

گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۰

سال تحصیلی ۹۹-۰۰

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۰ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

آزمون آزمایشی ۲۵ خرداد ۱۴۰۰

آزمون اختصاصی

گروه آزمایشی علوم ریاضی

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۵۵	۱۰۱	۱۵۵	۸۵ دقیقه
فیزیک	۴۵	۱۵۶	۲۰۰	۵۵ دقیقه
شیمی	۳۵	۲۰۱	۲۳۵	۳۵ دقیقه
تعداد کل پرسشها: ۱۳۵		مدت پاسخگویی: ۱۷۵ دقیقه		

مرحله ۱۶

دفترچه شماره ۲



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی درس های عمومی و اختصاصی را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات تلای خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

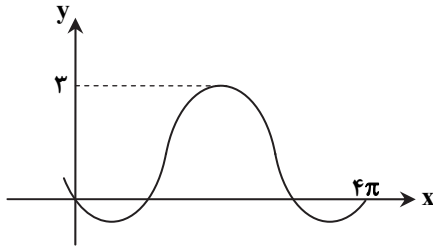
۱۰۹- حاصل $A = \frac{2\sin \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}}{2\sin \frac{6\pi}{5}}$ کدام است؟

- (۱) $2\cot \frac{\pi}{5}$ (۲) $-2\cot \frac{\pi}{5}$ (۳) $\cot \frac{\pi}{5}$ (۴) $-\cot \frac{\pi}{5}$

۱۱۰- مجموع جوابهای معادله مثلثاتی $2 = \frac{\sin 3x}{\cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9\pi}{4}$ (۲) $\frac{7\pi}{4}$ (۳) $\frac{11\pi}{4}$ (۴) $\frac{13\pi}{4}$

۱۱۱- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 - a\cos(bx - \frac{\pi}{3})$ به صورت روبه‌رو است. مقدار $f(\frac{7\pi}{8})$ کدام است؟



- (۱) $1 - \sqrt{2}$
(۲) $1 - \sqrt{3}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱۲- در یک دنباله حسابی با بیست جمله، مجموع تمام جملات ۱۰۸۰ و مجموع جملات با شماره‌های زوج ۵۷۰ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۳- ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$ به صورت $f^{-1}(x) = \log_2 g(x)$ است. مقدار $g(\frac{2}{3})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۴- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ و بدانیم $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \times g(x)) = 2$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۴

۱۱۵- تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)[x] & 1 \leq x < 3 \\ bx+8 & x \geq 3 \end{cases}$ روی بازه $[1, +\infty)$ پیوسته است. مقدار b کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۴

۱۱۶- اگر خط $y = 5$ مجانب افقی تابع $f(x) = ax - \frac{x^2 - 3x}{x+b}$ باشد، مجانب قائم f کدام است؟

- (۱) $x = 2$ (۲) $x = -2$ (۳) $x = 3$ (۴) $x = -3$

محل انجام محاسبات

۱۱۷- مقدار مشتق تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} + \tan \sqrt{x})$ به ازای $x = \pi^2$ چند برابر $\frac{1}{\pi}$ است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۱۱۸- اگر $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} - 2[x]$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3-h) - f(3)}{h}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) $1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1$

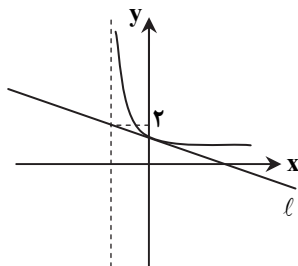
۱۱۹- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x+1}$ در بازه $[0, 4]$ چقدر از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = 1$ بیشتر است؟

- ۱ (۱) $0/1$ (۲) $0/2$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

۱۲۰- نمودار تابع $f(x) = 4x^3 - x^{\frac{4}{3}}$ در کدام بازه اکیداً صعودی و تقعر آن روبه بالا است؟

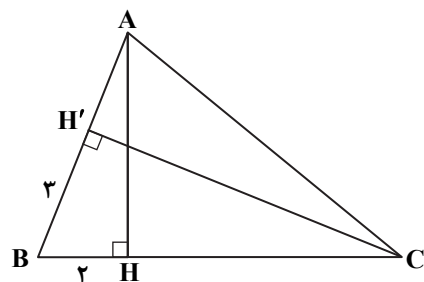
- ۱ (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(-2, 0)$

۱۲۱- در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \frac{a}{x+2}$ و خط مماس بر آن در $x = 0$ رسم شده است. مقدار a کدام است؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۱۲۲- در شکل، اگر $AH = 5$ ، طول ارتفاع CH' کدام است؟



- ۱ (۱) ۶
۲ (۲) $7/5$
۳ (۳) ۷
۴ (۴) $8/5$

۱۲۳- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ دارای تنها سه مماس مشترک هستند. اگر بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره ۲۶ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ باشد، شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

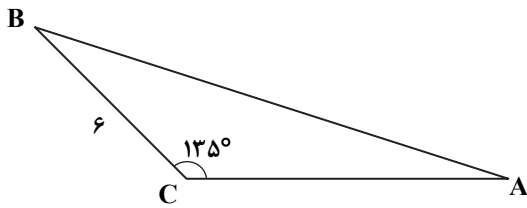
- ۱ (۱) ۱۳ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۲۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۲، در رأس A عمودی بر AC خارج می‌کنیم تا امتداد BC را در K قطع کند. اندازه AK کدام است؟

- ۱ (۱) ۴ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات

۱۲۵- در شکل روبه‌رو، داریم: $\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \sqrt{2}$. اندازه ضلع AB، چند برابر $\sqrt{10}$ است؟

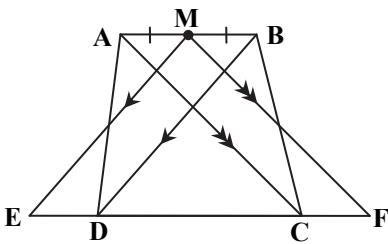


- (۱) $\frac{7}{2}$
- (۲) $\frac{9}{2}$
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۲۶- در متوازی‌الاضلاعی به اضلاع ۲ و ۵، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت، کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$
- (۲) $5\sqrt{3}$
- (۳) ۲۰
- (۴) ۱۰

۱۲۷- در دوزنقه ABCD با قاعده‌هایی به اندازه ۲ و ۳ و اندازه ارتفاع ۴، از نقطه M وسط قاعده AB، خطوطی موازی دو قطر دوزنقه رسم کرده‌ایم به طوری که مطابق شکل، امتداد قاعده DC را در نقاط E و F قطع کرده‌اند. مساحت مثلث MEF کدام است؟



