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۴۶- گراف G گرافی r-منتظم از مرتبه ۱۳ است. اگر G ناتهی و غیرکامل باشد، آنگاه اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای r، کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۸

۱۴۷- مجموع درجات رئوس گراف G برابر ۴۲ است. اگر با افزودن ۲۵ یال به این گراف، یک گراف ۴- منتظم پدید آید، مرتبه گراف G کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۱۴۸- اگر \bar{G} مکمل گراف G از مرتبه ۶ باشد، آنگاه کمترین مقدار ممکن برای $\gamma(G) + \gamma(\bar{G})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴۹- هریک از جواب‌های طبیعی معادله $x + 3y + z + t = 11$ را در برگه‌ای نوشته و یکی از برگه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال

در برگه انتخاب‌شده مقدار متغیر y برابر ۱ است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۵۰- چه تعداد از گزاره‌های زیر، درست است؟

الف) همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی یک مربع لاتین چرخشی با هم برابر است.

ب) اگر مربع لاتین B جایگشتی از مربع لاتین A بوده و مربع لاتین C با A متعامد باشد، آنگاه B و C متعامدند.

پ) اگر A مربع لاتین 4×4 بوده و B جایگشتی از آن باشد، آنگاه A و B نمی‌توانند متعامد باشند.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

سال تحصیلی ۰۱ - ۰۰

آزمون آزمایشی ۳۱ خرداد ۱۴۰۱

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۱ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۴۰	۱۵۱	۱۹۰	۵۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۱۹۱	۲۲۰	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسشها: ۷۰		مدت پاسخ‌گویی: ۸۰ دقیقه		

مرحله ۱۹

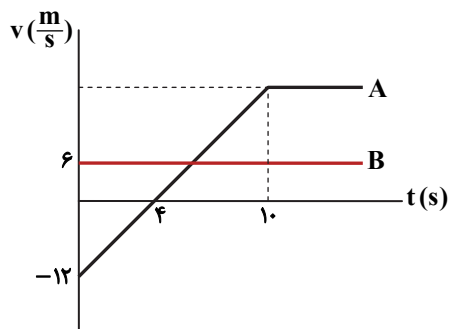
دفترچه شماره ۳



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه‌رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی درس‌های عمومی و اختصاصی را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، سنجش‌های مستمر، پیش‌آزمون‌های آنلاین، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و... با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه‌دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.

۱۵۱- نمودار سرعت- زمان دو متحرک A و B که بر روی خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر هر دو متحرک در لحظه $t = 0$ در یک مکان باشند، بیشینه فاصله آن‌ها قبل از رسیدن به هم چقدر است و متحرک‌ها در چه لحظه‌ای به یکدیگر می‌رسند؟



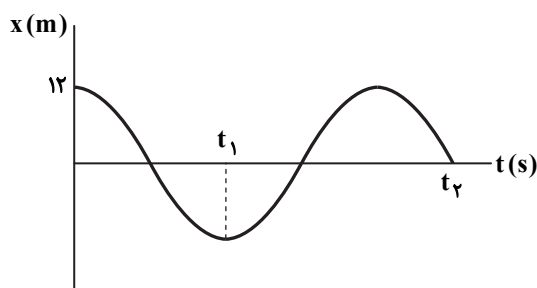
(۱) $11/5 \text{ s}$ ، 54 m

(۲) $12/5 \text{ s}$ ، 54 m

(۳) $11/5 \text{ s}$ ، 48 m

(۴) $12/5 \text{ s}$ ، 48 m

۱۵۲- معادله حرکت جسمی بر روی خط راست در SI به صورت $x = 12 \cos \omega t$ و نمودار مکان- زمان آن به صورت مقابل است. تندی متوسط در بازه صفر تا t_2 چند برابر بزرگی سرعت متوسط در بازه صفر تا t_1 است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $1/5$

(۴) $0/5$

۱۵۳- اتومبیلی بر روی خط راست با سرعت ثابت $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از 25 متری جلوی مبدأ مختصات می‌گذرد و هم‌زمان اتومبیل دوم به‌طور کندشونده با

شتاب ثابت $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و تندی اولیه $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از 100 متری جلوی مبدأ عبور می‌کند. در بازه زمانی بین دو لحظه‌ای که اتومبیل‌ها از کنار هم

می‌گذرند سرعت متوسط اتومبیل شتاب‌دار چند متر بر ثانیه است؟

(۴) ۶

(۳) ۸

(۲) ۹

(۱) ۱۰

۱۵۴- گلوله‌ای از ارتفاع h در خلأ رها شده و در 2 ثانیه آخر سقوط مسافت $\frac{5}{9}h$ را طی می‌کند. ارتفاع اولیه (h) چند متر است؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۴) ۱۸۰

(۳) ۱۲۵

(۲) ۱۰۰

(۱) ۸۰

۱۵۵- در شکل روبه‌رو جسم ساکن بوده و نیرویی که سطح افقی بر جسم وارد می‌کند عمود بر نیروی F است. جرم جسم چند کیلوگرم است؟

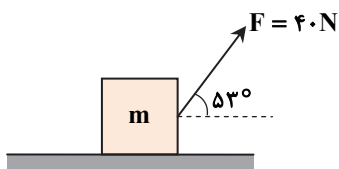
$(\sin 53^\circ = 0/8 \text{ و } g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۳

(۴) ۴



۱۵۶- مطابق شکل، به جسمی به جرم 4 کیلوگرم نیروی افقی F وارد می‌شود و جسم ساکن است. با افزایش F وقتی مقدار آن 10 نیوتون می‌شود جسم به راه افتاده و در مدت 4 ثانیه 12 متر جابه‌جا می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح چقدر بیشتر از ضریب اصطکاک

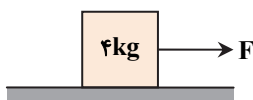
جنبشی بین جسم و سطح است؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۱) $0/25$

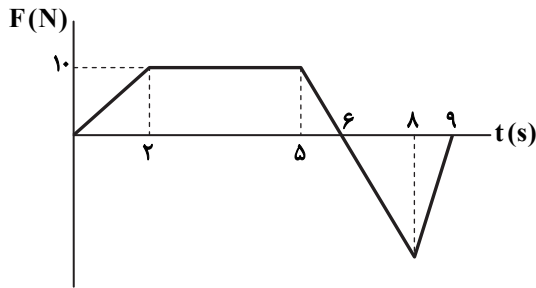
(۲) $0/2$

(۳) $0/15$

(۴) $0/1$



۱۵۷- در یک حرکت بر مسیر مستقیم، نمودار نیروی خالص وارد بر جسم بر حسب زمان مطابق شکل مقابل است. بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در مدت صفر تا ۹ ثانیه چند نیوتون است؟

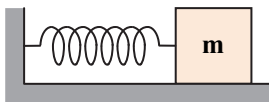


- (۱) $\frac{5}{3}$
- (۲) $\frac{15}{3}$
- (۳) $\frac{25}{3}$
- (۴) ۱۵

۱۵۸- ماهواره A در ارتفاع h از سطح زمین و ماهواره B در ارتفاع ۳h از سطح زمین با جرم‌های یکسان در مدارهای دایره‌ای دور زمین می‌چرخند. اگر انرژی جنبشی ماهواره B، $\frac{3}{5}$ برابر انرژی جنبشی ماهواره A باشد، شتاب گرانشی زمین در محل ماهواره A چند برابر شتاب گرانشی روی سطح زمین است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{4}{9}$
- (۳) $\frac{9}{25}$
- (۴) $\frac{4}{25}$

۱۵۹- جسمی به جرم ۱۰۰ گرم به فنری بسته شده و مطابق شکل مقابل روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. جسم را ۵ سانتی‌متر به سمت راست کشیده و در لحظه $t = 0$ از حال سکون رها می‌کنیم. اگر در بازه زمانی صفر تا $t_1 < T$ شتاب متوسط برابر صفر و بزرگی سرعت متوسط برابر ۲ متر بر ثانیه باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟ (دوره تناوب: T و $\pi^2 = 10$)

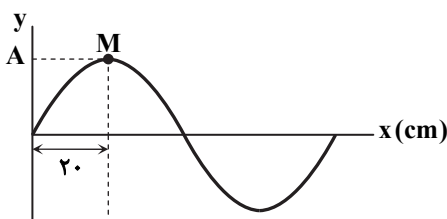


- (۱) ۴۰۰
- (۲) ۲۰۰
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۵۰

۱۶۰- آونگ‌های ساده A و B هم‌زمان در یک محل از یک وضعیت به نوسان درمی‌آیند و در مدت ۷۲ ثانیه آونگ B، ۵ نوسان بیشتر از A انجام می‌دهد. اگر طول آونگ A برابر ۸۱ سانتی‌متر باشد، طول آونگ B $(g = \pi^2 \frac{m}{s^2})$

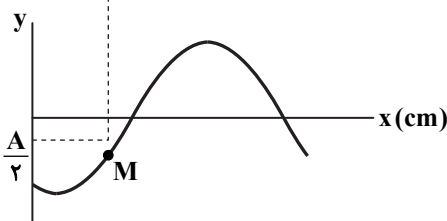
- (۱) ۱۹ سانتی‌متر بلندتر از آونگ A است.
- (۲) ۱۹ سانتی‌متر کوتاه‌تر از آونگ A است.
- (۳) ۱۷ سانتی‌متر بلندتر از آونگ A است.
- (۴) ۱۷ سانتی‌متر کوتاه‌تر از آونگ A است.

۱۶۱- نمودار جابه‌جایی- مکان یک موج مکانیکی عرضی با دوره T در لحظه $t = 0$ مطابق شکل (۱) و در لحظه $t = \frac{1}{15}$ s مطابق شکل (۲) است. اگر این موج در جهت محور x منتشر شود و $\frac{1}{15} s < \frac{T}{4}$ باشد، تندی انتشار موج و بسامد موج کدام است؟



شکل (۱)

(۱) $4 \frac{m}{s}$ و ۵ Hz



شکل (۲)

(۲) $2 \frac{m}{s}$ و ۵ Hz

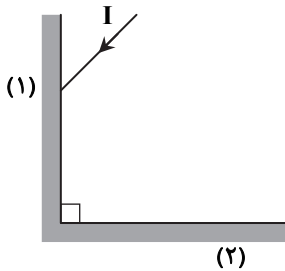
(۳) $20 \frac{m}{s}$ و ۲۵ Hz

(۴) $40 \frac{m}{s}$ و ۲۵ Hz

۱۶۲- اگر فاصله شنونده‌ای از یک منبع صوت نقطه‌ای ۴ برابر شود، تراز شدت صوت دریافتی چگونه تغییر می‌کند؟ (از جذب و بازتاب صوت در محیط چشم‌پوشی کنید و $\log 2 = 0.3$)

- (۱) ۶ دسی‌بل کاهش می‌یابد.
- (۲) ۱۲ دسی‌بل کاهش می‌یابد.
- (۳) ۶ دسی‌بل افزایش می‌یابد.
- (۴) ۱۲ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

۱۶۳- در شکل روبه‌رو، پرتو I پس از دو بازتاب متوالی برمی‌گردد. اگر پرتو I حول نقطه برخورد به آینه تخت (۱) به اندازه ۱۵ درجه ساعتگرد بچرخد، پرتو بازتابیده از آینه تخت (۲)



- (۱) ۱۵ درجه ساعتگرد می‌چرخد.
- (۲) ۳۰ درجه ساعتگرد می‌چرخد.
- (۳) ۱۵ درجه پادساعتگرد می‌چرخد.
- (۴) ۳۰ درجه پادساعتگرد می‌چرخد.

۱۶۴- از داخل مایعی با ضریب شکست $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ پرتویی با زاویه تابش ۳۷ درجه به سطح مایع می‌تابد و بخشی از آن بازتابیده و بخشی وارد هوا می‌شود. زاویه بین پرتو بازتابش و پرتو شکست چند درجه است؟ $(\sin 37^\circ = 0.6)$

- (۱) ۸۲
- (۲) ۹۰
- (۳) ۹۸
- (۴) ۱۰۶

۱۶۵- دو تار دو سر بسته A و B با جرم‌های یکسان در اختیار داریم. نیروی کشش تار B، ۲ برابر نیروی کشش تار A، طول تار B، ۴/۵ برابر طول تار A و تندی انتشار موج عرضی در تار A برابر با ۱۵۰ متر بر ثانیه است. دو تار را در مجاورت هم قرار می‌دهیم. وقتی در تار A موج ایستاده با ۴ شکم ایجاد می‌شود در تار B چند گره ایجاد می‌شود؟

- (۱) ۷
- (۲) ۶
- (۳) ۵
- (۴) ۴

۱۶۶- آزمایش فوتوالکتریک با فوتون‌های با بسامد f_1 انجام گرفته و فوتوالکترون از فلز هدف گسیل شده است. اگر آزمایش با فوتون‌های با بسامد $f_2 = 2f_1$ انجام گیرد (با همان فلز هدف) بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ۳ برابر حالت قبل می‌شود. حال اگر بار سوم آزمایش با فوتون‌های با بسامد $f_3 = \frac{1}{2}f_1$ انجام شود، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها

- (۱) صفر است.
- (۲) $\frac{1}{3}$ حالت اول می‌شود.
- (۳) کمتر از $\frac{1}{3}$ حالت اول می‌شود.
- (۴) بیشتر از $\frac{1}{3}$ حالت اول می‌شود.

۱۶۷- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- مدل اتمی بور در اتم هیدروژن می‌تواند خطوط طیف نشری خطی را توجیه کند.
- مدل اتمی رادرفورد می‌تواند پایداری اتم‌ها را توضیح دهد.
- مدل اتمی بور اختلاف در شدت روشنایی خطوط طیف نشری خطی را به خوبی توضیح می‌دهد.
- مدل اتمی رادرفورد انحراف شدید برخی ذرات آلفا در بمباران ورقه طلا را به خوبی می‌تواند توضیح دهد.

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۶۸- در اتم هیدروژن، انرژی مربوط به کم‌انرژی‌ترین فوتون رشته لیمان ($n' = 1$) معادل با انرژی چند فوتون از پراورزی‌ترین فوتون رشته پراکت ($n' = 4$) است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۱۲

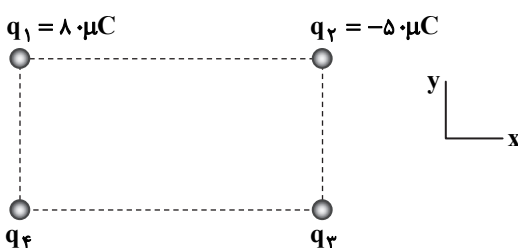
۱۶۹- هسته پرتوزای ${}^{240}_{94}\text{X}$ با تابش ذره آلفا و ذره بتای منفی تبدیل به هسته ${}^{228}_{90}\text{Y}$ می‌شود.

- (۱) ۳ و ۲
- (۲) ۳ و ۴
- (۳) ۶ و ۴
- (۴) ۳ و ۲

۱۷۰- در راکتورهای هسته‌ای برای کند کردن نوترون‌ها از کدام گزینه استفاده نمی‌شود؟

- (۱) آب معمولی
- (۲) آب سنگین
- (۳) کادمیم و بور
- (۴) گرافیت

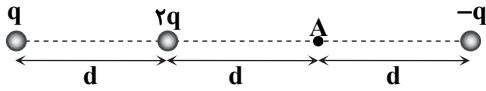
۱۷۱- در شکل روبه‌رو، اگر طول مستطیل ۲ متر، عرض آن ۱ متر و نیروی خالص وارد بر q_2 در SI برابر $(-9\vec{j})$ باشد، q_3 چند میکروکولن



است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$

- (۱) -۱۵
- (۲) ۱۵
- (۳) -۳۰
- (۴) ۳۰

۱۷۲- در شکل روبه‌رو، اگر بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در نقطه A برابر E باشد، بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه A چند E است؟

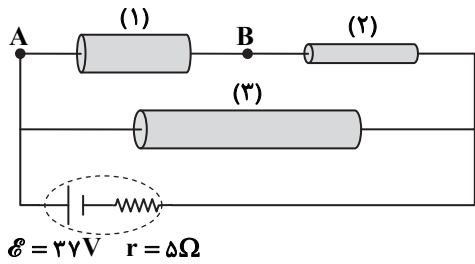


- ۱۳ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۸ (۳)
- ۵ (۴)

۱۷۳- نقاط $A(4, -2)$ و $B(4, 3)$ در محلی قرار دارند که میدان‌های الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_1 = (4 \times 10^3 \frac{N}{C})\vec{i}$ و $\vec{E}_2 = (-3 \times 10^3 \frac{N}{C})\vec{j}$ در آن برقرار است. اگر بار نقطه‌ای $q = +120 \text{ nC}$ از A تا B جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی چند میکروژول تغییر می‌کند؟ (مختصات A و B بر حسب متر است.)

