

آزمون آزمایشی ۲۰ خرداد ۱۴۰۱

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۱ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۵۰	۱۰۱	۱۵۰	۸۰ دقیقه

همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی درس های عمومی و اختصاصی را مشاهده نمایید.



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، سنجش های مستمر، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و... با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

مرحله ۱۶

دفترچه شماره ۲

۱۰۱- جمله عمومی یک دنباله به صورت $b_n = \frac{a^n + a^{2+n}}{3}$ است. اگر مجموع چهار جمله ابتدایی آن ۶۴ برابر مجموع چهار جمله بعدی آن باشد،

مقدار مثبت a کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt[3]{2}}{8}$

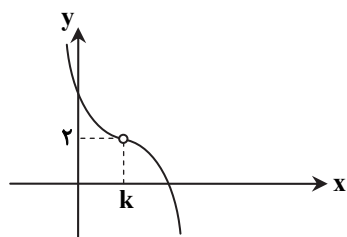
۱۰۲- اگر S و P به ترتیب جمع و ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، نمودار سهمی $y = (x-S) \times (x+P)$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۰۳- فرض کنید $\log_3(2+x^2) = 2 + \log_3(x-2)$ باشد، مجموع جواب‌های ممکن برای مقدار عبارت $A = \log_2(2x-6)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴- نمودار تابع f به صورت شکل روبه‌رو است. مقدار $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{-2x}{4 - f^2(x)}$ کدام است؟



(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) $\frac{2k}{4}$

(۴) $-\frac{k}{8}$

۱۰۵- اگر $x=2$ طول نقطه عطف تابع $y = \sqrt[3]{x}(2x+a)$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) -۸

۱۰۶- تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x^2-2x} = -2$ است. حاصل مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{x}$ به ازای $x=2$ چقدر است؟

(۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $-\frac{7}{4}$ (۳) $-\frac{11}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

۱۰۷- جواب‌های معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ روی دایره مثلثاتی شکلی پدید می‌آورند. مساحت این شکل کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ (۴) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

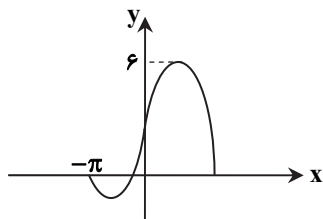
۱۰۸- نمودار تابع $f(x) = a + b \sin(x + \frac{\pi}{6})$ در یک دوره تناوب به صورت روبه‌رو است. حاصل $f(\frac{4\pi}{3})$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) $1 + 2\sqrt{3}$

(۴) $2 + \sqrt{3}$



محل انجام محاسبات

۱۰۹- تابع $f(x) = \begin{cases} cx^2 + x & |x| \geq 1 \\ \frac{ax^2 + b}{x-1} & |x| < 1 \end{cases}$ در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. حاصل ab کدام است؟

(۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

۱۱۰- اگر $A = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 5} + 2(\sqrt{3} - 1)^{-1}$ مقدار $(A - 1)^{-2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۱۱۱- اگر α ریشه معادله $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x}$ باشد، مقدار $\sqrt{5\alpha - 8}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۱۲- از نقطه $A(0, 6)$ بر دو خط $y = 3x$ و $x = -3y$ عمود رسم می‌کنیم. اگر B و C پای خطوط عمود باشند، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

(۱) $2/7$ (۲) $10/8$ (۳) $2/5$ (۴) $5/4$

۱۱۳- با فرض $f(x) = \frac{1 - \cos x}{|x|}$ ، اختلاف حد چپ و راست تابع $g(x) = \frac{1}{x}f(x)$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۴

۱۱۴- در کره‌ای به شعاع R استوانه‌ای با بیشترین حجم محاط کرده‌ایم. نسبت شعاع قاعده استوانه به ارتفاع استوانه کدام است؟

(۱) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۲) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۵- جواب نامعادله $3 < \frac{x-2}{2x+1} < 1$ ، بازه (α, β) است. مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۱۱۶- تابع $f(x) = x^2[x] + [-x]$ با دامنه $(2, 3)$ مفروض است. ضابطه تابع $f^{-1}(2x)$ کدام است؟ $[]$ نماد جزء صحیح است.

(۱) $f^{-1}(2x) = \sqrt{2x+3}$, $5 < x < 15$ (۲) $f^{-1}(2x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$, $2/5 < x < 7/5$

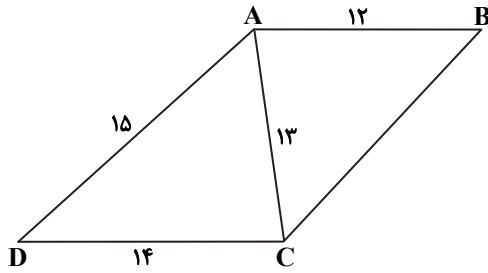
(۳) $f^{-1}(2x) = \sqrt{x + \frac{3}{2}}$, $2/5 < x < 7/5$ (۴) $f^{-1}(2x) = \sqrt{x + \frac{3}{2}}$, $5 < x < 15$

۱۱۷- حاصل عبارت $A = \frac{2 \cot 70^\circ (1 + \sin 50^\circ)}{\cos 10^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\sin 10^\circ}$ (۲) $\frac{1}{\cos 10^\circ}$ (۳) $\frac{1}{\cos 40^\circ}$ (۴) $\frac{1}{\sin 40^\circ}$

محل انجام محاسبات

۱۲۴- مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟



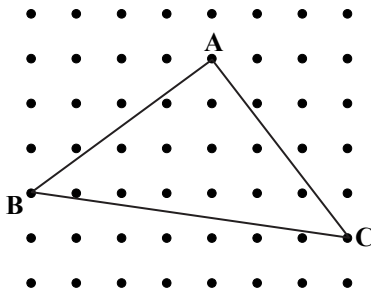
۱۱۲ (۱)

۱۲۶ (۲)

۱۴۴ (۳)

۱۵۶ (۴)

۱۲۵- ABC یک مثلث شبکه‌ای است. شعاع دایره محیطی این مثلث چند واحد است؟



۵ (۱)

$2\sqrt{5}$ (۲)

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$5\sqrt{2}$ (۴)

۱۲۶- صفحه P و خط d و نقطه A خارج آن‌ها مفروض‌اند. اگر خط d بر صفحه P عمود نباشد، چند خط از A می‌گذرد که موازی P و عمود بر d باشد؟

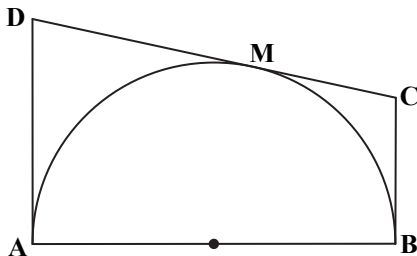
(۴) بی‌شمار

(۳) هیچ

(۲) حداکثر ۱

(۱)

۱۲۷- از نقطه دلخواه M واقع بر نیم‌دایره‌ای به قطر AB، مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا مماس‌های رسم شده از A و B را در نقاط C و D قطع کند. با تغییر مکان M، کدام مقدار همواره ثابت است؟



$AD + BC$ (۱)

$\frac{AD}{BC}$ (۲)

$|AD - BC|$ (۳)

$AD \cdot BC$ (۴)

۱۲۸- یک ماتریس $n \times n$ است که هر درایه آن به صورت $a_{ij} = [3i + 2j]$ تعریف می‌شود. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس

کدام است؟

$6n(n-1)$ (۴)

$2/5n(n+1)$ (۳)

$4n(n-1)$ (۲)

$3/5n(n+1)$ (۱)

۱۲۹- اگر $A^3 = \bar{O}$ باشد، کدام ماتریس زیر وارون پذیر است؟

هر سه ماتریس (۴)

$A^2 + A + I$ (۳)

$A - I$ (۲)

$A + I$ (۱)

محل انجام محاسبات

۱۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} n-1 & n & n+1 \\ n+2 & n+3 & n+4 \\ n-2 & n-3 & n-4 \end{bmatrix}$ باشد، $|A|$ کدام است؟

- (۱) n (۲) $n^2 - n$ (۳) $(n-1)^2$ (۴) صفر

۱۳۱- دایره C به معادله $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$ مفروض است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ که بر دایره C مماس خارج باشند، کدام است؟

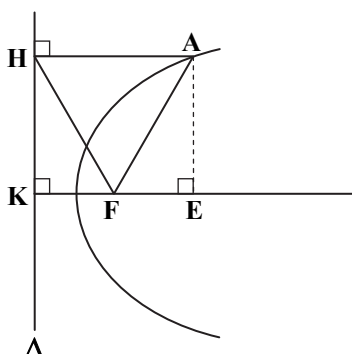
(۱) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 25$ (۲) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 25$

(۳) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ (۴) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$

۱۳۲- بردار \vec{AB} با بردار $\vec{c} = (1, -2, 2)$ موازی و هم‌جهت است و اندازه آن برابر ۶ است. اگر مختصات $A(2, 4, -5)$ باشد، مختصات B کدام است؟

- (۱) $(3, -1, 2)$ (۲) $(4, 0, -1)$ (۳) $(2, -1, 3)$ (۴) $(3, 0, -2)$

۱۳۳- در سهمی به کانون F و خط هادی Δ ، $EF = 1$ و $AF = HF$ است. مساحت مستطیل $AHKE$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) ۴

۱۳۴- a, b و c سه بردار یک‌ه‌یکه واقع در یک صفحه‌اند. به طوری که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، حاصل $|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{a}|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۸

۱۳۵- برای بازه‌های $A = [2, a)$ و $B = [2a - 4, 27]$ ، اگر مجموعه $A \cup B$ دقیقاً ۱۸ عضو طبیعی داشته باشد، عدد a کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) عددی اول (۲) مربع کامل (۳) مضرب ۳ (۴) مکعب کامل

۱۳۶- اگر ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge r)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $(\sim q \wedge p) \Rightarrow \sim r$ (۲) $(p \vee r) \Rightarrow (p \wedge \sim r)$ (۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \wedge q)$ (۴) $\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

۱۳۷- از مجموعه $\{100, 101, 102, \dots, 1401\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۶ بوده ولی مضرب ۱۴ نیست؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{3}{13}$ (۴) $\frac{6}{31}$

۱۳۸- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، داریم: $P(A' \cap B') = 0/3$ و $P(A - B) = 0/4$. حداکثر مقدار $P(A|B)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{5}{6}$

محل انجام محاسبات

۱۳۹- در یک ساختمان سه طبقه، یک خانوادهٔ دونفره و دو خانوادهٔ سه‌نفره زندگی می‌کنند. اگر ۴ نفر از اهالی این ساختمان را برای هیئت‌مدیره انتخاب کنیم، با کدام احتمال حداقل یک نفر از هر خانوادهٔ سه‌نفره در بین آن‌ها وجود دارد؟

(۱) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{6}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$

۱۴۰- ضریب تغییرات داده‌های ۱، ۴، ۴، ۶، ۷، ۸، چند برابر ضریب تغییرات داده‌های ۲۴، ۳۶، ۳۶، ۴۴، ۴۸، ۵۲ است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۴۱- انحراف معیار برآورد میانگین نمونه‌ای با اندازه ۲۴، یازده برابر انحراف معیار برآورد میانگین نمونه‌ای دیگر با اندازه k است. اگر انحراف معیار جامعه برابر ۵ باشد، مجموع ارقام عدد k ، کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۱۵

۱۴۲- اگر در بین اعداد a, b, c, d ، یکی زوج و بقیه فرد و در بین اعداد x, y, z, t ، دوتا زوج و دوتا فرد باشد، در مورد اعداد $A = ab + bc + cd + da$ و $B = xy + yz + zt + tx$ کدام گزینه درست است؟

(۱) A و B هر دو زوج‌اند. (۲) A و B هر دو می‌توانند هم زوج باشند و هم فرد.

(۳) A زوج است ولی B می‌تواند زوج یا فرد باشد. (۴) B زوج است ولی A می‌تواند زوج یا فرد باشد.

۱۴۳- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی که در تقسیم بر ۲۱۵ باقی‌مانده‌اش ۶ برابر خارج‌قسمت بوده و مربع کامل باشد، کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۲۱ (۴) ۱۸

۱۴۴- باقی‌ماندهٔ تقسیم 57^k بر ۱۱ برابر ۶ است. k کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۱۴۵- در گراف سادهٔ G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{ac, ae, bc, bd, df\}$ ، مجموعهٔ $N_G(b) \cup N_G[c]$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴۶- گراف سادهٔ G با درجه رئوس ۱، ۲، ۲، ۲، ۴، ۵، چند دور دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴۷- در گراف G از مرتبهٔ ۱۳، ماکزیمم درجه برابر ۴ است. اگر حداکثر مقدار عدد احاطه‌گری را با m و حداقل آن را با n نمایش دهیم، مقدار $3m - n$ کدام است؟

(۱) ۲۲ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴) ۲۳

۱۴۸- معادلهٔ $x + y + z + t = 12$ با شرط $x \geq a$ تعداد ۳۵ جواب در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارد. عدد طبیعی a کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴۹- اگر مربع لاتین زیر یک مربع چرخشی باشد، آنگاه مقدار عددی $3a + 2b + c$ کدام است؟

۱	۲	۳	۴
	a		
			b
c			

(۱) ۲

(۲) ۹

(۳) ۴

(۴) ۷

۱۵۰- داخل کیسه‌ای ۴ گوی قرمز، ۱۱ گوی آبی، ۸ گوی سبز و m گوی زرد است. برای اینکه مطمئن باشیم در بین گوی‌های خارج‌شده، از هر ۴ رنگ گوی موجود است، باید حداقل ۲۷ گوی از کیسه خارج کنیم. عدد m چگونه عددی است؟

(۱) مربع کامل (۲) مکعب کامل (۳) اول (۴) مضرب ۵

محل انجام محاسبات

طراحی



مؤسسه آموزشی فرهنگ

گزینهدو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

سال تحصیلی ۰۱ - ۰۰

آزمون آزمایشی ۲۰ خرداد ۱۴۰۱

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۴۰	۱۵۱	۱۹۰	۵۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۱۹۱	۲۲۰	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسشها: ۷۰		مدت پاسخ‌گویی: ۸۰ دقیقه		

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۱ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مرحله ۱۶

دفترچه شماره ۳



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه‌رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی درس‌های عمومی و اختصاصی را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، سنجش‌های مستمر، پیش‌آزمون‌های آنلاین، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و... با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه‌دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.

۱۵۱- یک قطار به طول ۱۲۰ متر با تندی $۷۲ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ روی یک ریل مستقیم حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که سر قطار با ورودی تونل ۱۰۰ متر فاصله دارد، راننده قطار ترمز نموده و با شتاب ثابت $۱ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ، تندی آن را تا $۳۶ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ کم می‌کند و سپس با تندی ثابت به حرکت ادامه می‌دهد. اگر

طول تونل ۱۸۰ متر باشد، چند ثانیه بعد از شروع ترمز، قطار کاملاً از تونل خارج می‌شود؟

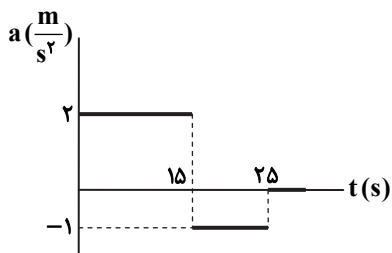
- ۳۰ (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴)

۱۵۲- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار شتاب- زمان آن به شکل روبه‌رو

است. اگر سرعت متوسط متحرک در مدت $t = ۰$ تا $t = ۱۰ \text{s}$ برابر $\bar{v}_{av} = (۴ \frac{\text{m}}{\text{s}}) \bar{i}$

باشد، مسافتی که متحرک در مدت $t = ۰$ تا $t = ۳۰ \text{s}$ طی می‌کند چند متر است؟

- ۵۴۹ (۱)
۵۰۳ (۲)
۴۱۳ (۳)
۳۹۵ (۴)



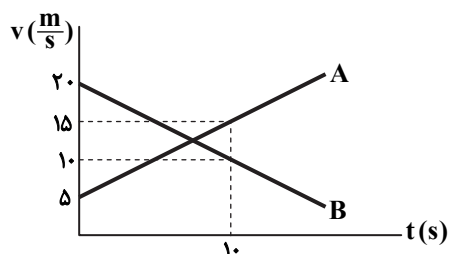
۱۵۳- نمودار سرعت- زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند به شکل

روبه‌رو است. در لحظه $t = ۰$ مکان دو متحرک به ترتیب x_{0A} و x_{0B} بوده

به طوری که بر حسب متر $x_{0B} = x_{0A} - ۳۶$ است. اگر متحرک‌ها در دو مکان x_1

و x_2 از کنار هم عبور کنند، x_1 و x_2 با یکدیگر چند متر فاصله دارند؟

- ۵۶/۲۵ (۱)
۶۲/۵ (۲)
۱۱۲/۵ (۳)
۱۲۵ (۴)

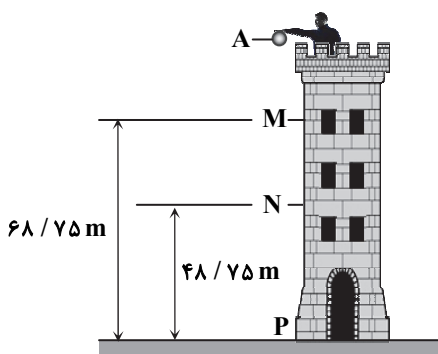


۱۵۴- از بالای یک برج (نقطه A) سنگی رها می‌شود و تا زمین (نقطه P) سقوط می‌کند.

اگر سنگ از M تا N را در مدت ۱ ثانیه طی کند، تندی سنگ هنگام رسیدن به

زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و مقاومت هوا ناچیز است).

- ۳۵ (۱)
۴۰ (۲)
۴۵ (۳)
۵۰ (۴)

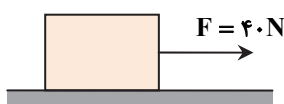


۱۵۵- داخل یک جعبه چوبی به جرم ۲ kg ، چهار وزنه ۲ کیلوگرمی قرار دارد و جعبه به صورت شکل زیر با تندی ثابت $۲ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ روی سطح افقی، در

مسیر مستقیم به طرف جلو کشیده می‌شود. اگر در یک لحظه، یکی از وزنه‌ها را از داخل جعبه در حال حرکت خارج کنیم، پس از ۵ ثانیه

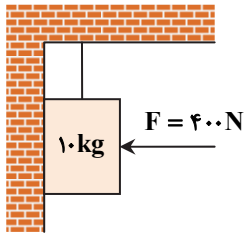
تندی حرکت جعبه به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟

- ۸ (۱)
۷ (۲)
۶ (۳)
۵ (۴)



محل انجام محاسبات

۱۵۶- در شکل روبه‌رو، ضریب اصطکاک ایستایی بین وزنه و دیوار برابر $0/5$ ، ضریب اصطکاک جنبشی برابر $0/3$ و جرم طناب ناچیز است. اگر طناب را قطع کنیم، بزرگی نیرویی که دیوار بر وزنه وارد می‌کند چند نیوتون می‌شود؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$



- (۱) $100\sqrt{17}$ (۲) $40\sqrt{109}$ (۳) $200\sqrt{5}$ (۴) $80\sqrt{26}$

۱۵۷- اگر معادله سرعت- زمان جسمی به جرم 4 کیلوگرم در SI به صورت $\vec{v} = (10t - 25)\vec{i} + (t^2 - 20t)\vec{j}$ باشد، بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در مدت $t = 10s$ تا $t = 20s$ چند نیوتون است؟

- (۱) 80 (۲) 40 (۳) $40\sqrt{2}$ (۴) $20\sqrt{2}$

۱۵۸- دو ماهواره A و B به دور زمین می‌گردند و فاصله آن‌ها از سطح زمین به ترتیب R_e و $\frac{1}{5}R_e$ است (R_e شعاع کره زمین). بزرگی شتاب مرکزگرای A چند برابر بزرگی شتاب مرکزگرای B است؟ (فرض کنید مسیر گردش ماهواره به دور زمین دایره‌ای شکل است و از گرانش کرات دیگر صرف نظر نمایید.)