- (۱) ۱۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۱۵
- (۴) ۳۰

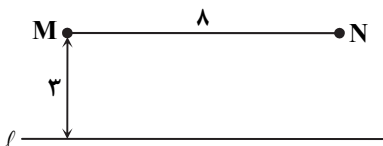
۱۲۸- یک منشور پنج‌پهلوی در نظر بگیرید. در این منشور، هر بال جانبی با چند بال دیگر، متناظر است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۶
- (۳) ۵
- (۴) ۴

۱۲۹- در دو دایره متخارج، زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی برابر 60° است. اگر طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر ۹ باشد، تفاضل شعاع‌های دو دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$
- (۲) $2\sqrt{3}$
- (۳) $3\sqrt{5}$
- (۴) $2\sqrt{5}$

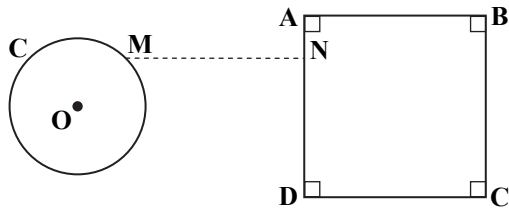
۱۳۰- مطابق شکل پاره خط $MN = 8$ به فاصله ۳ از خط l قرار دارد. اگر P نقطه‌ای روی خط l باشد، کمترین مقدار ممکن برای محیط مثلث MNP کدام است؟



- (۱) ۱۸
- (۲) ۱۶
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۴

محل انجام محاسبات

۱۳۱- دایره $C(O, R)$ و مربع $ABCD$ مفروض‌اند. برای رسم پاره خط MN که M روی دایره و N روی مربع باشد و MN موازی و مساوی باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

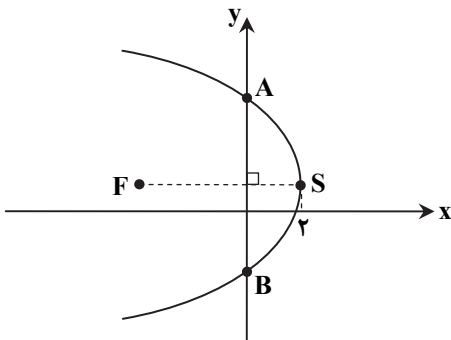


- (۱) دوران
- (۲) بازتاب
- (۳) انتقال
- (۴) تجانس

۱۳۲- دو دایره $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4$ و $x^2 + y^2 + 4x = 12$ چند مماس مشترک دارند؟

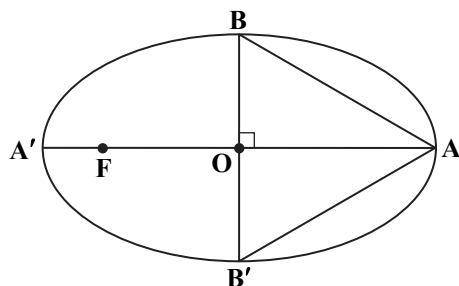
- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۳۳- کانون سهمی شکل روبه‌رو، نقطه $F(-4, 1)$ است. طول پاره خط AB ، کدام است؟



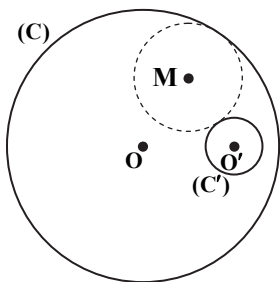
- (۱) $6\sqrt{3}$
- (۲) ۸
- (۳) $8\sqrt{3}$
- (۴) ۱۶

۱۳۴- در بیضی شکل روبه‌رو، مثلث ABB' متساوی‌الاضلاع است. اگر $OF = 2$ باشد، طول بزرگ‌ترین قطر بیضی، کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{3}$
- (۲) ۶
- (۳) $2\sqrt{6}$
- (۴) ۸

۱۳۵- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ متداخل هستند. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر هر دو دایره مماس باشند، کدام است؟



- (۱) دایره
- (۲) بیضی
- (۳) دو دایره
- (۴) سهمی

محل انجام محاسبات

۱۳۶- به ازای کدام مقدار m دستگاه $\begin{cases} (m-1)x + 2y = 5 \\ x + my = m+3 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۳۷- دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ برابر با m است. اگر به همه درایه‌های سطر دوم این ماتریس، m واحد اضافه کنیم، دترمینان آن برابر با ۲۰ می‌شود. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۴ یا ۵ (۲) ۳ یا -۲ (۳) -۵ یا ۴ (۴) -۳ یا ۲

۱۳۸- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} 0 & : i < j \\ 1 & : i = j \\ -2 & : i > j \end{cases}$ مفروض است. حاصل $|A + 3I| - |A - 2I|$ کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۴۸ (۳) ۵۶ (۴) ۷۲

۱۳۹- اگر دو بردار $\vec{a} = (-2, m, 3)$ و $\vec{b} = (3, -1, n-1)$ موازی باشند، آنگاه اندازه بردار $\vec{c} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$ کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۵/۵ (۳) ۱۱ (۴) ۳۳

۱۴۰- در شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ به ضلع واحد، حاصل $\overline{AB} \cdot \overline{BD} + \overline{CD} \cdot \overline{AE} + \overline{AF} \cdot \overline{FC}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) صفر

۱۴۱- عددی به تصادف از مجموعه $S = \{251, 252, \dots, 400\}$ انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۴ بخش پذیر است، ولی بر ۵ بخش پذیر نیست؟

- (۱) $\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{35}$

۱۴۲- حداقل چند نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند تا مطمئن شویم ۳ نفر از آن‌ها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

- (۱) ۱۶۸ (۲) ۸۴ (۳) ۸۵ (۴) ۱۶۹

۱۴۳- چند عدد سه‌رقمی با مجموع ارقام ۲۵ وجود دارد؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۴۴- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد ظاهر شده بزرگ‌تر از ۵ باشد، احتمال اینکه برآمدهای دو تاس یکسان باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{13}$ (۴) $\frac{11}{13}$

۱۴۵- ظرفی شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. مهره‌ای به تصادف از ظرف خارج کرده و پس از مشاهده رنگ آن، به جعبه برمی‌گردانیم و مجدداً مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال آنکه فقط یک بار مهره سفید بیرون آمده باشد، کدام است؟