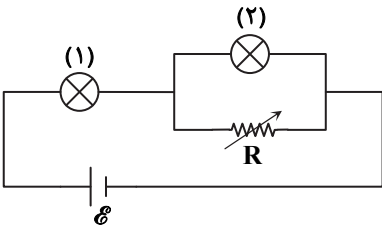
- ۱۸۰۰ (۱)
- ۲۴۰۰ (۲)
- ۳۰۰۰ (۳)
- ۳۶۰۰ (۴)

۱۷۴- در شکل روبه‌رو، سه استوانه فلزی توپر هم‌جنس با طول‌های $l_1 = l_2 = \frac{1}{3}l_3$ و قطرهای $d_3 = d_1 = 2d_2$ به‌کار رفته است. اگر اختلاف پتانسیل میان A و B برابر 6 ولت باشد، جریان گذرنده از استوانه فلزی (۳) چند آمپر است؟



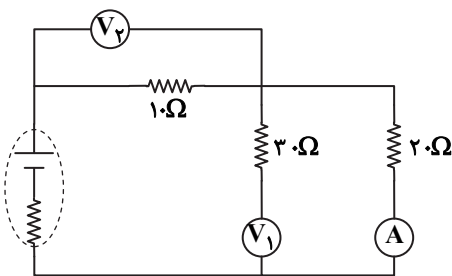
- ۱/۴ (۱)
- ۱ (۲)
- ۰/۶ (۳)
- ۰/۴ (۴)

۱۷۵- در مدار شکل روبه‌رو، با افزایش مقاومت متغیر R نور لامپ‌های (۱) و (۲) چگونه تغییر می‌کند؟



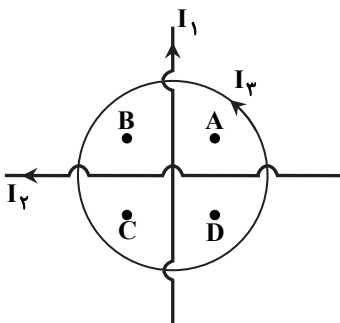
- (۱) نور لامپ (۱) کاهش و نور لامپ (۲) افزایش می‌یابد.
- (۲) نور لامپ (۱) افزایش و نور لامپ (۲) کاهش می‌یابد.
- (۳) نور هر دو کاهش می‌یابد.
- (۴) نور هر دو افزایش می‌یابد.

۱۷۶- در مدار روبه‌رو، ولت‌سنج آرمانی V_1 مقدار 60 ولت را نشان می‌دهد. آمپرسنج آرمانی A و ولت‌سنج آرمانی V_2 چه مقادیری را نشان می‌دهند؟



- (۱) ۳ آمپر - ۲۰ ولت
- (۲) ۱ آمپر - ۲۰ ولت
- (۳) ۱ آمپر - ۳۰ ولت
- (۴) ۳ آمپر - ۳۰ ولت

۱۷۷- در شکل روبه‌رو، در کدام نقطه میدان مغناطیسی خالص حاصل از حلقه و سیم‌های راست حامل جریان ممکن است صفر نباشد؟



- A (۱)
- B (۲)
- C (۳)
- D (۴)

۱۷۸- از دو سیم هم طول، یک سیم لوله آرمانی به قطر ۵ سانتی متر و طول ۴۰ سانتی متر و یک پیچۀ مسطح به قطر ۴ سانتی متر می سازیم. جریان الکتریکی گذرنده از پیچه چند برابر جریان سیم لوله باشد تا بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه با میدان مغناطیسی داخل سیم لوله مساوی شود؟

- (۱) ۰/۱۶ (۲) ۰/۱۲ (۳) ۰/۰۸ (۴) ۰/۰۴

۱۷۹- اولیۀ یک مبدل به ولتاژ ۲۰۰ ولت و ثانویۀ آن به مصرف کننده ۶ وات با جریان ۰/۲ آمپر متصل است. تعداد دور اولیۀ این مبدل چند برابر تعداد دور ثانویۀ آن است؟

- (۱) $\frac{3}{100}$ (۲) $\frac{100}{3}$ (۳) $\frac{3}{20}$ (۴) $\frac{20}{3}$

۱۸۰- یک قاب مستطیلی شکل فلزی به طول ۸۰ cm، عرض ۴۰ cm و

مقاومت الکتریکی ۵ اهم، مطابق شکل با تندی ثابت $2 \frac{m}{s}$ به طرف راست حرکت می کند. اگر در ناحیه ای به پهنای ۶۰ cm، میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۵ تسلا عمود بر صفحه کاغذ برقرار بوده و شکل مقابل مربوط به لحظه $t = 0$ باشد، در کدام یک از زمان های زیر اندازه جریانی عبوری از قاب درست نوشته شده است؟

(۱) $I = 0$ و $t = 100ms$

(۲) $I = 0$ و $t = 400ms$

(۳) $I = 800mA$ و $t = 100ms$

(۴) $I = 160mA$ و $t = 400ms$

۱۸۱- کدام یک از موارد زیر در مورد کمیت ها و یکاها درست است؟

(۱) انرژی یک کمیت فرعی و یکای آن بر حسب یکاهای اصلی $\frac{kg \cdot m^2}{s}$ است.

(۲) فشار یک کمیت فرعی و یکای آن بر حسب یکاهای اصلی $\frac{kg}{m \cdot s^2}$ است.

(۳) تندی و سرعت هر دو کمیت فرعی هستند و یکاهای SI آنها با هم متفاوت است.

(۴) نیرو یک کمیت اصلی و یکای آن در SI نیوتون (N) است.

۱۸۲- آب از یک لوله به قطر ۲۰ سانتی متر وارد استخری به شکل استوانه که شعاع قاعدۀ آن ۱۰ متر است می شود. اگر تندی شارش آب در لوله

۱/۵ متر بر ثانیه باشد، آهنگ افزایش فشار در کف استخر چند کیلوپاسکال بر ساعت است؟ ($\rho_{آب} = 1 \frac{g}{cm^3}$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) ۱۰/۸ (۲) ۵/۴ (۳) ۳/۶ (۴) ۲/۷

۱۸۳- در شکل مقابل، چگالی مایع داخل مخزن $1/5 \frac{g}{cm^3}$ و مایع در حال

تعداد است. اگر ۲ لیتر از همین مایع به لوله سمت چپ اضافه کنیم، فشار در نقطه M چند کیلوپاسکال اضافه می شود؟ (لوله به اندازه کافی

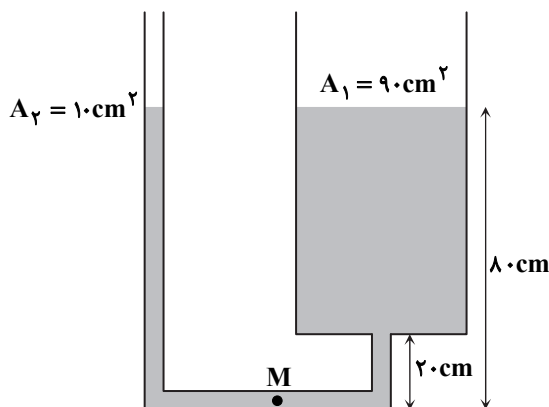
بلند است و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) ۲۰

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۳۰



۱۸۴- چتربازی از یک بالگرد (هلیکوپتر) ساکن در ارتفاع ۱۲۰۰ متری از سطح زمین با تندی $2 \frac{m}{s}$ بیرون می پرد و با تندی $6 \frac{m}{s}$ به زمین می رسد. اگر

جرم چترباز و تجهیزات او روی هم ۱۰۰ کیلوگرم باشد، کار نیروی مقاومت هوا روی او در طول مسیر چند کیلوژول بوده است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) -۱۱۹۹/۲ (۲) -۱۱۹۸/۴ (۳) -۱۱۹۷/۶ (۴) -۱۱۹۶/۸

۱۸۵- اگر ۵ کیلوگرم آب 40°C را با m کیلوگرم یخ 10°C مخلوط کنیم، پس از برقراری تعادل، جرم آب داخل ظرف برابر ۶ کیلوگرم می‌شود. m چند کیلوگرم بوده است؟ تبادل گرما را فقط بین آب و یخ در نظر بگیرید.

$$\left(L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}, c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}} \text{ و } c_{\text{یخ}} = 2/1 \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}} \right)$$

۳۶ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

۱۸۶- به ظرفی با ظرفیت گرمایی 3360 ژول بر درجه سلسیوس که محتوی 4 کیلوگرم آب 60 درجه سلسیوس است با توان گرمایی ثابت گرما می‌دهیم. اگر در مدت 18 دقیقه آب به دمای جوش 100 درجه برسد، پس از آن در هر دقیقه چند گرم آب تبخیر می‌شود؟ از تبخیر سطحی چشم‌پوشی کنید. $(L_V = 2240000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \text{ و } c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C}})$

۱۰ (۴)

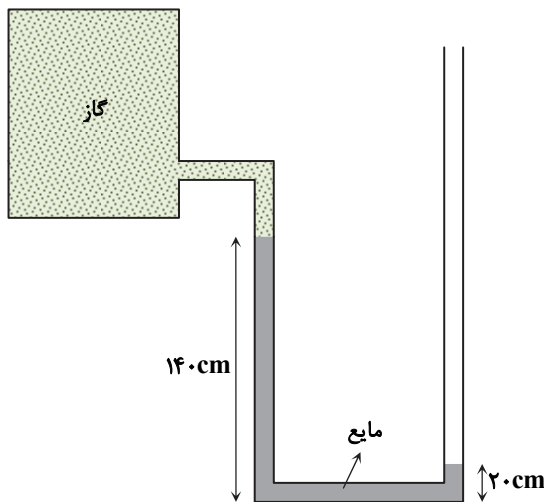
۱۵ (۳)

۱۶ (۲)

۲۰ (۱)

۱۸۷- در شکل روبه‌رو، فشار هوای محیط 98 کیلوپاسکال، حجم مخزن گاز 40 لیتر و دمای گاز داخل مخزن 127°C است. اگر چگالی مایع

$$\left(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \text{ و } g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \text{ باشد، گاز داخل مخزن چند مول است؟ } \left(\rho = 1/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)$$



۱/۲ (۱)

۱ (۲)

۰/۸ (۳)

۰/۶ (۴)

۱۸۸- طول ضلع یک مکعب فلزی توپر در دمای 10°C برابر 20cm و چگالی آن در این دما برابر $2/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ است. در فشار ثابت 1atm به مکعب گرما می‌دهیم تا دمای آن به 60°C برسد. انرژی درونی مکعب چند ژول افزایش می‌یابد؟

$$\left(1\text{atm} = 10^5 \text{Pa}, \alpha = 5 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}, \text{ ضریب انبساط طولی فلز و } c = 100 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \text{ : گرمای ویژه فلز} \right)$$

۱۰۰۰۰۶ (۴)

۱۰۰۰۰۴ (۳)

۹۹۹۹۶ (۲)

۹۹۹۹۴ (۱)

۱۸۹- کدام گزینه از ماشین‌های گرمایی درون‌سوز به‌شمار می‌آید؟

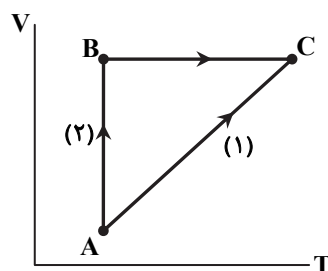
(۴) نیوکامن

(۳) دیزلی

(۲) ماشین بخار

(۱) استرلینگ

۱۹۰- مطابق شکل مقداری گاز آرمانی را یک‌بار از طریق فرایند (۱) و بار دیگر از طریق فرایند (۲) (مسیر ABC) از حالت A به حالت C می‌بریم. کدام یک از موارد زیر درست است؟



(۱) تغییر انرژی درونی گاز در فرایند (۱) با گرمای داده‌شده به گاز در فرایند (۲) برابر است.

(۲) گرمای داده‌شده به گاز در فرایند (۱) با گرمای داده‌شده به گاز در فرایند (۲) برابر است.

(۳) تغییر انرژی درونی گاز در فرایند (۱) با گرمای داده‌شده به گاز در فرایند BC برابر است.

(۴) گرمای داده‌شده به گاز در فرایند (۱) با تغییر انرژی درونی گاز در فرایند (۲) برابر است.

۲۰۶- چند مورد از مقایسه‌های زیر، درست است؟

الف) میانگین آنتالپی پیوند: $C \equiv C > C = O > C = C$

پ) آنتالپی پیوند: $H - F > H - H > H - Cl$

ب) ارزش سوختی: $CH_4 > C_2H_6 > C_3H_8$

ت) قدرمطلق آنتالپی سوختن: $C_3H_8 > C_2H_6 > C_2H_2$

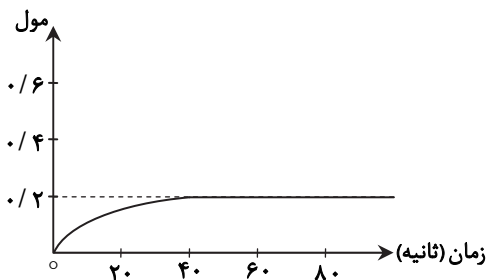
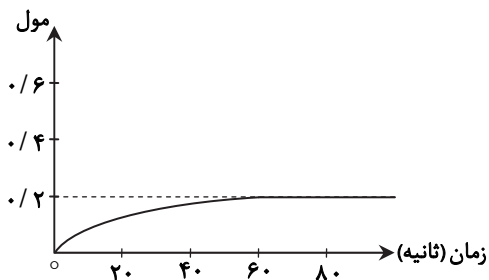
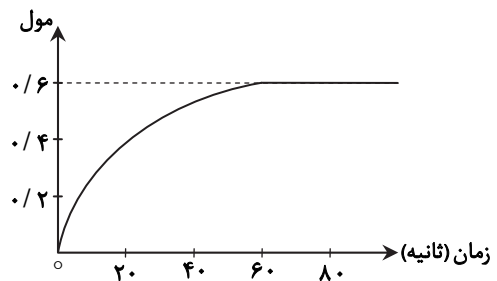
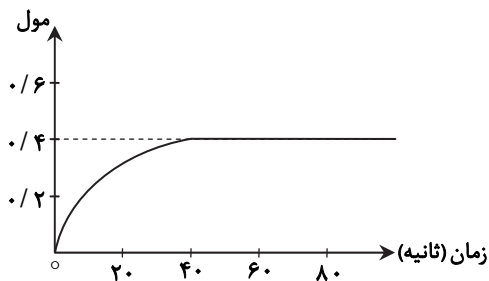
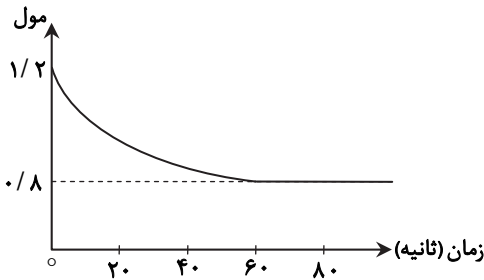
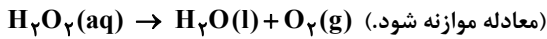
۱ (۴)

۴ (۳)

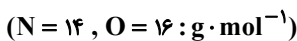
۳ (۲)

۲ (۱)

۲۰۷- اگر نمودار تغییر مقدار هیدروژن پراکسید در واکنش تجزیه آن در غیاب کاتالیزگر به صورت زیر باشد، کدام نمودار می‌تواند نشان‌دهنده تغییر مقدار اکسیژن در این واکنش در حضور محلول پتاسیم یدید باشد؟ (در هر دو آزمایش، ۰/۸ مول از ماده اولیه باقی می‌ماند.)



۲۰۸- در ظرفی نیم‌لیتری، ۱۱۵ گرم نیتروژن دی‌اکسید مطابق واکنش $NO_2(g) \rightarrow NO(g) + O_2(g)$ تجزیه می‌شود. اگر سرعت واکنش $0.575 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد، پس از ۱/۵ دقیقه چند درصد از نیتروژن دی‌اکسید در ظرف باقی می‌ماند؟ (معادله واکنش موازنه شود.)



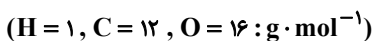
۸۰ (۴)

۶۵/۵ (۳)

۵۲/۶ (۲)

۳۴/۵ (۱)

۲۰۹- به تقریب، چند درصد جرمی فرآورده‌های حاصل از آبکافت $\dots - (C(=O) - CH_2 - C(=O) - O - CH_2 - O)_n$ را دی‌الکل تشکیل می‌دهد؟



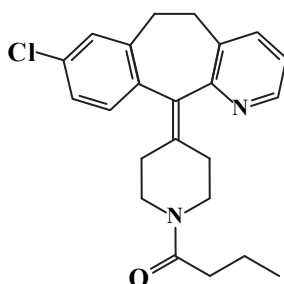
۶۳ (۴)

۳۷/۳ (۳)

۳۱/۶ (۲)

۱۵/۷ (۱)

۲۱۰- چند مورد از مطالب زیر درباره ترکیبی با ساختار روبه‌رو، درست است؟



- دارای دو عامل آمینی و یک عامل کتونی است.
- شمار اتم‌های کربن و هیدروژن آن، برابر است.
- نوعی هیدروکربن آروماتیک به‌شمار می‌رود.
- هر مولکول آن دارای ۱۴ الکترون ناپیوندی است.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲۱۱- غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول ۰/۱۱۲ گرم بر لیتر پتاسیم هیدروکسید، چند برابر غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول نیممولار هیدروسیانیک اسید با درصد یونش ۰/۴ درصد است؟ (دما را ۲۵°C در نظر بگیرید.) ($H = 1, O = 16, K = 39: g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) $2/5 \times 10^{-9}$ (۲) $2/5 \times 10^{-8}$ (۳) 4×10^{-8} (۴) 4×10^{-9}

۲۱۲- pH معده فردی، ۱/۷ است. یک قرص ضداسید به جرم ۳۳۰ میلی‌گرم که اجزای سازنده آن مطابق جدول زیر است، با چند میلی‌لیتر از اسید معده این فرد به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23, Mg = 24, Cl = 35/5: g \cdot mol^{-1}$)

جزء سازنده	منیزیم هیدروکسید	سدیم هیدروژن کربنات	سدیم کلرید
درصد جرمی در قرص	۲۹	۴۲	۲۹

- (۱) ۲۴۷/۵ (۲) ۵۰۰ (۳) ۶۷۲/۵ (۴) ۸۲۵

۲۱۳- با توجه به جدول روبه‌رو، اگر ولتاژ سلول گالوانی استاندارد B - A، ۱/۰۱ ولت کمتر از ولتاژ سلول گالوانی استاندارد D - C باشد، x کدام است و ولتاژ سلول گالوانی C - B چند ولت می‌باشد؟ (در جدول داده‌شده، نیم‌واکنش‌ها از E° بیشتر به کمتر، مرتب شده‌اند.)