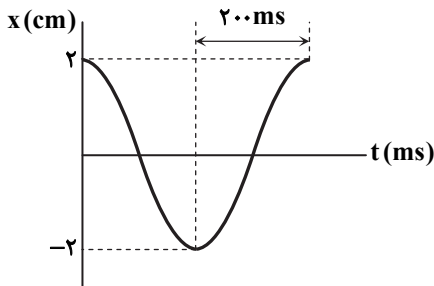
- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{16}{25}$ (۴) $\frac{25}{16}$

۱۵۹- یک آسانسور از سطح زمین از حال سکون و با شتاب ثابت $1 \frac{m}{s^2}$ به مدت 5 ثانیه بالا می‌رود. اگر وزنه‌ای به جرم 50 کیلوگرم در کف آسانسور باشد، کار

نیرویی که کف آسانسور روی وزنه انجام می‌دهد در 2 ثانیه آخر این مدت چند ژول است؟ (از کلیه اصطکاک‌ها صرف نظر کنید و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) 4800 (۲) 4400 (۳) 4000 (۴) 3600

۱۶۰- نمودار مکان- زمان یک وزنه که به انتهای فنری بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد به شکل روبه‌رو است. در لحظه مقدار در حال کاهش است.

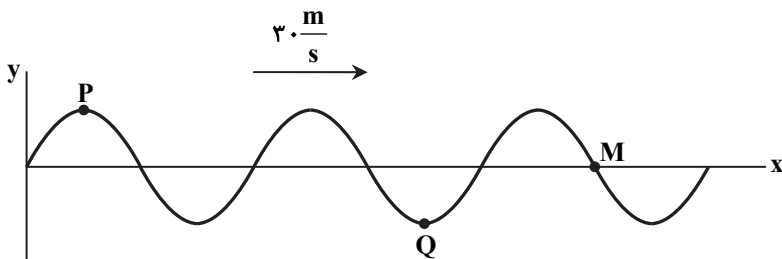


- (۱) $t = 120ms$ ، تندی وزنه
(۲) $t = 120ms$ ، انرژی پتانسیل کشسانی
(۳) $t = 360ms$ ، بزرگی شتاب وزنه
(۴) $t = 360ms$ ، انرژی پتانسیل کشسانی

۱۶۱- در یک حرکت هماهنگ ساده وزنه- فنر اگر جرم وزنه m گرم و ثابت فنر k باشد، در مدت 30 ثانیه 25 نوسان انجام می‌شود و اگر جرم وزنه $m + 420g$ و ثابت فنر $9k$ باشد، در مدت 30 ثانیه 30 نوسان انجام می‌شود. m چند گرم است؟

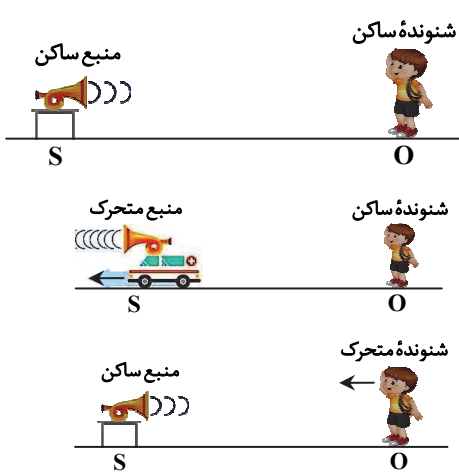
- (۱) 180 (۲) 140 (۳) 80 (۴) 70

۱۶۲- یک موج عرضی با دامنه A در تار منتشر می‌شود و در یک لحظه وضعیت بخشی از تار به شکل روبه‌رو است. اگر فاصله P و Q از یکدیگر 180 سانتی‌متر باشد، چند ثانیه بعد از این لحظه، نقطه M برای دومین مرتبه به وضعیت $y = -A$ می‌رسد؟



- (۱) $\frac{7}{100}$
(۲) $\frac{7}{200}$
(۳) $\frac{5}{100}$
(۴) $\frac{5}{200}$

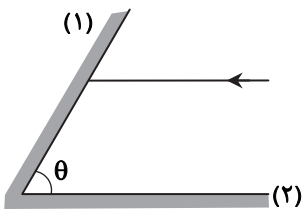
محل انجام محاسبات



۱۶۳- یک منبع صوت با بسامد ثابت صوت تولید می‌کند. در حالی که منبع و شنونده هر دو ساکن باشند، شنونده صوت را با بسامد f_1 و طول موج λ_1 دریافت می‌کند. در هریک از شکل‌های زیر، طول موج و بسامد صوتی که به شنونده می‌رسد λ و f است. کدام مقایسه درست است؟

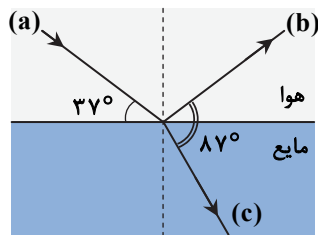
- ۱) $\lambda > \lambda_1, f < f_1$ (شنونده ساکن، منبع متحرک به سمت چپ)
- ۲) $\lambda > \lambda_1, f = f_1$ (شنونده ساکن، منبع متحرک به سمت راست)
- ۳) $\lambda = \lambda_1, f < f_1$ (شنونده متحرک به سمت راست، منبع ساکن)
- ۴) $\lambda = \lambda_1, f = f_1$ (شنونده متحرک به سمت چپ، منبع ساکن)

۱۶۴- در شکل روبه‌رو، پرتوی رسم‌شده موازی سطح آینه (۲) است. اگر پس از نخستین بازتابش از آینه (۱) پرتوی نور موازی سطح آینه (۱) شود، زاویه θ چند درجه است؟



- ۱) ۶۰
۲) ۴۵
۳) ۳۰
۴) ۱۵

۱۶۵- وقتی پرتو تابش (a) به مرز دو محیط می‌رسد، پرتوهای بازتابش و شکست به صورت روبه‌رو شکل می‌گیرند. چند مورد از بیان‌های زیر درست است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$ و $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)



- الف) طول موج برای (a) و (b) برابر است.
ب) بسامد (b) و (c) برابر است.
پ) تندی انتشار پرتوی (c) برابر $\frac{15}{8} \times 10^8 \frac{m}{s}$ است.
- ۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۶۶- در یک تار دوسربسته وقتی ۵ گره تشکیل شود، بسامد نوسان تار ۲۰۰ هرتز و فاصله نزدیک‌ترین شکم از یک گره ۱۲ سانتی‌متر می‌شود.

اگر نیروی کشش تار را ۴ برابر کنیم، بسامد هماهنگ سوم تار و فاصله دو گره متوالی در هماهنگ سوم به ترتیب کدام است؟

- ۱) ۲۴۰ هرتز - ۴۰ سانتی‌متر (۲) ۲۴۰ هرتز - ۳۲ سانتی‌متر (۳) ۳۰۰ هرتز - ۴۰ سانتی‌متر (۴) ۳۰۰ هرتز - ۳۲ سانتی‌متر

۱۶۷- یک منبع نور نقطه‌ای با توان 110π وات پرتوهایی با طول موج 540 نانومتر تولید می‌کند. در فاصله 6 متری از این منبع یک گیرنده به

مساحت 100 cm^2 طوری قرار گرفته که پرتوهای نور بر سطح آن عمود هستند. با چشم‌پوشی از جذب و بازتاب نور در این محل در هر دقیقه

چند فوتون به این گیرنده می‌رسد؟ ($h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ و $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

- ۱) $1/5 \times 10^{22}$ (۲) $1/5 \times 10^{19}$ (۳) $1/25 \times 10^{21}$ (۴) $1/25 \times 10^{18}$

۱۶۸- طول موج آستانه برای دو فلز A و B به ترتیب 250 و 300 نانومتر است. اگر در آزمایش فوتوالکتریک با این دو فلز از پرتویی با بسامد

$1/5 \times 10^{15}$ هرتز استفاده شود، کدام‌یک از موارد زیر درست خواهد بود؟ ($h = 4/1 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$ و $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

- ۱) از فلز A الکترون خارج نمی‌شود و از فلز B الکترون خارج می‌شود.
۲) از فلز A الکترون خارج می‌شود و از فلز B الکترون خارج نمی‌شود.
۳) از هر دو فلز الکترون خارج می‌شود و $K_{\max A} - K_{\max B} = 0.82 \text{ eV}$
۴) از هر دو فلز الکترون خارج می‌شود و $K_{\max B} - K_{\max A} = 0.82 \text{ eV}$

محل انجام محاسبات

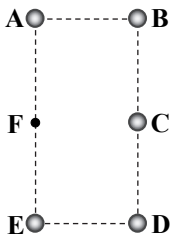
۱۶۹- برای آنکه اتم هیدروژن فوتونی با طول موج 1104 نانومتر گسیل نماید باید الکترون آن گذاری از مدار n_1 به مدار n_2 انجام دهد. n_1 و n_2 کدام هستند؟ ($E_R = 13/5 \text{ eV}$ و $hc = 1242 \text{ eV} \cdot \text{nm}$)

- (۱) $n_1 = 1$ و $n_2 = 6$ (۲) $n_1 = 5$ و $n_2 = 3$ (۳) $n_1 = 5$ و $n_2 = 2$ (۴) $n_1 = 6$ و $n_2 = 3$

۱۷۰- یک ماده پرتوزا مخلوطی از دو ایزوتوپ A و B بوده به طوری که تعداد اتم‌های ایزوتوپ A در ابتدا ۱۶ برابر تعداد اتم‌های ایزوتوپ B است. اگر نیمه عمر ایزوتوپ A برابر ۱۲۰ روز و نیمه عمر ایزوتوپ B برابر ۲۰۰ روز باشد، پس از چند روز تعداد اتم‌های ایزوتوپ A و B مساوی می‌شود؟

- (۱) ۶۰۰ (۲) ۱۲۰۰ (۳) ۲۴۰۰ (۴) ۳۶۰۰

۱۷۱- در شکل زیر چهارضلعی ABED مستطیل و $AB = BC = CD = 1 \text{ m}$ است. در رأس‌های B و D، بارهای $3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ و در رأس‌های A و E، بارهای 10^{-8} C قرار دارند. بار واقع در نقطه C چند نانوکولن باشد تا میدان الکتریکی در نقطه F صفر باشد؟



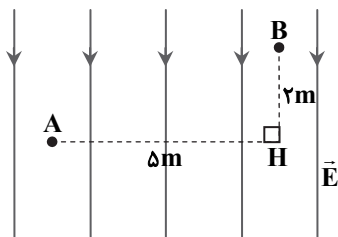
(۱) $7/5\sqrt{2}$

(۲) $15\sqrt{2}$

(۳) $30\sqrt{2}$

(۴) $60\sqrt{2}$

۱۷۲- درون میدان الکتریکی یکنواخت $E = 4 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ مطابق شکل یک ذره با بار q و جرم 0.4 گرم با تندی 10 متر بر ثانیه از نقطه A عبور می‌کند و با تندی 15 متر بر ثانیه به نقطه B می‌رسد. اگر کار نیروهای خارجی روی ذره در مجموع -15 mJ باشد، q چند نانوکولن است؟

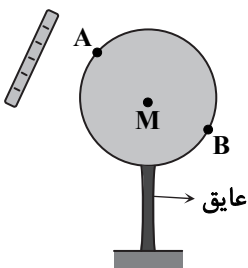


(۱) -50

(۲) -20

(۳) 20

(۴) 50



۱۷۳- مطابق شکل، یک میله باردار منفی نزدیک یک کره فلزی توپر خنثی قرار گرفته است. نقاط A و B روی سطح کره در دو طرف آن و نقطه M در داخل کره است. کدام یک از بیان‌های زیر نادرست است؟

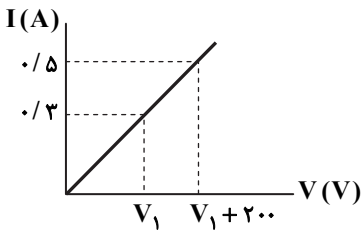
- (۱) پتانسیل الکتریکی A بیشتر از M و پتانسیل الکتریکی B کمتر از M است.
 (۲) در اطراف نقطه A بار مثبت و در اطراف B بار منفی وجود دارد و اطراف M بدون بار است.
 (۳) پتانسیل الکتریکی در نقاط A، B و M برابر است.
 (۴) میدان الکتریکی در نقطه M صفر است.

۱۷۴- یک خازن تخت از دو صفحه فلزی مربعی شکل به ضلع 20 سانتی‌متر که در فاصله 5 میلی‌متر از یکدیگر قرار دارند تشکیل شده است. در حالتی که بزرگی میدان الکتریکی بین دو صفحه $10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ باشد، کدام گزینه درباره این خازن درست است؟ (فضای بین دو صفحه خالی است و

$$\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

- (۱) اندازه بار الکتریکی روی هر صفحه 18 نانوکولن است.
 (۲) اندازه بار الکتریکی روی هر صفحه $7/2$ نانوکولن است.
 (۳) انرژی ذخیره شده در خازن 90 نانोजول است.
 (۴) انرژی ذخیره شده در خازن 45 نانोजول است.

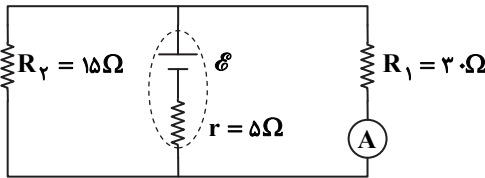
محل انجام محاسبات



۱۷۵- نمودار شکل روبه‌رو، مربوط به یک رسانای استوانه‌ای شکل توپر است. (V اختلاف پتانسیل دو سر رسانا و I جریان الکتریکی گذرنده از آن است). اگر یک استوانه توپر از همان جنس و در همان دما داشته باشیم به طوری که که طول آن ۴ برابر این رسانا و جرم آن ۰/۱ جرم این رسانا باشد، مقاومت الکتریکی آن چند اهم می‌شود؟

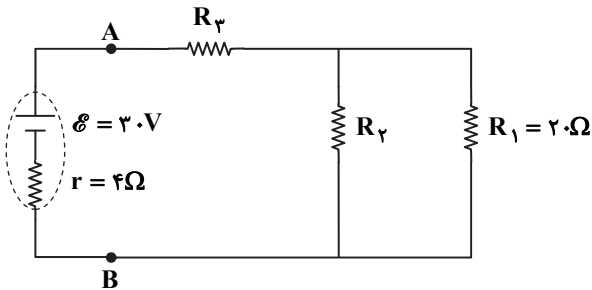
- (۱) $6/4 \times 10^3$
- (۲) $6/4 \times 10^3$
- (۳) $1/6 \times 10^3$
- (۴) $1/6 \times 10^3$

۱۷۶- در مدار روبه‌رو اگر مقاومت R_2 ، دو برابر شود، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد چند برابر می‌شود؟



- (۱) ۱
- (۲) $9/5$
- (۳) $8/5$
- (۴) $9/8$

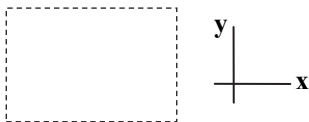
۱۷۷- در مدار روبه‌رو در مدتی که ۱۲۰۰ ژول گرما در مقاومت R_1 تولید می‌شود، در مقاومت R_2 نیز ۸۰۰ ژول گرما و در R_3 نیز ۱۵۰۰ ژول گرما تولید می‌شود. اختلاف پتانسیل میان A و B چند ولت است؟



- (۱) $26/8$
- (۲) $25/2$
- (۳) $24/6$
- (۴) $22/4$

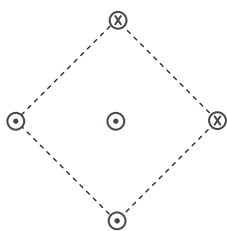
۱۷۸- یک ذره به جرم ۰/۲ گرم و بار 400 nC با تندی $5 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ عمود بر صفحه کاغذ (شکل زیر) به طرف داخل صفحه پرتاب می‌شود. اگر

میدان مغناطیسی $\vec{B} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \times 10^3$ بر حسب گاوس در این محل برقرار باشد شتاب ذره در SI کدام می‌شود؟ (از اثر نیروهای وزن و مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.)



- (۱) $\vec{a} = -400\vec{i} - 300\vec{j}$
- (۲) $\vec{a} = 400\vec{i} - 300\vec{j}$
- (۳) $\vec{a} = -800\vec{i} - 600\vec{j}$
- (۴) $\vec{a} = 800\vec{i} - 600\vec{j}$

۱۷۹- مطابق شکل، پنج سیم مستقیم و طویل حامل جریان‌های الکتریکی هم‌اندازه، عمود بر صفحه کاغذ از چهار رأس و مرکز یک مربع عبور می‌کنند. جهت نیروی خالص وارد بر سیم وسطی کدام است؟



- (۱) ↙
- (۲) ↖
- (۳) ↗
- (۴) ↘

۱۸۰- از یک سیم به طول ۱۰ متر و قطر ۴ میلی‌متر، سیم‌لوله‌ای بدون هسته به شعاع ۲ سانتی‌متر ساخته‌ایم. وقتی جریان ۲ آمپر از سیم‌لوله عبور کند،

بزرگی میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله برابر 5×10^{-4} تسلا می‌شود. طول سیم‌لوله چند سانتی‌متر است؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}})$

- (۱) ۴۵
- (۲) ۴۰
- (۳) ۲۵
- (۴) ۲۰

محل انجام محاسبات

۱۸۱- در یک مولد جریان متناوب، قابی به مساحت A در میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی B با آهنک ثابتی می‌گردد و نیروی محرکه القایی در قاب در SI به صورت $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(2\pi t)$ است. در کدام یک از زمان‌های زیر مقدار شار مغناطیسی گذرنده از قاب، درست بیان شده است؟

$\Phi = \frac{1}{2} BA$ و $t = \frac{3}{40} s$ (۲) $\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} BA$ و $t = \frac{3}{40} s$ (۱)

$\Phi = \frac{1}{2} BA$ و $t = \frac{1}{12} s$ (۴) $\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} BA$ و $t = \frac{1}{12} s$ (۳)

۱۸۲- در یک مخزن، ۶ متر مکعب مایع به چگالی $\frac{1}{8} \frac{g}{cm^3}$ داریم. از لوله‌ای به سطح مقطع $1500 cm^2$ ، آب به چگالی $\frac{1}{3} \frac{g}{cm^3}$ با تندی

$8 \frac{cm}{s}$ به این مخزن می‌ریزد. برای آنکه چگالی مایع داخل مخزن $\frac{1}{2} \frac{g}{cm^3}$ شود، چند ثانیه باید از این لوله آب داخل مخزن بریزد؟ (از

کاهش حجم در اثر مخلوط شدن دو مایع چشم‌پوشی کنید).

- ۱۸۰ (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴)

۱۸۳- ارتفاع مایع در لوله موئین به چه تعداد از موارد زیر بستگی ندارد؟

«قطر داخلی لوله- جنس مایع- ارتفاع لوله- جنس لوله- دمای مایع»

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر (۴)

۱۸۴- در شکل روبه‌رو، ابتدا ۳ لیتر مایع به چگالی ρ_1 داخل ظرف می‌ریزیم و فشار پیمانه‌ای در کف مخزن P_1

می‌شود. اگر ۳ لیتر از مایعی به چگالی $\frac{2}{3} \rho_1$ روی مایع اول اضافه کنیم، فشار پیمانه‌ای در کف ظرف کدام

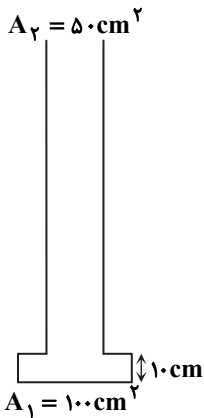
خواهد شد؟ (فرض کنید ظرف برای همه این مایع جا دارد).