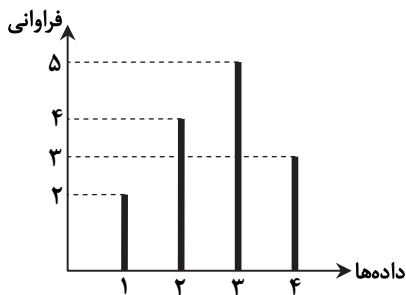
- (۱) $\frac{12}{49}$ (۲) $\frac{17}{42}$ (۳) $\frac{24}{49}$ (۴) $\frac{24}{42}$

۱۴۶- در یک تجربه تصادفی با فضای نمونه‌ای $S = \{x, y, z\}$ ، اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{5}$ دهند، حاصل $P(\{x, y\} | \{y, z\})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{13}$ (۳) $\frac{7}{13}$ (۴) $\frac{7}{15}$

محل انجام محاسبات

۱۴۷- اگر داده‌های نمودار میله‌ای روبه‌رو را با نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم، میانگین داده‌های داخل جعبه، تقریباً کدام است؟



۲/۵ (۱)

۲/۶ (۲)

۲/۸ (۳)

۲/۹ (۴)

۱۴۸- در یک تقسیم، خارج‌قسمت برابر ۴ و باقی‌مانده تقسیم برابر ۲۳ است. حداکثر چند واحد می‌توانیم به مقسوم‌علیه اضافه کنیم تا خارج‌قسمت تغییر نکند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۴۹- کدام یک از روابط زیر درست است؟ ($m \in \mathbb{Z}$)

(۲) $[m^5, (m^3, m^2)] = |m^5|$

(۱) $(4m, 8m^2) = |8m|$

(۴) $([m^2, m], m) = m$

(۳) $[4m, 8m^3] = 8m^3$

۱۵۰- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_i > i$ به‌ازای $1 \leq i \leq 5$ دارد؟

۱۰۰۱ (۴)

۲۱۰ (۳)

۱۲۶ (۲)

۷۰ (۱)

۱۵۱- چند عدد عرقمی با ارقام ۴, ۴, ۲, ۲, ۰, ۰ می‌توان ساخت؟

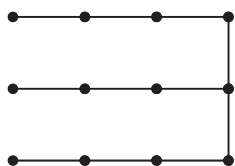
۳۰ (۴)

۶۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۴۸۰ (۱)

۱۵۲- در گراف شکل روبه‌رو، حداکثر تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر مینیمال کدام است؟



۵ (۱)

۶ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۵۳- تعداد مسیرهای به طول حداقل دو در گراف P_7 ، کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲)

۲۸ (۱)

۱۵۴- در چه تعداد از زیرگراف‌های گراف P_4 با رئوس متمایز $\{a, b, c, d\}$ ، مقدار γ برابر ۲ است؟

۱۶ (۴)

۱۰ (۳)

۱۳ (۲)

۱۵ (۱)

۱۵۵- مجموع درایه‌های یک مربع لاتین برابر ۷۵ است. این مربع لاتین از مرتبه چند است؟

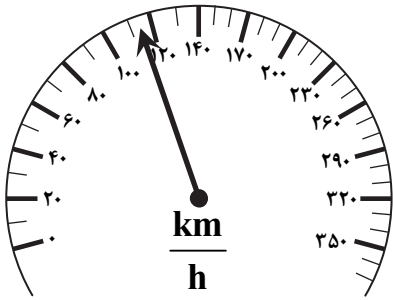
۶ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

محل انجام محاسبات



۱۵۶- شکل روبه‌رو، نمایش یک تندی‌سنج است. کدام گزارش از اندازه‌گیری تندی

اتومبیل درست است؟

(۱) $112 \frac{\text{km}}{\text{h}} \pm 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(۲) $110 \frac{\text{km}}{\text{h}} \pm 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(۳) $112 \frac{\text{km}}{\text{h}} \pm 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(۴) $110 \frac{\text{km}}{\text{h}} \pm 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

۱۵۷- جسمی با تندی $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، در راستای قائم به سمت زمین پرتاب می‌شود. اگر اندازه کار نیروی وزن و اندازه کار نیروی مقاومت هوا، از لحظه پرتاب تا رسیدن به زمین به ترتیب 48 J و 18 J و انرژی جنبشی در لحظه پرتاب 10 J باشد، جرم جسم و تندی آن در لحظه برخورد با زمین چقدر است؟

(۴) $4\sqrt{15} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، 500 g

(۳) $4\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، 500 g

(۲) $10\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، 200 g

(۱) $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، 200 g

۱۵۸- یک پمپ آب قادر است 40 kg آب را توسط لوله از عمق 10 متری، تا سطح زمین بالا آورده و آن را با تندی $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از دهانه لوله خارج نماید.

اگر بازده پمپ 75% باشد، انرژی ورودی به پمپ چند کیلوژول است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

(۴) $7/5$

(۳) 6

(۲) $4/5$

(۱) 4

۱۵۹- دو مایع مخلوط‌نشده مطابق شکل، در ظرف U شکلی قرار دارند. $P_A - P_B$

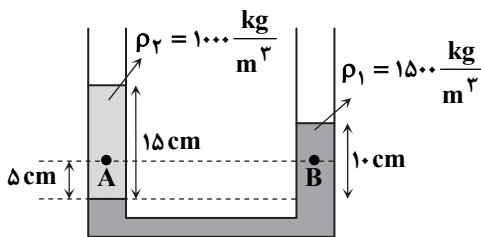
برابر چند پاسکال است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

(۱) 250

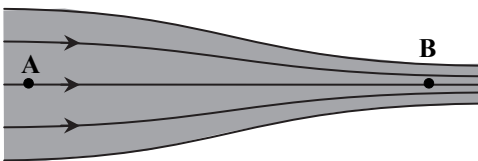
(۲) 300

(۳) 750

(۴) صفر



۱۶۰- در تمام لوله روبه‌رو، آب به آرامی جریان دارد. کدام گزینه در مورد مقایسه تندی (v) و فشار (P) آب در نقاط A و B درست است؟