نیم‌واکنش	$E^\circ (V)$
$A^+(aq) + e^- \rightarrow A(s)$	+۱/۳۳
$B^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow B(s)$	+۰/۸۷
$C^{3+}(aq) + e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$	x
$D^{3+}(aq) + 3e^- \rightarrow D(s)$	-۱/۵۹

- (۱) ۰/۹۹ ، -۰/۱۲ (۲) ۳/۰۱ ، -۰/۱۲ (۳) ۰/۹۹ ، -۲/۱۴ (۴) ۳/۰۱ ، -۲/۱۴

۲۱۴- در سلول گالوانی حاصل از اتصال SHE و روی، در لحظه‌ای که ۸۳/۷۵ درصد از تیغه آندی به‌صورت دست‌نخورده باقی‌مانده، pH الکترولیت کاتدی کدام است؟ (جرم اولیه تیغه آندی را ۸۰ گرم و حجم هر یک از الکترولیت‌ها را ۵۰۰ سی‌سی در نظر بگیرید.)

($Zn = 65 g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۴ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۷

۲۱۵- کدام مطلب درست است؟

- (۱) در آبرکاری یک قاشق مسی با فلز M، قاشق مسی نقش کاتد (قطب مثبت) را ایفا می‌کند.
 (۲) در فرایند استخراج صنعتی آلومینیم، فلز آلومینیم به‌دست آمده، از بالای سلول الکترولیتی به‌صورت مذاب خارج می‌شود.
 (۳) در سلول الکترولیتی برقکافت آب، کاغذ pH در محلول اطراف کاتد به رنگ آبی درمی‌آید.
 (۴) در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، الکتروود آند نقش واکنش‌دهنده را ایفا می‌کند.

۲۱۶- اتم منگنز دارای اعداد اکسایش +۷، +۶، +۴، +۳، +۲ است. اگر ۴۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار $KMnO_4$ در شرایط مناسب، حداکثر با ۱۳ گرم فلز روی به‌طور کامل واکنش دهد، کدام گزینه درست است؟ ($Zn = 65 g \cdot mol^{-1}$)

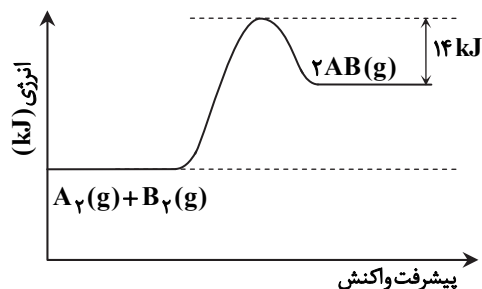
(۱) اگر کاهش MnO_4^- پلکانی باشد، این فرایند طی سه مرحله انجام می‌شود.

(۲) قدرت اکسندگی $Mn(II)$ و $Mn(VI)$ از قدرت اکسندگی Zn^{2+} بیشتر است.

(۳) در محلول نهایی، کاتیون‌های $Mn(II)$ و Zn^{2+} وجود دارد.

(۴) منگنز در محلول اولیه دارای بالاترین عدد اکسایش خود است و فقط می‌تواند کاهشدهنده باشد.

۲۱۷- اگر مجموع انرژی فعال‌سازی و ΔH واکنش فرضی $A_2(g) + B_2(g) \rightarrow 2AB(g)$ ، برابر با ۶۴ کیلوژول باشد، با توجه به نمودار و جدول داده شده، آنتالپی پیوند A - B چند کیلوژول بر مول است؟



پیوند	A - A	B - B
آنتالپی پیوند ($kJ \cdot mol^{-1}$)	۲۰۰	۱۲۵

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۲/۵ (۳) ۲۲۵ (۴) ۲۵۰

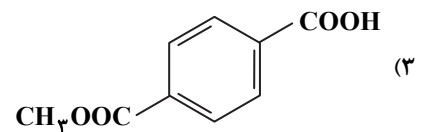
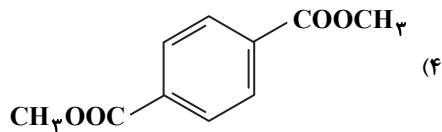
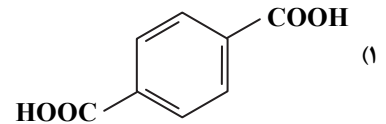
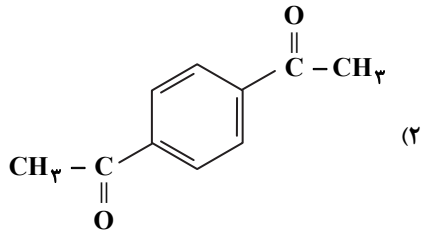
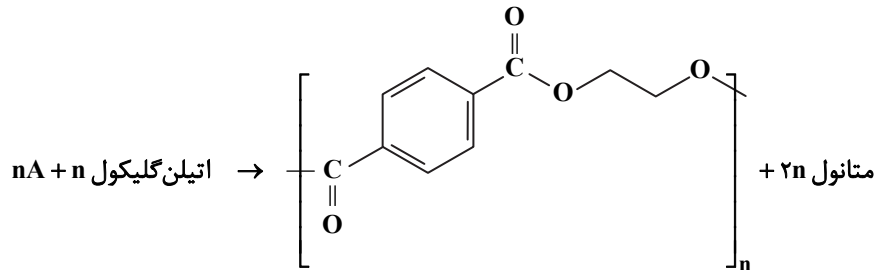
۲۱۸- کدام واکنش زیر، با افزایش دما به سمت راست (در جهت رفت) و با افزایش فشار به سمت چپ (در جهت برگشت) جابه‌جا می‌شود؟



۲۱۹- در دما و فشار معین، ۲ مول گاز آمونیاک در محفظه‌ای به حجم ۵۰۰ سی‌سی وارد شده تا به گازهای نیتروژن و هیدروژن تجزیه شود. اگر بازده واکنش برابر ۲۰ درصد باشد، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟



۲۲۰- با توجه به واکنش بسیارش زیر، در کدام گزینه ساختار ماده A به درستی نشان داده شده است؟

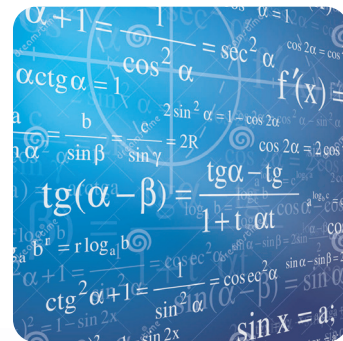
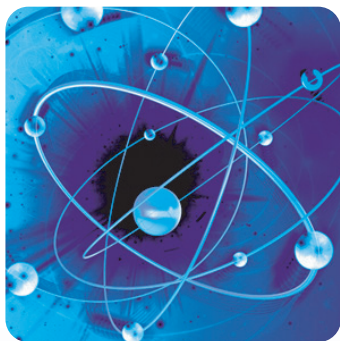


دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۳۱ خرداد ۱۴۰۱ (مرحله ۱۹)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی



ریاضیات

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۹ و ۲۱ حسابان ۱

نکته: برخی از معادلات که دارای عبارات‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آن‌ها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست‌آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.
نکته: به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشد، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند. ابتدا معادله گنگ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{4a+1} = 7-2a \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4a+1 = 4a^2 + 49 - 28a \Rightarrow 4a^2 - 32a + 48 = 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=6 \end{cases} \text{ غرق}$$

مقدار $a=6$ در معادله اولیه صدق نمی‌کند، پس فقط $a=2$ قابل قبول است. به دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌های آن $a=2$ و $a-1=1$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله: } x^2 - 3x + 2 = 0$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۳ حسابان ۱

نکته: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت زیر است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

ابتدا مجموع دوازده جمله دنباله حسابی را به دست می‌آوریم:

$$b_1 = 24, d = 3 \Rightarrow S_{12} = 6(48 + 11 \times 3) = 6 \times 81 = 486$$

حال عدد به دست آمده را برابر جمله عمومی دنباله هندسی قرار می‌دهیم تا شماره جمله هندسی به دست آید:

$$486 = 2 \times 3^{n-1} \Rightarrow 2 \times 3^5 = 2 \times 3^{n-1} \Rightarrow n = 6$$

یعنی جمع ۱۲ جمله ابتدایی دنباله b_n ، با جمله ششم دنباله هندسی a_n برابر است.

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۳۳ حسابان ۱

نکته: به‌طور کلی فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا فاصله نقطه A را از دو خط داده شده به دست می‌آوریم تا طول و عرض مستطیل به دست آید:

$$3x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow \text{فاصله } A \text{ از خط } d_1 = \frac{|3+8-1|}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

چون دو ضلع مجاور مستطیل داده شده است، پس دو خط برهم عمودند:

$$m_1 = -\frac{3}{4}, \quad m_2 = -\frac{4}{a}$$

$$-\frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{a}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3}{a} = -1 \Rightarrow a = -3$$

$$4x - 3y - b = 0 \Rightarrow \text{فاصله } A \text{ از خط } d_2 = \frac{|4-6-b|}{5} = \frac{|b+2|}{5}$$

محیط مستطیل ۸ است، پس:

$$d_1 + d_2 = 4 \Rightarrow 2 + \frac{|b+2|}{5} = 4 \Rightarrow |b+2| = 10 \Rightarrow \begin{cases} b=8 \\ b=-12 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

هر سمت نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{2x-3}{x+1} < 2 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{-5}{x+1} < 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0$$

x	-1	4	
x-4	-	-	+
x+1	-	+	+
$\frac{x-4}{x+1}$	+	-	+

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب: } x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$$

از اشتراک مجموعه جواب‌های به‌دست آمده، جواب نامعادله به‌صورت $(4, +\infty)$ است، بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

نکته

عبارت P را ساده می‌کنیم:

$$P = \sqrt[3]{3 \times 2^4 \times 3^4 \times (2^3 \times 3)^4 \times (3^2 \times 2)^6} = 3^3 \times 2^{12} \times 3^{12} \times 2^4 \times 3^4 \times 2^6 \times 3^3 \times 2^6 = 3^3 \times 2^{12} \times 3^{12} \times 2^4 \times 3^4 \times 2^6 \times 3^3 \times 2^6 = 3^{12} \times 2^{12} = 6$$

$$\log_b a^n = n \log_b a, \quad \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

نکته

عبارت P را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P &= (\log_6 3)^2 + (\log_6 12)(\log_6 (12 \times 9)) = (\log_6 3)^2 + (\log_6 12)(\log_6 12 + \log_6 9) \\ &= (\log_6 3)^2 + (\log_6 12)^2 + \log_6 12 \cdot \log_6 9 = (\log_6 3)^2 + (\log_6 12)^2 + \log_6 12 \cdot \log_6 3^2 \\ &= (\log_6 3)^2 + (\log_6 12)^2 + 2 \log_6 12 \cdot \log_6 3 \stackrel{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}{=} (\log_6 3 + \log_6 12)^2 = (\log_6 36)^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\log_b a^n = n \log_b a, \quad \log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}, \quad \log_c a + \log_c b = \log_c ab$$

نکته

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

نکته

از طرفین تساوی لگاریتم در پایه ۲ می‌گیریم:

$$\log_2 2^{1-2x} = \log_2 3^{x+2} \Rightarrow (1-2x) \log_2 2 = (x+2) \log_2 3 \Rightarrow (1-2x) = (x+2) \log_2 3 \Rightarrow 1-2x = x \log_2 3 + 2 \log_2 3$$

$$\Rightarrow x(2 + \log_2 3) = 1 - 2 \log_2 3 \Rightarrow x(\log_2 4 + \log_2 3) = \log_2 2 - 2 \log_2 3 \Rightarrow x(\log_2 12) = \log_2 \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{\log_2 \frac{2}{9}}{\log_2 12} = \log_{12} \frac{2}{9}$$

مقدار هر یک از نسبت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \sin \frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر دو تساوی داده شده داریم:

$$\frac{-\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}{-a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = -3 \Rightarrow a+b = -3a+3b \Rightarrow 2b = 4a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

مطابق نمودار $f(2) = 4$ است. شرط پیوستگی $g(x)$ در $x = 2$ آن است که $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$.

ضابطه تابع f به ازای $x < 2$ به صورت یک خط با ضابطه $y = -x + 4$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax^2 + bx + 3}{x - (-x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax^2 + bx + 3}{2(x - 2)}$$

با توجه به اینکه g در $x = 2$ پیوسته است، پس حد به دست آمده باید موجود باشد که چون مخرج آن به ازای $x = 2$ برابر صفر است، پس باید صورت آن به ازای $x = 2$ صفر شود:

$$4a + 2b + 3 = 0$$

همچنین حاصل حد باید برابر $g(2) = \frac{4a + 2b + 3}{2 - 4} = 0$ یعنی $g(2) = 0$ شود. زمانی حاصل این حد صفر می شود که صورت عامل $(x - 2)^2$ داشته باشد که بعد از اینکه با یک $x - 2$ مخرج ساده شد، باز هم صورت کسر را صفر کند.

$$ax^2 + bx + 3 = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{3}{a} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = -4 \xrightarrow{(*)} \frac{b}{\frac{3}{4}} = -4 \Rightarrow b = -3 \\ \frac{3}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \quad (*) \end{cases}$$

ابتدا از اینکه حاصل حد وقتی $x \rightarrow 1$ برابر عددی حقیقی شده است، ولی مخرج کسر برابر صفر است، می توان نتیجه گرفت که صورت کسر هم به ازای $x = 1$ باید صفر باشد:

$$a - \sqrt{1 + 3} = 0 \Rightarrow a = 2$$

حال مقدار b را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3}}{2x + \sqrt{x^2 + 3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x^2 - x^2 - 3)}{(x - 1)(2x + \sqrt{x^2 + 3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(2x + \sqrt{x^2 + 3})} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{2}(2x - |x|)}{x - 1} = \frac{\frac{3}{2}(2x + x)}{x - 1} = \frac{\frac{3}{2} \times 3x}{x} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$$

حال حاصل حد خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\text{نکته: } D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\}$$

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right), \quad D_g = [1, 4]$$

حالا به کمک نکته داریم:

$$\left\{ x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \mid 1 \leq \sqrt{2x - 1} + 1 \leq 4 \right\} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{2x - 1} - 1 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 2x - 1 \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5$$

بنابراین:

$$D_{g \circ f} = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \cap \left[\frac{1}{2}, 5 \right] = \left[\frac{1}{2}, 5 \right]$$

چون ریشه های سهمی $y = f(x)$ اعداد α و 4α است، پس معادله آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = k(x - \alpha)(x - 4\alpha) \Rightarrow f(0) = -12$$

تابع از نقطه $(0, -12)$ می گذرد، پس:

$$f(0) = -12 \Rightarrow 4\alpha^2 k = -12 \Rightarrow k = \frac{-3}{\alpha^2} \quad f(x) = \frac{-3}{\alpha^2} (x - \alpha)(x - 4\alpha)$$

با توجه به آنکه طول رأس سهمی بین دو ریشه قرار دارد، پس $x_S = \frac{4\alpha + \alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ ، بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با:

$$f\left(\frac{5}{2}\alpha\right) = \left(-\frac{3}{\alpha^2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\alpha\right) \times \left(-\frac{3}{2}\alpha\right) = \frac{27}{4} \Rightarrow y_S = \frac{27}{4}$$

۱۱۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۳۷ و ۳۸ حسابان ۲

ابتدا اولین جواب معادله $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ را به دست می آوریم:

$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{اولین جواب مثبت} = \frac{\pi}{6}$$

غقیق $\sin x = -2$

مطابق فرض $x = \frac{\pi}{6}$ اولین ریشه مثبت معادله $\cos(\alpha x + \frac{\pi}{12}) = -1$ است:

$$\cos\left(\frac{\alpha\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\alpha\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \pi \Rightarrow \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{12} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{6} = \frac{11}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{2} = 5.5$$

۱۱۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه های ۱۲۱ و ۱۳۱ حسابان ۲

نکته: در تابع چندجمله ای $y = f(x)$ اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ اکسترمم نسبی تابع باشد، آنگاه:
نکته: در تابع چندجمله ای $y = f(x)$ طول نقاط عطف ریشه های معادله $f''(x) = 0$ هستند.

f تابعی مشتق پذیر است و $A(-3, -23)$ اکسترمم نسبی f است، پس دو شرط زیر باید برقرار باشد:

$$f(-3) = -23 \Rightarrow -27 + 9a - 3b + 4 = -23 \Rightarrow 9a - 3b = 0 \Rightarrow b = 3a \quad (1)$$

$$f'(-3) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow 27 - 6a = -b \quad (2)$$

از معادلات (۱) و (۲) مقادیر a و b به صورت روبه رو است:

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 27 \end{cases}$$

حال از تابع $g(x) = 9x^3 - 27x^2 + 4$ دو بار مشتق گرفته و نقطه عطف تابع را به دست می آوریم:

$$g'(x) = 27x^2 - 54x \Rightarrow g''(x) = 54x - 54 \quad g''(x) = 0 \Rightarrow 54x - 54 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین عرض نقطه عطف برابر $g(1) = -14$ است.