$\frac{9}{5} P_1$ (۱)

$2 P_1$ (۲)

$\frac{7}{4} P_1$ (۳)

$\frac{5}{3} P_1$ (۴)

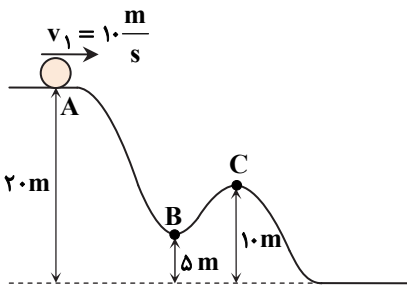


۱۸۵- مطابق شکل وزنه را از نقطه A با تندی $10 \frac{m}{s}$ به طرف جلو می‌فرستیم و وزنه در

مسیر نشان داده‌شده بدون اصطکاک حرکت می‌کند. اگر انرژی جنبشی وزنه هنگام

عبور از B برابر ۶۰۰ ژول باشد، انرژی جنبشی آن هنگام عبور از C چند ژول است؟

$(g = 10 \frac{m}{s^2})$



۵۰۰ (۱)

۴۵۰ (۲)

۴۰۰ (۳)

۳۵۰ (۴)

۱۸۶- ضریب انبساط طولی نوعی شیشه $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ است. یک ظرف شیشه‌ای از این جنس در دمای $10^\circ C$ حجمی برابر $1200 cm^3$ دارد و در

آن مایعی به ضریب انبساط حجمی $\frac{1}{K} \times 10^{-3}$ ریخته شده به طوری که $300 cm^3$ از حجم ظرف خالی است. اگر دمای ظرف و مایع را

به تدریج تا $85^\circ C$ بالا ببریم با چشم‌پوشی از تبخیر مایع، چند سانتی‌متر مکعب مایع از ظرف بیرون می‌ریزد؟

- ۱۰۲/۶ (۱) ۹۹/۶ (۲) ۸۴/۶ (۳) ۷۳/۶ (۴)

محل انجام محاسبات

۱۸۷- درون ظرفی ۴ کیلوگرم آب 50°C را همراه با مقداری یخ 10°C - و یک قطعه فلز با دمای 80°C وارد می‌کنیم و پس از برقراری تعادل، جرم آب داخل ظرف ۶/۵ کیلوگرم می‌شود. اگر ظرفیت گرمایی قطعه فلز $\frac{2}{1} \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$ باشد، جرم یخ باقی‌مانده در ظرف چند کیلوگرم است؟

تبادل گرما با ظرف و محیط ناچیز است. $(L_f = 3/36 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ ، $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ و $c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$)

(۱) ۳/۵ (۲) ۴/۵ (۳) ۵/۵ (۴) ۶/۵

۱۸۸- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

(الف) اگر دو قوری هم‌جنس و هم‌اندازه که سطح بیرونی یکی سیاه و دیگری سفید است را پر از آب داغ نماییم و در اتاقی با دمای معمولی قرار دهیم قوری سیاه زودتر خنک می‌شود.

(ب) اگر در اتاقی با دمای حدود 20°C یک میز چوبی و یک صندلی آهنی که در دمای اتاق هستند را لمس کنیم صندلی آهنی خنک‌تر احساس می‌شود.

(پ) تفسنج نوری یک دماسنج معیار برای اندازه‌گیری دماهای بالا است.

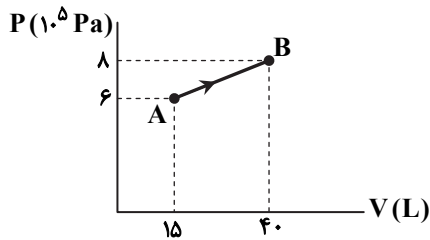
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۸۹- در یک مخزن به حجم ۲۰ لیتر، مقداری گاز کامل در دمای 87°C و فشار ۳ atm داریم. اگر ۱ مول گاز از مخزن خارج شود و دمای گاز

داخل مخزن 60°C کاهش یابد، فشار گاز داخل مخزن چند اتمسفر می‌شود؟ $(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ و $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)

- (۱) ۱/۱ (۲) ۱/۳ (۳) ۱/۵ (۴) ۱/۷

۱۹۰- اگر در فرایند AB شکل روبه‌رو به گاز آرمانی $32/5$ کیلوژول گرما داده شده باشد، در این فرایند انرژی درونی گاز کیلوژول شده است.



- (۱) ۱۵، زیاد
(۲) ۵۰، زیاد
(۳) ۱۵، کم
(۴) ۵۰، کم

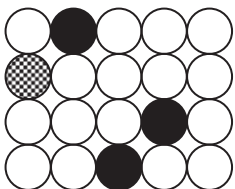
۳.

شیمه

زمان پیشنهادی

جامع مطابق محدوده آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

۱۹۱- عنصر E دارای سه ایزوتوپ با نمادهای ${}^A E$ ، ${}^{A+1} E$ و ${}^{A+2} E$ است. اگر نمونه‌ای $4/85$ گرمی از این عنصر، شامل $1/204 \times 10^{23}$ اتم با فراوانی‌های نسبی نشان داده شده در شکل زیر باشد، عدد اتمی این عنصر کدام است؟ (عدد جرمی سبک‌ترین ایزوتوپ، دو برابر عدد اتمی آن است.)



سنگین‌ترین ایزوتوپ (grey circle)
سبک‌ترین ایزوتوپ (white circle)

- (۱) ۲۴
(۲) ۱۲
(۳) ۱۳
(۴) ۲۶

محل انجام محاسبات

۱۹۲- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) شیمی دان‌ها به فرایندی که در آن یک ماده شیمیایی با جذب انرژی، از خود پرتوهای الکترومغناطیس نشر می‌کند، طیف نشری می‌گویند.
 (ب) مطابق مدل کوانتومی، احتمال حضور الکترون‌های لایه اول اتم، در هر نقطه‌ای اطراف هسته، وجود دارد.
 (پ) در اتم‌های برانگیخته، الکترون‌ها با نشر نور می‌توانند از لایه‌های دورتر به لایه‌های نزدیک‌تر به هسته، بازگردند.
 (ت) رنگ شعله فلز لیتیم با رنگ شعله ترکیب‌های لیتیم کلرید، لیتیم سولفات و لیتیم نیترات، مشابه است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۹۳- با توجه به شکل روبه‌رو که برشی از اتم عنصر X را نشان می‌دهد، چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟

- عنصر X ششمین عنصر از دسته s جدول دوره‌ای است و آرایش الکترونی آن به $3s^2$ ختم می‌شود.
- با یون اکسید، ترکیب یونی با فرمول شیمیایی XO و با یون فسفید ترکیب یونی با فرمول شیمیایی X_3P ایجاد می‌کند.
- عدد کوانتومی فرعی نیمی از الکترون‌های اتم این عنصر، برابر یک است.
- شمار الکترون‌های اتم این عنصر، با شمار الکترون‌های لایه سوم اتم چهارمین عنصر دسته d جدول دوره‌ای، یکسان است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۹۴- کدام گزینه درباره ترکیب‌های «سدیم اکسید، گوگرد دی‌اکسید، کربن دی‌سولفید و کربن تتراکلرید» درست است؟

- (۱) در یک مولکول از ترکیب‌های سدیم اکسید، گوگرد دی‌اکسید و کربن دی‌سولفید، ۳ اتم وجود دارد.
 (۲) مقایسه «کربن تتراکلرید < گوگرد دی‌اکسید < کربن دی‌سولفید» را می‌توان به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی موجود در مولکول آن‌ها نسبت داد.
 (۳) شمار جفت الکترون‌های پیوندی اتم مرکزی در ساختار لوویس گوگرد دی‌اکسید و کربن دی‌سولفید، یکسان است.
 (۴) در ساختار ترکیب‌های داده شده، همه اتم‌ها با دست یافتن به آرایش الکترونی مشابه گاز نجیب پس از خودشان، پایدار شده‌اند.

۱۹۵- مخلوطی از گازهای اکسیژن و هیدروژن سولفید در شرایط استاندارد، ۵۶ لیتر حجم دارد. در شرایط مناسب، با ایجاد جرقه‌ای در این مخلوط گازی، واکنش به‌طور کامل انجام می‌شود و پس از واکنش، آب و گاز گوگرد دی‌اکسید در ظرف وجود دارد. طی این فرایند، چند گرم

آب تولید شده است؟ ($H = 1, O = 16, S = 32 : g \cdot mol^{-1}$)

۱۸ (۱) ۳۶ (۲) ۲۷ (۳) ۴۵ (۴)

۱۹۶- ۲۵۰ میلی‌لیتر محلول مس (II) نیترات حرارت داده شده و پس از تبخیر شدن کامل آب، ۹۴ میلی‌گرم جامد باقی مانده است. غلظت یون

نیترات در محلول اولیه چند مول بر لیتر بوده است؟ ($N = 14, O = 16, Cu = 64 : g \cdot mol^{-1}$)

۰/۰۰۴ (۱) ۰/۰۰۲ (۲) ۰/۰۰۳ (۳) ۰/۰۰۶ (۴)

۱۹۷- m میلی‌گرم آهن (III) کلرید را به ۲۰ میلی‌لیتر محلول 10^{-3} مولار آن با چگالی $1 g \cdot mL^{-1}$ ، اضافه می‌کنیم. اگر غلظت یون کلرید در

محلول حاصل، ۲۱۳ ppm باشد، m کدام است و محلول نهایی با چند میلی مول پتاسیم هیدروکسید به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟

($Cl = 35.5, Fe = 56 : g \cdot mol^{-1}$)

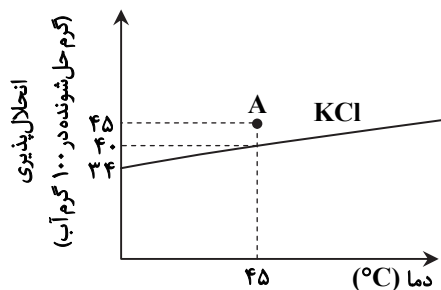
معادله موازنه‌شده شود: $KOH(aq) + FeCl_3(aq) \rightarrow Fe(OH)_3(s) + KCl(aq)$

۰/۱۲، ۳/۲۵ (۱) ۰/۰۶، ۲/۱۳ (۲) ۰/۱۲، ۲/۱۳ (۴) ۰/۰۶، ۳/۲۵ (۲)

۱۹۸- ۲۹۰ گرم از محلول A (محلولی از پتاسیم کلرید در دمای ۴۵ درجه سلسیوس)

در اختیار داریم؛ کدام عبارت توصیفی درست در ارتباط با این سامانه است؟

- (۱) با ته‌نشین شدن ۵ گرم پتاسیم کلرید، محلول A به محلولی سیر شده در دمای ۴۵ درجه سلسیوس تبدیل می‌شود.
 (۲) درصد جرمی پتاسیم کلرید در محلول A برابر ۴۵ است.
 (۳) با افزایش دمای محلول A، می‌توان آن را به محلولی سیر نشده تبدیل کرد.
 (۴) محلول A دارای ۹۰ گرم پتاسیم کلرید است که در اثر رسوب دادن مقدار اضافی حل‌شونده خود در همان دما، به ۲۸۵ گرم محلول سیر شده تبدیل می‌شود.



محل انجام محاسبات

۱۹۹- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) با روش اسمز معکوس، ترکیب‌های آلی فرار برخلاف میکروپها، از آب جدا می‌شوند.
 (۲) بر پایه قانون هنری، با کاهش دما، انحلال پذیری گازها در آب افزایش می‌یابد.
 (۳) حرکت خودبه‌خودی مولکول‌های آب از محیط رقیق‌تر به محیط غلیظ‌تر را گذرندگی می‌گویند.
 (۴) پلاسیده شدن خیار تازه در آب شور را می‌توان به پدیده اسمز نسبت داد.

۲۰۰- تیغه‌هایی از جنس فلزهای A و B را در محلولی حاوی یون‌های فلز C (C^{2+}) قرار می‌دهیم. اگر با گذشت زمان جرم تیغه A افزایش یافته، ولی تغییری در تیغه B رخ ندهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) فلزهای A، B و C می‌توانند به ترتیب آلومینیم، طلا و مس باشند.
 (ب) می‌توان محلول‌های حاوی یون‌های فلز B را در ظرفی از جنس فلز C برای مدت طولانی نگاه‌داری کرد.
 (پ) اگر این سه فلز، جزء فلزهای اصلی و متعلق به یک دوره از جدول دوره‌ای باشند، مقایسه شعاع اتمی آن‌ها به صورت $A < C < B$ است.

(ت) واکنش $C(s) + ASO_4(aq) \rightarrow CSO_4(aq) + A(s)$ ، به‌طور طبیعی انجام نمی‌شود.

- (۱) الف و ت (۲) ب و پ (۳) الف و پ (۴) ب و ت

۲۰۱- در شرایطی معین، واکنش زیر با بازده ۸۰ درصد انجام می‌شود. اگر از واکنش m گرم کلسیم کربنات با خلوص ۶۰ درصد، ۱۲ لیتر گاز کربن دی‌اکسید با چگالی ۰/۸۸ گرم بر لیتر تولید شده باشد، m کدام است؟ (ناخالصی‌ها وارد واکنش نمی‌شوند.)

($C = ۱۲$, $O = ۱۶$, $Ca = ۴۰$: $g \cdot mol^{-1}$)



- (۱) ۱۰۰ (۲) ۵۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۷۵

۲۰۲- از سوختن کامل ۰/۲ مول از یک آلکان راست‌زنجیر، ۵۲/۸ گرم کربن دی‌اکسید تولید شده است. فرمول مولکولی آلکان موردنظر با فرمول مولکولی کدام آلکان یکسان است؟ ($O = ۱۶$, $C = ۱۲$: $g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) ۲، ۲- دی‌متیل بوتان (۲) اتیل پنتان (۳) ۲، ۲- تری‌متیل بوتان (۴) متیل بوتان

۲۰۳- کدام مطلب زیر، نادرست است؟ ($H = ۱$, $C = ۱۲$, $O = ۱۶$: $g \cdot mol^{-1}$)

(۱) بنزن در واکنش کامل با گاز هیدروژن، حدود ۷/۷ درصد افزایش جرم پیدا می‌کند.

(۲) ترکیبی با ساختار پیوند-خط ، سیرشده و همپار ۲- پنتن است.

(۳) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در نفتالن، از نسبت شمار اتم‌های کربن به هیدروژن در ۱- بوتن بیشتر است.

(۴) گاز اتیلن، هیدروکربنی با ۴ اتم هیدروژن است و چگالی آن در دمای ۰°C و فشار ۱ atm، از چگالی گاز اکسیژن بیشتر است.

۲۰۴- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) اگر به دو نمونه ماده، گرمای یکسانی داده شود، نمونه‌ای با ظرفیت گرمایی بیشتر، تغییر دمای بیشتری خواهد داشت.

(ب) در شرایط معین، ظرفیت گرمایی ۱۰ گرم آب، ۱۰ برابر گرمای ویژه آن است.

(پ) اگر گرمای ۲۰۰۰۰ ژول، دمای ۱۰۰ گرم روغن را ۱۰۰ درجه سلسیوس افزایش دهد، گرمای ویژه روغن در این شرایط، ۲ کیلوژول بر گرم بر درجه سلسیوس است.

(ت) در فشار ۱ atm و دمای ۲۵°C، گرمای ۱۰۰ گرم آب بیشتر از گرمای ۵۰ گرم آب است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

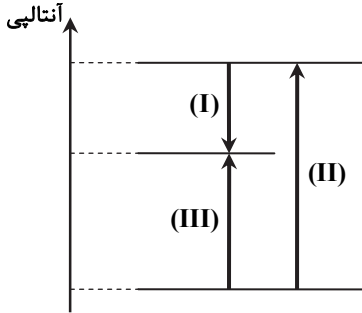
۲۰۵- اگر برای تبدیل ۴/۵ گرم بخار آب به اتم‌های گازی سازنده، ۲۳۰ کیلوژول گرما لازم باشد، میانگین آنتالپی پیوند O-H، چند کیلوژول بر

مول است؟ ($H = ۱$, $O = ۱۶$: $g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) ۲۳۰ (۲) ۴۶۰ (۳) ۶۹۰ (۴) ۹۲۰

محل انجام محاسبات

۲۰۶- با توجه به نمودار و گرمای واکنش‌های داده شده، کدام گزینه درست است؟



(۱) معادله واکنش (III) به صورت $A + B \rightarrow E$ است.

(۲) واکنش (II) برخلاف واکنش (III)، گرماگیر است.

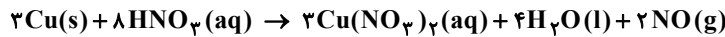
(۳) معادله واکنش (III) را می‌توان از جمع معادله‌های (I) و (II) به دست آورد.

(۴) آنتالپی واکنش (II) از جمع آنتالپی‌های واکنش‌های (I) و (III) به دست می‌آید.

۲۰۷- مقداری مس خالص به محلولی از نیتریک اسید افزوده می‌شود. اگر پس از شروع واکنش زیر و گذشت ۱۲۰ ثانیه، مقدار گاز تولیدشده به

۴/۵ گرم و مقدار فلز مس به ۶ گرم رسیده باشد، در این بازه زمانی سرعت متوسط تولید آب چند مول بر دقیقه و مقدار اولیه فلز مس چند

گرم بوده است؟ ($N = 14$, $O = 16$, $Cu = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



۱۴/۴، ۰/۰۷۵ (۴)

۱۴/۴، ۰/۱۵ (۳)

۲۰/۴، ۰/۰۷۵ (۲)

۲۰/۴، ۰/۱۵ (۱)

۲۰۸- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

■ نیروهای بین مولکولی آب قوی‌تر از نیروهای بین مولکولی گاز اتن و پلی‌اتن است.

■ سلولز و نشاسته نمونه‌هایی از پلیمرهای طبیعی و پلی‌اتیلن و تترافلورو اتن، نمونه‌هایی از پلیمرهای ساختگی هستند.

■ پلی‌اتن هیدروکربنی سیر شده است و در ساختار آن هر اتم کربن به ۴ اتم دیگر متصل است.

■ در واکنش پلیمری شدن، به واکنش‌دهنده‌ها، مونومر یا واحد تکرارشونده می‌گویند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۰۹- ۱/۴ کیلوگرم گاز اتن در شرایط مناسب قرار گرفته و به ۰/۰۲ مول پلی‌اتیلن تبدیل می‌شود. شمار واحدهای تکرارشونده در هر مولکول

پلیمر کدام است؟ ($H = 1$, $C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۲۵۰۰ (۴)

۵۰۰۰ (۳)

۱۲۵۰ (۲)

۱۰۰۰ (۱)

۲۱۰- کدام موارد از مطالب زیر درباره ترکیبی با ساختار داده شده، درست است؟

(الف) از خانواده استرها است و از واکنش یک الکل ۴ کربنی با استیک اسید به دست می‌آید.

(ب) با استر حاصل از واکنش اتانول و بوتانوئیک اسید، ایزومر است.

(پ) الکل حاصل از آبکافت آن به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

(ت) اسید حاصل از آبکافت این ترکیب با اسید حاصل از آبکافت اتیل استات، یکسان است.

ب و پ (۴)

الف و ت (۳)

پ و ت (۲)

الف و ب (۱)

۲۱۱- اگر مجموع شمار یون‌های H^+ و A^- در ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار HA برابر با $2/408 \times 10^{22}$ باشد، محلول اسید HA در آب

چگونه است و اگر رسانایی الکتریکی یون‌های مختلف در محلول‌های آبی یکسان فرض شود، رسانایی الکتریکی محلول چند مولار HA با

رسانایی الکتریکی محلول ۰/۲ مولار کلسیم نیترات برابر است؟

الکترولیت قوی، ۰/۳ (۴)

الکترولیت ضعیف، ۰/۳ (۳)

الکترولیت قوی، ۰/۶ (۲)

الکترولیت ضعیف، ۰/۶ (۱)

۲۱۲- pH محلول ۰/۱ مولار اسید HA برابر ۳/۷ است. به ترتیب، درصد یونش مولکول‌های HA در این محلول و ثابت یونش آن، کدام است؟

4×10^{-6} ، ۴ (۴)

2×10^{-8} ، ۴ (۳)

4×10^{-6} ، ۲ (۲)

2×10^{-8} ، ۲ (۱)

۲۱۳- اگر در غلظت مولی یکسان، نسبت pH محلول باز قوی BOH به pH محلول اسید قوی HA برابر با ۶ باشد، غلظت مولی این محلول‌ها

کدام است؟

۰/۱ (۴)

۰/۰۲ (۳)

۰/۰۱ (۲)

۰/۰۰۵ (۱)

محل انجام محاسبات

۲۱۴- با توجه به پتانسیل‌های کاهشی استاندارد داده شده، کدام گزینه نادرست است؟

نیم‌واکنش	$E^{\circ} (V)$
$B_{\gamma}(g) + 2e^{-} \rightarrow 2B^{-}(aq)$	۱/۲
$A^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow A(s)$	۰/۴
$C^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow C(s)$	-۰/۴
$D^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow D(s)$	-۰/۷

۱) واکنش $C(s) + A^{2+}(aq) \rightarrow A(s) + C^{2+}(aq)$ را می‌توان در یک سلول گالوانی انجام داد.