(۱) $v_A < v_B$ و $P_A < P_B$

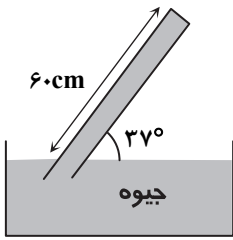
(۲) $v_A > v_B$ و $P_A > P_B$

(۳) $v_A < v_B$ و $P_A > P_B$

(۴) $v_A > v_B$ و $P_A < P_B$

محل انجام محاسبات

۱۶۱- در شکل روبه‌رو، مساحت انتهای بسته لوله ۱cm^2 است. اگر فشار هوا ۷۶cmHg باشد، نیرویی که به انتهای بسته لوله وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ ($\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$ ، $g = ۱۰ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و $\rho_{\text{جیوه}} = ۱۳۶۰۰ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)



۳/۴۲ (۱)

۴/۸۲ (۲)

۵/۴۴ (۳)

۶/۲۸ (۴)

۱۶۲- یک ظرف شیشه‌ای با ضریب انبساط طولی $\frac{1}{10^5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ را از مایعی با همان دمای ظرف، با ضریب انبساط حجمی $\frac{1}{10^4} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ به‌طور کامل پر کرده‌ایم. اگر دمای مجموعه را ۵۰°C افزایش دهیم، ۲۰cm^3 از مایع بیرون می‌ریزد. حجم اولیه مایع تقریباً چند لیتر بوده است؟

۸/۶ (۴)

۷/۵ (۳)

۵/۴ (۲)

۳/۶ (۱)

۱۶۳- چه مدت طول می‌کشد تا توسط یک گرم‌کن الکتریکی با توان ۲kW و بازده ۸۰% ، دمای ۱۰۰g یخ با دمای اولیه ۱۰°C را به آب ۱۰°C تبدیل کنیم؟ ($c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$ ، $c_{\text{یخ}} = ۲۱۰۰ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$ و $L_F = ۳۳۷ \frac{\text{J}}{\text{g}}$)

۹۰s (۴)

۵۰s (۳)

۴۵s (۲)

۲۵s (۱)

۱۶۴- گرماسنجی با ظرفیت گرمایی $۸۴ \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ، حاوی مقداری آب با دمای ۱۰°C است. ۲۴۰ گرم آب صفر درجه سلسیوس را وارد گرماسنج می‌کنیم و در نهایت دمای تعادل مجموعه به $۷/۵^\circ\text{C}$ می‌رسد. جرم آب اولیه موجود در گرماسنج چند گرم بوده است؟ ($c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$)

۷۰۰ (۴)

۵۰۰ (۳)

۴۰۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

۱۶۵- حجم و فشار مقداری گاز کامل تک‌اتمی در یک فرایند بی‌دررو از $V_1 = ۱۰\text{L}$ و $P_1 = ۱/۰\text{atm}$ به $V_2 = ۵\text{L}$ و $P_2 = ۳/۲\text{atm}$ می‌رسد. کار محیط روی گاز در این فرایند کدام است؟ ($C_V = \frac{۳}{۲}R$ ، $۱\text{atm} = ۱۰^۵\text{Pa}$)

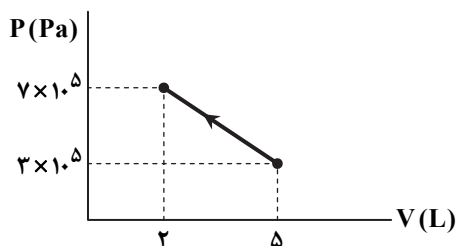
۱۱۰۰J (۴)

۹۰۰J (۳)

۷۰۰J (۲)

۵۰۰J (۱)

۱۶۶- در شکل روبه‌رو، نمودار $P - V$ مربوط به یک فرایند ترمودینامیکی برای یک گاز کامل تک‌اتمی رسم شده است. گرمایی که گاز در این فرایند به محیط می‌دهد، چند ژول است؟ ($C_V = \frac{۳}{۲}R$)



۱۴۰۰ (۱)

۱۶۵۰ (۲)

۱۹۰۰ (۳)

۲۱۵۰ (۴)

محل انجام محاسبات

۱۶۷- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر دمای گازی آرمانی را یک بار طی فرایند هم‌حجم و یک بار طی فرایند هم‌فشار به اندازه ΔT افزایش دهیم، تغییر انرژی درونی در هر دو فرایند یکسان است.
- (۲) در فرایند بی‌دررو اگر فشار گاز افزایش یابد، الزاماً دمای آن نیز افزایش خواهد یافت.
- (۳) در چرخه ماشین‌های بنزینی، مراحل ضربه تراکم و ضربه قدرت را می‌توان فرایند بی‌دررو در نظر گرفت.
- (۴) بر اساس قانون اول ترمودینامیک نمی‌توان یک ماشین گرمایی با بازده ۱۰۰ درصد ساخت.

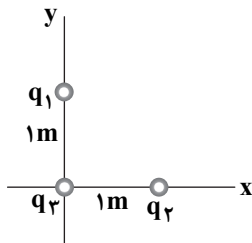
۱۶۸- دو کره کوچک فلزی مشابه دارای بارهای q_1 و $q_2 = -5q_1$ در فاصله d از یکدیگر قرار دارند و اندازه نیرویی که بر یکدیگر وارد می‌کنند، F است. دو کره را با هم تماس می‌دهیم و در همان محل‌ها قرار می‌دهیم. در این حالت اندازه نیرویی که بر یکدیگر وارد می‌کنند، F' می‌شود.

نسبت $\frac{F'}{F}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{9}$

۱۶۹- سه بار الکتریکی $q_1 = q_2 = q_3 = 1 \mu C$ مطابق شکل، روی محورهای مختصات قرار دارند. بار $q_4 = \sqrt{2} \mu C$ را در مکان مناسب، در

فاصله چند متر تا مبدأ مختصات قرار دهیم تا برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 صفر شود؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$



- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) ۲

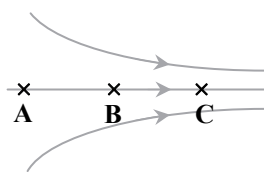
۱۷۰- یک ذره باردار با بار $q = 2 nC$ و جرم $m = 2 \times 10^{-7} g$ تنها تحت اثر یک میدان الکتریکی یکنواخت از نقطه A و از حال سکون شروع به

حرکت می‌کند و با تندی $100 \frac{m}{s}$ به نقطه B می‌رسد. $V_B - V_A$ چند ولت است؟

- (۱) -۵۰۰ (۲) ۵۰۰ (۳) -۳۲۰ (۴) ۳۲۰

۱۷۱- مطابق شکل، یک ذره باردار با بار منفی ($q < 0$) روی مسیر ABC درون میدان الکتریکی حرکت کرده است. اگر تغییر انرژی پتانسیل