۱۱۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۷۷ حسابان ۲

نکته: شیب یک تابع در هر نقطه برابر مشتق آن تابع در آن نقطه است.

ابتدا مشتق f را به دست می آوریم تا نقاطی را که تابع در آن ها مماس افقی دارد به دست آوریم و ببینیم با چه انتقالی به سمت پایین بر محور

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$$

ها مماس می شود:

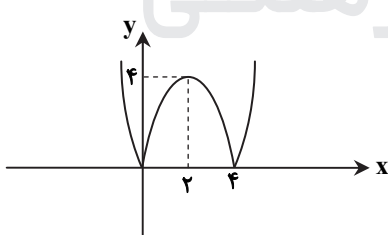
مشتق را برابر با صفر قرار می دهیم:

$$12x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow A(1, 3) \\ x = 0 \Rightarrow B(0, 2) \end{cases}$$

حال اگر تابع را ۲ واحد یا ۳ واحد به سمت پایین انتقال دهیم، بر محور طول ها مماس خواهد شد، بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۱۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۷۷ حسابان ۲

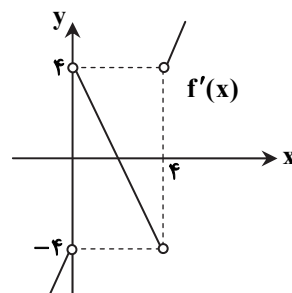
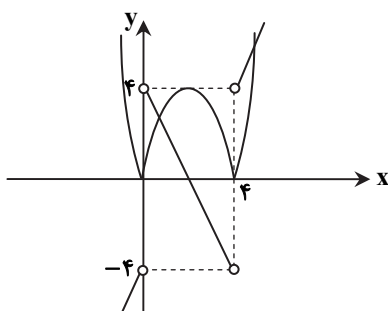
ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می کنیم:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x > 4 \\ 4x - x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 4x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 4 \\ 4 - 2x & 0 < x < 4 \\ 2x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

حال اگر $f(x)$ و $f'(x)$ را در یک محور رسم کنیم، مشاهده می کنیم که یکدیگر را در ۲ نقطه قطع می کنند.



نکته: برای تابع وارون پذیر f اگر $f(a) = b$ ، آنگاه $f^{-1}(b) = a$.

قرار است $f^{-1}(2x)$ نیمساز ناحیه سوم را قطع کند، پس باید معادله زیر را حل کنیم:

$$f^{-1}(2x) = x \xrightarrow{\text{مطابق نکته}} f(x) = 2x$$

از طرفی $f(x) = x + 1 + 2\sqrt{x+2}$ ، پس:

$$x + 1 + 2\sqrt{x+2} = 2x \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = x - 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4(x+2) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

مقدار $x = -1$ قابل قبول نیست، زیرا محل تقاطع با نیمساز ناحیه اول را می‌خواهیم، بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیم $|a| + c$ ، مقدار مینیم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

ابتدا تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = a\sin \pi(bx - \frac{1}{\pi}) = -a\cos b\pi x$$

مطابق شکل داریم:

$$g(0) = -3b \Rightarrow -a = -3b \Rightarrow a = 3b$$

$$T = \frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$$

از نمودار می‌توان فهمید $1/5$ برابر دوره تناوب برابر $\frac{b}{3}$ است. از طرفی:

بنابراین:

$$\frac{3}{2}T = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{2}{b} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{3}{b} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

با توجه به اینکه $b > 0$ ، پس مقدار $b = 3$ قابل قبول است و خواهیم داشت: $a = 3b = 9$ ، در نتیجه: $ab = 27$

نکته: تعداد اقطار یک n ضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

نکته: اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 27 \Rightarrow n^2 - 3n - 54 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+6) = 0 \Rightarrow n = 9$$

طبق فرض سؤال تعداد اقطار برابر ۲۷ است، پس:

اکنون داریم:

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی } 9 \text{ ضلعی منتظم} = \frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ = \frac{9-2}{9} \times 180^\circ = 140^\circ$$

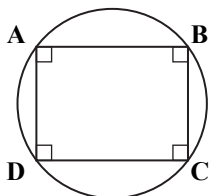
نکته: یک چهارضلعی محاطی است هرگاه مجموع زوایای روبه‌رو در آن برابر 180° درجه باشد.

دوزنقه همواره محاطی نیست، مگر آنکه دوزنقه متساوی‌الساقین باشد.

لوزی همواره محاطی نیست، مگر آنکه به مربع تبدیل شود.

متوازی‌الاضلاع همواره محاطی نیست، مگر آنکه به مستطیل تبدیل شود.

مستطیل همواره یک چهارضلعی محاطی است.



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

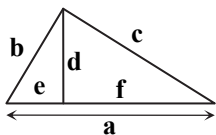
$$S = \frac{b}{\gamma} + i - 1$$

نکته: طبق قانون پیک مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با b نقطه مرزی و i نقطه درونی برابر است با:

برای محاسبه مساحت قسمت سایه یا رنگی، طبق قانون پیک مساحت‌های چندضلعی درونی و بیرونی را محاسبه می‌کنیم و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{b_1}{\gamma} + i_1 - 1 = \frac{17}{2} + 19 - 1 = 26/5 \\ S_2 = \frac{b_2}{\gamma} - i_2 - 1 = \frac{11}{2} + 4 - 1 = 8/5 \end{cases} \Rightarrow \Delta S = S_1 - S_2 = 26/5 - 8/5 = 18$$

نکته: بر طبق قضیه استوارت در مثلث شکل زیر داریم:



$$b^2 \cdot f + c^2 \cdot e = a \cdot (d^2 + ef)$$

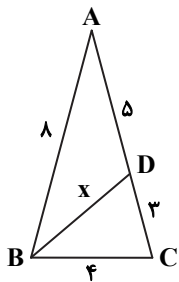
چون مثلث ABC در رأس A متساوی الساقین است، پس:

$$AB = AC = ۸ \Rightarrow AD = ۸ - ۳ = ۵$$

بر طبق قضیه استوارت در مثلث ABC:

$$AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD = AC(BD^2 + AD \cdot DC) \Rightarrow ۸^2 \times ۳ + ۴^2 \times ۵ = ۸(x^2 + ۵ \times ۳)$$

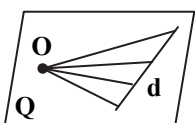
$$\Rightarrow ۲۴ + ۱۰ = x^2 + ۱۵ \Rightarrow x^2 = ۱۹ \Rightarrow x = \sqrt{۱۹}$$



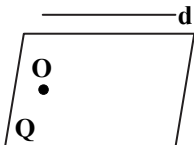
تمام خطوطی که از یک نقطه موازی صفحه P رسم می‌شوند، در صفحه‌ای قرار دارند که از آن نقطه گذشته و موازی P رسم می‌شود. (صفحه Q)

در این سؤال اگر خط d بر صفحه Q منطبق باشد، بی‌شمار جواب داریم. (شکل ۱)

و اگر خط d با این صفحه موازی باشد، جواب نداریم. (شکل ۲)



شکل (۱)



شکل (۲)

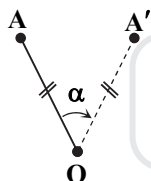
نکته: طول مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره به خط‌المرکزین d و شعاع‌های R_1 و R_2 برابر است با:

$$\text{اندازه مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R_2 - R_1)^2}$$

$$\text{اندازه مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2}$$

نکته: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر

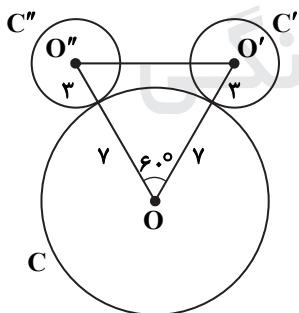
A' تصویر نقطه A باشد، داریم:



$$OA = OA'$$

$$\angle AOA' = \alpha$$

مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$OO' = OO'', \quad \angle O'OO'' = 60^\circ$$

$$O'O'' = \gamma + ۳ = ۱۰, \quad R' = R'' = ۳$$

حال طول مماس مشترک خارجی این دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{۱۰^2 - (۳ + ۳)^2} = ۸$$

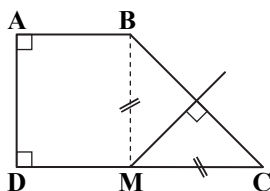
$$MB = MC$$

بر طبق ویژگی عمودمنصف:

اکنون داریم:

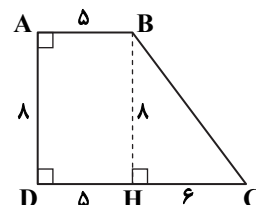
$$ABCD - \text{محیط } ABMD = (AB + BC + CD + AD) - (AB + BM + DM + AD)$$

$$= (BC + CD) - (BM - DM) = BC$$



پس باید اندازه BC را به دست آوریم، عمود BH را بر CD رسم می‌کنیم:

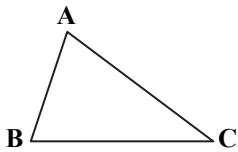
$$\triangle BHC : BC = \sqrt{۸^2 \times ۶^2} = ۱۰$$



نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

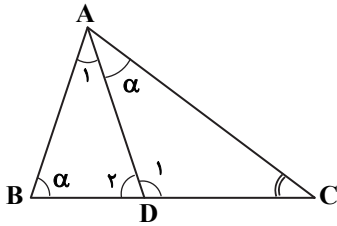
$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$

نکته: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.



$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$$

مثلث‌های ABC و ADC در زاویه C مشترک‌اند و زاویه D_۱ زاویه خارجی ABD است و $\hat{D}_1 > \hat{B}$ ، پس \hat{D}_1 باید با زاویه \hat{A} و در نتیجه زاویه B با \hat{D}_1 برابر باشند.



$$\text{گزینه ۲)} \quad \hat{D}_1 = \hat{A}_1 + \alpha \Rightarrow \hat{D}_1 > \alpha \Rightarrow \triangle ADC : \hat{D}_1 > \alpha \Rightarrow AC > DC$$

$$\text{گزینه ۱)} \quad \hat{D}_2 = \alpha + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_2 > \alpha \Rightarrow \triangle ABD : \hat{D}_2 > \alpha \Rightarrow AB > AD$$

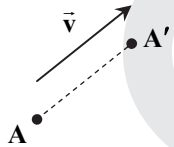
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}_1 + \alpha \\ \hat{B} = \alpha \end{cases} \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} \Rightarrow \triangle ABC : \hat{A} > \hat{B} \Rightarrow BC > AC \quad \text{(گزینه ۳)}$$

اما هیچ رابطه شخصی بین زوایای C و α در مثلث ADC نمی‌توان یافت در نتیجه رابطه شخصی بین AD و DC نمی‌توان یافت.

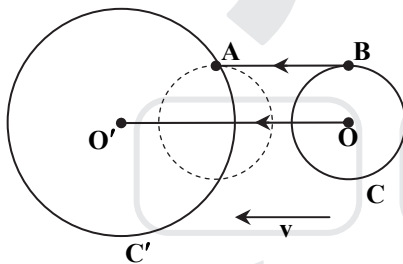
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۴۰ و ۵۱ هندسه ۱

۱۲۷- پاسخ: گزینه ۲

نکته: انتقال T تحت بردار \vec{v} ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overline{AA'} = \vec{v}$.



شکل فرضی روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:



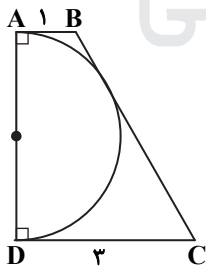
$$AB \parallel OO'$$

$$AB = \frac{OO'}{2}$$

اگر بردار \vec{v} را بر صفحه موازی OO' و به اندازه $\frac{OO'}{2}$ در نظر بگیریم، تصویر نقطه B در انتقال با بردار \vec{v} ، نقطه A است. بنابراین کافی است دایره C را با این بردار انتقال دهیم تا نقطه A به دست آید.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۲۹ هندسه ۲

۱۲۸- پاسخ: گزینه ۲



اگر بازتاب ABCD را نسبت به ساق AD رسم کنیم، دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین محیطی تشکیل می‌شود:

بر طبق تمرین کتاب درسی، در دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی ABCD:

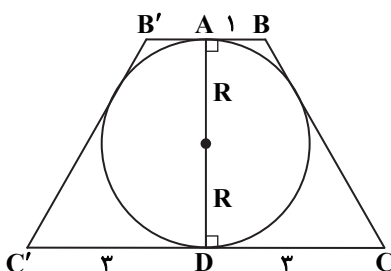
$$S_{\text{مساحت}} = \left(\frac{AB + CD}{2} \right) \sqrt{AB \times CD}$$

از طرفی بر طبق رابطه مساحت:

$$S = \left(\frac{AB + CD}{2} \right) 2R \Rightarrow 2R = \sqrt{AB \times CD}$$

بنابراین در مسئله ما:

$$2R = \sqrt{BB' \times CC'} = \sqrt{2 \times 6} = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

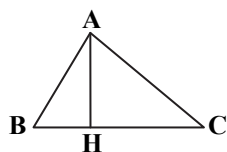


راه حل دوم:

نکته: مماس‌های رسم شده از نقطه‌ای خارج یک دایره بر آن، با یکدیگر برابرند.

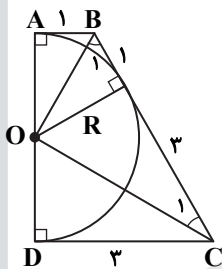
نکته: مرکز دایره محاطی داخلی محل تلاقی نیمسازهای داخلی است.

نکته (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه):



$$\begin{aligned} AB^2 &= BH \cdot BC \\ AC^2 &= CH \cdot BC \\ AH^2 &= BH \cdot CH \\ AH \cdot BC &= AB \cdot AC \\ AB^2 + AC^2 &= BC^2 \end{aligned}$$

مطابق نکات در شکل روبه‌رو داریم:



$$\begin{aligned} BH &= AB = 1 \\ CH &= DC = 3 \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ &\Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ \\ \hat{OBC} : \hat{O} &= 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 90^\circ \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه OBC داریم:

$$OH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow R^2 = 1 \times 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۲۵ هندسه ۳

۱۲۹- پاسخ: گزینه ۲

نکته: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته: جواب‌های معادله ماتریسی $AX = B$ که در آن A ماتریس ضرایب، X ماتریس مجهولات و B ماتریس مقادیر معلوم است، از رابطه $X = A^{-1}B$ به دست می‌آید.

معادله ماتریسی مورد نظر به صورت زیر است:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ابتدا وارون ماتریس ضرایب را می‌یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$X = AB = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۸ هندسه ۳

۱۳۰- پاسخ: گزینه ۴

نکته: برای یافتن درایه سطر n ام و ستون m ام ماتریس $A \times B$ ، کافی است سطر n ام ماتریس A را در ستون m ام ماتریس B ضرب کنیم.

$$A^n = A^{n-1} \times A = A^{n-2} \times A^2 = \dots$$

ابتدا ماتریس A^3 را به صورت $A^3 = A^2 \times A$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین باید سطر دوم ماتریس A^2 را در ستون دوم ماتریس A ضرب کنیم. همچنین برای یافتن سطر دوم ماتریس A^2 ، کافی است سطر دوم ماتریس A را ماتریس A ضرب کنیم، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2ab & 2a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2ab & 2a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+6ab & 3a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2b & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: اگر عددی در یک دترمینان ضرب شود، آن عدد به دلخواه فقط در یکی از سطرها و ستون‌های دترمینان اولیه ضرب می‌شود و برعکس.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = a$$

از سطر اول این دترمینان عدد x ، از سطر دوم عدد y و از سطر سوم عدد z را فاکتور می‌گیریم:

$$xyz = \begin{vmatrix} x^{-1} & 1 & x \\ y^{-1} & 1 & y \\ z^{-1} & 1 & z \end{vmatrix} = a \Rightarrow \begin{vmatrix} x^{-1} & 1 & x \\ y^{-1} & 1 & y \\ z^{-1} & 1 & z \end{vmatrix} = \frac{a}{xyz}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۴۰ و ۴۱ هندسه ۱

۱۳۲- پاسخ: گزینه ۳

نکته: دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به یک مقدار ثابت (شعاع دایره) می‌باشد.

نکته: در معادله گسترده دایره به فرم $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مختصات مرکز به صورت $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع برابر

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \text{ می‌باشد.}$$

منحنی موردنظر باید یک دایره به مرکز $(-1, 2)$ و شعاع ۳ باشد، داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2} = 0$$

$$\text{مرکز } (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1, 2) \Rightarrow a = -2, b = 4$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - 4(\frac{c}{2})} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 - 2c} = 3 \Rightarrow \sqrt{5 - 2c} = 6$$

$$\Rightarrow 5 - 2c = 36 \Rightarrow 2c = -31 \Rightarrow c = -15.5$$

$$a + b + c = -2 + 4 - 15.5 = -13.5$$

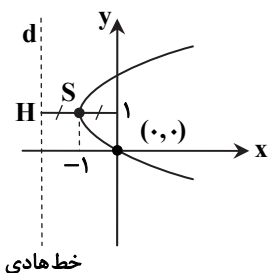
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۵۳ هندسه ۱

۱۳۳- پاسخ: گزینه ۲

نکته: معادله سهمی با فاصله کانونی $a > 0$ به شرح زیر است:

معادله سهمی	مرکز	کانون	خط مساوی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	(h, k)	$(h + a, k)$	$x = h - a$	$y = k$	روبه راست
$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	(h, k)	$(h - a, k)$	$x = h + a$	$y = k$	روبه چپ
$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	(h, k)	$(h, k + a)$	$y = k - a$	$x = h$	روبه بالا
$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	(h, k)	$(h, k - a)$	$y = k + a$	$x = h$	روبه پایین

مطابق شکل رأس سهمی روی نیمساز ناحیه دوم $y = -x$ قرار دارد.



$$S(-1, 1)$$

$$(y - 1)^2 = 4a(x + 1)$$

مبدأ مختصات باید در این معادله صدق کند:

$$(0 - 1)^2 = 4a(0 + 1) \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$SH = \frac{1}{4}$$

$$d: x = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow 4x + 5 = 0$$

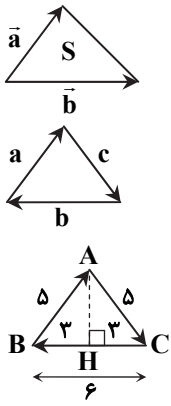
نکته: مساحت مثلث بناشده روی دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر است با اندازه نصف حاصل ضرب خارجی این دو بردار:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

اگر سه بردار غیرصفر و ناهم‌راستا، در رابطه $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ صدق کنند، آنگاه این سه بردار به‌طور متوالی تشکیل یک مثلث می‌دهند.