۲) در بین گونه‌های موجود در این جدول، B_{γ} قوی‌ترین اکسنده و D قوی‌ترین کاهشنده است.

۳) در سلول گالوانی حاصل از نیم‌سلول‌های استاندارد D و A ، جرم الکتروود A با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

۴) گاز B_{γ} به صورت طبیعی می‌تواند باعث اکسایش یافتن فلز D شود.

۲۱۵- در سلول گالوانی استاندارد آلومینیم- نقره که حجم محلول‌ها در هر دو نیم‌سلول برابر ۲ لیتر است، پس از ۵ دقیقه غلظت مولی یون

Al^{3+} سه برابر غلظت مولی یون Ag^{+} می‌شود. سرعت متوسط مصرف Ag^{+} در این سلول، چند مول بر دقیقه است؟

۱) ۰/۰۶ (۲) ۲) ۰/۱۲ (۲) ۳) ۰/۱۸ (۳) ۴) ۰/۲۴ (۴)

۲۱۶- با توجه به ساختار داده شده، در کدام گزینه پاسخ درست ۳ پرسش زیر (به ترتیب از راست به چپ) آورده شده است؟

الف) چند نوع اتم کربن با عدد اکسایش متفاوت در ساختار این مولکول وجود دارد؟

ب) مجموع عددهای اکسایش اتم‌های اکسیژن و کربن این مولکول، چند است؟

پ) در این مولکول، تفاوت کمترین و بیشترین عدد اکسایش اتم‌ها کدام است؟

۱) ۳، -۵ (۱)

۲) ۲، -۶ (۲)

۳) ۲، -۵ (۳)

۴) ۳، -۶ (۴)

۲۱۷- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

الف) جامدهای کووالانسی، شبکه‌ای غول‌آسا از شمار بسیار زیادی اتم هستند که با پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند.

ب) در ساختار الماس مشابه با ساختار سیلیس، هر اتم با ۴ پیوند اشتراکی به ۴ اتم دیگر متصل است.

پ) گرافیت، با وجود داشتن پیوندهای اشتراکی قوی‌تر در مقایسه با الماس، به دلیل داشتن ساختار دوبعدی و لایه‌ای، نرم است.

ت) سیلیس در مقایسه با سیلیسیم خالص، پیوندهای قوی‌تر، نقطه ذوب، سختی و پایداری بیشتری دارد.

۱) ۱ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) ۳ (۳) ۴) ۴ (۴)

۲۱۸- در مولکول برخلاف مولکول تراکم الکترون‌ها و بار منفی روی هسته اتم مرکزی بیشتر از اتم‌های اطراف است.

۱) متان-آب ۲) کربن تتراکلرید- گوگرد تری‌اکسید

۳) هیدروژن سولفید- آمونیاک ۴) آمونیاک- گوگرد دی‌اکسید

۲۱۹- در ظرفی ۲ لیتری، ۰/۴ مول از هر یک از گازهای SO_2 و O_2 و ۱/۶ مول گاز SO_3 در تعادل $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$ هستند.

اگر بدون تغییر دما، ۰/۴ مول گاز SO_3 به ظرف وارد شود، کدام تغییر در تعادل رخ می‌دهد و ثابت تعادل برقرار شده در ظرف کدام است؟

۱) واکنش در جهت رفت پیشرفت می‌کند، ۴۰ ۲) واکنش در جهت برگشت پیشرفت می‌کند، ۴۰

۳) واکنش در جهت رفت پیشرفت می‌کند، ۸۰ ۴) واکنش در جهت برگشت پیشرفت می‌کند، ۸۰

۲۲۰- چند مورد از مطالب زیر درباره پارازیلین و ترفتالیک اسید، درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

■ هر دوی آن‌ها در نفت خام وجود ندارند و باید آن‌ها را از مواد دیگر به دست آورد.

■ جرم مولی پارازیلین با بنزآلدئید و جرم مولی ترفتالیک اسید با اتیل بوتانوات برابر است.

■ در شرایط مشابه، انحلال‌پذیری ترفتالیک اسید در آب، کمتر از پارازیلین است.

■ نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در پارازیلین بیشتر از ترفتالیک اسید است.

۱) صفر (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) ۲ (۳) ۴) ۳ (۴)

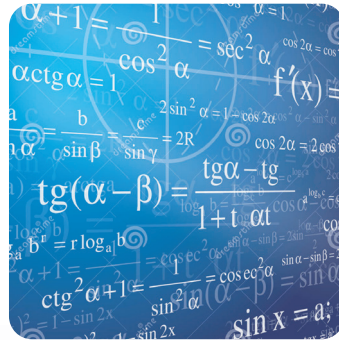
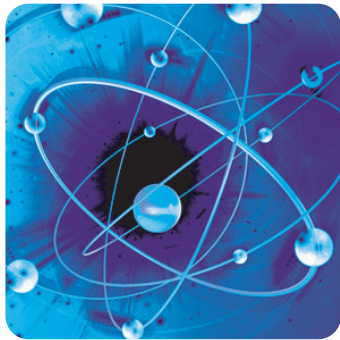
محل انجام محاسبات

دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۲۰ خرداد ۱۴۰۱ (مرحله ۱۶)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی



ریاضیات

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۵ حسابان ۱

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q باشد، داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$b_n = \frac{a^n + a^{2+n}}{3} = \frac{a^n + a^2 \times a^n}{3} = \frac{a^n(1+a^2)}{3}$$

ابتدا b_n را ساده می‌کنیم:

با توجه به اینکه دنباله هندسی است، با در نظر گرفتن قدرنسبت q ، مجموع چهار جمله ابتدایی و چهار جمله بعدی آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} S_4 = b_1 \left(\frac{1-q^4}{1-q} \right) \\ S' = b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = b_5 \left(\frac{1-q^4}{1-q} \right) \end{cases} \Rightarrow S_4 = 64S' \Rightarrow b_1 \left(\frac{1-q^4}{1-q} \right) = 64(b_5) \left(\frac{1-q^4}{1-q} \right) \Rightarrow b_1 = 64b_5$$

$$\Rightarrow \frac{a+a^2}{3} = 64 \left(\frac{a^5+a^6}{3} \right) \Rightarrow a(1+a^2) = 64a^5(1+a^2) \Rightarrow 64a^4 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{64}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۸ حسابان ۱

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳

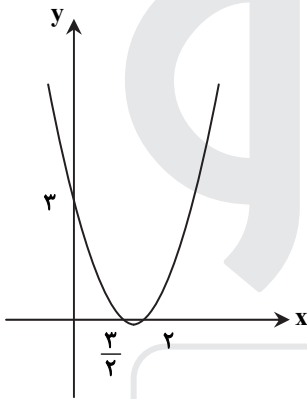
نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) باشند، آنگاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

در معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 4 = 0$ مطابق نکته داریم:

$$S = \frac{3}{2}, \quad P = -\frac{4}{2} = -2$$

حال سهمی $y = (x - \frac{3}{2})(x - 2)$ را در نظر می‌گیریم و آن را رسم می‌کنیم:



مطابق نمودار تابع در $x < 0$ فقط وارد ناحیه دوم می‌شود، بنابراین از ناحیه سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۸۶ و ۸۷ حسابان ۱

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

نکته: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و بالعکس. اگر $x, y > 0$ و $x = y$ ، آنگاه:

$$\log_a x = \log_a y$$

با استفاده از نکات داریم:

$$\log_7(2+x^2) = \log_7 9 + \log_7(x-2) \Rightarrow x^2 + 2 = 9x - 18 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=5 \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول است، پس داریم:

$$\begin{cases} x=4 \Rightarrow A_1 = \log_7(2x-6) = \log_7 2 = 1 \\ x=5 \Rightarrow A_2 = \log_7(2x-6) = \log_7 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 = 3$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۵۲ حسابان ۲

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{+} = +\infty, \quad \frac{\text{عدد منفی}}{+} = -\infty$$

نکته:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{-} = -\infty, \quad \frac{\text{عدد منفی}}{-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow k^+} f^2(x) = 4$$

ابتدا با توجه به نمودار تابع $f(x)$ می‌توان فهمید:

دقت داریم که وقتی $x \rightarrow k^+$ ، تابع f^2 از مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود. حال حاصل حد خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{-2x}{4 - f^2(x)} = \frac{-2k}{+} = -\infty \quad (\text{مطابق نمودار } k > 0 \text{ است.})$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۳۱ حسابان ۲

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۳

برای آنکه $x=2$ طول عطف تابع f باشد، باید f'' در $x=2$ تغییر علامت دهد. همچنین تابع f در $x=2$ خط مماس داشته باشد، پس ابتدا f'' را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}(2x+a) = 2x^{\frac{4}{3}} + ax^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{8}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2a}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(4x-a)$$

باید $x=2$ ریشه f'' باشد، پس:

$$f''(2) = 0 \Rightarrow a = 8$$

x		2	
f''	+	0	-
f	∪	∩	∪
	عطف		عطف

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه های ۷۹، ۸۶ و ۹۴ حسابان ۲

۱۰۶- پاسخ: گزینه ۳

نکته: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

چون f در $x=2$ پیوسته است، پس شرط لازم برای مشتق پذیری در این نقطه را دارد. از طرفی در حد داده شده به ازای $x=2$ ، مخرج صفر می شود ولی حاصل حد عددی حقیقی است که یعنی صورت هم به ازای $x=2$ باید صفر شود، پس $f(2) = 3$. مطابق نکته داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \frac{1}{2} f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = -4$$

حال از تابع y مشتق می گیریم:

$$y' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \Rightarrow y'(2) = \frac{2f'(2) - f(2)}{4} = \frac{-8 - 3}{4} = -\frac{11}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۳۸ حسابان ۲

۱۰۷- پاسخ: گزینه ۱

نکته: $\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

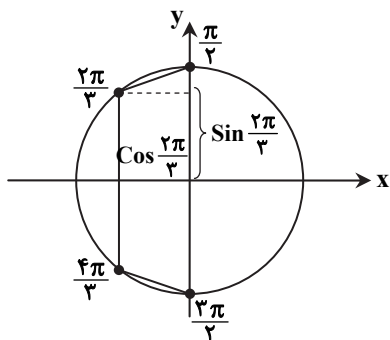
نکته: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

ابتدا معادله را حل می کنیم:

$$2\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جوابها را روی دایره مثلثاتی نمایش می دهیم:

مطابق شکل، جوابها روی دایره مثلثاتی یک دوزنقه تشکیل می دهند:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قطر دایره} = \text{قاعده بزرگ} = 2 \\ \text{قاعده کوچک} = \left| 2\sin \frac{2\pi}{3} \right| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \text{ارتفاع} = \left| \cos \frac{2\pi}{3} \right| = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

بنابراین مساحت این دوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

نکته: توابع $y = a\cos bx + c$ و $y = a\sin bx + c$ دارای مقدار ماکسیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

تابع در همسایگی راست $x = 0$ صعودی اکید است، پس $b > 0$. از طرفی مطابق نمودار بیشترین مقدار تابع ۶ است، در نتیجه:

$$a + |b| = 6 \Rightarrow a + b = 6 \quad (I)$$

از طرفی داریم:

$$f(-\pi) = 0 \Rightarrow a + b \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{4} = 0 \Rightarrow b = 4a \quad (II)$$

از معادله‌های (I) و (II) داریم: $a = 2$ و $b = 4$. بنابراین:

$$f(x) = 2 + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 4 \times 1 = 6$$

نکته: گوییم تابع f در $x = a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

ابتدا دامنه ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ \frac{ax^2 + b}{x-1} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

اگر f بخواهد در \mathbb{R} پیوسته باشد، باید در $x = \pm 1$ پیوسته باشد، زیرا f در سایر نقاط حقیقی پیوسته است. در هر دو نقطه شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x = 1: \begin{cases} f(1) = c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 + b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x-1)(x+1)}{x-1} = 2a \end{cases} \Rightarrow 2a = c + 1 \quad (*)$$

دقت کنید که در همسایگی چپ $x = 1$ ، چون مخرج صفر می‌شود و پاسخ باید عددی حقیقی شود، پس صورت هم به‌ازای $x = 1$ باید صفر شود که یعنی: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$

$$x = -1: \begin{cases} f(-1) = c - 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = c - 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{a+b}{-2} = \frac{a+b=0}{-2} \end{cases} \Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

شرط پیوستگی در $x = -1$ است، پس:

حال با قرار دادن مقدار c در (*) مقدار a برابر ۱ به‌دست می‌آید، همچنین چون $a + b = 0$ ، بنابراین $b = -1$ ، در نتیجه:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

نکته (اتحاد مزدوج): $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

تک تک کسرها را گویا می‌کنیم و داریم:

$$\frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 5} + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \left(\frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 5} \times \frac{\sqrt{6} + 5}{\sqrt{6} + 5}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}\right) = \frac{2\sqrt{12} + 10\sqrt{2} + 3\sqrt{18} + 15\sqrt{3}}{-19} + \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$= \frac{19\sqrt{3} + 19\sqrt{2}}{-19} + \sqrt{3} + 1 = -\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + 1 = 1 - \sqrt{2}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$A = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow A - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow (A - 1)^{-2} = (-\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

نکته: برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آن‌ها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست‌آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$2 - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{(2-x)(x-1)} = x \Rightarrow 2\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = x - 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} -4x^2 + 12x - 8 = x^2 - 2x + 1$$

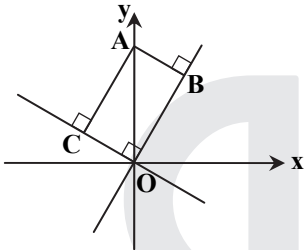
$$\Rightarrow 5x^2 - 14x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \sqrt{5\alpha-8} \\ x=\frac{9}{5} \Rightarrow \alpha=\frac{9}{5} \Rightarrow \sqrt{5\alpha-8}=1 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

دو خط $y = 3x$ و $y = -\frac{1}{3}x$ در مبدأ مختصات برهم عمود هستند. پس اگر قرار باشد از نقطه A دو عمود بر خطوط داده شده رسم کنیم یک مستطیل به‌دست می‌آید. فاصله A تا دو خط داده شده را به‌دست می‌آوریم تا دو ضلع مستطیل به‌دست می‌آید:



$$y - 3x = 0 \text{ از خط } A \text{ فاصله نقطه } = \frac{|6 - 0|}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$x + 3y = 0 \text{ از خط } A \text{ فاصله نقطه } = \frac{|0 + 18|}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{\sqrt{10}} \times \frac{18}{\sqrt{10}} = 5/4 \quad \text{مساحت مثلث } ABC \text{ نصف مساحت مستطیل است:}$$

$$\text{نکته: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حد چپ و راست را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \times \sin x}{x \times x \times (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - \cos x}{x|x|} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{-x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{-x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \times \sin x}{-x \times x \times (1 + \cos x)} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین اختلاف حد چپ و راست برابر ۱ است.

نکته: در مسائل بهینه‌سازی برای ماکسیم یا مینیم عبارت، ابتدا تابع آن عبارت را برحسب یکی از متغیرهای مسئله می‌نویسیم و سپس با استفاده از مشتق و... جواب مسئله را می‌یابیم. استوانه را درون کره به شعاع R محاط می‌کنیم. مطابق رابطه فیثاغورس داریم:

$$4R^2 = 4r^2 + h^2 \quad (*) \quad V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{4R^2 - h^2}{4} \right) \times h$$

نسبت به متغیر h مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی آن را برای یافتن ماکزیم مقدار حجم به‌دست می‌آوریم:

$$V(h) = \frac{\pi}{4} (4R^2 h - h^3) \Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{4} (4R^2 - 3h^2) = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4} \Rightarrow V'(h) = 0 \Rightarrow 4R^2 = 3h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4R^2}{3}$$

$$4r^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{2R^2}{3}$$

با جای‌گذاری در (*) داریم:

$$\frac{r^2}{h^2} = \frac{\frac{2R^2}{3}}{\frac{4R^2}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال نسبت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

هر سمت نامعادله را جداگانه حل می کنیم:

$$\frac{x-2}{2x+1} > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{2x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-2-2x-1}{2x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-x-3}{2x+1} > 0$$

x	-3	-1/2	
-x-3	+	-	-
2x+1	-	-	+
کل عبارت	-	+	-

مجموعه جواب: $x \in (-3, -\frac{1}{2})$

$$\frac{x-2}{2x+1} < 3 \Rightarrow \frac{x-2}{2x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x-2-6x-3}{2x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-5x-5}{2x+1} < 0$$

x	-1	-1/2	
-5x-5	+	-	-
2x+1	-	-	+
کل عبارت	-	+	-

مجموعه جواب: $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$

از اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده، مجموعه جواب نامعادله داده شده به صورت $x \in (-3, -1)$ است. بنابراین $\alpha = -3$ و $\beta = -1$ در نتیجه:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{3}$$

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y مرتب می کنیم. سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم. با توجه به آنکه $2 < x < 3$ ، پس $-3 < -x < -2$ و می توان ضابطه f را ساده کرد:

$$f(x) = x^2 \times 2 - 3 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3 ; 2 < x < 3$$

حال وارون تابع f را در دامنه (2, 3) به دست می آوریم:

$$y = 2x^2 - 3 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y+3}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2x) = \sqrt{\frac{2x+3}{2}} \Rightarrow f^{-1}(2x) = \sqrt{x + \frac{3}{2}}$$

دقت کنید که برد تابع f در دامنه (2, 3) برابر (5, 15) است، پس دامنه تابع $f^{-1}(x)$ برابر (5, 15) است که برای تابع $f^{-1}(2x)$ داریم:

$$5 < 2x < 15 \Rightarrow 2/5 < x < 7/5$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

نکته: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ و $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

نکته: اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه:

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

به کمک نکات عبارت A را ساده می کنیم:

$$A = \left(\frac{2\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}\right) \times \left(\frac{1 + \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}\right) = \frac{2\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \times \frac{1 + \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}$$

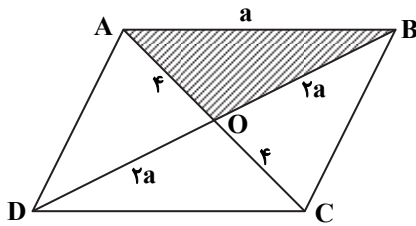
$$= \frac{2\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \times \frac{2\cos^2 20^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{1}{\cos 40^\circ}$$

۱۱۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۱۶ هندسه ۱

نکته: در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

نکته: طبق نامساوی مثلث برای اینکه سه ضلع بتوانند تشکیل یک مثلث بدهند باید مجموع هر دو تای آنها از سومی بزرگ‌تر باشد. مطابق شکل روبه‌رو و اطلاعات مسئله داریم:



$$\begin{cases} OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \\ OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4a = 2a \end{cases}$$

برای رسم متوازی‌الاضلاع ABCD، باید مثلث OAB قابل‌رسم باشد:

$$\begin{cases} 4 + a > 2a \Rightarrow a < 4 \\ 4 + 2a > a \Rightarrow a > -4 \Rightarrow \frac{4}{3} < a < 4 \\ a + 2a > 4 \Rightarrow a > \frac{4}{3} \end{cases}$$

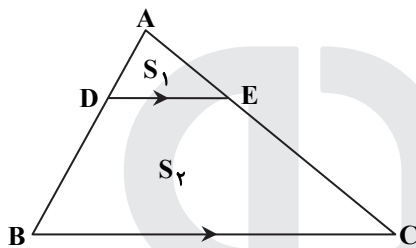
از بین گزینه‌ها، فقط $a = 3$ می‌تواند پاسخ باشد.