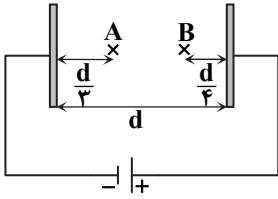
الکتریکی در مسیر AB برابر ΔU_1 و در مسیر BC برابر ΔU_2 باشد، چه مقایسه‌ای بین ΔU_1 و ΔU_2 درست است؟



- (۱) $\Delta U_1 > \Delta U_2 > 0$
(۲) $0 > \Delta U_1 > \Delta U_2$
(۳) $\Delta U_1 < \Delta U_2 < 0$
(۴) $0 < \Delta U_1 < \Delta U_2$

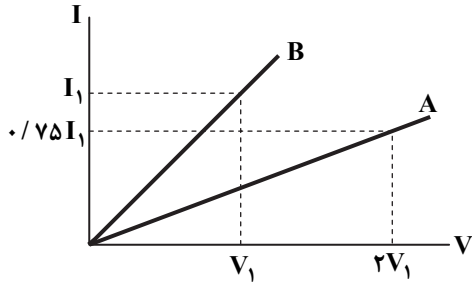
محل انجام محاسبات

۱۷۲- فاصله صفحات خازن تخت روبه‌رو، d و ظرفیت آن $۲\mu F$ است. اگر بار الکتریکی ذخیره شده روی صفحات خازن $۴۸\mu C$ باشد، $V_A - V_B$ چند ولت است؟



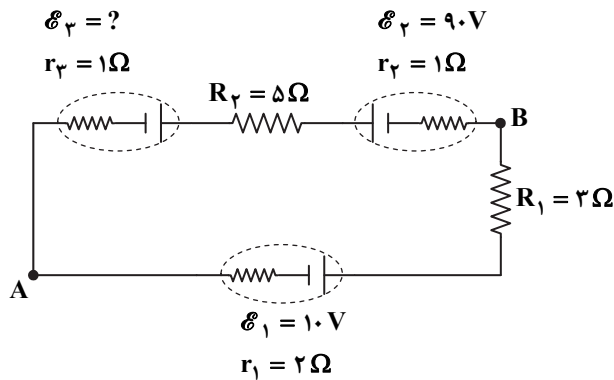
- (۱) -۱۴
- (۲) -۱۰
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۴

۱۷۳- شکل روبه‌رو، نمودار جریان بر حسب ولتاژ را برای دو مقاومت A و B نشان می‌دهد. مقاومت A چند برابر مقاومت B است؟



- (۱) $\frac{3}{8}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{8}{3}$

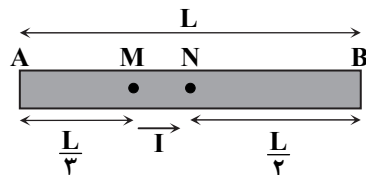
۱۷۴- در مدار شکل روبه‌رو اگر $V_A - V_B = ۲۰V$ باشد، نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E}_γ چند ولت است؟



- (۱) ۸
- (۲) ۲۸
- (۳) ۷۲
- (۴) ۱۷۲

۱۷۵- مطابق شکل، دو سر سیمی به طول L را به اختلاف پتانسیل V وصل کرده‌ایم ($V_A - V_B = V$). نقطه M به فاصله $\frac{L}{3}$ از سر A و

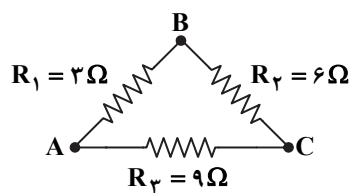
نقطه N به فاصله $\frac{L}{2}$ از سر B قرار دارد. اختلاف پتانسیل دو نقطه M و N ($V_M - V_N$) چند برابر V است؟



- (۱) $\frac{5}{6}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1}{6}$

محل انجام محاسبات

۱۷۶- مقاومت‌های R_1 ، R_2 و R_3 مطابق شکل به یکدیگر وصل شده‌اند. مقاومت معادل بین دو نقطه A و B را R_{AB} و مقاومت معادل بین

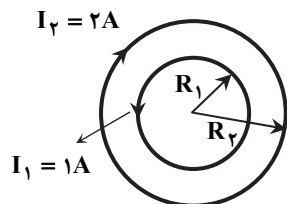


دو نقطه B و C را R_{BC} می‌نامیم. نسبت $\frac{R_{AB}}{R_{BC}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{6}{5}$
- (۳) $\frac{5}{8}$
- (۴) $\frac{9}{5}$

۱۷۷- مطابق شکل، حلقه حامل جریان ۱A درون حلقه حامل جریان ۲A طوری قرار دارد که مراکز دو حلقه بر هم منطبق‌اند. اگر میدان

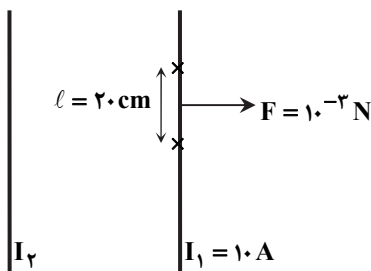
مغناطیسی خالص در مرکز حلقه‌ها صفر باشد، نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ کدام است؟



- (۱) ۳
- (۲) ۲
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\sqrt{3}$

۱۷۸- مطابق شکل، دو سیم موازی (۱) و (۲) حامل جریان‌های $I_1 = 10A$ و I_2 در نزدیکی هم قرار دارند. اگر بزرگی نیروی رانشی که سیم (۲) بر

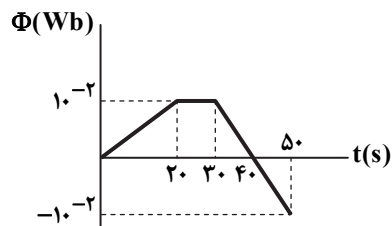
سیم (۱) وارد می‌کند، $F = 10^{-3} N$ باشد، بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در محل سیم (۱) چند تسلا بوده و جهت جریان سیم (۲) کدام است؟



- (۱) 2×10^{-4} ، خلاف جهت جریان I_1
- (۲) 2×10^{-4} ، هم‌جهت با جریان I_1
- (۳) 5×10^{-4} ، خلاف جهت جریان I_1
- (۴) 5×10^{-4} ، هم‌جهت با جریان I_1