این مثلث متساوی‌الساقین است. $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 5 \Rightarrow$

بنابراین مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$|\vec{b} \times \vec{c}| = 2S_{\triangle ABC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 24$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ آمار و احتمال

۱۳۵- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: گزاره‌ها با سور عمومی (\forall) زمانی درست است که به‌ازای جميع مقادیر دامنه متغیر، برقرار باشد و هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

نکته ۲: گزاره‌ها با سور وجودی (\exists) زمانی درست است که حداقل یک جواب داشته باشد و مجموعه جواب آن، تهی نباشد.

با توجه به نکات، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: برای هر عدد حقیقی مانند x ، عدد طبیعی بزرگ‌تر از x مانند y وجود دارد به‌طوری که $x - y < 0$.

گزینه ۲: برای هر عدد طبیعی مانند x ، عدد حقیقی منفی مانند y وجود دارد به‌طوری که $x + y < 0$.

گزینه ۳: به‌ازای هر عدد طبیعی مانند y ، عدد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی صفر مانند x وجود دارد به‌طوری که $x(y+2)^2 \leq 0$.

گزینه ۴: نادرست است؛ زیرا به‌ازای هر $y = -2 \neq y$ هیچ x طبیعی وجود ندارد که گزاره موردنظر برقرار باشد.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۱۹، ۲۴ و ۲۵ آمار و احتمال

۱۳۶- پاسخ: گزینه ۲

۱) $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

۲) $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

نکته:

با توجه به نکته، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $B - A = \{\{1\}, \{\{1\}\}\} - \{1, \{1\}\} = \{\{\{1\}\}\} \neq \{\{1\}\}$ ✗

گزینه ۲: $A \cup \{\{1\}\} - \{1\} = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\} - \{1\} = \{\{1\}, \{\{1\}\}\} = B$ ✓

گزینه ۳: $B \cup \{1\} - \{\{1\}\} = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\} - \{\{1\}\} = \{1, \{1\}\} \neq A$ ✗

گزینه ۴: $A \cup B = \{1, \{1\}\} \cup \{\{1\}, \{\{1\}\}\} = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\} \neq \{\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$ ✗

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۴۵، ۴۶، ۶۸، ۷۰ و ۷۱ آمار و احتمال

۱۳۷- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: $P(A') = 1 - P(A)$

$$\binom{n}{k}$$

نکته ۲: در پرتاب n سکه با هم احتمال اینکه k سکه رو (یا پشت) بیاید، برابر است با: $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

نکته ۳: دو پیشامد A و B را مستقل گوئیم هرگاه احتمال وقوع هریک در دیگری تأثیری نداشته باشد که در این صورت احتمال وقوع

هم‌زمان آن‌ها برابر است با حاصل ضرب احتمال وقوع هریک، یعنی $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

نکته ۴: احتمال اینکه پیشامد A یا پیشامد B رخ دهد را با $P(A \cup B)$ نمایش داده و برابر است با: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اگر پیشامد A را «حداقل یکی از تاس‌ها اول باشد» تعریف کنیم، A' پیشامد آن است که «هیچ‌کدام از تاس‌ها اول نباشند» که با توجه به نکته ۱، داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{3}{6} \times \frac{3}{6}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

«برآمدهای ۱، ۴، ۶، اول نیستند»

و اگر پیشامد B را «حداقل دو سکه رو ظاهر شود» تعریف کنیم، یعنی دو سکه رو بیاید یا سه سکه رو بیاید که با توجه به نکته ۲، داریم:

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} + \frac{\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

اینک از آنجایی که با توجه به نکته ۳ می‌دانیم پرتاب سکه و تاس مستقل از هم هستند، به کمک نکات ۳ و ۴، احتمال مطلوب، برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{P(A \cap B)}{P(A) \times P(B)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$
 ✓

نکته: طبق قانون احتمال کل اگر پیشامدهای A_1 تا A_n ، فضای نمونه‌ای S را افراز کنند به طوری که پیشامد A به آن‌ها وابسته باشد، آنگاه احتمال پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = P(A_1) \times P(A | A_1) + P(A_2) \times P(A | A_2) + \dots + P(A_n) \times P(A | A_n)$$

با توجه به نکته، داریم:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{5} \text{ اعداد خروجی از B یکی زوج و یکی فرد باشد} \\ \frac{2}{5} \text{ عدد خروجی از A زوج باشد} \end{array} \quad \frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} \text{ اعداد خروجی از B هر دو زوج یا هر دو فرد باشند} \quad \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25} = 0.52$$

نکته: فرض کنید A_1 تا A_n پیشامدهایی باشند که فضای نمونه‌ای S را افراز کرده‌اند و پیشامد A به آن‌ها وابسته است، آنگاه طبق قانون بیس، داریم:

$$P(A_1 | A) = \frac{P(A_1) \times P(A | A_1)}{P(A)}$$

که در آن $P(A)$ از طریق قانون احتمال کل، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(A) = P(A_1) \times P(A | A_1) + P(A_2) \times P(A | A_2) + \dots + P(A_n) \times P(A | A_n)$$

با توجه به نکته، داریم:

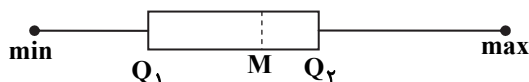
$$P(A \text{ جعبه } A | \text{ هر دو مهره سفید}) = \frac{P(A \text{ جعبه } A) \times P(\text{هر دو مهره سفید} | A \text{ جعبه } A)}{P(\text{هر دو مهره سفید})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}}{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + \frac{3}{30}} = \frac{1}{15} \times \frac{30}{15+6} = \frac{2}{17}$$

نکته ۱: نمودار میله‌ای روشی است سودمند برای نمایش داده‌های آماری که در آن، ارتفاع هر میله، فراوانی داده را نشان می‌دهد.

نکته ۲: اگر تعداد داده‌های آماری، فرد باشد، داده وسط میانه است.

نکته ۳: میانه نیمه اول داده‌ها را چارک اول و میانه نیمه دوم داده‌ها را چارک سوم می‌نامیم.

نکته ۴: نمودار جعبه‌ای نموداری است به شکل زیر که پراکندگی داده‌ها را بر اساس پنج معیار، کوچک‌ترین داده، چارک اول، میانه، چارک سوم و بزرگ‌ترین داده نشان می‌دهد.



نکته ۵: ضریب تغییرات داده‌ها را با CV نمایش داده و برابر است با خارج قسمت تقسیم انحراف معیار بر میانگین:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} ; \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

با توجه به نکات ۱ تا ۳، داده‌ها، تعدادشان، میانه و چارک‌های آن‌ها عبارتند از:

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & 2, 2, 2, & 3, 3, 3, 3, & 6, 9, 9, 9, 9, & 9, 9, 10, & 10 & \downarrow \\ \min & \text{چارک اول} & \text{میانه} & \text{چارک سوم} & \text{max} & & \end{array} \Rightarrow n = 19$$

و با توجه به نکته ۴ واضح است که داده‌های ۳، ۳، ۳، ۳، ۶، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹ داخل جعبه هستند. پس با توجه به نکته ۵، خواهیم داشت:

$$\bar{x} = \frac{54}{9} = 6 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{4(9) + 7(0) + 4(9)}{9}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3}(\sqrt{2})$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۴۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰ آمار و احتمال

نکته: برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی آماره نمونه.

ابتدا میانگین جامعه را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{2(2) + 3 + 4 + 2(5) + 4(6)}{10} = 4/5$$

از آنجایی که $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$ ، پس اگر نمونه ۸ عضوی میانگین ۴/۵ داشته باشد، نمونه دو عضوی نیز میانگین ۴/۵ خواهد داشت، پس:

$$\{x_1, x_2\}: \frac{x_1 + x_2}{2} = 4/5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9$$

یعنی مجموع دو عضو باید ۹ باشد که در این صورت دو حالت می‌توانیم داشته باشیم:

$$\binom{1}{1} \times \binom{4}{1} = 4 \quad \text{۱ عضو ۳ و ۱ عضو ۶}$$

$$\binom{1}{1} \times \binom{2}{1} = 2 \quad \text{۱ عضو ۴ و ۱ عضو ۵}$$

بنابراین، احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = \frac{4+2}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

۱۴۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ ریاضیات گسسته

نکته: برای هر سه عدد صحیح a, b و c ، داریم:

۱) $a | a$

۲) $a | b, a | c \Rightarrow a | b+c$

با توجه به فرض سؤال و نکته، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a+b | b+c \\ a+b | a+b \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} a+b | a-c$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

البته برای سایر گزینه‌ها مثال نقض $a=3, b=2, c=13$ وجود دارد.

۱۴۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۳، ۲۱، ۲۲، ۲۴ و ۲۵ ریاضیات گسسته

۱ نکته: $(a, b) = d \Rightarrow d | a, d | b$

۲ نکته: $a | b \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{a}$

نکته ۳: به طرفین هم‌نهشتی می‌توانیم مضاربی از بی‌مانه را اضافه یا کم کنیم.

۴ نکته: $ac \equiv bc \pmod{m}, (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

۵ نکته: $x \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x = mk + b$

با توجه به نکته ۱، داریم:

$$(7n+3, 3n+7) = 20 \Rightarrow 20 | 7n+3, 20 | 3n+7$$

سپس با توجه به نکته ۲، داریم:

$$7n+3 \equiv 0 \pmod{20}, 3n+7 \equiv 0 \pmod{20}$$

و اینک با توجه به نکات ۳، ۴ و ۵، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 7n \equiv -3 \equiv 17 \pmod{20} \xrightarrow{+7} n \equiv 11 \pmod{20} \\ 3n \equiv 7 \pmod{20} \xrightarrow{+3} n \equiv 11 \pmod{20} \end{array} \right\} \Rightarrow n = \{11, 31, 51, 71, 91, \dots\}$$

اعداد را چک می‌کنیم:

$n = 11 \Rightarrow (7n+3, 3n+7) = (80, 40) = 40 \quad \times$

$n = 31 \Rightarrow (220, 100) = 20 \quad \checkmark$

بنابراین $n = 31$ قابل قبول است که مجموع ارقامش برابر ۴ است.

نکته ۱: طرفین همنهشتی را می‌توان در یک عدد صحیح ضرب کرد.

نکته ۲: ب.م.م دو عدد تجزیه‌شده به عوامل اول، برابر است با حاصل ضرب عدد اول مشترک با توان کمتر.

$$\frac{m}{d} \\ ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b$$

با توجه به نکته ۱، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} y \equiv 154 \xrightarrow{\times x} xy \equiv 154x \\ xy \equiv 154z \end{array} \right\} \Rightarrow 154x \equiv 154z$$

و با توجه به نکات ۲ و ۳، داریم:

$$(154, 154) = (2^2 \times 7 \times 11, 2 \times 7 \times 11) = 2 \times 7 = 14$$

$$154x \equiv 154z \xrightarrow[\div 14]{(154, 154)=14} x \equiv z \Rightarrow x \equiv z$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۴۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۳ و ۲۱ تا ۲۵ ریاضیات گسسته

نکته ۱: معادله سیاله $ax + by = c$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, b) | c$.

نکته ۲: ب.م.م دو عدد تجزیه‌شده برابر است با حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر.

$$a | b \Rightarrow a \equiv 0$$

نکته ۴: به طرفین همنهشتی می‌توان مضاربی از پیمانانه را اضافه یا کم کرد.

$$ac \equiv bc, (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b$$

$$x \equiv b \Rightarrow x = mk + b$$

با توجه به نکات، داریم:

$$\text{نکته ۱: } (60, 108) | 7n + 2 \Rightarrow (2^2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 3^3) | 7n + 2$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{نکته ۲}} 2^2 \times 3 | 7n + 2 \xrightarrow{\text{نکته ۳}} 7n + 2 \equiv 0 \Rightarrow 7n \equiv -2 \xrightarrow{\text{نکته ۴}} 7n \equiv -14 \\ \xrightarrow[\div 7]{\text{نکته ۵}} n \equiv -2 \xrightarrow{\text{نکته ۶}} n = 12k - 2 \Rightarrow n = \{10, 22, 34, 46, 58, 70, 82, 94\} \end{array}$$

هشت مقدار طبیعی دو رقمی برای n وجود دارد، پس گزینه ۳ پاسخ است.

۱۴۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۳۵، ۳۶ و ۴۰ ریاضیات گسسته

نکته ۱: گراف G را k -منتظم گوییم هرگاه هر رأس آن k باشد.

نکته ۲: هر گراف تهی یک گراف 0 -منتظم است.

نکته ۳: هر گراف کامل مرتبه n یک گراف $(n-1)$ -منتظم است.

نکته ۴: گراف فرد منتظم مرتبه فرد وجود ندارد (قابل رسم نیست).

در یک گراف r -منتظم از مرتبه 13 با توجه به نکته ۴، r نمی‌تواند اعداد $1, 3, 5, 7, 9, 11$ باشد.

از طرفی با توجه به نکات ۲ و ۳، r نمی‌تواند اعداد صفر و 12 نیز باشد.

پس مقادیر قابل قبول و ممکن برای r عبارتند از: $r = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

بنابراین، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار r برابر $10 - 2 = 8$ است.

۱۴۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۳۵ و ۴۰ ریاضیات گسسته

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \quad \text{نکته ۱: مجموع درجات رئوس هر گراف ساده برابر است با دو برابر تعداد یال‌های آن}$$

نکته ۲: گراف G را k -منتظم گوییم هرگاه هر رأس آن k برابر باشد.

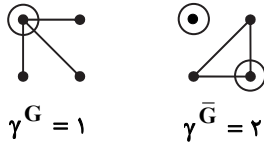
نکته ۳: در هر گراف k -منتظم از مرتبه p و اندازه q ، داریم: $2q = pk$

به کمک اطلاعات مسئله و با توجه به نکات، داریم:

$$qG + 25 = q \text{ منتظم } 4 \xrightarrow{\times 2} 2qG + 50 = 2q \text{ منتظم } 4 \Rightarrow 42 + 50 = 4p \Rightarrow 4p = 92 \Rightarrow p = 23 \quad \checkmark$$

۱۴۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۳۷ و ۴۴ ریاضیات گسسته

نکته ۱: گراف \bar{G} را مکمل گراف G گوئیم هرگاه رئوسش با گراف G یکی بوده اما یال‌هایی داشته باشد که در G نیست و برعکس.
 نکته ۲: تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر مینیمم گراف G را عدد احاطه‌گری نامیده و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.
 با توجه به نکات اگر $\gamma(G) = 1$ باشد یعنی یک رأس به همه رئوس دیگر متصل است که در این صورت، در گراف \bar{G} این رأس، تهی خواهد بود و در نتیجه $\gamma(\bar{G})$ نمی‌تواند برابر ۱ باشد و حداقل آن ۲ است. پس کمترین مقدار $\gamma(G) + \gamma(\bar{G})$ برابر $1 + 2 = 3$ است.
 گراف شکل زیر، تصویری واقعی از گراف موردنظر است:



۱۴۹- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۶۱ و ۷۱ ریاضیات گسسته

نکته ۱: تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$
 نکته ۲: برای تعیین مقدار جواب‌های معادله سیاله‌ای که حداقل یکی از متغیرهایش از درجه ۱ نبوده یا ضریب غیر از ۱ دارد ابتدا به متغیر مذکور مقادیر مناسب اختصاص داده و تعداد جواب‌های معادله را در هر حالت حساب می‌کنیم، آنگاه درانتها کلیه جواب‌ها را با هم جمع می‌نماییم.
 ابتدا با توجه به نکات، تعداد جواب‌های طبیعی معادله را به دست می‌آوریم:

$$y = 1 \Rightarrow x + z + t = 8 \xrightarrow[n=8]{k=3} \binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

$$y = 2 \Rightarrow x + z + t = 5 \xrightarrow[n=5]{k=3} \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

معادله جواب طبیعی ندارد. $y \geq 3 \Rightarrow$

بنابراین تعداد کل جواب‌های معادله برابر است با: $n(S) = 21 + 6 = 27$
 و تعداد جواب‌های مطلوب (به‌ازای $y = 1$)، برابر است با: $n(A) = 21$

و احتمال موردنظر برابر خواهد بود با: $P(A) = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$

۱۵۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۶۳، ۶۸ و ۷۲ ریاضیات گسسته

نکته ۱: در مربع لاتین چرخشی، درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر ۱ هستند.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

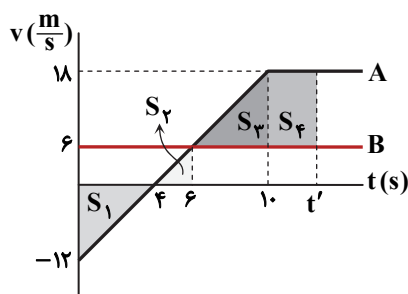
نکته ۲: اگر A و B متعامد باشند، هر جایگشت از A نیز با B متعامد است.
 نکته ۳: مربعی که از اعمال جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A به‌وجود می‌آید با A متعامد نیست.
 با توجه به نکات، هر سه گزاره درست است، پس گزینه ۴ پاسخ است.