۱۱۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۴۵ هندسه ۱

نکته: در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است.

چون $DE \parallel BC$ است، پس: $DE \parallel BC$

اکنون داریم:



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{1}{8 + 1} \Rightarrow \frac{S_1}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$$

مثلث ADE و مثلث ABC متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها، مجذور نسبت تشابه است:

$$\left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EC}{EA} = 2$$

۱۲۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۵۴ هندسه ۱

نکته: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر $(n-2) \times 180^\circ$ می‌باشد.

با رسم شکل فرضی داریم:

\hat{B}_1 و \hat{C}_1 زوایای خارجی n ضلعی منتظم موردنظر هستند.

اندازه هر زاویه خارجی یک n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{360^\circ}{n} \quad \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \frac{360^\circ}{n}$$

در مثلث MBC داریم:

$$\hat{M} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow 108^\circ + \frac{360^\circ}{n} + \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ \Rightarrow 2 \times \frac{360^\circ}{n} = 72^\circ \Rightarrow n = \frac{2 \times 360^\circ}{72^\circ} = 10$$

$$\Rightarrow (n-2)180^\circ = 8 \times 180^\circ = 1440^\circ$$

۱۲۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۱۴ هندسه ۲

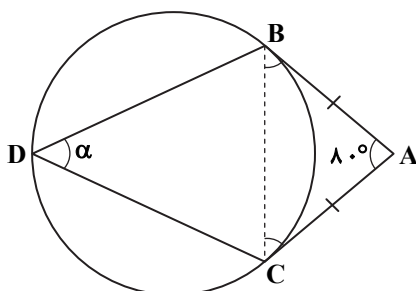
نکته: مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با هم برابرند.

نکته: اندازه زاویه ظلی نصف کمان روبه‌روی آن است.

نکته: اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روی آن است.

طبق نکته اول داریم: $AB = AC$

پس مطابق شکل مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

زوایای B و C ظلی‌اند، بنابراین:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 100^\circ$$

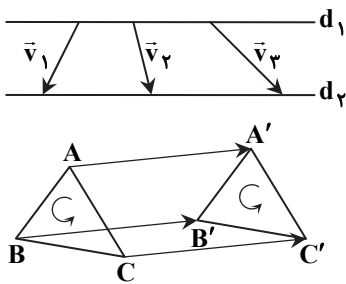
زاویه D نیز محاطی است، پس:

$$\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

۱۲۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۴۱ هندسه ۲

نکته: دو خط موازی d_1 و d_2 انتقال یافته یکدیگرند، در بی‌شمار انتقال، با بردارهایی که یک سر آن‌ها روی d_1 و سر دیگر روی d_2 باشد.

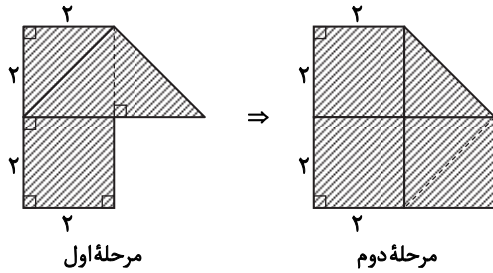


نکته: انتقال شیب و جهت شکل را حفظ می‌کند. انتقال نقطه ثابت ندارد، مگر آنکه بردار انتقال صفر باشد و همه نقاط صفحه، نقطه ثابت خواهند بود. با توجه به توضیحات فوق گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۵۲ و ۵۳ هندسه ۲

۱۲۳- پاسخ: گزینه ۳

برای افزایش مساحت به کمک بازتاب مراحل روبه‌رو را داریم:



مساحت شکل انتهایی را به دست می‌آوریم:

$$S = 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 14$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۷۳ هندسه ۲

۱۲۴- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا مساحت مثلث ADC را به کمک دستور هرون محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم ارتفاع دوزنقه را به دست آوریم:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$P = \frac{15 + 13 + 14}{2} = 21$$

$$S_{\Delta ADC} = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = 21 \times 4 = 84$$

اکنون اندازه ارتفاع AH را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AH \times DC \Rightarrow 84 = \frac{1}{2} AH \times 14 \Rightarrow AH = \frac{2 \times 84}{14} = 12$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + DC) AH = \frac{1}{2} (12 + 14) \times 12 = 156$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۷۰ هندسه ۱ و صفحه ۶۴ هندسه ۲

۱۲۵- پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

نکته: مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد b نقطه مرزی و تعداد i نقطه درونی، برابر است با:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

$$b = 3, i = 12$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{3}{2} + 12 - 1 = \frac{25}{2}$$

$$AB = AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$BC = \sqrt{1 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a}{2R}$$

بر طبق قضیه سینوس‌ها در هر مثلث:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} bc \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

در نتیجه داریم:

$$R = \frac{5 \times 5 \times 5\sqrt{2}}{4 \times \frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

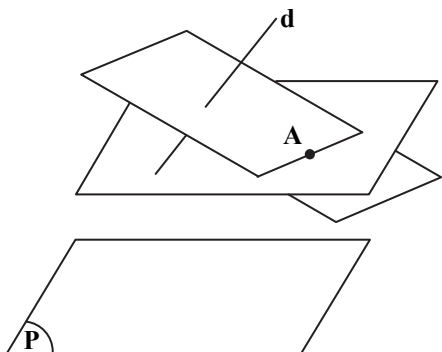
راه حل دوم:

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه اندازه شعاع دایره محیطی برابر نصف وتر است؛ پس در این سؤال، طول وتر $5\sqrt{2}$ است و داریم:

$$R \text{ دایره محیطی} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

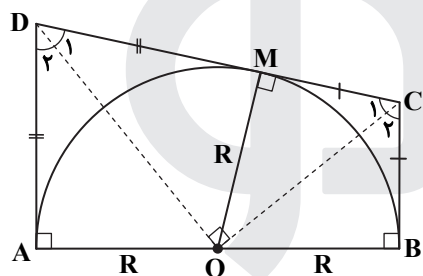
۱۲۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۸۲ و ۸۳ هندسه ۲

نکته ۱: تمام خطوطی که از یک نقطه، عمود بر خط d رسم می‌شوند، در صفحه‌ای قرار دارند که از نقطه گذشته و بر خط d عمود است.
 نکته ۲: تمام خطوطی که از یک نقطه، موازی صفحه P رسم می‌شوند، در صفحه‌ای قرار دارند که از نقطه گذشته و موازی P است.
 فصل مشترک دو صفحه عنوان شده، صفحه‌ای است که چون خط d بر صفحه P عمود نیست، این دو صفحه منطبق نمی‌شوند و همواره فصل مشترکی دارند که از A می‌گذرد.
 بنابراین همواره یک جواب داریم و گزینه ۱ پاسخ است.



۱۲۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۴۲ هندسه ۱ و ۲۴ هندسه ۲

نکته: مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با هم برابرند.
 مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$DA \perp AB, CB \perp AB, OM \perp DC$$

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2, \quad \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

در دوزنقه $ABCD$:

$$\hat{D} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{D}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}OC = 90^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه DOC بر طبق روابط طولی:

$$OM^2 = DM \times MC \Rightarrow R^2 = DM \times MC \xrightarrow{\text{نکته}} AD \times BC = R^2 \text{ ثابت}$$

۱۲۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۲۰ هندسه ۳

برای درایه‌های روی قطر اصلی همواره $i = j$ می‌باشد، داریم:

$$\begin{cases} a_{11} = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5 \\ a_{22} = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10 \\ a_{33} = 3 \times 3 + 2 \times 3 = 15 \Rightarrow a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = 5(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{5n(n+1)}{2} \\ \vdots \\ a_{nn} = 3 \times n + 2 \times n = 5n \end{cases}$$

۱۲۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۲۴ هندسه ۳

نکته: اگر دو ماتریس مربعی A و B به گونه‌ای باشند که $AB = BA = I$ ، آنگاه A و B وارون یکدیگرند.
 از روابط داده شده داریم:

$$A^3 = \bar{O} \Rightarrow \begin{cases} A^3 - I^3 = -I^3 \Rightarrow (A - I)(A^2 + A + I) = -I \\ A^3 + I^3 = I^3 \Rightarrow (A + I)(A^2 - A + I) = I \end{cases}$$

$$(A - I)^{-1} = -A^2 - A - I$$

$$(A + I)^{-1} = A^2 - A + I$$

$$(A^2 + A + I)^{-1} = I - A$$

بنابراین هر سه ماتریس وارون پذیرند.

راه حل اول: بسط دادن

دترمینان ماتریس A را بر حسب سطر اول بسط می دهیم:

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} n+3 & n+4 \\ n-3 & n-4 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} n+2 & n+4 \\ n-2 & n-4 \end{vmatrix} + (n+1) \begin{vmatrix} n+2 & n+3 \\ n-2 & n-3 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)(n^2 - n - n^2 - n + 12) - n(n^2 - 2n - n^2 - 2n + 16) + (n+1)(n^2 - n - n^2 - n + 9)$$

$$= -2n^2 + 2n + 4n^2 - 2n^2 - 2n = 0$$

راه حل دوم: عدد گذاری

n را عددی انتخاب می کنیم که گزینه ها به ازای آن عدد با هم متفاوت باشند:

$$n = -1 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -2(-10 + 12) + (-5 + 9) = -4 + 4 = 0$$

پاسخ گزینه ۴ است.

۱۳۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه های ۳۶ و ۴۰ هندسه ۳

مکان هندسی مرکز دایره مورد نظر دایره ای است به مرکز همین دایره و به شعاع ۲ واحد بیشتر از این دایره. پس ابتدا مرکز و شعاع دایره داده شده را به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \Rightarrow \text{مرکز } O(-2, 1), \text{ شعاع } R=3$$

اکنون داریم:

$$OM = R + R' = 3 + 2 = 5$$

$$C': (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۳۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه های ۶۹ و ۷۰ هندسه ۳

نکته: اندازه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

نکته: برداری که ابتدا آن نقطه $A = (a_1, a_2, a_3)$ و انتهای آن نقطه $B = (b_1, b_2, b_3)$ باشد، به صورت زیر است:

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

چون \vec{AB} و \vec{c} هم جهت و موازی اند، پس \vec{AB} مضرب مثبتی از \vec{c} است، داریم:

$$\vec{AB} = m\vec{c} = (m, -2m, 2m), \quad m > 0$$

طبق فرض اندازه این بردار برابر ۶ است، پس:

$$|\vec{AB}| = 6 \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4m^2 + 4m^2} = 6 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 2$$

اکنون داریم:

$$\vec{AB} = (2, -4, 4) \Rightarrow B - A = (2, -4, 4) \Rightarrow B = (2, -4, 4) + (2, 4, -5) \Rightarrow B = (4, 0, -1)$$

۱۳۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۵۱ هندسه ۳

بر طبق تعریف سهمی، فاصله هر نقطه از سهمی تا کانون، با فاصله آن تا خط هادی برابر است:

$$AH = AF$$

در این تست $AF = HF$ ، پس مثلث AHF متساوی الاضلاع است و $\hat{HAF} = 60^\circ$ ، داریم:

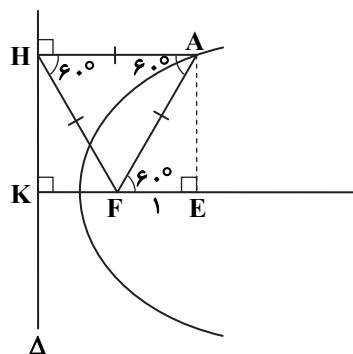
$$AH \parallel KE \Rightarrow \hat{AFE} = 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{EF}{AF} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{AF} \Rightarrow AF = 2 \Rightarrow AH = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AE}{EF} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AE}{1} \Rightarrow AE = \sqrt{3}$$

اکنون داریم:

$$S_{AHKE} = AE \times AH = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$$



نکته: ضرب خارجی دو بردار \vec{a} و \vec{b} با زاویه بین θ به صورت زیر است:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

نکته: ضرب خارجی هر بردار در خودش، برابر با بردار صفر است:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

نکته: ضرب خارجی دو بردار، خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

نکته: ضرب خارجی، خاصیت توزیع‌پذیری در جمع و تفریق دو بردار دارد:

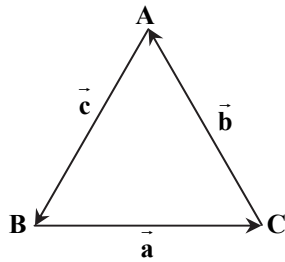
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \pm \vec{a} \times \vec{c}$$

چون هر سه بردار یک‌ه و مجموع آن‌ها صفر است، پس حتماً به صورت زیر هستند:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

مثلث متساوی‌الاضلاع است.



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{0} - \vec{c} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \times (-\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b} \times \vec{c} - \vec{0} \Rightarrow \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\text{عبارت} = |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{a}| = |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 1 \times 1 \times \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۳ تا ۶ و ۱۱ ریاضی ۱

۱۳۵- پاسخ: گزینه ۱

$$1 \text{ نکته: } [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$2 \text{ نکته: } A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$3 \text{ نکته: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$4 \text{ نکته: } n([a, b]) = b - a + 1$$

با توجه به نکات ۱ و ۲، اگر $a > 2a - 4$ باشد، آنگاه داریم: $a < 4$ و $A \cup B = [2, 27)$ که در این صورت مجموعه $A \cup B$ شامل ۲۵ عضو

$\{2, 3, 4, \dots, 26\}$ خواهد بود و غیرقابل قبول است.

پس قطعاً $a < 2a - 4$ بوده و این یعنی $a > 4$ که در این حالت داریم:

$$A \cap B = \emptyset$$

حال با توجه به نکات ۳ و ۴، در مجموعه اعداد طبیعی خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$18 = n(\{2, 3, 4, \dots, a-1\}) + n(\{2a-4, 2a-3, \dots, 26\}) - 0 \Rightarrow 18 = (a-1-2+1) + (26-2a+4+1)$$

$$\Rightarrow 18 = -a + 29 \Rightarrow a = 11 \text{ عدد اول}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۶ تا ۱۱ آمار و احتمال

۱۳۶- پاسخ: گزینه ۱

نکته: جدول ارزش گزاره‌های فصلی، عطفی، شرطی و نقیض یک گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$\sim p$
د	د	د	د	د	ن
د	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د

با توجه به جدول، اگر $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge r)$ نادرست باشد:

(۱) $p \vee q$ نادرست است، پس p نادرست و q نادرست است.

(۲) $\sim p \wedge r$ درست است، پس r درست است.

حال با بررسی هریک از گزاره‌ها متوجه می‌شویم که گزینه ۱ همواره درست و سایر گزینه‌ها همواره نادرست هستند.

بررسی گزینه ۱:

$$(\sim q \wedge p) \Rightarrow \sim r \equiv (T \wedge F) \Rightarrow F \equiv F \Rightarrow F \equiv T$$

نکته ۱: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ «احتمال اینکه A رخ دهد ولی B رخ ندهد».

نکته ۲: تعداد مضارب k در بین اعداد ۱ تا n برابر $\left[\frac{n}{k} \right]$ است.

واضح است که مجموعه دارای $1302 = 1401 - 99$ عضو است.

اگر A را مجموعه اعداد مضرب ۶ و B را مجموعه اعداد مضرب ۱۴ در نظر بگیریم، به کمک اطلاعات مسئله و با توجه به نکته ۱، باید $P(A - B)$ را حساب کنیم، پس با توجه به نکات، داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \left(\left[\frac{1401}{6} \right] - \left[\frac{99}{6} \right] \right) - \left(\left[\frac{1401}{42} \right] - \left[\frac{99}{42} \right] \right) = \frac{(233 - 16) - (33 - 2)}{1302} = \frac{217 - 31}{1302} = \frac{186}{1302} = \frac{1}{7}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۴۵، ۴۶ و ۵۴ آمار و احتمال

۱ نکته: $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

۲ نکته: $P(A - B) = P(A \cup B) - P(B)$

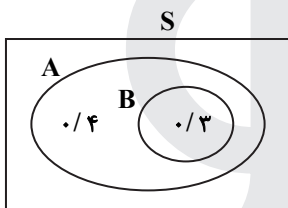
۳ نکته: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

با توجه به نکات، داریم:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow 0.3 = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0.7$$

$$P(A - B) = P(A \cup B) - P(B) \Rightarrow 0.4 = 0.7 - P(B) \Rightarrow P(B) = 0.3$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.3}$$



واضح است که اگر داشته باشیم $P(A \cap B) = 0.3$ ، آنگاه مقدار $P(A | B)$ برابر ۱، یعنی حداکثر مقدار خود می‌شود که این مطلب امکان‌پذیر نیز هست و فقط کافی است که $B \subseteq A$ باشد. به نمودار ون زیر دقت کنید:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۲۰، ۱۳۴، ۱۴۶ و ۱۴۷ ریاضی ۱

نکته: تعداد انتخاب‌های r شیء از میان n شیء برابر است با ترکیب r از n که به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

نکته: احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نمایش داده و برابر است با:

$$\text{کل فرات ساختمان} = 2 + 3 + 3 = 8$$

با توجه به نکات، داریم:

$$n(S) = \binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

$$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{2} + \binom{3}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \times \binom{3}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{3}{1} \times \binom{3}{2} = 9 + 18 + 18 + 9 + 3 + 3 = 60$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{70} = \frac{6}{7}$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۰ آمار و احتمال

نکته ۱: اگر همه داده‌های آماری را در عدد حقیقی a ضرب کنیم، میانگین و انحراف معیار در a ضرب می‌شوند.

نکته ۲: اگر همه داده‌های آماری را با عدد حقیقی b جمع کنیم، میانگین با b جمع می‌شود، اما انحراف معیار تغییری نمی‌کند.

نکته ۳: ضریب تغییرات داده‌های x_1 تا x_n را با CV نمایش داده و برابر است با خارج‌قسمت تقسیم انحراف معیار بر میانگین: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر داده‌های ۱، ۴، ۴، ۶، ۷، ۸ را چهار برابر کرده و به علاوه ۲۰ کنیم، داده‌های ۲۴، ۳۶، ۳۶، ۴۴، ۴۸، ۵۲ حاصل می‌شوند. همه داده‌ها ضرب در ۴ شده و سپس به علاوه ۲۰ شده‌اند. با توجه به نکات، داریم:

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{4\sigma_1}{4\bar{x}_1 + 20} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1 + 5}$$

$$\text{میانگین داده‌های اولیه برابر } 5 = \frac{1+4+4+6+7+8}{6} \text{ است و خواهیم داشت:}$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1 + 5} = \frac{\sigma_1}{2\bar{x}_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \right) = \frac{1}{2} CV_1 \Rightarrow CV_1 = 2CV_2$$

نکته: انحراف معیار برآورد میانگین جامعه با نمونه‌ای به اندازه n را با $\sigma_{\bar{x}}$ نمایش داده و برابر است با: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ که در آن σ ، انحراف معیار جامعه است.

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_1}}{\sigma_{\bar{x}_2}} = 11 \Rightarrow \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}} = 11 \Rightarrow \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1}} = 11 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = 121 \Rightarrow \frac{n_2}{24} = 121 \Rightarrow n_2 = 2904$$

با توجه به نکته، داریم:

$$2 + 9 + 0 + 4 = 15$$

بنابراین مجموع ارقام این عدد برابر است با:

۱۴۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۳ و ۴ ریاضیات گسسته

نکته ۱: استدلال به کمک حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال به روش اثبات مستقیم است.
نکته ۲:

(۱) مجموع هر دو عدد زوج و همچنین مجموع هر دو عدد فرد، همیشه زوج است.

(۲) مجموع هر عدد فرد با یک عدد زوج، عددی فرد است.