۱۷۹- نمودار تغییرات شار مغناطیسی که از یک حلقه می‌گذرد، برحسب زمان مطابق شکل روبه‌رو است. اندازه نیروی محرکه القایی در لحظات

$t_1 = 10s$ و $t_2 = 40s$ به ترتیب از راست به چپ چند ولت است؟

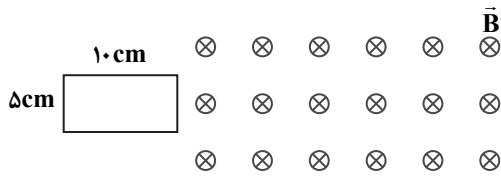


- (۱) $5 \times 10^{-4} V$ ، صفر
- (۲) $2/5 \times 10^{-4} V$ ، صفر
- (۳) $10^{-3} V$ ، $5 \times 10^{-4} V$
- (۴) $10^{-3} V$ ، $2/5 \times 10^{-4} V$

محل انجام محاسبات

۱۸۰- مطابق شکل، یک حلقهٔ رسانای مستطیلی به مقاومت $R = 50 \Omega$ ، با تندی ثابت $v = 8 \frac{m}{s}$ از درون میدان مغناطیسی یکنواخت

$B = 200 G$ عبور می‌کند. مقدار جریان القایی متوسط و جهت آن در مدتی که حلقه وارد میدان می‌شود، کدام است؟



(۱) $3/2 \times 10^{-4} A$ ، ساعت‌گرد

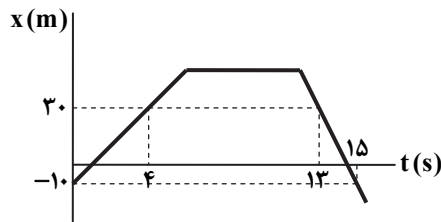
(۲) $1/6 \times 10^{-4} A$ ، ساعت‌گرد

(۳) $3/2 \times 10^{-4} A$ ، پادساعت‌گرد

(۴) $1/6 \times 10^{-4} A$ ، پادساعت‌گرد

۱۸۱- نمودار مکان- زمان در یک حرکت بر خط راست، به شکل زیر است. بزرگی شتاب

متوسط متحرک در مدت $t_1 = 3 s$ تا $t_2 = 13 s$ چند متر بر مجذور ثانیه است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

۱۸۲- یک قطار با تندی ثابت ۱۰۸ کیلومتر بر ساعت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند و از یک تونل عبور می‌کند. (از لحظهٔ ورود ابتدای قطار به تونل تا

خروج تمام قطار از تونل، ۲۵ ثانیه طول می‌کشد.) اگر طول تونل ۶۰۰ متر باشد، چند ثانیه کل قطار در داخل تونل بوده است؟

(۴) ۱۵

(۳) ۵

(۲) ۲۰

(۱) ۱۰

۱۸۳- نمودار شتاب- زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند،

به شکل روبه‌رو است. اگر جابه‌جایی متحرک در مدت $t_1 = 0$ تا

$t_2 = 10$ برابر ۲۴۰ متر باشد، اندازهٔ سرعت متحرک در $t = 0$ چند متر

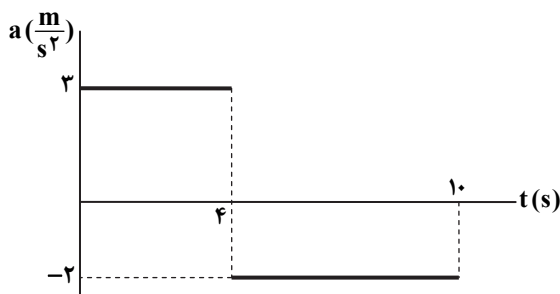
بر ثانیه است؟

(۱) ۶

(۲) ۱۲

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴



۱۸۴- دو متحرک A و B در $t = 0$ از یک محل روی محور X شروع به حرکت

می‌کنند و در $t = 10 s$ مجدداً به هم می‌رسند. اگر نمودار

سرعت- زمان دو متحرک مطابق شکل روبه‌رو باشد، در این مدت ($t = 0$ تا

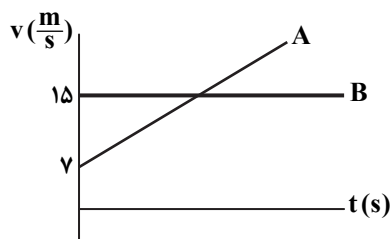
$t = 10 s$) بیشترین فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر چند متر است؟

(۱) ۲۵

(۲) ۲۰

(۳) ۱۵

(۴) ۱۰



محل انجام محاسبات

۱۸۵- شخصی درون آسانسوری روی یک ترازوی فنری ایستاده است. در کدام یک از حالت‌های زیر، عددی که ترازو نشان می‌دهد لزوماً از وزن شخص کمتر است؟

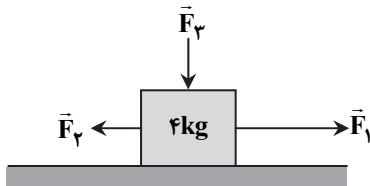
- الف) آسانسور در حالی که به طرف بالا حرکت می‌کند تندی خود را افزایش می‌دهد.
 ب) آسانسور در حالی که به طرف پایین حرکت می‌کند تندی خود را افزایش می‌دهد.
 پ) جهت سرعت آسانسور به طرف پایین باشد.
 ت) جهت شتاب آسانسور به طرف پایین باشد.

- ۱) ب- پ ۲) الف- ب ۳) ب- ت ۴) پ- ت

۱۸۶- فاصله یک ماهواره از سطح زمین R_e است. اگر فاصله ماهواره از سطح زمین سه برابر شود، انرژی جنبشی آن چند برابر می‌شود؟ (R_e شعاع کره زمین است.)

- ۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۸۷- در شکل زیر، وزنه ۴ کیلوگرمی در ابتدا ساکن بوده و ضرایب اصطکاک بین وزنه و سطح افقی، $\mu_s = 0/6$ و $\mu_k = 0/4$ است. اگر سه نیروی $F_1 = 50\text{ N}$ ، $F_2 = 20\text{ N}$ و $F_3 = 20\text{ N}$ مطابق شکل بر وزنه وارد شوند، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر وزنه در این حالت چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

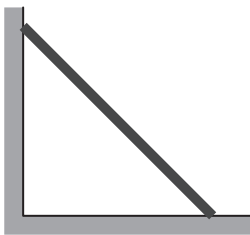


- ۱) ۲۰
 ۲) ۲۴
 ۳) ۳۰
 ۴) ۳۶

۱۸۸- خودرویی به جرم 1000 kg با تندی $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در یک جاده مستقیم در حرکت است. ناگهان راننده مانعی را در فاصله ۵۲۰ متری از خود می‌بیند و پس از $0/5\text{ s}$ (زمان واکنش راننده) ترمز می‌گیرد. اگر خودرو با تندی $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به مانع برخورد نماید، بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر خودرو در حین ترمز گرفتن چند نیوتون است؟ (مقاومت هوا ناچیز است و در مدت زمان واکنش، خودرو با همان تندی ثابت به جلو می‌رود.)

- ۱) ۱۴۶۰ ۲) ۱۴۸۰ ۳) ۱۵۰۰ ۴) ۱۵۲۰

۱۸۹- مطابق شکل، یک میله فلزی به جرم 10 کیلوگرم، به دیوار و کف اتاق تکیه دارد و اصطکاک میله با دیوار ناچیز است. اگر اندازه نیرویی که دیوار بر میله وارد می‌کند، 50 نیوتون و میله ساکن باشد، کدام یک از موارد زیر الزاماً درست است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



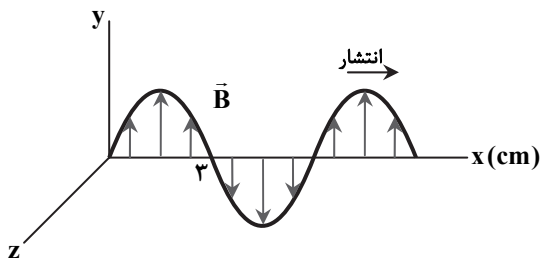
- ۱) اندازه نیرویی که کف اتاق بر میله وارد می‌کند، $50\sqrt{3}$ نیوتون است.
 ۲) ضریب اصطکاک ایستایی بین میله و کف اتاق، $0/5$ است.
 ۳) اندازه نیرویی که کف اتاق بر میله وارد می‌کند، $50\sqrt{5}$ نیوتون است.
 ۴) ضریب اصطکاک ایستایی بین میله و کف اتاق، $0/4$ است.

محل انجام محاسبات

- ۱۹۰- چه تعداد از جملات زیر در حرکت دایره‌ای یکنواخت درست است؟
 الف) سرعت و شتاب ثابت هستند.
 ب) جهت نیروی خالص وارد بر متحرک، ثابت است.
 پ) مسافت‌های طی شده در بازه‌های زمانی هم‌اندازه، برابر است.
 ت) تندی و اندازه شتاب ثابت هستند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- ۱۹۱- شکل زیر، میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی سینوسی در خلأ را در لحظه $t = 0$ نشان می‌دهد. در لحظه $t = 0 / 1 \text{ ns}$ میدان الکتریکی در مکان $x = 1 / 5 \text{ cm}$ در چه جهتی است؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)

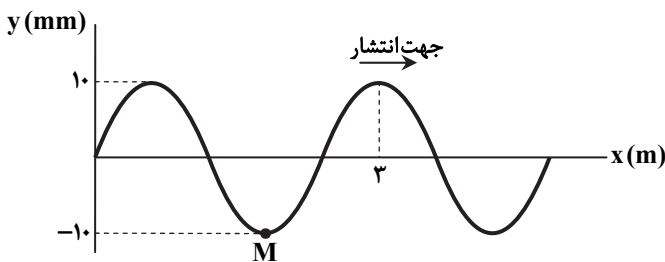


- (۱) +z
 (۲) -z
 (۳) +x
 (۴) -x

- ۱۹۲- شنونده‌ای صدای منبع صوتی را با تراز شدت ۸۸ دسی‌بل دریافت می‌کند. فاصله شنونده از منبع چند برابر شود تا صدای منبع را با تراز شدت ۹۴ دسی‌بل دریافت کند؟ (از جذب انرژی صوتی در محیط و بازتاب صوت چشم‌پوشی کنید و $\log 2 = 0 / 3$)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- ۱۹۳- شکل زیر، موج سینوسی در یک طناب را در لحظه $t = 0$ نشان می‌دهد. تندی نقطه M واقع بر طناب پس از $0 / 6$ ثانیه برای دومین بار بیشینه می‌شود. اگر چگالی خطی جرم طناب $400 \frac{\text{g}}{\text{m}}$ باشد، نیروی کشش طناب چند نیوتون است؟



- (۱) 1/8
 (۲) 3/6
 (۳) 4/8
 (۴) 6/4

- ۱۹۴- یک آونگ ساده در مدت معینی ۷۰ نوسان کامل انجام می‌دهد. چنانچه طول آونگ را به اندازه ۱۵ cm تغییر دهیم، آونگ در همان مدت ۱۰ نوسان بیشتر انجام می‌دهد. طول اولیه آونگ چند سانتی‌متر است؟

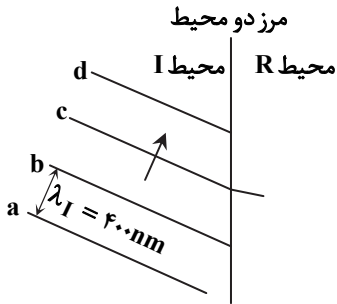
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- ۱۹۵- طول یک تار دو سر بسته ۸۰ سانتی‌متر، جرم آن ۲۰ گرم و نیروی کشش آن ۲۵۰ نیوتون است. اگر فاصله یک شکم از یک سر تار ۵۰ سانتی‌متر باشد، بسامد ارتعاش تار حداقل چند هرتز است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

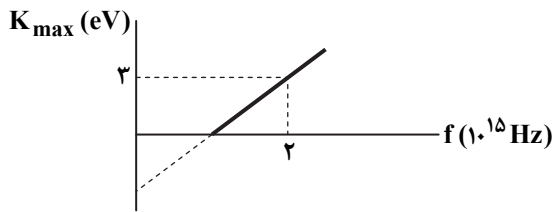
محل انجام محاسبات

۱۹۶- شکل روبه‌رو، جبهه‌های موج نوری را نشان می‌دهد که بر مرز بین دو محیط شفاف I و R فرود آمده است. (ادامه جبهه موج d در محیط R رسم نشده است.) اگر ضریب شکست یکی از محیط‌ها ۱/۲ و ضریب شکست محیط دیگر ۱/۵ باشد، طول موج در محیط R چند نانومتر است؟