فیزیک

۱۵۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۲۰ فیزیک ۳

بیشینه فاصله دو متحرک قبل از رسیدن به هم لحظه‌ای است که سرعت دو متحرک یکسان می‌شود (چرا؟). با استفاده از تشابه مثلث‌ها این

لحظه $t = 6s$ بوده و بیشینه سرعت A برابر $18 \frac{m}{s}$ است.



$$\text{صفر تا } 6s: \begin{cases} \Delta x_B = 6 \times 6 = 36 \text{ m} \\ \Delta x_A = S_1 + S_2 = -24 + 6 = -18 \text{ m} \end{cases}$$

$$d_{\max} = 36 - (-18) = 54 \text{ m}$$

تا لحظه $t = 10s$ متحرک A به‌اندازه $S_3 = \frac{4 \times 12}{2} = 24 \text{ m}$ از این فاصله را جبران می‌کند.

$$54 - 24 = 30 \text{ m}$$

و در لحظه t' به متحرک B می‌رسد:

$$S_4 = 30 = 12 \times (t' - 10) \Rightarrow t' = 12.5 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{5}{2} t_1 \quad s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{5 \times 12}{t_2 - 0} \quad v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{-12 - 12}{t_1 - 0}$$

$$\frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{\frac{5 \times 12}{t_2}}{\frac{-12 - 12}{t_1}} = \frac{5}{2} \times \frac{t_1}{t_2} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = 1$$

این مسئله نیاز به حل ندارد! در این بازه جابه‌جایی دو اتومبیل و در نتیجه سرعت متوسط آن‌ها یکسان است. از طرفی اتومبیل اول حرکت یکنواخت داشته و سرعت متوسط و لحظه‌ای آن یکسان است، پس سرعت متوسط اتومبیل شتاب‌دار نیز در این بازه ۸ متر بر ثانیه است. با این حال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_1 = 8t + 25 \\ x_2 = \frac{1}{2} \times 2t^2 - 12t + 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ t^2 - 12t + 100 = 8t + 25 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 20t + 75 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5 \text{ s} \\ t_2 = 15 \text{ s} \end{cases}$$

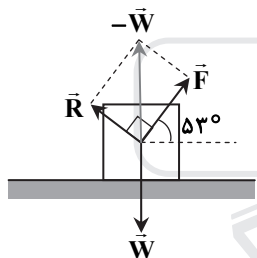
اتومبیل شتاب‌دار: $\begin{cases} v_5 = 2 \times 5 - 12 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_{15} = 2 \times 15 - 12 = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_5 + v_{15}}{2} = \frac{16}{2} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

جهت مثبت را رو به پایین می‌گیریم.

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2} g t^2 \\ h - \frac{5}{9} h = \frac{1}{2} g (t - 2)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{4} = \left(\frac{t}{t-2}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{t}{t-2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{t}{t-2} \Rightarrow 2t = 3t - 6 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} \times 10 \times 6^2 = 180 \text{ m}$$

نیروهای وارد بر جسم مطابق شکل روبه‌رو است و داریم:



$$\cos 37^\circ = \frac{F}{W} \Rightarrow 0.8 = \frac{40}{W} \Rightarrow W = 50 \text{ N}$$

$$W = mg \Rightarrow 50 = 10m \Rightarrow m = 5 \text{ kg}$$

تذکر: نیروی سطح (\vec{R}) دارای مؤلفه افقی \vec{f}_s و مؤلفه قائم \vec{F}_N است.

در آستانه لغزش:

$$F = f_{s, \max} = 10 \text{ N} \Rightarrow \mu_s mg = 10 \Rightarrow \mu_s = 0.25$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \times a \times 16 \Rightarrow a = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F - f_k = F - \mu_k mg = ma \Rightarrow 10 - 4\mu_k = 4 \times 1.5 \Rightarrow 4\mu_k = 4 \Rightarrow \mu_k = 0.1$$

$$\mu_s - \mu_k = 0.25 - 0.1 = 0.15$$

پس از به راه افتادن:

با استفاده از تشابه مثلث‌ها نیروی وارد بر جسم در لحظه $t = 8 \text{ s}$ به دست می‌آید.

$$\frac{10}{1} = \frac{|F_A|}{2} \Rightarrow |F_A| = 20 \text{ N} \Rightarrow F_A = -20 \text{ N}$$

$$6 \text{ s تا } 9 \text{ s: } S_1 = \frac{6+9}{2} \times 10 = 45 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$9 \text{ s تا } 6 \text{ s: } S_2 = \frac{3 \times (-20)}{2} = -30 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$\Delta p = S_1 + S_2 = 45 + (-30) = 15 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \text{ N}$$

$$\frac{GM_e m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow K_{\text{ماهواره}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_e m}{2r}$$

$$K_B = \frac{3}{5}K_A \Rightarrow \frac{GM_e m}{2r_B} = \frac{3}{5} \frac{GM_e m}{2r_A} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{R_e + h}{R_e + 3h} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5R_e + 5h = 3R_e + 9h \Rightarrow 2R_e = 4h \Rightarrow h = \frac{1}{2}R_e$$

$$g = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow g_h = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} = \frac{GM_e}{\frac{9}{4}R_e^2} = \frac{4}{9} \left(\frac{GM_e}{R_e^2} \right) = \frac{4}{9}g_e$$

$$a_{av} = \frac{v_{t_1} - v_0}{t_1 - 0} = 0 \Rightarrow v_{t_1} = v_0 = 0$$

در دو انتهای پاره خط نوسان سرعت صفر است $(t = 0, \frac{T}{2}, T, \dots)$. چون $t_1 < T$ بوده معلوم می‌شود $t_1 = \frac{T}{2}$ است که در این مدت جسم

از $+A$ به $-A$ می‌رود.

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{2A}{\frac{T}{2}} = \frac{4A}{T} \Rightarrow 2 = \frac{4 \times 0.05}{T} \Rightarrow T = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow 40\pi = \sqrt{\frac{k}{0.1}} \Rightarrow k = 400 \times 0.1 = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_A}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.181}{\pi^2}} = 1/8 \text{ s}$$

$$\Delta t = n_A T_A \Rightarrow 72 = n_A \times 1/8 \Rightarrow n_A = 40 \Rightarrow n_B = 40 + 5 = 45$$

$$\Delta t = n_B T_B \Rightarrow 72 = 45 T_B \Rightarrow T_B = \frac{72}{45} = \frac{8}{5} = 1/6 \text{ s}$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_B}{g}} \Rightarrow 1/6 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_B}{\pi^2}} \Rightarrow \ell_B = 0.64 \text{ m}$$

پس طول آونگ B به اندازه $17 \text{ cm} = 64 - 81$ کوتاه‌تر است.

نقطه M حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در $t = 0$ در مکان $y = +A$ است.

$$x_M = A \cos \omega t \Rightarrow -\frac{A}{2} = A \cos \frac{\omega}{15} \Rightarrow \cos \frac{\omega}{15} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\omega}{15} = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \dots$$

در مدت $\frac{T}{2}$ نقطه M از $+A$ به $-A$ می‌رود. در اینجا چون $\frac{1}{15} \text{ s} < \frac{T}{2}$ است، معلوم می‌شود برای اولین بار به $-\frac{A}{2}$ رسیده است:

بنابراین:

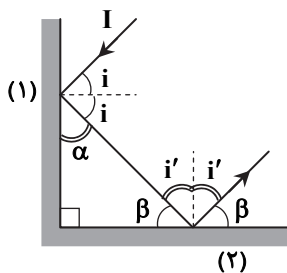
$$\frac{\omega}{15} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = 10\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 10\pi \Rightarrow T = 0.2 \text{ s} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

$$\frac{\lambda}{4} = 0.2 \Rightarrow \lambda = 0.8 \text{ m} \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow 0.8 = \frac{v}{5} \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$I = \frac{P_{av}}{A} = \frac{P_{av}}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{r_1^2}{16r_1^2} = \frac{1}{16}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log \frac{1}{16}$$

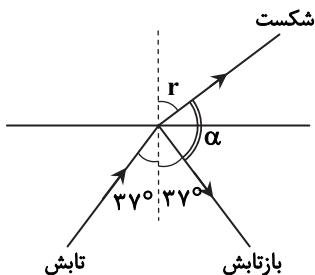
$$\beta_2 - \beta_1 = 10(\log 1 - \log 16) = 10(0 - 4 \log 2) = -12 \text{ db}$$



$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ i + \alpha = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \beta = i$$

یعنی پرتو I موازی پرتو بازتابیده از آینه (۲) است.

پس اگر پرتو I به اندازه ۱۵ درجه ساعتگرد دوران کند پرتو بازتابیده از آینه (۲) نیز ۱۵ درجه ساعتگرد دوران می‌کند.



$$\frac{\sin 37^\circ}{\sin r} = \frac{1}{\frac{5\sqrt{2}}{6}} \Rightarrow \frac{0.6}{\sin r} = \frac{6}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \sin r = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = 45^\circ$$

$$\alpha + 45^\circ + 37^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{F_B}{F_A}} \times \sqrt{\frac{L_B}{L_A}} \times \sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$$

$$\frac{v_B}{150} = \sqrt{\frac{2F_A}{F_A}} \times \sqrt{\frac{4/5L_A}{L_A}} \times 1 = \sqrt{6} = 3 \Rightarrow v_B = 450 \frac{m}{s}$$

$$(تعدادگره) f_A = f_B \Rightarrow \frac{n_A v_A}{2L_A} = \frac{n_B v_B}{2L_B} \Rightarrow \frac{4 \times 150}{L_A} = \frac{n_B \times 450}{4/5L_A} \Rightarrow n_B = 6 \text{ (تعداد شکم)} \Rightarrow n_B + 1 = 7$$

تذکر: برای آنکه تار A در تار B موج ایستاده با رزی ایجاد کند باید بسامد موج تار A با یکی از بسامدهای تشدید تار B یکسان باشد که در این سؤال با توجه به اینکه n_B عددی طبیعی به دست آمد معلوم می‌شود چنین شرطی برقرار است.

$$K_{\max 1} = hf_1 - W_0 \text{ و } K_{\max 2} = hf_2 - W_0 = 2hf_1 - W_0$$

$$K_{\max 2} = 2K_{\max 1} \Rightarrow 2hf_1 - W_0 = 2hf_1 - 2W_0 \Rightarrow hf_1 = 2W_0$$

$$K_{\max 3} = hf_3 - W_0 = \frac{1}{2}hf_1 - W_0 = \frac{1}{2} \times 2W_0 - W_0 \Rightarrow K_{\max 3} = 0$$

گزاره‌های اول و چهارم درست هستند.

انرژی فوتون گسیلی برابر با اختلاف انرژی دو تراز است.

$$E_{\text{فوتون}} = E_R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{کم انرژی ترین فوتون لیمان} = E_R \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} E_R \\ \text{براکت} = \frac{1}{16} E_R \end{cases} \Rightarrow \frac{E_{\text{لیمان}}}{E_{\text{براکت}}} = \frac{\frac{3}{4} E_R}{\frac{1}{16} E_R} = 12$$

$$24X \Rightarrow m^2 \alpha + n^2 \beta + 228Y$$

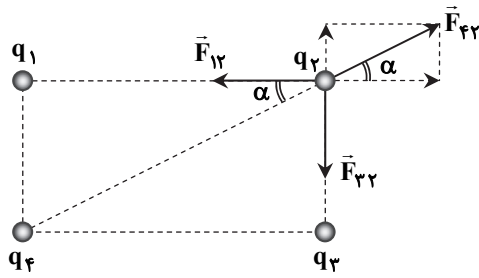
$$240 = 4m + 228 \Rightarrow m = 3$$

$$94 = 2m - n + 90 \Rightarrow 94 = 2 \times 3 - n + 90 \Rightarrow n = 2$$

در راکتورهای هسته‌ای برای کند کردن نوترون از آب معمولی، آب سنگین و گرافیت استفاده می‌شود و از کادمیم و بور برای جذب نوترون در میله‌های کنترل استفاده می‌شود.

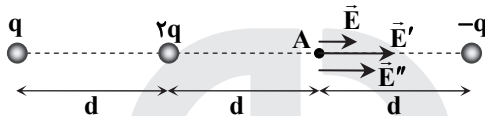
$$F_{۱۲} = \frac{k|q_1q_2|}{r_{۱۲}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 5 \times 10^{-12}}{4} = 9 \text{ N}$$

با توجه به ناهم‌نام بودن q_1 و q_2 ، نیرویی که q_1 بر q_2 وارد می‌کند جاذبه است.



برای آنکه نیروی خالص وارد بر q_2 مؤلفه x نداشته باشد، باید $\vec{F}_{۲۳}$ در جهت نشان داده شده بوده و مؤلفه افقی آن همان 9 N باشد. با توجه به مساوی بودن زاویه α در دو مثلث روی شکل مؤلفه عمودی $\vec{F}_{۲۳}$ نصف مؤلفه افقی آن یعنی 4.5 N است. حالا برای اینکه نیروی خالص 9 N به طرف پایین شود می‌بایست $\vec{F}_{۲۳}$ به طرف پایین و بزرگی آن $(9 + 4.5 = 13.5 \text{ N})$ باشد؛ پس اولاً q_3 ناهم‌نام با q_2 یعنی مثبت است و ثانیاً اندازه q_3 به ترتیب روبه‌رو به‌دست می‌آید:

$$F_{۲۳} = 13.5 \Rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6} \times q_3}{1} = 13.5 \Rightarrow q_3 = 3 \times 10^{-5} \text{ C} = 3 \mu\text{C}$$

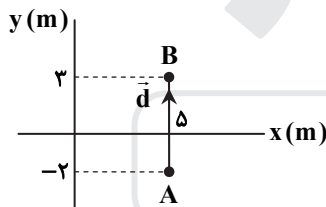


$$E = \frac{kq}{(2d)^2} = \frac{kq}{4d^2}$$

$$E' = \frac{k \times 2q}{d^2} = 8E$$

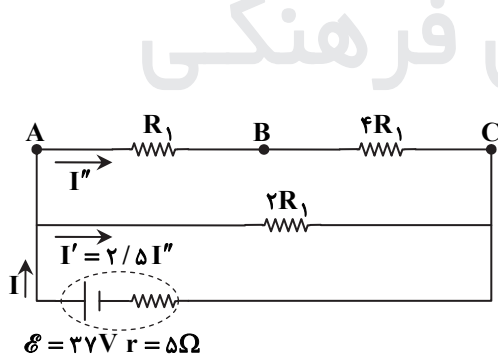
$$E'' = \frac{k \times |-q|}{d^2} = 4E$$

$$E_A = E + E' + E'' = E + 8E + 4E = 13E$$



در اینجا جابه‌جایی به صورت $\vec{d} = +\delta \vec{j}$ بوده که بر \vec{E}_1 عمود و در امتداد \vec{E}_2 است، پس $W_1 = 0$. از طرفی چون بار مثبت است، نیروی \vec{F}_2 هم‌جهت با میدان \vec{E}_2 (یعنی در جهت $-\vec{j}$) خواهد بود؛ در نتیجه \vec{F}_2 و \vec{d} در خلاف جهت یکدیگر هستند و $W_2 < 0$ و $\Delta U > 0$ می‌شود. ($\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos\theta = -1$)

$$|\Delta U| = |-qEd \cos\theta| = 12 \times 10^{-9} \times 3 \times 10^3 \times 5 \times 1 = 180 \mu\text{J} \Rightarrow \Delta U = +180 \mu\text{J}$$



$$R = \frac{\rho \ell}{A} \Rightarrow \begin{cases} R_3 = 2R_1 \\ R_4 = 4R_1 \end{cases}$$

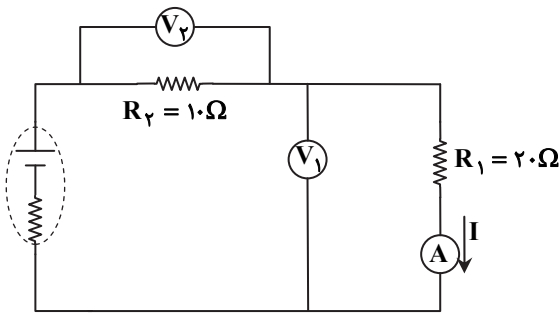
$$(R_1 + 4R_1) \times I'' = 2R_1 \times I' \Rightarrow I' = \frac{5}{2} I''$$

$$\begin{cases} V_{AC} = \Delta R_1 I'' \\ V_{AB} = R_1 I'' \end{cases} \Rightarrow V_{AC} = 5 \times 6 = 30 \text{ V}$$

$$V_{AC} = \mathcal{E} - rI \Rightarrow 30 = 37 - 5I \Rightarrow I = 1/4 \text{ A}$$

$$I = \frac{5}{2} I'' + I'' \Rightarrow 1/4 = \frac{7}{2} I'' \Rightarrow I'' = 1/14 \text{ A} \Rightarrow I' = \frac{5}{2} I'' = 1/4 \text{ A}$$

با افزایش مقاومت متغیر R ، مقاومت معادل مدار افزایش و جریان مدار (عبوری از باتری و لامپ (۱)) کاهش می‌یابد، لذا توان مصرفی و نور لامپ (۱) کاهش می‌یابد ($P_1 = I^2 R_1$). از طرفی ولتاژ دو سر لامپ (۲) افزایش می‌یابد ($\uparrow V_1 + V_2 = \mathcal{E}$ ثابت). پس توان مصرفی و نور لامپ (۲) بیشتر می‌شود.
نکته: در این سؤال اگر باتری غیرآرمانی (واقعی) هم باشد، با کاهش جریان مدار، ولتاژ دو سر باتری افزایش می‌یابد و باز هم ولتاژ لامپ (۲) افزایش خواهد یافت.