با توجه به نکات و به روش اثبات مستقیم، اعداد A و B را بررسی می‌کنیم.

A : اگر a زوج و b, c, d فرد باشند، داریم:

$$A = \underbrace{ab}_{\text{زوج فرد}} + \underbrace{bc}_{\text{زوج فرد}} + \underbrace{cd}_{\text{زوج فرد}} + \underbrace{da}_{\text{زوج فرد}} = \text{زوج}$$

پس A همواره زوج است.

B : حالت اول اینکه x و y زوج باشند و z و t فرد، داریم:

$$B = \underbrace{xy}_{\text{زوج زوج}} + \underbrace{yz}_{\text{زوج فرد}} + \underbrace{zt}_{\text{زوج فرد}} + \underbrace{tx}_{\text{زوج فرد}} = \text{فرد}$$

و حالت دوم اینکه x و z زوج باشند و y و t فرد، داریم:

$$B = \underbrace{xy}_{\text{زوج زوج}} + \underbrace{yz}_{\text{زوج زوج}} + \underbrace{zt}_{\text{زوج زوج}} + \underbrace{tx}_{\text{زوج زوج}} = \text{زوج}$$

بنابراین B می‌تواند زوج یا فرد باشد، در نتیجه گزینه ۳ پاسخ است.

۱۴۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۱۴ ریاضیات گسسته

نکته (قضیه تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، اعداد صحیح q و r موجودند به طوری که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$ که در آن a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

با توجه به نکته، داریم: $q = \{1, 2, 3, \dots, 35\} \Rightarrow q \leq 35 \Rightarrow 6q < 215 \Rightarrow 6q < 215 \Rightarrow q < 35$

حال در بین اعداد ۱ تا ۳۵ باید بزرگ‌ترین عددی را انتخاب کنیم که حاصل ضرب آن در ۶، مربع کامل شود، یعنی یک عامل ۶ داشته باشد و یک عامل مربع کامل. عدد مورد نظر ۲۴ است؛ زیرا:

$$6q = 6 \times 24 = 144$$

پس: $q_{\max} = 24 \Rightarrow a_{\max} = 215(24) + 6(24) = 221 \times 24 = 5304$

که مجموعه ارقام این عدد، برابر است با: $5 + 3 + 0 + 4 = 12$

۱۴۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۲۱ و ۲۲ ریاضیات گسسته

نکته ۱: برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم a^n بر b از توان‌های کوچک a شروع کرده و سعی می‌کنیم که در پیمانه b توانی را که با ۱ یا -1 هم‌نهشت است به دست آوریم. سپس با به توان رسانی طرفین هم‌نهشتی یا ضرب طرفین در عدد مناسب، به a^n می‌رسیم.

نکته ۲: به طرفین هم‌نهشتی می‌توان مضاربی از پیمانه را اضافه و کم کرد.

نکته ۳: طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه یکسان را می‌توان در هم ضرب کرد.

$$57 \equiv 2 \Rightarrow 57^9 \equiv 2^9 = 512 \equiv 6$$

با توجه به نکات، داریم:

مشاهده می‌کنیم که عدد ۹ در گزینه‌ها موجود نیست، پس ادامه می‌دهیم:

$$\begin{cases} 57^9 \equiv 6 \\ 57 \equiv 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{نکته ۳}} 57^{10} \equiv 12 \equiv 1$$

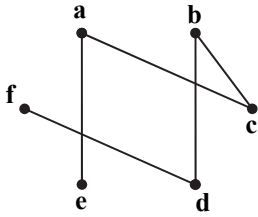
و در نهایت، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 57^9 \equiv 6 \\ 57^{10} \equiv 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{نکته ۳}} 57^{19} \equiv 6 \Rightarrow k = 19$$

۱۴۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۳۶ ریاضیات گسسته

نکته: مجموعه همسایگی باز رأس a در گراف G را با $N_G(a)$ نمایش داده و عبارت است از رئوسی که با a مجاورند و مجموعه همسایگی بسته رأس a در گراف G را با $N_G[a]$ نمایش داده و عبارت است از رئوسی که با a مجاورند و خود رأس a . ابتدا گراف G را رسم می‌کنیم: با توجه به نکته و مطابق شکل گراف، داریم:



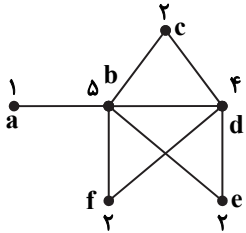
$$\begin{cases} N_G(b) = \{c, d\} \\ N_G[c] = \{a, b, c\} \end{cases} \Rightarrow N_G(b) \cup N_G[c] = \{a, b, c, d\}$$

واضح است که این مجموعه ۴ عضو دارد و گزینه ۳ پاسخ است.

۱۴۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۳۸ ریاضیات گسسته

نکته ۱: در هر گراف ساده، درجه هر رأس عبارت است از تعداد یال‌هایی که از آن رأس می‌گذرد.
نکته ۲: دور به طول $n \geq 3$ در گراف G دنباله‌ای است به صورت $v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ از رئوس گراف G که به جز رأس اول و آخر مابقی رئوس متمایزند و هر رأس با رأس بعدی مجاور است. با توجه به نکته ۱، ابتدا شکل گراف را رسم می‌کنیم:



حال با توجه به نکته ۲، واضح است که این گراف، ۳ دور به طول ۳ (bdfb - bdeb - bcdb) و ۳ دور به طول ۴ (edfbc - cbedc - cbfde) است و مجموعاً ۶ دور دارد.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۴۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۴۴ و ۴۹ ریاضیات گسسته

نکته: در هر گراف ساده G از مرتبه n با درجه ماکزیمم Δ و عدد احاطه‌گری γ داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma \leq n - \Delta$$

با توجه به نکته، می‌توان نوشت:

$$\left\lceil \frac{13}{4+1} \right\rceil \leq \gamma \leq 13 - 4 \Rightarrow 3 \leq r \leq 9 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ m = 9 \end{cases} \Rightarrow 3m - n = 3(9) - 3 = 27 - 3 = 24$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۶۱ ریاضیات گسسته

۱۴۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_i \geq r_i$ ، $1 \leq i \leq k$ برابر است با:

$$\binom{n+k-1-\sum r_i}{k-1}$$

نکته ۲: در محاسبه تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ با شرط، بایستی برای متغیرهایی که شرط ندارند، خودمان شرط $x_i \geq 1$ در نظر بگیریم.

با توجه به نکات، باید تعداد جواب‌های معادله $12 = x + y + z + t$ با شرط $x \geq a$ ، $y \geq 1$ ، $z \geq 1$ ، $t \geq 1$ را برابر ۳۵ قرار دهیم و داریم:

$$\binom{12+4-1-(a+1+1+1)}{4-1} = \binom{12-a}{3} = 35$$

از طرفی می‌دانیم $\binom{7}{3} = 35$ ، پس $12 - a = 7$ و در نتیجه $a = 5$.

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۶۳ ریاضیات گسسته

۱۴۹- پاسخ: گزینه ۲

نکته: برای تشکیل یک مربع لاتین چرخشی سطر اول را به ترتیب ۱ تا n قرار می‌دهیم، آنگاه از سطر دوم به بعد یک واحد یک واحد جلو می‌رویم و ۱ تا n را به ترتیب می‌نویسیم به طوری که اعداد اضافی پایان هر سطر را به خانه‌های خالی اول هر سطر منتقل می‌کنیم.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

با توجه به نکته، مربع لاتین چرخشی مرتبه ۴ به صورت زیر است:

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow 3a + 2b + c = 3 + 4 + 2 = 9$$

۱۵۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۸۱ ریاضیات گسسته

نکته ۱: طبق تعمیم اصل لانه کبوتری اگر $kn + 1$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار گیرند، آنگاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k + 1$ کبوتر در آن جای گرفته است.

نکته ۲: در حل مسائل اصل لانه کبوتری و تعمیم آن، بدترین حالت را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم در بدترین حالت، مسئله برقرار است، پس در همه حالات نیز برقرار خواهد بود.

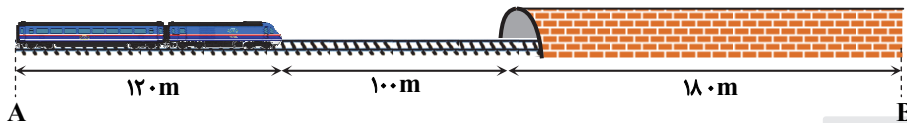
با توجه به نکات، فرض کنید در بدترین حالت ۱۱ گوی آبی، ۸ گوی سبز و m گوی زرد را خارج کرده‌ایم، اما در بین این $m + 19$ گوی از هر چهار رنگ وجود ندارد. حال کافی است یک گوی دیگر خارج کنیم که حتماً قرمز است و اینک یقیناً از هر ۴ رنگ گوی داریم، پس داریم:

$$19 + m + 1 = 27 \Rightarrow m = 7$$

۷ عددی اول است بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

فیزیک

۱۵۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ فیزیک ۳



$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \xrightarrow{\div 3/6} 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{و} \quad 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} \xrightarrow{\div 3/6} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

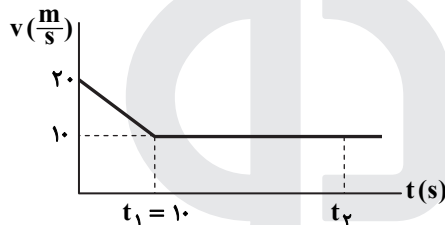
انتهای قطار باید از A به B برسد؛ یعنی قطار می‌بایست ۴۰۰ متر جلو برود. در

قسمت اول، قطار با شتاب $-\frac{m}{s^2}$ سرعت خود را از ۲۰ به ۱۰ متر بر ثانیه می‌رساند.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 10 = -t_1 + 20 \Rightarrow t_1 = 10s$$

$$\Delta x = \frac{10 + 20}{2} \times 10 + 10 \Delta t = 400$$

$$\Delta t = \frac{250}{10} = 25s \Rightarrow t_2 = 10 + 25 = 35s$$



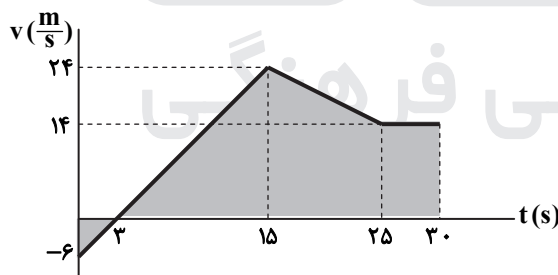
۱۵۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰ فیزیک ۳

در مدت $t = 0$ تا $t = 10s$ یک حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_0$$

$$v_{av} = \frac{v(0) + v(10)}{2} = \frac{v(0) + v(0) + 10a}{2} = \frac{2v_0 + 10a}{2} = v_0 + 5a$$

$$a = 2 \Rightarrow v_{av} = 10 + v_0 \Rightarrow +4 = 10 + v_0 \Rightarrow v_0 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



حالا نمودار سرعت-زمان را رسم می‌کنیم. مسافت طی شده برابر مجموع قدرمطلق تک‌تک مساحت‌هاست.

$$l = \frac{6 \times 3}{2} + \frac{12 \times 24}{2} + \frac{14 + 24}{2} \times 10 + 5 \times 14 = 9 + 144 + 190 + 70 \Rightarrow l = 413 \text{ m}$$

۱۵۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ فیزیک ۳

هر دو نمودار سرعت-زمان خطی است، پس برای هر دو متحرک، شتاب ثابت است.

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15 - 5}{10} = +1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 20}{10} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{1}{2} t^2 + 5t + x_{0A} \\ x_B = -\frac{1}{2} t^2 + 20t + x_{0B} \end{cases}$$

$$\text{همه رسیدن دو متحرک} \quad x_A = x_B \Rightarrow \frac{1}{2} t^2 + 5t = -\frac{1}{2} t^2 + 20t - 36 \Rightarrow t^2 - 15t + 36 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-12) = 0 \Rightarrow t_1 = 3s \text{ و } t_2 = 12s$$

زمان‌های فوق را در معادله مکان-زمان یکی از متحرک‌ها قرار می‌دهیم و از هم کم می‌کنیم. اگر در x_A قرار دهیم، داریم:

$$x_2 - x_1 = \left(\frac{1}{2} \times 12^2 + 5 \times 12\right) - \left(\frac{1}{2} \times 3^2 + 5 \times 3\right) = 72 + 60 - \left(\frac{9}{2} + 15\right) = 132 - 19/2 = 112/2 \text{ m}$$

اگر جهت مثبت را رو به پایین بگیریم، داریم:

$$v_2 - v_1 = g\Delta t \Rightarrow v_N - v_M = 10 \times 1 = 10 \frac{m}{s}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\Delta x \Rightarrow v_N^2 - v_M^2 = 2 \times 10 \times (68/75 - 48/75) \Rightarrow v_N^2 - (v_N - 10)^2 = 400$$

$$\Rightarrow (v_N + v_N - 10)(v_N - v_N + 10) = 400 \Rightarrow 2v_N - 10 = 40 \Rightarrow v_N = 25 \frac{m}{s}$$

$$v_P^2 - v_N^2 = 2a \times PN \Rightarrow v_P^2 - 25^2 = 2 \times 10 \times 48/75 \Rightarrow v_P^2 = 975 + 625 = 1600 \Rightarrow v_P = 40 \frac{m}{s}$$

حالت اول:

نیروی خالص وارد بر جعبه صفر است، پس $f_{k1} = 40N$

$$f_{k1} = \mu_k mg \Rightarrow 40 = \mu_k (2 + 4 \times 2)g = 10g\mu_k$$

حالت دوم:

$$f_{k2} = \mu_k m_2 g = \mu_k (2 + 3 \times 2)g = 8g\mu_k \Rightarrow f_{k2} = 0.8 f_{k1} = 0.8 \times 40 = 32N$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow 40 - 32 = 8a \Rightarrow a = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 = 1 \times 5 + 2 = 7 \frac{m}{s}$$

$$F_N = F = 400N$$

$$f_{smax} = \mu_s F_N = 0.5 \times 400 = 200N \Rightarrow f_{smax} > mg$$

یعنی پس از قطع طناب، وزنه همچنان ساکن می‌ماند؛ پس $F_N = 400N$ و $f_s = mg = 100N$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = \sqrt{400^2 + 100^2} = 100\sqrt{4^2 + 1} = 100\sqrt{17}N$$

$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = 4 \times \frac{10(20-10)\vec{i} + [(400-400) - (100-200)]\vec{j}}{20-10} = 4(10\vec{i} + 10\vec{j}) = 40(\vec{i} + \vec{j})$$

$$F_{av} = 40\sqrt{2}N$$

نیروی خالص وارد بر ماهواره، جاذبه زمین و بزرگی شتاب مرکزگرا برابر g آن نقطه است.

$$a_c = g = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \left(\frac{R_e + \frac{1}{2}R_e}{R_e + \frac{1}{5}R_e}\right)^2 = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$F_N - mg = ma \Rightarrow F_N - 500 = 50 \times 1 \Rightarrow F_N = 550N$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \Delta x = x(5) - x(3) = \frac{1}{2} \times 1 \times 5^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3^2 = \frac{1}{2}(25 - 9) = 8m$$

$$W = F_N \cdot \Delta x = 550 \times 8 = 4400J$$

$$\frac{T}{2} = 200 \Rightarrow T = 400ms$$

در $t = 0$ متحرک در انتهای مسیر است. ($x = +A$)... \rightarrow ۴۰۰ \rightarrow از مرکز دور می‌شود \rightarrow ۳۰۰ \rightarrow به مرکز نزدیک می‌شود \rightarrow ۲۰۰ \rightarrow از مرکز دور می‌شود \rightarrow ۱۰۰ \rightarrow به مرکز نزدیک می‌شود \rightarrow $t = 0$

هرگاه متحرک از مرکز دور شود انرژی جنبشی و تندی وزنه کم می‌شود.

هرگاه متحرک به مرکز نزدیک شود، بزرگی شتاب و انرژی پتانسیل کشسانی کم می‌شود.

بنابراین در $t = 120ms$ و $t = 360ms$ ، انرژی جنبشی و تندی در حال کاهش و انرژی پتانسیل کشسانی و بزرگی شتاب در حال افزایش است.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{(m+420)}{\frac{9k}{m}}} \xrightarrow{T=\frac{\Delta t}{N}} \frac{20}{25} = \sqrt{\frac{m+420}{9m}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = \sqrt{\frac{m+420}{9m}} \Rightarrow 25 \times 9m = 36(m+420) \Rightarrow 25m = 4m + 4 \times 420 \Rightarrow 21m = 4 \times 420 \Rightarrow m = 80g$$

$$\frac{2}{2}\lambda = 18 \cdot \text{cm} \Rightarrow \lambda = 12 \cdot \text{cm} = 1/2m$$

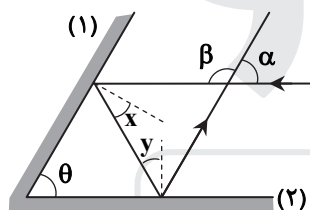
$$\lambda = vT \Rightarrow 1/2 = 20 \cdot T \Rightarrow T = \frac{1/2}{20} = 0.025s$$

با توجه به جهت انتشار موج، نقطه M که الآن در وضعیت $y = 0$ است بلافاصله پس از این لحظه بالا خواهد رفت.

$$\begin{aligned} & \cdot \xrightarrow{\frac{T}{4}} A \xrightarrow{\frac{T}{2}} -A \xrightarrow{T} -A \\ \Delta t &= \frac{T}{4} + \frac{T}{2} + T = 7\frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = 0.175s \end{aligned}$$

وقتی منبع حرکت می‌کند در جلوی آن λ کم شده و در پشت آن λ زیاد می‌شود و اگر منبع ساکن باشد در هر دو طرف آن λ یکسان است.

اگر فاصله منبع و شنونده در حال کم شدن باشد $f_0 > f_s$ ، اگر این فاصله در حال زیاد شدن باشد $f_0 < f_s$ و اگر این فاصله ثابت باشد $f_0 = f_s$ است.

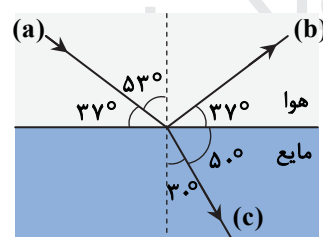


$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \theta \\ \beta &= 2x + 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 2\theta$$

$$(90 - x) + (90 - y) + \theta = 180 \Rightarrow x + y = \theta$$

$$\beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

بسامد هر سه برابر است و تندی انتشار و طول موج (a) و (b) که در یک محیط هستند نیز برابر است.

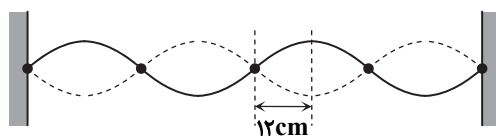


$$\theta_1 = 53^\circ \text{ و } \theta_2 = 37^\circ$$

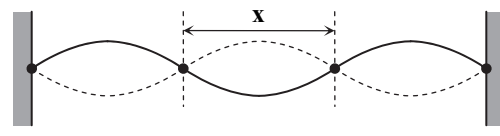
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{0.8}{0.6} \Rightarrow \frac{3 \times 10^8}{v_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow v_2 = \frac{15}{8} \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$200 = f_4 = 4f_1 \Rightarrow f_1 = 50 \text{ Hz}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda}, v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f_1' = 2f_1 = 100 \text{ Hz} \Rightarrow f_3 = 3f_1' = 300 \text{ Hz}$$



شکل تار در هماهنگ چهارم
 $l = 8 \times 12 = 96 \text{ cm}$



شکل تار در هماهنگ سوم
 $x = \frac{l}{3} = 32 \text{ cm}$

برای یک منبع نقطه‌ای، جبهه‌های موج به شکل کره‌ی هستند، پس انرژی منبع از سطح یک کره به شعاع ۶ متر عبور می‌کند که گیرنده به مساحت 100 cm^2 بخشی از سطح این کره است.

$$\frac{E_{\text{دریافتی}}}{E_{\text{تولیدشده}}} = \frac{A_{\text{گیرنده}}}{A_{\text{کره}}} = \frac{A}{4\pi R^2} = \frac{100 \times 10^{-4}}{4\pi \times 36} = \frac{10^{-2}}{4\pi \times 36}$$

$$E_{\text{تولیدشده}} = P\Delta t, E_{\text{دریافتی}} = nhf = \frac{nhc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{10^{-2} \times 110\pi \times 60}{4\pi \times 36} = \frac{n \times 6 / 6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5 / 4 \times 10^{-7}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5 / 4 \times 11 \times 6 \times 10^{-7}}{4 \times 36 \times 6 / 6 \times 3 \times 10^{-26}} = \frac{1}{8} \times 10^{19} = 1 / 25 \times 10^{18}$$

شرط خروج الکترون‌ها از فلز آن است که طول موج پرتوی مورد استفاده از طول موج آستانه‌ی فلز بیشتر نباشد.

$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow 1 / 5 \times 10^{15} = \frac{3 \times 10^8}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \times 10^8}{1 / 5 \times 10^{15}} = 2 \times 10^{-7} \text{ m} = 200 \text{ nm} \Rightarrow \text{از هر دو فلز الکترون خارج می‌شود.}$$

$$K_{\text{max}} = hf - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow K_{\text{maxB}} - K_{\text{maxA}} = hc \left(\frac{1}{\lambda_{0A}} - \frac{1}{\lambda_{0B}} \right)$$

$$= \frac{4 / 1 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{10^{-9}} \left(\frac{1}{250} - \frac{1}{300} \right) = \frac{4 / 1 \times 3 \times 10^2 \times (6 - 5)}{1500} = \frac{4 / 1}{5} = 0.8 \text{ eV}$$

نکته: دقت کنید که با توجه به گزینه‌ها نیازی به محاسبه‌ی اختلاف K_{max} دو فلز نداریم؛ زیرا کافی است توجه کنیم که λ_{0A} کمتر بوده یعنی W_{0A} بیشتر است، پس طبق رابطه $K_{\text{max}} = hf - W_0$ بدون محاسبه معلوم است که K_{maxB} بیشتر خواهد بود.

طول موج 1104 نانومتر یک طول موج فرسرخ است. در طیف هیدروژن اتمی گذار الکترون از مدارهای بالا به مدار $n = 1$ باعث گسیل امواج فرابنفش و گذار به مدار $n = 2$ باعث گسیل امواج مرئی ($n_U = 6, 5, 4, 3$ و $n_L = 2$) یا فرابنفش ($n_U > 6$ و $n_L = 2$) می‌شود. پس با توجه به گزینه‌ها $n_U = 3$ و $n_L = 5$ یا 6 است.

$$\frac{hc}{\lambda} = E_U - E_L = E_R \left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2} \right)$$

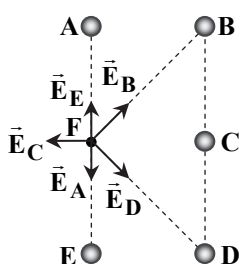
$$\frac{1242}{1104} = 13 / 5 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n_U^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{9} - \frac{1}{n_U^2} = \frac{1242}{13 / 5 \times 1104} = \frac{9}{13 / 5 \times 8} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{n_U^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{36} \Rightarrow n_U = 6$$

$$N = \frac{N_0}{r^n} \Rightarrow \frac{16}{r^{n_A}} = \frac{1}{r^{n_B}} \Rightarrow r^{n_A} = r^{n_B + 4} \Rightarrow n_A = n_B + 4$$

$$N_{0A} = 16N_{0B}, N_A = N_B$$

$$n = \frac{t}{T_1} \Rightarrow \frac{t}{120} = \frac{t}{200} + 4 \Rightarrow \frac{t}{120} = \frac{t + 800}{200} \Rightarrow 120t + 120 \times 800 = 200t \Rightarrow 80t = 120 \times 800 \Rightarrow t = 1200 \text{ روز}$$

وضعیت بردارهای میدان الکتریکی حاصل از ۵ بار نقطه‌ای به شکل روبه‌رو است.



$$E_B = E_D = \frac{k|q|}{r^2} = \frac{k \times (3 \cdot nC)}{(\sqrt{2})^2}$$

$$E_{B,D} = \sqrt{E_B^2 + E_D^2} = E_B \sqrt{2}$$

\vec{E}_A و \vec{E}_E قرینه هستند لذا \vec{E}_C باید قرینه $\vec{E}_{B,D}$ باشد، پس اولاً q_C مثبت است و ثانیاً:

$$\frac{k|q_C|}{1^2} = \sqrt{2} \times \frac{k \times (3 \cdot nC)}{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow q_C = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2} nC$$

$$W_t = W_{\text{میدان}} + W_{\text{خارجی}} = \Delta K \Rightarrow W_{\text{میدان}} + (-15 \times 10^{-3}) = \frac{1}{2} \times 0.4 \times 10^{-3} \times (15^2 - 10^2)$$

$$\Rightarrow W_{\text{میدان}} = 0.2 \times 125 \times 10^{-3} + 15 \times 10^{-3} = +40 \times 10^{-3} \text{ J}$$

در جابه‌جایی عمود بر خطوط میدان، کار میدان صفر است (Cos 90° = 0).

$$|W_{\text{میدان}}| = |q| \cdot E \cdot BH \Rightarrow 40 \times 10^{-3} = |q| \times 4 \times 10^5 \times 2 \Rightarrow |q| = \frac{4 \times 10^{-2}}{4 \times 10^5 \times 2} = 5 \times 10^{-8} \text{ C} = 50 \text{ nC}$$

↓
اندازه جابه‌جایی در
امتداد خطوط میدان

جابه‌جایی در راستای میدان، مخالف جهت میدان بوده و کار میدان مثبت است، پس بار ذره منفی است: یعنی $q = -50 \text{ nC}$.

نکته: کار میدان الکتریکی و یا تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به مسیر حرکت بستگی ندارد؛ لذا در این سؤال اگر ذره روی یک مسیر منحنی شکل هم از A به B برود، جواب تغییری نمی‌کند.

۱۷۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۲۸ فیزیک ۲

در تعادل الکتروستاتیکی، میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است و همه نقاط جسم رسانا، هم‌پتانسیل هستند. همچنین بار الکتریکی القایی روی سطح خارجی کره قرار می‌گیرد و داخل آن بدون بار می‌ماند.

۱۷۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۳۳، ۳۵ و ۳۹ فیزیک ۲

$$V = Ed = 10^4 \times 5 \times 10^{-3} = 50 \text{ V}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{9 \times 10^{-12} \times 0.2 \times 0.2}{5 \times 10^{-3}} = \frac{36}{5} \times 10^{-11} \text{ F} = 7.2 \times 10^{-11} \text{ F}$$

$$Q = CV = 7.2 \times 10^{-11} \times 50 = 360 \times 10^{-11} = 3.6 \times 10^{-9} \text{ C} = 3.6 \text{ nC}$$

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \times 3.6 \times 10^{-9} \times 50 = 90 \times 10^{-9} \text{ J} = 90 \text{ nJ}$$

۱۷۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۴۹، ۵۰ و ۵۲ فیزیک ۲

$$V = RI \Rightarrow \Delta V = R\Delta I \Rightarrow 200 = R(0.5 - 0.2) \Rightarrow R = 1000 \Omega$$

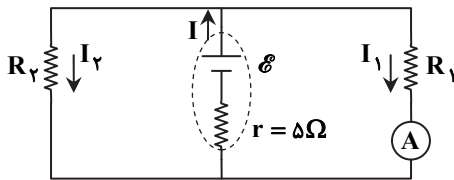
چون استوانه‌ها هم جنس هستند، جرم ۱۰ برابر به معنای حجم ۱۰ برابر است:

$$\ell A = 10 \ell' A' \Rightarrow \ell A = 10 \times 4 \ell \times A' \Rightarrow A' = \frac{1}{40} A$$

$$R = \frac{\rho \ell}{A}, \ell' = 4\ell, A' = \frac{1}{40} A \Rightarrow R' = \frac{4}{1} R = 160 R = 160 \times 1000 \Omega = 1.6 \times 10^5 \Omega$$

۱۷۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۷۳ و ۷۴ فیزیک ۲

حالت اول:



$$R_{eq} = \frac{30 \times 15}{15 + 30} = 10 \Omega$$

$$I = \frac{E}{5 + 10} = \frac{E}{15}$$

$$R_2 I_2 = R_1 I_1 \Rightarrow 15 I_2 = 30 I_1 \Rightarrow I_2 = 2 I_1$$

$$I = I_1 + I_2 = I_1 + 2 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3} I = \frac{E}{45}$$

حالت دوم:

$$R'_{eq} = \frac{30}{2} = 15 \Omega$$

$$I' = \frac{E}{5 + 15} = \frac{E}{20}$$

$$I'_1 = \frac{1}{2} I' = \frac{E}{40}$$

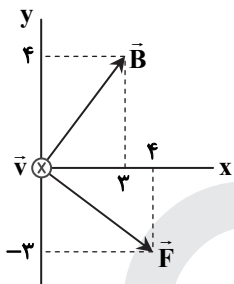
$$\frac{I'_1}{I_1} = \frac{\frac{E}{40}}{\frac{E}{45}} = \frac{45}{40} = \frac{9}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} = \frac{800}{1200} = \frac{2}{3} \\ P = \frac{V^2}{R}, V_2 = V_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow R_2 = 30 \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_3}{P_{1,2}} = \frac{1500}{1200+800} = \frac{3}{4} \\ P = RI^2, I_3 = I_{1,2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{R_3}{R_{1,2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{R_3}{20 \times 30} = \frac{3}{4} \Rightarrow R_3 = \frac{3}{4} \times 12 = 9 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{30}{(9+12)+4} = \frac{6}{5} A$$

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - rI = 30 - \frac{6}{5} \times 4 = 30 - \frac{24}{5} = \frac{126}{5} = 25.2 V$$



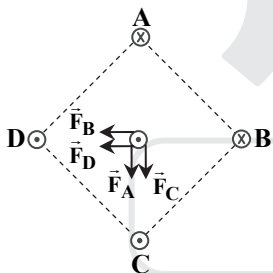
بردار \vec{F} بر \vec{B} و \vec{v} عمود است، پس اولاً بردار \vec{F} در همان صفحه xy بوده و راستای آن موازی بردار $(4\vec{i} - 3\vec{j})$ است و ثانیاً جهت \vec{F} طبق قاعده دست راست به صورت شکل روبه‌رو خواهد بود.

$$F = |q|vB \sin \theta, a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{|q|vB \sin \theta}{m}$$

$$a = \frac{4.0 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^5 \times 5 \times 10^3 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ}{2 \times 10^{-4}} = 500 \frac{m}{s^2}$$

$\vec{a} = 400\vec{i} - 300\vec{j}$ جهت \vec{a} همان جهت \vec{F} است

تذکر: در این سؤال توجه به گزینه‌ها به شما کمک می‌کند. در گزینه‌های ۱ و ۳ بردار شتاب در نتیجه نیرو هم‌راستا با \vec{B} است و فقط در گزینه‌های ۲ و ۴ بردار \vec{a} و در نتیجه \vec{F} بر \vec{B} عمود است. پس کافی است بزرگی شتاب را حساب کنید.



سیم‌های موازی حامل جریان‌های هم‌سو، یکدیگر را جذب می‌کنند و سیم‌های موازی حامل جریان‌های ناهم‌سو، نیروی دافعه بر یکدیگر وارد می‌کنند؛ پس مطابق شکل بر سیم وسطی ۴ نیرو وارد می‌شود و نیروی خالص وارد بر آن خواهد بود.

$$N = \frac{\text{طول سیم}}{\text{محیط هر دور}} = \frac{10}{2\pi \times \frac{2}{100}} = \frac{250}{\pi}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{250}{\pi} \times \frac{2}{l} = 5 \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{2 \times 10^{-4}}{l} = 5 \times 10^{-4} \Rightarrow l = \frac{2}{5} m = 40 \text{ cm}$$

در یک مولد جریان متناوب که در $t = 0$ سطح قاب عمود بر خطوط میدان مغناطیسی باشد و با دوره T بگردد، داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \Phi = BA \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(2\pi t) \\ \Phi = BA \cos(2\pi t) \end{cases}$$

$$t = \frac{3}{40} s \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \frac{3\pi}{2} = -\mathcal{E}_m \\ \Phi = BA \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{12} s \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathcal{E}_m \\ \Phi = BA \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} BA \end{cases}$$

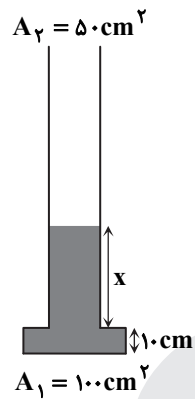
$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow 1200 = \frac{1800 \times 6 + 1000 V_{\text{آب}}}{6 + V_{\text{آب}}} \Rightarrow 200 V_{\text{آب}} = 6 \times 1800 - 6 \times 1200 = 6 \times 600$$

$$\Rightarrow V_{\text{آب}} = \frac{6 \times 600}{200} = 18 \text{ m}^3 \text{ (حجم آبی که باید وارد مخزن شود.)}$$

$$\text{آهنگ شارش حجمی آب: } \frac{V_{\text{آب}}}{\Delta t} = Av \Rightarrow \frac{18}{\Delta t} = 1500 \times 10^{-4} \times 0.8 \Rightarrow \Delta t = \frac{18}{0.12} = 150 \text{ s}$$

ارتفاع مایع در لوله موئین به ارتفاع لوله بستگی ندارد.

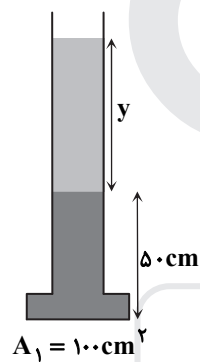
حالت اول:



$$V_{\text{مایع اول}} = 3000 \text{ cm}^3 = 10 \times 100 + 50 \cdot x \Rightarrow x = 40 \text{ cm}$$

$$h_1 = 10 + 40 = 50$$

حالت دوم:



$$V_{\text{مایع دوم}} = 3000 \text{ cm}^3 = 50 \cdot y \Rightarrow y = 60 \text{ cm}$$

$$P = \rho gh \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{50 \rho_1 + 60 \times \frac{2}{3} \rho_1}{50 \rho_1} = \frac{9}{5} \Rightarrow P_2 = \frac{9}{5} P_1$$

فشار حاصل از مایع (فشار پیمانه‌ای)

$$mgh_A + \frac{1}{2} mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2} mv_B^2 \Rightarrow 150 \cdot m + \frac{1}{2} m \times 10^2 = \frac{1}{2} mv_B^2 = 600 \Rightarrow 200m = 600 \Rightarrow m = 3 \text{ kg}$$

$$\frac{1}{2} mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2} mv_C^2 + mgh_C \Rightarrow 600 = 50 \cdot m + \frac{1}{2} mv_C^2 \Rightarrow \frac{1}{2} mv_C^2 = 450 \text{ J}$$

$$\Delta V_{\text{ظرف}} = V_{1, \text{ظرف}} \cdot \alpha \cdot \Delta T = 1200 \times 6 \times 10^{-5} \times 75 = 5.4 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{2, \text{ظرف}} = 1200 + 5.4 = 1205.4 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_{\text{مایع}} = V_{1, \text{مایع}} \cdot \beta \cdot \Delta T = 900 \times 6 \times 10^{-3} \times 75 = 405 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{2, \text{مایع}} = 900 + 405 = 1305 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم مایع خارج شده از ظرف} = 1305 - 1205.4 = 99.6 \text{ cm}^3$$

در تعادل آب و یخ داریم، پس دما 0°C است.

$$50^\circ\text{C آب } 4 \text{ kg} \rightarrow 0^\circ\text{C آب } 4 \text{ kg}$$

$$-10^\circ\text{C } 2/5 \text{ kg یخ می‌شود} \rightarrow 0^\circ\text{C } m \text{ کیلوگرم یخ} \rightarrow m \text{ کیلوگرم یخ } -10^\circ\text{C}$$

$$80^\circ\text{C } \rightarrow \text{قطعه فلز } 80^\circ\text{C}$$

$$= (mc\Delta\theta)_{\text{آب}} + (mc\Delta\theta)_{\text{یخ}} + 2/5 L_f + (CA\theta)_{\text{فلز}} = 0$$

$$4 \times 4 / 2 \times (0 - 50) + m \times 2 / 1 \times (0 - (-10)) + 2/5 \times 336 + 2/1 \times (0 - 80) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بر } 4/2 \text{ تقسیم می‌کنیم}} -200 + 5m + 2/5 \times 80 - 40 = 0 \Rightarrow 5m = 40 \Rightarrow m = 8 \text{ kg}$$

جرم اولیه یخ ۸ kg بوده و ۲/۵ kg ذوب شده است، پس ۵/۵ kg یخ در ظرف باقی مانده است.

۱۸۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۲۶ فیزیک ۱ (پرسش‌های ۲۴ و ۲۶)

- اجسام دارای سطوح سیاه‌رنگ، در دمای مشابه تابش گرمایی شدیدتری دارند (تابش گر قوی‌تر)؛ پس قوری سیاه زودتر خنک می‌شود.
- فلز رسانای قوی‌تری است، پس صندلی آهنی سریع‌تر گرمای دست ما را به بخش‌های دیگر منتقل می‌کند و ما احساس می‌کنیم که خنک‌تر است.
- تف‌سنج نوری در اندازه‌گیری دماهای بالای 1100°C به‌عنوان یک دماسنج معیار انتخاب شده است.

۱۸۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۲۲ فیزیک ۱

$$PV = nRT, n = n_1 + n_2$$

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_1V_1}{T_1} + \frac{n_2R}{\text{خارج شده}}$$

مانده در مخزن اولیه

$$\frac{3 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3}}{360} = \frac{P_1 \times 20 \times 10^{-3}}{300} + 1 \times 8 \Rightarrow \frac{50}{3} = \frac{P_1 \times 10^{-3}}{15} + 8 \Rightarrow \frac{26}{3} = \frac{P_1 \times 10^{-3}}{15}$$

$$\Rightarrow P_1 = 5 \times 26 \times 10^3 = 1/3 \times 10^5 \text{ Pa} = 1/3 \text{ atm}$$

۱۹۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۳۰ و ۱۳۴ فیزیک ۱

$$|W| = S = \frac{(6+8) \times 10^5}{2} \times (40 - 15) \times 10^{-3} = 7 \times 25 \times 10^2 = 17500 \text{ J} = 17/5 \text{ kJ}$$

در این فرایند، حجم گاز زیاد می‌شود (انبساط) یعنی گاز کار انجام می‌دهد. ($W < 0$)

$$\Delta U = W + Q = -17/5 + 32/5 = 15 \text{ kJ}$$

انرژی درونی گاز ۱۵ کیلوژول زیاد می‌شود.

شیمی

۱۹۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۵ تا ۱۹ شیمی ۱

$$1/204 \times 10^{23} \text{ atom} \times \frac{1 \text{ mol}}{6.02 \times 10^{23} \text{ atom}} = 0/2 \text{ mol}$$

۰/۲ مول از اتم‌های این عنصر، جرمی معادل ۴/۸۵ گرم دارد؛ پس، جرم مولی این عنصر، $24/25 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ و جرم اتمی آن

۲۴/۲۵ amu است:

$$M = M_1 + \frac{F_2}{100}(M_2 - M_1) + \frac{F_3}{100}(M_3 - M_1) \Rightarrow 24/25 = A + (1 \times 0/15) + (2 \times 0/05) \Rightarrow A = 24 \xrightarrow{A=2Z} Z = 12$$

۱۹۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲۲ تا ۲۷ شیمی ۱

عبارت‌های «پ»، «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

الف) شیمی‌دان‌ها به فرایندی که در آن یک ماده شیمیایی با جذب انرژی، از خود پرتوهای الکترومغناطیس گسیل می‌کند، نشر می‌گویند.