مقاومت الکتریکی آمپرسنج آرمانی بسیار کم (صفر) است.
مقاومت الکتریکی ولتسنج آرمانی بسیار زیاد (بی‌نهایت) است و از آن جریانی نمی‌گذرد.

به این ترتیب از مقاومت ۳۰ اهمی جریانی نمی‌گذرد، اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر است و مقداری که ولتسنج V_1 نشان می‌دهد همان اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۲۰ اهمی است.

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{60}{20} = 3A$$

همین جریان از مقاومت ۱۰ اهمی هم می‌گذرد، پس: $V_p = R_p I = 10 \times 3 = 30V$

۱۷۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۹۵ و ۹۷ فیزیک ۲

در نقطه C میدان حاصل از سیم‌ها و حلقه برون سو (⊙) است و امکان صفر شدن میدان مغناطیسی وجود ندارد.

۱۷۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۹۸ و ۱۰۰ فیزیک ۲

$$N = \frac{\text{طول سیم}}{\text{محیط هر دور}} = \frac{L}{2\pi R}, \quad B_{\text{پیچ}} = \frac{\mu_0 NI}{2R}, \quad B_{\text{سیم‌لوله}} = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

$$B_{\text{پیچ}} = B_{\text{سیم‌لوله}} \Rightarrow \frac{\mu_0}{2} \times \frac{L}{0.04\pi} \times \frac{I_2}{0.02} = \mu_0 \times \frac{L}{0.05\pi} \times \frac{I_1}{0.04} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 0.08$$

۱۷۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۲۷ فیزیک ۲

$$P_p = V_p I_p \Rightarrow 6 = V_p \times 0.2 \Rightarrow V_p = 30V$$

$$\frac{V_p}{V_1} = \frac{N_p}{N_1} \Rightarrow \frac{30}{200} = \frac{N_p}{N_1} \Rightarrow \frac{N_1}{N_p} = \frac{20}{3}$$

۱۸۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵ و ۱۳۰ فیزیک ۲ (مسئله ۱۵)

در مدتی که قاب وارد محدوده میدان می‌شود القای الکترومغناطیسی صورت می‌گیرد، در مدتی که قاب کاملاً داخل این ناحیه قرار دارد، شار ثابت است و القا رخ نمی‌دهد و در مدتی که قاب از محدوده میدان خارج می‌شود مجدداً تغییر شار و القای الکترومغناطیسی اتفاق می‌افتد.

$$\Delta t_3 = \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v} = \frac{0.4}{2} = 0.2s = 200ms$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v} = \frac{0.2}{2} = 0.1s = 100ms$$

$$|\mathcal{E}| = Bv l = 0.5 \times 2 \times 0.8 = 0.8V$$

$$|I| = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{0.8}{5} = 0.16A = 160mA$$

پس به‌طور خلاصه:

$$0 < t < 200ms: |\mathcal{E}| = 0.8V \text{ و } |I| = 160mA$$

$$200ms < t < 300ms: |\mathcal{E}| = 0 \text{ و } I = 0$$

$$300ms < t < 500ms: |\mathcal{E}| = 0.8V \text{ و } |I| = 160mA$$

$$500ms < t: |\mathcal{E}| = 0 \text{ و } I = 0$$

۱۸۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۷ فیزیک ۱

تندی و سرعت هر دو کمیت فرعی هستند و یکای SI هر دو $\frac{m}{s}$ است.

نیرو کمیتی فرعی و یکای آن در SI نیوتون (N) است به طوری که برحسب یکاهای اصلی:

$$F = ma \Rightarrow 1N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

فشار کمیتی فرعی و یکای آن در SI پاسکال (Pa) است:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow 1Pa = 1 \frac{N}{m^2} = 1 \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

انرژی کمیتی فرعی و یکای آن در SI ژول (J) است (مانند یکای کار):

$$W = Fd \Rightarrow 1J = 1N \cdot 1m = 1 \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

$$A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 مساحت مقطع تندی شارش مایع مساحت مقطع تندی بالارفتن
 لوله درلوله استخر سطح مایع در استخر

$$\Rightarrow \pi \times (0.1)^2 \times 1/5 = \pi \times 10^{-2} \times v_2 \Rightarrow v_2 = 1/5 \times 10^{-4} \frac{m}{s}$$

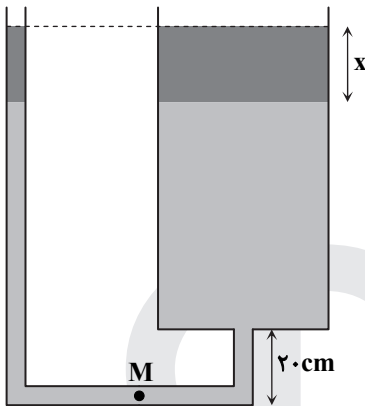
یعنی سطح آب داخل استخر در هر ثانیه، $1/5 \times 10^{-4}$ متر بالا می‌رود که در هر ساعت می‌شود:

$$\Delta h = 1/5 \times 10^{-4} \times 3600 = 0.72 \text{ m}$$

$$\Delta P = \rho g \Delta h = 1000 \times 10 \times 0.72 = 7200 \text{ Pa} = 7.2 \text{ kPa}$$

در هر ساعت فشار در کف استخر 7.2 کیلوپاسکال زیاد می‌شود.

سطح مایع در دو طرف، هم‌تراز با هم بالا می‌رود.



$$(A_1 + A_2)x = \text{حجم مایع اضافه شده}$$

$$(90 + 10)x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

سطح مایع 20 سانتی‌متر بالا می‌رود.

$$\Delta P = \rho g \Delta h = 1500 \times 10 \times 0.2 = 3000 \text{ Pa} = 3 \text{ kPa}$$

$$W_t = W_{mg} + W_{fD} \quad \text{و} \quad W_t = \Delta K \Rightarrow K_2 - K_1 = -mg\Delta h + W_{fD} \Rightarrow \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) + mg\Delta h = W_{fD}$$

$$W_{fD} = \frac{1}{2} \times 100 \times (6^2 - 2^2) + 100 \times 10 \times (-1200) = 100 \times 16 - 100 \times 12000 = 100 \times (-12000 + 16) = -1198400 \text{ J} = -1198.4 \text{ kJ}$$

نکته: در مرحله آخر محاسبات، توجه به رقم ۴ برای انتخاب پاسخ تست کافی است.

در اینجا 5 کیلوگرم آب گرما از دست می‌دهد و از دمای 40°C به 0°C می‌رسد و در مقابل m کیلوگرم یخ از -10°C به 0°C می‌رسد و فقط 1 کیلوگرم از آن ذوب می‌شود.

$$\Sigma Q = 0 \Rightarrow (mc\Delta\theta)_{\text{آب}} + 1 \times L_F + (mc\Delta\theta)_{\text{یخ}} = 0 \Rightarrow 5 \times 4 / 2 \times (0 - 40) + 1 \times 336 + m \times 2 / 1 \times (0 - (-10)) = 0$$

$$\frac{236 = 8 \times 4 / 2 = 16 \times 2 / 1}{-200 + 80 + 5m = 0} \Rightarrow 5m = 120 \Rightarrow m = 24 \text{ kg}$$

$$\begin{cases} P\Delta t_1 = (C_{\text{ظرف}} + m_{\text{آب}} C_{\text{آب}}) \Delta\theta \\ P\Delta t_2 = m'_{\text{آب}} L_V \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{(3360 + 4 \times 4200) \times (100 - 60)}{m' \times 2240000}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{1} = \frac{(3360 + 16800) \times 40}{m' \times 2240000} = \frac{(16800 + \frac{16800}{5}) \times 40}{m' \times 2240000} \Rightarrow m' = \frac{16800 \times 48}{2240000 \times 18} = 0.2 \text{ kg} = 20 \text{ g}$$

$$P_{\text{جز}} + \rho g \Delta h = P_0 \Rightarrow P_{\text{جز}} = 98 \times 10^3 - 1500 \times 10 \times 1/2 = 8 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$PV = nRT \Rightarrow 8 \times 10^4 \times 40 \times 10^{-3} = n \times 8 \times (127 + 273) \Rightarrow 8 \times 4 \times 10^2 = 400 \times 8 \times n \Rightarrow n = 1 \text{ mol}$$

$$m = \rho V = (20 \times 20 \times 20) \times 2/5 = 8 \times 2/5 \times 10^3 = 20 \times 10^3 \text{ g} = 20 \text{ kg}$$

$$Q = mc\Delta T = 20 \times 100 \times 50 = 100000 \text{ J}$$

$$W = -P\Delta V \quad \text{و} \quad \Delta V = V_1(3\alpha)\Delta T$$

$$W = -10^5 \times ((0/2)^3 \times 15 \times 10^{-5} \times 50) = -8 \times 15 \times 50 \times 10^{-3} = -6 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W = 100000 - 6 = 99994 \text{ J}$$

۱۸۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۱۴۲ فیزیک ۱

۱۹۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۳۱، ۱۳۴ و ۱۳۵ فیزیک ۱

$$\Delta U_{ABC} = \Delta U_{AC} \Rightarrow \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = \Delta U_{AC}$$

$$\begin{cases} \Delta U_{AB} = 0 & \text{هم‌دما است} \\ \Delta U_{BC} = 0 & \text{هم‌حجم است} \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 + Q_{BC} = \Delta U_{AC}$$

نادرستی سایر گزینه‌ها را هم می‌توانید به خوبی اثبات نمایید.

شیمی ۶۶

۱۹۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۷ و ۸ شیمی ۱

عبارت‌های «الف» و «ت» درست هستند.

الف) تکنسیم، نیم عمر کوتاهی دارد؛ به همین دلیل نمی‌توان مقادیر زیادی از آن را تولید و انبار کرد.

ب) اورانیم با عدد اتمی ۹۲، در ردیف دوم پایین جدول دوره‌ای قرار دارد و متعلق به دسته f است.

پ) از ایزوتوپ $^{235}_{92}\text{U}$ ، اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود و نه ایزوتوپ $^{238}_{92}\text{U}$!

ت)

$$\begin{cases} 238 - 92 = 146 = \text{شمار نوترون‌ها: } ^{238}_{92}\text{U} \\ 99 - 43 = 56 = \text{شمار نوترون‌ها: } ^{99}_{43}\text{Tc} \end{cases} \Rightarrow 146 - 56 = 90$$

۱۹۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹ شیمی ۱

گزینه ۱:

$$2 / 5 \text{ mol P}_4\text{O}_6 \times \frac{1 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol P}_4\text{O}_6} = 25 \text{ mol atom}$$

گزینه ۲:

$$92 \text{ g C}_7\text{H}_5\text{OH} \times \frac{1 \text{ mol C}_7\text{H}_5\text{OH}}{96 \text{ g C}_7\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{9 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol C}_7\text{H}_5\text{OH}} = 18 \text{ mol atom}$$

گزینه ۳:

$$3 / 01 \times 10^{23} \text{ molecule C}_1\text{H}_{22} \times \frac{1 \text{ mol C}_1\text{H}_{22}}{6 / 02 \times 10^{23} \text{ molecule}} \times \frac{32 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol C}_1\text{H}_{22}} = 16 \text{ mol atom}$$

گزینه ۴:

$$500 \text{ mL C}_4\text{H}_9\text{OH} \times \frac{0 / 8 \text{ g C}_4\text{H}_9\text{OH}}{1 \text{ mL C}_4\text{H}_9\text{OH}} \times \frac{1 \text{ mol C}_4\text{H}_9\text{OH}}{74 \text{ g C}_4\text{H}_9\text{OH}} \times \frac{15 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol C}_4\text{H}_9\text{OH}} \approx 8 \text{ mol atom}$$

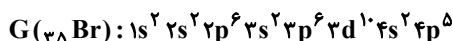
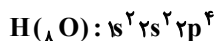
۱۹۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۱۰۰ شیمی ۱ و صفحه‌های ۷ تا ۹ شیمی ۲

همه عبارت‌های داده شده درست هستند.

■ C فلز کلسیم است و سولفات آن (CaSO₄) جزء مواد کم‌محلول در آب است.

■ نافلزهای موجود در جدول، H و G هستند.



H و G در مجموع، ۲۱ الکترون با I = ۱ (زیرلایه‌های p) دارند.

■ F (Si) و A (Mg) رسانایی الکتریکی و گرمایی دارند.

■ عنصر E فلز و در دمای اتاق جامد است، در حالی که عنصر G برم است که در دمای اتاق به حالت مایع می‌باشد.

۱۹۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۴۷ تا ۵۱ شیمی ۱

فقط عبارت سوم درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: با توجه به روند تغییر دما (نه تغییر فشار!)، می‌توان به لایه‌ای بودن هواکره پی برد.

عبارت دوم: با سرد کردن مخلوط سه گاز N₂، O₂ و Ar، ابتدا O₂ با نقطه جوش بالاتر، مایع می‌شود.

عبارت چهارم: میزان هلیوم موجود در لایه‌های زیرین پوسته زمین، بیشتر از هوا است.

$$A_2B_3 \Rightarrow \frac{2x+3B}{2B} = 5 \Rightarrow 2x+3B=10B \Rightarrow 2x=7B \Rightarrow B=\frac{2}{7}x$$

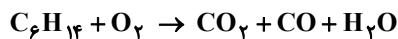
راه حل اول:

$$5g \text{ مخلوط} \times \frac{7 \text{ mol مخلوط}}{\left[(4x+3\left(\frac{2}{7}x\right)) \right] g \text{ مخلوط}} \times \frac{2 \text{ mol } A_2B_3}{7 \text{ mol مخلوط}} = \frac{10}{4x} = \frac{1/75}{x} \text{ mol } A_2B_3$$

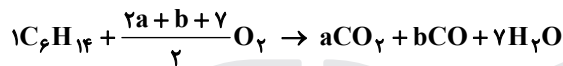
راه حل دوم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{A_2B_3 \times 1} \Rightarrow \frac{5}{4x + \frac{12x}{7}} = \frac{\text{مول}}{2 \times 1} \Rightarrow \text{مول } A_2B_3 = \frac{7}{4x} = \frac{1/75}{x}$$

با توجه به اطلاعات داده شده، معادله سوختن هگزان به صورت زیر است:



این معادله را با ضرایب مختلفی می‌توان موازنه کرد؛ بنابراین باید با توجه به اطلاعات سؤال، ضرایب موردنظر را پیدا کرد. اگر ضریب CO_2 و CO را به ترتیب برابر با a و b در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$C \text{ موازنه } 6 = a + b$$

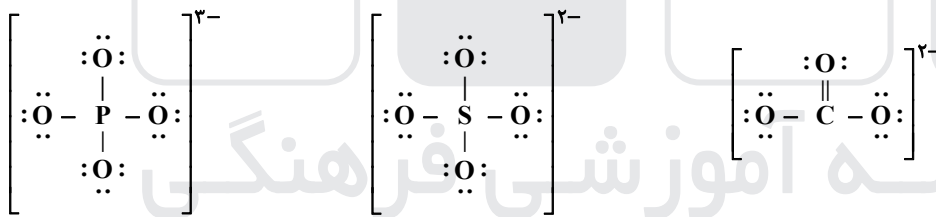
$$\frac{4}{3}g C_6H_{14} \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{14}}{86g C_6H_{14}} \times \frac{2a+b+7}{2} \text{ mol } O_2 \times \frac{24L O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 10/2 L O_2$$

$$\Rightarrow 2a + b = 10$$

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ 2a + b = 10 \end{cases} \rightarrow a = 4, b = 2 \Rightarrow \frac{\text{مول } CO_2}{\text{مول } CO} = \frac{4}{2} = 2$$

همه عبارت‌های داده شده، درست است.

ساختار لوویس این یون‌ها به صورت زیر است:

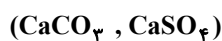


عدد اکسایش اتم مرکزی در این سه یون به صورت زیر است:

$$PO_4^{3-} \Rightarrow P + 4(-2) = -3 \Rightarrow P = +5$$

$$SO_4^{2-} \Rightarrow S + 4(-2) = -2 \Rightarrow S = +6$$

$$CO_3^{2-} \Rightarrow C + 3(-2) = -2 \Rightarrow C = +4$$

با توجه به اینکه بار یون‌های b و c یکسان است، نسبت شمار کاتیون به آنیون در ترکیب حاصل از آن‌ها با یون کلسیم برابر خواهد بود.ابتدا جرم $NaCl$ موجود در محلول را حساب می‌کنیم:

$$1kg NaCl(aq) \times \frac{1m^3 NaCl(aq)}{1200kg NaCl(aq)} \times \frac{1000L}{1m^3} \times \frac{1mol NaCl}{1L NaCl(aq)} \times \frac{58/5g NaCl}{1mol NaCl} = 48/75g NaCl$$

$$1000g NaCl(aq) - 48/75g NaCl(s) = 951/25g H_2O$$

$$951/25g H_2O \times \frac{1mol H_2O}{18g H_2O} = 52/8 mol H_2O$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۸۰، ۸۱ و ۹۸ تا ۱۰۰ شیمی ۱

$$m \text{ g Mg} \times \frac{\frac{1}{24} \text{ mol Mg}}{24 \text{ g Mg}} \times \frac{\frac{1}{24} \text{ mol MgCl}_2}{1 \text{ mol Mg}} = \frac{m}{24} \text{ mol MgCl}_2$$

$$m \text{ g Mg} \times \frac{\frac{1}{24} \text{ mol Mg}}{24 \text{ g Mg}} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Mg}} = \frac{m}{12} \text{ mol HCl}$$

$$\frac{m}{12} - \frac{m}{24} = \text{تعداد مول مصرف شده} - \text{تعداد مول اولیه} = \text{تعداد مول باقی مانده اسید}$$

$$\frac{m}{12} - \frac{m}{24} = \frac{m}{24} \Rightarrow m = 0.8 \text{ g Mg}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۹۶ و ۱۰۱ تا ۱۰۳ شیمی ۱

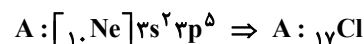
$$\text{نمک } 240 \text{ g} = \frac{24 \text{ g نمک}}{100 \text{ g محلول}} \times \frac{1000 \text{ g محلول}}{1 \text{ kg محلول}} \times \text{نمک } 1 \text{ kg}$$

$$\text{جرم آب } = 1000 - 240 = 760 \text{ g H}_2\text{O}$$

$$\text{نمک } \frac{326}{8} \text{ g} = \frac{43 \text{ g نمک}}{100 \text{ g آب}} \times \text{آب } 760 \text{ g}$$

$$\text{جرم نمک اضافی} = \frac{326}{8} - 240 = 86 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۲ تا ۱۶ شیمی ۲ و صفحه‌های ۶۸ و ۷۷ شیمی ۳



بررسی گزینه‌ها:

(۱) Cl^- (Cl^-) شعاع کوچک تری نسبت به اتم Na دارد.

(۲) X و Z هر دو در دوره چهارم جدول دوره‌ای جای دارند.

(۳) فراوان ترین عنصر در پوسته جامد زمین، اکسیژن (O) است. (آهن، فراوان ترین عنصر در کل کره زمین محسوب می‌شود).

(۴) اتم‌های X و Z به ترتیب دارای ۳ و ۶ الکترون ظرفیتی هستند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵ شیمی ۲



$$150 \text{ kg C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \times \frac{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{180 \text{ g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} \times \frac{2 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}}{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} \times \frac{46 \text{ g C}_2\text{H}_5\text{OH}}{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{R}{100} = 57 / 5 \text{ kg C}_2\text{H}_5\text{OH} \rightarrow R = 75$$

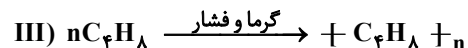
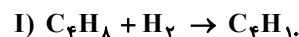
درصد خلوص CaO برابر با $100 - 60 = 40$ است:

$$\frac{57}{5} \text{ kg C}_2\text{H}_5\text{OH} \times \frac{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}}{46 \text{ g C}_2\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{2 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{1 \text{ mol CaO}}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{56 \text{ g CaO}}{1 \text{ mol CaO}} \times \frac{100 \text{ g CaO}}{40 \text{ g CaO}} = \text{ناخالص } 175 \text{ kg CaO}$$

ناخالص 175 kg CaO

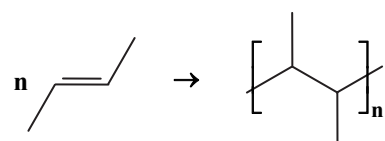
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۳۹، ۴۰ و ۱۰۴ شیمی ۲ و صفحه‌های ۵۲ و ۵۳ شیمی ۳

فقط عبارت چهارم درست است.



■ فراورده واکنش‌های (II) و (IV)، سیر شده هستند و از آن‌ها نمی‌توان به‌عنوان مونومر استفاده کرد.

■ تفاوت جرم مولی C_6H_8 و $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}$ در جرم ۱ مول O است، نه جرم ۱ مول O_2 !



$$\text{C}_6\text{H}_9\text{Cl}: 4C + 9(+1) + (-1) = 0 \Rightarrow 4C = -8$$

$$\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}: 4C + 10(+1) + (-2) = 0 \Rightarrow 4C = -8$$

۲۰۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۴۵، ۷۰ و ۷۱ شیمی ۲

$$500 \text{ km} \times \frac{10 \text{ L بنزین}}{100 \text{ km}} \times \frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ L بنزین}} \times \frac{0.7 \text{ g بنزین}}{1 \text{ cm}^3 \text{ بنزین}} \times \frac{50 \text{ kJ}}{1 \text{ g بنزین}} \times \frac{0.5 \text{ g CO}_2}{1 \text{ kJ}} \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} = 875 \text{ kg CO}_2$$

۲۰۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۵۷، ۵۸ و ۶۳ تا ۶۵ شیمی ۲ و ۸۴ شیمی ۳

ابتدا گرمای حاصل از سوختن ۵/۴ گرم گرافیت را محاسبه می‌کنیم:

$$5 / 4 \text{ g C} \times \frac{1 \text{ mol C}}{12 \text{ g C}} \times \frac{384 \text{ kJ}}{1 \text{ mol C}} = 172 / 8 \text{ kJ} = 17280 \text{ J}$$

جرم قطعه فلزی (m) برابر است با:

$$m = 6 \text{ dm}^3 \times \frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ dm}^3} \times \frac{6 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = 36000 \text{ g}$$

بنابراین با توجه به رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، خواهیم داشت:

$$17280 = 36000 \times c \times 10 \rightarrow c = 0.48 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$$

فلز A، وانادیم است که محلول آن با عدد اکسایش +۴، مانند محلول مس (II) سولفات به رنگ آبی است.

۲۰۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۶۵ تا ۷۱ شیمی ۲

همه موارد داده شده درست هستند.

۲۰۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۸۱، ۸۹ و ۹۰ شیمی ۲

در غیاب کاتالیزگر، در مدت زمان ۶۰ ثانیه، ۰/۴ مول H_2O_2 مصرف شده است و طبق معادله واکنش ($2\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$)، باید ۰/۲ مول O_2 تولید شود.

با استفاده از کاتالیزگر، مقدار نهایی O_2 تغییر نمی‌کند، ولی زمان انجام واکنش کوتاه‌تر می‌شود؛ بنابراین گزینه ۳ درست است.

۲۰۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۸۶ تا ۹۱ شیمی ۲



$$\bar{R}(\text{NO}_2) = 2\bar{R}(\text{واکنش}) = 2 \times 0.575 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \times 0.5 \text{ L} = 0.575 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{NO}_2 \text{ مول اولیه} = 115 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{46 \text{ g}} = 2.5 \text{ mol}$$

$$\text{NO}_2 \text{ مصرف شده پس از } 1/5 \text{ دقیقه} = 1/5 \text{ min} \times \frac{0.575 \text{ mol}}{1 \text{ min}} = \frac{3 \times 0.575}{2} = \frac{1.725}{2}$$

$$\text{NO}_2 \text{ باقی مانده} = \frac{5}{2} - \frac{1.725}{2} = \frac{3.275}{2}$$

$$\text{درصد NO}_2 \text{ باقی مانده} = \frac{\text{مول NO}_2 \text{ باقی مانده}}{\text{مول اولیه NO}_2} \times 100 = \frac{3.275}{5} \times 100 = \frac{3}{5} \times 20 = 65 / 5$$

۲۰۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۱۷ شیمی ۲

از آبکافت ۱ مول پلی‌استر داده شده، ۲۰۰۰ مول $\text{CH}_2(\text{OH})_2$ ($48 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) و ۲۰۰۰ مول $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ ($104 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) تولید می‌شود که درصد جرمی دی‌الکل برابر است با:

$$\frac{48}{48 + 104} \times 100 = 31.6$$

۲۱۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۴ شیمی ۲

فقط عبارت چهارم درست است.

فرمول شیمیایی ترکیب داده شده $\text{C}_{23}\text{H}_{25}\text{ClN}_4\text{O}$ است و فاقد عامل کتون ($-\text{C}(=\text{O})-$) بوده و یک عامل آمینی و یک عامل آمیدی دارد. ضمناً این ترکیب، هیدروکربن نیست!

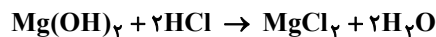
$$\text{شمار الکترون‌های ناپیوندی} = \underbrace{(1 \times 6)}_{\text{Cl}} + \underbrace{(2 \times 2)}_{\text{N}} + \underbrace{(1 \times 4)}_{\text{O}} = 14$$

$$\text{محلول پتاسیم هیدروکسید: } [\text{OH}^-] = [\text{KOH}] = \frac{0.112 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}}{56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

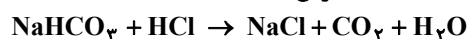
$$\text{محلول هیدروسیانیک اسید: } [\text{H}^+] = M\alpha = \frac{5}{10} \times \frac{4}{1000} = 0.002 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\frac{2 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-12}} = 4 \times 10^8$$

منیزیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات با اسید معده واکنش می‌دهند:



$$330 \times 10^{-3} \text{ g قرص} \times \frac{29 \text{ g Mg(OH)}_2}{100 \text{ g قرص}} \times \frac{1 \text{ mol Mg(OH)}_2}{58 \text{ g Mg(OH)}_2} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Mg(OH)}_2} = 3/3 \times 10^{-3} \text{ mol HCl}$$



$$330 \times 10^{-3} \text{ g قرص} \times \frac{42 \text{ g NaHCO}_3}{100 \text{ g قرص}} \times \frac{1 \text{ mol NaHCO}_3}{84 \text{ g NaHCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol NaHCO}_3} = 1/65 \times 10^{-3} \text{ mol HCl}$$

بنابراین هر قرص با $4/95 \times 10^{-3}$ مول HCl واکنش می‌دهد:

$$\text{HCl مول} = (3/3 + 1/65) \times 10^{-3} = 4/95 \times 10^{-3}$$

$$\text{pH} = 1/7 \Rightarrow [\text{HCl}] = [\text{H}^+] = 10^{-7.7} = 10^{-2} \times 10^{-5.7} = 2 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$4/95 \times 10^{-3} \text{ mol HCl} \times \frac{1 \text{ L HCl (aq)}}{2 \times 10^{-2} \text{ mol HCl}} \times \frac{10^3 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 247/5 \text{ mL HCl (aq)}$$

$$E^\circ (\text{سلول}) = E^\circ (\text{کاتد}) - E^\circ (\text{آند}) = E^\circ (\text{بیشتر}) - E^\circ (\text{کمتر})$$

$$\text{B-A سلول } E^\circ = 1/33 - 0/87 = 0/46 \text{ V}$$

$$\text{D-C سلول } E^\circ = x - (-1/59) = (x + 1/59) \text{ V}$$

$$0/46 + 1/01 = x + 1/59 \Rightarrow x = -0/12 \text{ V}$$

$$\text{C-B سلول } E^\circ = 0/87 - (-0/12) = 0/99 \text{ V}$$



با توجه به اینکه $16/25 = 83/75 - 100$ درصد از تیغه آندی، مصرف شده است، خواهیم داشت:

$$\text{جرم مصرفی تیغه آندی } = 80 \times \frac{16/25}{100} = 13 \text{ g Zn}$$

$$\text{مصرف شده } \text{H}^+ \text{ مول} = 13 \text{ g Zn} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{65 \text{ g Zn}} \times \frac{2 \text{ mol H}^+}{1 \text{ mol Zn}} = 0/4 \text{ mol H}^+$$

$$[\text{H}^+] = \frac{0/4 \text{ mol}}{0/5 \text{ L}} = 0/8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+]_{\text{نهایی}} = 1 - 0/8 = 0/2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log(2 \times 10^{-1}) = 1 - 0/3 = 0/7$$

در کاتد سلول برقکافت آب، نیم‌واکنش $2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$ انجام می‌شود و به دلیل تولید OH^- ، محیط بازی می‌شود. کاغذ pH در محیط‌های بازی به رنگ آبی درمی‌آید.

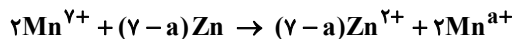
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) در سلول‌های الکترولیتی، کاتد قطب منفی است.

(۲) چگالی آلومینیم مذاب از الکترولیت فرایند حال بیشتر است و فلز آلومینیم به‌دست آمده، از پایین سلول الکترولیتی خارج می‌شود.

(۴) در برقکافت سدیم کلرید مذاب، الکترودها در واکنش شرکت نمی‌کنند.

عدد اکسایش منگنز در KMnO_4 ، +۷ است؛ بنابراین می توان نوشت:



$$\text{Mn}^{y+} \text{ تعداد مول} = 0.4\text{L} \times 0.2\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} = 0.08\text{mol}$$

$$0.08\text{mol Mn}^{y+} \times \frac{(y-a)\text{mol Zn}}{2\text{mol Mn}^{y+}} \times \frac{65\text{g Zn}}{1\text{mol Zn}} = 1\text{g Zn} \Rightarrow 0.4(y-a) = 2 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین در فرایند مورد نظر، Mn^{y+} به Mn^{2+} تبدیل می شود و در محلول نهایی، کاتیون های Mn^{2+} و Zn^{2+} وجود دارد.
بررسی سایر گزینه ها:



(۲) با توجه به اینکه Mn^{2+} در حضور فلز روی به Mn تبدیل نمی شود، می توان گفت که قدرت اکسندگی Mn^{2+} از Zn^{2+} کمتر است.

(۴) منگنز در KMnO_4 دارای بالاترین عدد اکسایش خود (+۷) است و فقط می تواند اکسندگی داشته باشد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه های ۹۴ تا ۹۶ شیمی ۳

۲۱۷- پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} E_a + \Delta H = 64 \\ E_a - \Delta H = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_a = 39\text{kJ} \\ \Delta H = 25\text{kJ} \end{cases}$$



$$\Delta H = [\Delta H(A-A) + \Delta H(B-B)] - [2\Delta H(A-B)] \Rightarrow 25 = 200 + 125 - 2\Delta H(A-B) \Rightarrow \Delta H(A-B) = 150\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

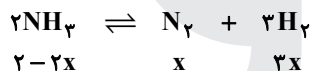
▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه های ۱۰۳ تا ۱۰۶ شیمی ۳

۲۱۸- پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اینکه با افزایش دما، تعادل در جهت رفت جابه جا می شود، واکنش باید گرماگیر ($\Delta H > 0$) باشد. همچنین با توجه به اینکه افزایش فشار، تعادل را در جهت برگشت جابه جا می کند، تعداد مول های گازی سمت واکنش دهنده ها باید کمتر باشد؛ بنابراین گزینه ۲ درست است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه های ۱۰۱ و ۱۰۲ شیمی ۳

۲۱۹- پاسخ: گزینه ۲



$$2 - 2x \quad x \quad 3x$$

$$20\% \text{ بازده درصدی} = \frac{2x}{2} \times 100 = 20 \Rightarrow x = 0.2$$

$$[\text{NH}_3] = \frac{(2 - 0.4)\text{mol}}{0.5\text{L}} = 3.2\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{N}_2] = \frac{0.2\text{mol}}{0.5\text{L}} = 0.4\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

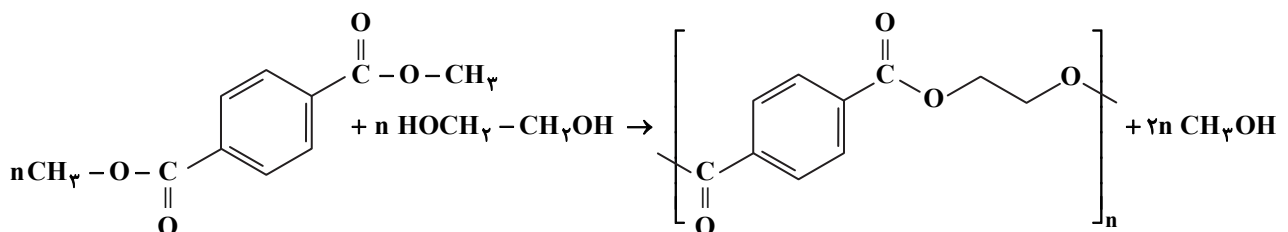
$$[\text{H}_2] = \frac{3 \times 0.2\text{mol}}{0.5\text{L}} = 1.2\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$K = \frac{[\text{N}_2][\text{H}_2]^3}{[\text{NH}_3]^2} = \frac{0.4 \times 1.2^3}{3.2^2} = 6.75 \times 10^{-2}$$

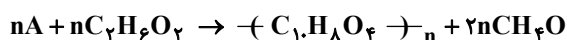
▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه های ۱۱۳ و ۱۱۴ و ۱۱۵ شیمی ۳

۲۲۰- پاسخ: گزینه ۴

با توجه به واکنش داده شده می توان نوشت:



با توجه به قانون پایستگی جرم نیز می توان به فرمول مولکولی و ساختار ماده A دست یافت.



$$\left. \begin{aligned} \text{C موازنه: } n \times A + 2n = 10n + 2n &\Rightarrow A \text{ کربن} = 10 \\ \text{H موازنه: } n \times A + 6n = 10n + 18n &\Rightarrow A \text{ هیدروژن} = 10 \\ \text{O موازنه: } n \times A + 7n = 4n + 2n &\Rightarrow A \text{ اکسیژن} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \text{C}_{10}\text{H}_{10}\text{O}_4$$

$$\text{O موازنه: } n \times A + 7n = 4n + 2n \Rightarrow A \text{ اکسیژن} = 4$$