۱۹۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲۷ تا ۳۹ شیمی ۱

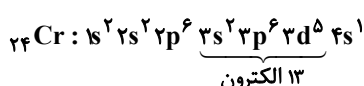
عبارت‌های اول و سوم درست هستند.

عدد اتمی عنصر موردنظر برابر با $2 + 8 + 2 = 12$ است؛ بنابراین آرایش الکترونی آن به صورت $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ می‌باشد و متعلق به دسته s (ششمین عنصر از این دسته)، دوره سوم و گروه ۲ جدول دوره‌ای است. از ۱۲ الکترون این اتم، ۶ الکترون دارای $l = 1$ (زیرلایه p) هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

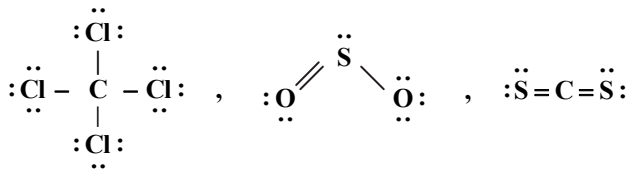
عبارت دوم: عنصر X، کاتیون X^{2+} تشکیل می‌دهد؛ بنابراین با یون اکسید، ترکیب یونی با فرمول شیمیایی XO و با یون فسفید، ترکیب یونی با فرمول شیمیایی X_3P_2 ایجاد می‌کند.

عبارت چهارم: چهارمین عنصر دسته d، 44Cr است که در لایه سوم آن ($n = 3$)، ۱۳ الکترون وجود دارد:



۱۹۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۵۵ و ۵۶ شیمی ۱

در ساختار کربن تتراکلرید، گوگرد دی‌اکسید و کربن دی‌سولفید، به ترتیب ۱۲، ۶ و ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.



بررسی گزینه‌های نادرست:

- ۱) سدیم اکسید (Na_2O) یک ترکیب یونی است و به کار بردن واژه مولکول برای آن، نادرست است.
 ۳) اتم مرکزی در گوگرد دی‌اکسید و کربن دی‌سولفید، به ترتیب دارای ۳ و ۴ جفت الکترون پیوندی (پیوند اشتراکی) است.
 ۴) در سدیم اکسید، اتم سدیم با دست یافتن به آرایش الکترونی مشابه گاز نجیب قبل از خود، پایدار شده است.

۱۹۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱ شیمی ۱

معادله واکنش انجام شده به صورت $2\text{H}_2\text{S} + 3\text{O}_2 \rightarrow 2\text{SO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ است.

$$56 \text{ L g } (\text{H}_2\text{S} + \text{O}_2) \times \frac{1 \text{ mol } (\text{H}_2\text{S} + \text{O}_2)}{22/4 \text{ L } (\text{H}_2\text{S} + \text{O}_2)} \times \frac{2 \text{ mol H}_2\text{O}}{5 \text{ mol } (\text{H}_2\text{S} + \text{O}_2)} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} = 18 \text{ g H}_2\text{O}$$

۱۹۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۰ شیمی ۱

$$0.094 \text{ g Cu}(\text{NO}_3)_2 \times \frac{1 \text{ mol Cu}(\text{NO}_3)_2}{188 \text{ g Cu}(\text{NO}_3)_2} \times \frac{2 \text{ mol NO}_3^-}{1 \text{ mol Cu}(\text{NO}_3)_2} = 0.001 \text{ mol NO}_3^-$$

$$[\text{NO}_3^-] = \frac{0.001}{0.25} = 0.004 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

۱۹۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۸۰، ۸۱ و ۹۵ شیمی ۱

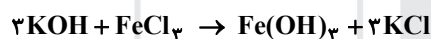
جرم یون کلرید در محلول نهایی FeCl_3 ، با مجموع جرم این یون در m میلی‌گرم از آن و در محلول 10^{-3} مولار آن برابر است.

$$\text{جرم } \text{Cl}^- \text{ در محلول } 10^{-3} \text{ مولار} = \frac{20}{1000} \text{ L} \times \frac{10^{-3} \text{ mol FeCl}_3}{1 \text{ L}} \times \frac{3 \text{ mol Cl}^-}{1 \text{ mol FeCl}_3} \times \frac{35/5 \text{ g Cl}^-}{1 \text{ mol Cl}^-} = 2/13 \times 10^{-3} \text{ g Cl}^-$$

$$\text{FeCl}_3 \text{ در } m \text{ میلی‌گرم} = m \times 10^{-3} \text{ g FeCl}_3 \times \frac{1 \text{ mol FeCl}_3}{162/5 \text{ g FeCl}_3} \times \frac{3 \text{ mol Cl}^-}{1 \text{ mol FeCl}_3} \times \frac{35/5 \text{ g Cl}^-}{1 \text{ mol Cl}^-} = \frac{106/5 m}{162/5} \times 10^{-3} \text{ g Cl}^-$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم Cl}^-}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 213 = \frac{(2/13 \times 10^{-3}) + (106/5 m \times 10^{-3})}{20} \times 10^6 \Rightarrow \frac{106/5 m \times 10^{-3}}{162/5} = 2/13 \times 10^{-3} \Rightarrow m = 3/25$$

$$\text{تعداد مول FeCl}_3 \text{ در محلول} = \left(\frac{20}{1000} \text{ L} \times \frac{10^{-3} \text{ mol}}{1 \text{ L}} \right) + \left(3/25 \times 10^{-3} \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{162/5 \text{ g}} \right) = 4 \times 10^{-5}$$



$$4 \times 10^{-5} \text{ mol FeCl}_3 \times \frac{3 \text{ mol KOH}}{1 \text{ mol FeCl}_3} \times \frac{10^{-3} \text{ m mol}}{1 \text{ mol}} = 0.12 \text{ m mol KOH (میلی‌مول KOH)}$$

۱۹۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳ شیمی ۱

محلول A محلولی فراسیر شده از پتاسیم کلرید با دمای 45°C را نشان می‌دهد که به ازای ۱۰۰ گرم آب، ۴۵ گرم حل‌شونده دارد (به ازای ۱۴۵ گرم محلول، ۴۵ گرم پتاسیم کلرید)؛ پس ۲۹۰ گرم از این محلول دارای ۹۰ گرم پتاسیم کلرید است. اگر ۱۰ گرم از پتاسیم کلرید ته‌نشین شود، به ۲۸۰ گرم محلول سیر شده در همان دما تبدیل می‌شود.

۱۹۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۱۷ شیمی ۱

قانون هنری مربوط به اثر فشار بر انحلال‌پذیری گازها است.

۲۰۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ شیمی ۲

عبارت‌های «الف» و «ت» درست هستند.

با توجه به اینکه فلز A با محلول ترکیب C به صورت طبیعی واکنش می‌دهد ولی فلز B وارد واکنش نمی‌شود، می‌توان نتیجه گرفت واکنش‌پذیری A بیشتر از فلز C و آن هم واکنش‌پذیرتر از فلز B است:

الف) مقایسه واکنش‌پذیری آلومینیم، طلا و مس به صورت $\text{Al} > \text{Cu} > \text{Au}$ است.

ب) نمی‌توان محلول‌های حاوی یون‌های فلز B را در ظرفی از جنس فلز C برای مدت طولانی نگاه‌داری کرد؛ زیرا فلز C با محلول دارای یون‌های فلز B واکنش می‌دهد.

پ) اگر این سه فلز، فلزهای اصلی یک دوره از جدول دوره‌ای باشند، مقایسه شعاع اتمی آن‌ها به صورت $\text{A} > \text{C} > \text{B}$ است، زیرا در فلزها، واکنش‌پذیری با شعاع اتمی، رابطه مستقیم دارد.

ت) واکنش $\text{C(s)} + \text{ASO}_4(\text{aq}) \rightarrow \text{CSO}_4(\text{aq}) + \text{A(s)}$ به صورت طبیعی انجام‌پذیر نیست؛ زیرا واکنش‌پذیری فلز C کمتر از واکنش‌پذیری فلز A است.

راه حل اول:

$$\text{mg CaCO}_3 \times \frac{60 \text{ g CaCO}_3}{100 \text{ g CaCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{100 \text{ g CaCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol CaCO}_3} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{1 \text{ L CO}_2}{0.88 \text{ g CO}_2} \times \frac{80}{100}$$

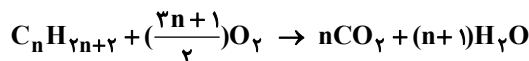
$$= 12 \text{ L CO}_2 \Rightarrow m = 50 \text{ g}$$

راه حل دوم:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{CaCO}_3} = \frac{\text{حجم} \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{CO}_2} \Rightarrow \frac{m \times \frac{60}{100} \times \frac{80}{100}}{1 \times 100} = \frac{0.88 \times 12}{1 \times 44} \Rightarrow m = 50 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹ شیمی ۲

۲۰۲- پاسخ: گزینه ۱



$$0.2 \text{ mol A} \times \frac{n \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol A}} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} = 52 / 8 \text{ g CO}_2 \Rightarrow n = 6$$

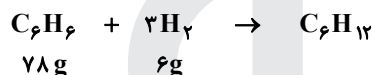
در بین گزینه‌های داده شده، فقط ترکیب گزینه ۱، آلکان ۶ کربنی است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲ شیمی ۲

۲۰۳- پاسخ: گزینه ۴

فرمول اتیلن، C_2H_4 است و جرم مولی آن از گاز اکسیژن (O_2) کمتر می‌باشد؛ بنابراین در دما و فشار یکسان، چگالی کمتری دارد. بررسی سایر گزینه‌ها:

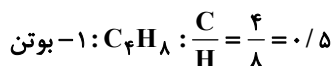
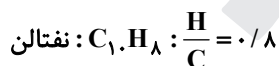
(۱) بنزن دارای ۳ پیوند دوگانه است و هر مول از آن با ۳ مول گاز هیدروژن به‌طور کامل واکنش می‌دهد:



$$\text{درصد افزایش جرم} = \frac{6}{78} \times 100 = 7.7\%$$

(۲) فرمول مولکولی ترکیبی با ساختار داده شده مانند ۲-پنتن (آلکن ۵ کربنی)، C_5H_{10} است.

(۳)



▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ شیمی ۲

۲۰۴- پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت «ب» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) در شرایط یکسان، نمونه‌ای که ظرفیت گرمایی بزرگ‌تری دارد، تغییر دمای کمتری خواهد داشت.

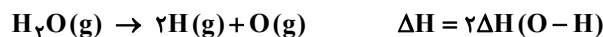
(پ)

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow c = \frac{20000}{100 \times 100} = 2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$$

(ت) در فشار ۱ atm و دمای 25°C ، انرژی گرمایی ۱۰۰ گرم آب بیشتر از انرژی گرمایی ۵۰ گرم آب است. (اشاره به گرمای یک نمونه ماده، غلط است.)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸ شیمی ۲

۲۰۵- پاسخ: گزینه ۲



$$1 \text{ mol H}_2\text{O} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{230 \text{ kJ}}{4/5 \text{ g H}_2\text{O}} = 920 \text{ kJ} \Rightarrow 2\Delta H(\text{O-H}) = 920 \Rightarrow \Delta H(\text{O-H}) = 460 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵ شیمی ۲

۲۰۶- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار، واکنش (III) واکنشی گرماگیر با معادله شیمیایی $\text{E} \rightarrow \text{C} + \text{D}$ و آنتالپی ۱۰۵ کیلوژول است که از جمع معادله‌های شیمیایی (I) و (II) به‌دست می‌آید.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸ شیمی ۲

۲۰۷- پاسخ: گزینه ۱

$$4/5 \text{ g NO} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} \times \frac{4 \text{ mol H}_2\text{O}}{2 \text{ mol NO}} = 0.3 \text{ mol H}_2\text{O}$$

$$\bar{R}(\text{H}_2\text{O}) = \frac{0.3}{2} = 0.15 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{جرم مصرف شده Cu} = 0.3 \text{ mol H}_2\text{O} \times \frac{3 \text{ mol Cu}}{4 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{64 \text{ g Cu}}{1 \text{ mol Cu}} = 14.4 \text{ g Cu}$$

$$\text{جرم Cu باقی‌مانده} + \text{جرم مصرف شده Cu} = 14.4 / 4 + 6 = 20.4 \text{ g}$$

۲۰۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۰۰ تا ۱۰۵ شیمی ۲

فقط عبارت «پ» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: نیروهای بین مولکولی آب قوی‌تر از نیروهای بین مولکولی گاز اتن، ولی ضعیف‌تر از نیروهای بین مولکولی پلی اتن است.

عبارت دوم: سلولز و نشاسته نمونه‌هایی از پلیمرهای طبیعی و پلی اتیلن و پلی تترافلوئورو اتن (تفلون)، نمونه‌هایی از پلیمرهای ساختگی هستند.

عبارت چهارم: در واکنش پلیمری شدن، به واکنش دهنده‌ها، مونومر یا تکپار می‌گویند.

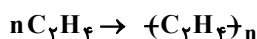
۲۰۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۷ شیمی ۲

راه حل اول:

برای محاسبه تعداد واحدهای تکرار شونده در هر مولکول یک پلیمر، جرم مولی پلیمر را بر جرم مولی مونومر تقسیم می‌کنیم؛ از آنجایی که جرم 0.02 مول پلی اتیلن برابر 1400 گرم است، جرم مولی آن 70000 گرم بر مول می‌باشد.

$$\text{شمار واحدهای تکرار شونده} = \frac{70000}{28} = 2500$$

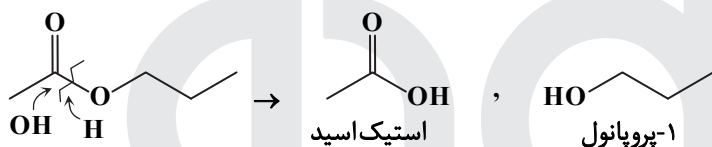
راه حل دوم:



$$\frac{1/4 \times 1000}{n \times 28} = \frac{0.02}{1} \Rightarrow n = 2500$$

۲۱۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۳ شیمی ۲

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.



بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) استر مورد نظر، ۵ کربنی است و از واکنش یک الکل ۳ کربنی با استیک اسید به دست می‌آید.

ب) فرمول مولکولی استر نشان داده شده، $C_5H_{10}O_2$ است که با استر حاصل از واکنش اتانول و بوتانوئیک اسید (با فرمول مولکولی $C_6H_{12}O_2$) متفاوت بوده و ایزومر آن نیست.

۲۱۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸ شیمی ۳

$$HA \text{ تعداد مول} = \frac{200}{1000} L \times 0.1 \text{ mol} \cdot L^{-1} = 0.02 \text{ mol}$$

اگر HA، الکترولیت قوی باشد، به طور کامل یونیده می‌شود، در محلول 0.04 مول یون وجود خواهد داشت و اگر HA، الکترولیت ضعیف باشد، در محلول آن، کمتر از 0.04 مول یون وجود دارد.



پس باید مجموع تعداد مول یون‌ها را حساب کنیم:

$$\text{الکترولیت قوی} \Rightarrow \text{یون } 0.04 \text{ mol} = \frac{\text{یون } 1 \text{ mol}}{6.02 \times 10^{23}} \times 2/40.8 \times 10^{22}$$

مجموع غلظت یون‌ها در محلول 0.2 مولار کلسیم نیترات ($Ca(NO_3)_2$)، برابر 0.6 مولار است؛ زیرا از انحلال هر مول از این ماده در آب، ۳ مول یون تولید می‌شود.

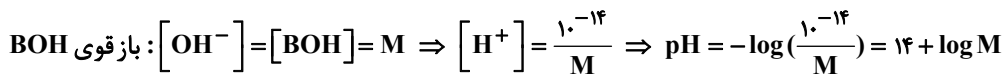
با توجه به اینکه از انحلال هر مول HA در آب، ۲ مول یون ایجاد می‌شود، غلظت محلول HA باید 0.3 مولار باشد تا مجموع غلظت یون‌ها در این دو محلول و در نتیجه رسانایی الکتریکی آن‌ها برابر شود.

۲۱۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵ شیمی ۳

$$pH = 3/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-3/7} = 10^{-4} \times 10^{1/7} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{[H^+]}{M} \times 100 = \frac{2 \times 10^{-4}}{10^{-2}} \times 100 = 2$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \approx \frac{[H^+]^2}{M} = \frac{4 \times 10^{-8}}{10^{-2}} = 4 \times 10^{-6}$$

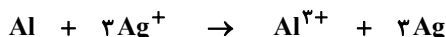


$$\frac{pH(BOH)}{pH(HA)} = \frac{14 + \log M}{-\log M} = 6 \Rightarrow \log M = -2 \Rightarrow M = 10^{-2} = 0.01 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

در سلول گالوانی حاصل از نیم‌سلول‌های استاندارد D و A، الکتروود A به دلیل داشتن پتانسیل کاهش بیشتر، کاتد است و با گذشت زمان، جرم الکتروود آن افزایش می‌یابد.

قدرت کاهندگی: $D > C > A > B^-$

قدرت اکسندگی: $B^- > A^{2+} > C^{2+} > D^{2+}$



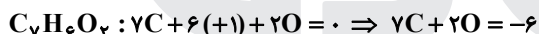
غلظت اولیه: ۱ ۱

$$\text{غلظت پس از ۵ دقیقه: } 1-3x \quad 1+x \quad \Rightarrow 1+x = 3(1-3x) \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = 0.2$$

$$\text{مول مصرف شده } Ag^+ = (3x) \frac{\text{mol}}{L} \times 2L = 0.6 \times 2 = 1.2 \text{ mol}$$

$$\bar{R}(Ag^+) = \frac{1.2 \text{ mol}}{\Delta \text{ min}} = 0.24 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

الف) در ساختار این مولکول، ۳ نوع اتم کربن با عددهای اکسایش -۱، ۰ و +۳ وجود دارد.
ب) مجموع عددهای اکسایش اتم‌های اکسیژن و اتم‌های کربن این مولکول برابر -۶ است.



پ) در این مولکول، بیشترین عدد اکسایش مربوط به اتم کربن در گروه کربوکسیل (+۳) و کمترین عدد اکسایش مربوط به اتم اکسیژن (-۲) است.

$$3 - (-2) = 5$$

عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

ب) در ساختار الماس، هر اتم با ۴ پیوند اشتراکی به ۴ اتم دیگر متصل است، ولی در ساختار سیلیس (SiO_2)، هر اتم اکسیژن به دو اتم سیلیسیم متصل شده است.

در مولکول‌های آمونیاک، متان، آب و هیدروژن سولفید، برخلاف مولکول‌های گوگرد دی‌اکسید، گوگرد تری‌اکسید و کربن تتراکلرید، تراکم الکترون‌ها و بار منفی روی هسته اتم مرکزی بیشتر از اتم‌های اطراف است.

طبق اصل لوشاتلیه، واکنش در جهت مصرف SO_3 یعنی در جهت برگشت پیشرفت می‌کند، ولی مقدار ثابت تعادل تغییر نمی‌کند.

$$K = \frac{[SO_3]^2}{[SO_2]^2 [O_2]} = \frac{\left(\frac{1/6}{2}\right)^2}{\left(\frac{0.4}{2}\right)^2 \left(\frac{0.4}{2}\right)} = \frac{0.64}{0.4 \times 0.2} = 8.0$$

همه عبارت‌های داده شده، نادرست هستند.

- پارازایلن برخلاف ترفتالیک اسید، در نفت خام وجود دارد.
- جرم مولی پارازایلن ($C_{14}H_{10}$) با بنزآلدئید (C_7H_6O) برابر است، اما واضح است که جرم مولی ترفتالیک اسید ($C_8H_6O_4$) از جرم مولی اتیل بوتانوات ($C_8H_{16}O_2$) بیشتر می‌باشد.
- ترفتالیک اسید برخلاف پارازایلن، قطبی است؛ بنابراین انحلال‌پذیری آن در آب بیشتر است.
- پارازایلن، هیدروکربن است و در ساختار آن، الکترون ناپیوندی وجود ندارد و به عبارت دیگر، نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در آن برابر با صفر است، در حالی که این نسبت برای ترفتالیک اسید، بزرگ‌تر از صفر می‌باشد.