- (۱) ۵۰۰
- (۲) ۴۸۰
- (۳) ۴۰۰
- (۴) ۳۲۰

۱۹۷- نمودار زیر، مربوط به بیشینه انرژی جنبشی الکترون‌های جداشده از سطح فلز در یک آزمایش فوتوالکترونیک برحسب بسامد فوتون تابشی است. بسامد آستانه مربوط به این فلز چند هرتز است؟ ($h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$)



- (۱) 8×10^{14}
- (۲) $1/25 \times 10^{15}$
- (۳) $1/25 \times 10^{14}$
- (۴) 8×10^{15}

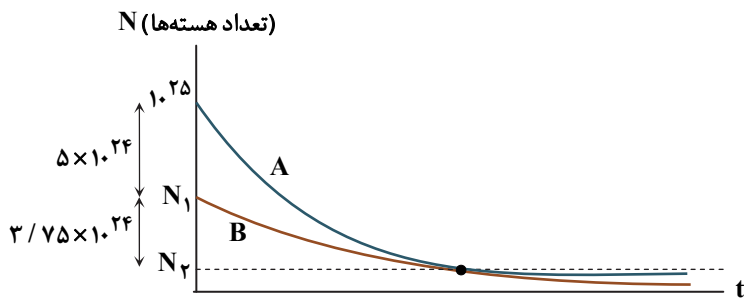
۱۹۸- طول موج سومین خط طیفی اتم هیدروژن در رشته پاشن ($n' = 3$) برحسب نانومتر کدام است؟ ($R = 0.01 \text{ (nm)}^{-1}$)

- (۱) ۷۰۰
- (۲) ۱۲۰۰
- (۳) ۱۴۰۶
- (۴) ۴۹۰۰

۱۹۹- مقدار کربن ۱۴ موجود در یک قطعه زغال کشف‌شده در یک کاوش باستان‌شناسی، تقریباً ۶/۲۵ درصد مقدار عادی کربن ۱۴ موجود در یک نمونه زغال تازه است. اگر نیمه‌عمر کربن ۱۴ برابر ۵۷۳۰ سال باشد، سن این زغال قدیمی تقریباً چند سال است؟

- (۱) ۱۴۰۰۰
- (۲) ۲۳۰۰۰
- (۳) ۱۷۰۰۰
- (۴) ۲۹۰۰۰

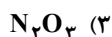
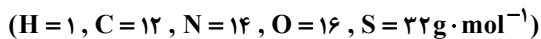
۲۰۰- نمودار واپاشی هسته‌های دو ماده A و B مطابق شکل است. نیمه‌عمر ماده B چند برابر نیمه‌عمر ماده A است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

محل انجام محاسبات

۲۰۱- تعداد اتم‌ها در یک گرم گاز متان با تعداد اتم‌ها در ۶/۲۵ گرم از کدام ترکیب برابر است؟



۲۰۲- عنصرهایی با نماد فرضی «W»، «X»، «Y» و «Z»، به ترتیب از راست به چپ، چهار عنصر متوالی از دوره چهارم جدول دوره‌ای عناصرها

هستند. اگر تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتم «W» برابر با ۱۰ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) در بیرونی‌ترین لایه الکترونی دارای الکترون اتم «Y»، ۱ الکترون وجود دارد.

(۲) حاصل $(n+1)$ بیرونی‌ترین زیرلایه دارای الکترون اتم «Z»، برابر با ۶ است.

(۳) اختلاف عدد اتمی «W» با گاز نجیب قبل از خود، برابر با ۱۰ است.

(۴) رنگ شعله عنصر «X»، با رنگ نور حاصل از بازگشت الکترون از لایه پنجم به لایه دوم در اتم هیدروژن مشابه است.

۲۰۳- کدام گزینه نادرست است؟

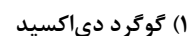
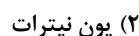
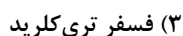
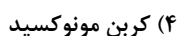
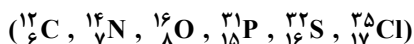
(۱) مقایسه نقطه جوش سه جزء اصلی سازنده هواکره به صورت $\text{O}_2 > \text{Ar} > \text{N}_2$ است.

(۲) از فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، برای خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه‌های تصویربرداری استفاده می‌شود.

(۳) مقدار گاز اکسیژن در لایه‌های گوناگون هواکره با هم تفاوت دارد.

(۴) نام نزدیک‌ترین لایه به زمین، تروپوسفر است که حدود ۷۵ درصد جرم هواکره در آن قرار دارد.

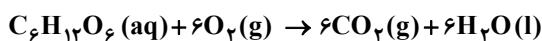
۲۰۴- در ساختار لوویس کدام گزینه زیر، شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی بیشتر است؟



۲۰۵- پس از موازنه معادله شیمیایی $\text{S}_8 + \text{NH}_3 \rightarrow \text{S}_x\text{N}_y + \text{NH}_3\text{Cl}$ ، ضریب استوکیومتری S_8 کدام است؟



۲۰۶- در اثر اکسایش ۰/۰۵ مول گلوکز در دمای 0°C و فشار ۲ atm، چند لیتر گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود؟



۲۰۷- دو محلول از گلوکز و کلسیم برمید با غلظت مولی یکسان و برابر با ۰/۲ مولار در اختیار داریم. کدام گزینه درست است؟



(۱) اگر چگالی محلول‌ها را به تقریب برابر در نظر بگیریم، غلظت آن‌ها برحسب ppm با هم برابر خواهد بود.

(۲) تفاوت جرم گلوکز و کلسیم برمید حل‌شده در یک لیتر از هر محلول، برابر با ۱۰ گرم است.

(۳) غلظت مولی یون برمید در محلول کلسیم برمید، دو برابر غلظت مولی گلوکز در محلول گلوکز است.

(۴) در ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول کلسیم برمید، ۰/۰۴ مول یون وجود دارد.

محل انجام محاسبات

۲۰۸- با توجه به جدول روبه‌رو که جرم مولی ترکیب‌های هیدروژن‌دار برخی عنصرهای گروه ۱۵ و ۱۷ جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد، در کدام گزینه مقایسه میان نقطه جوش دو ترکیب و دلیل آن به درستی آمده است؟

جرم مولی ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	ترکیب مولکولی
۳۴	PH_3
۲۰	HF
۸۱	HBr
۱۷	NH_3
۷۸	AsH_3

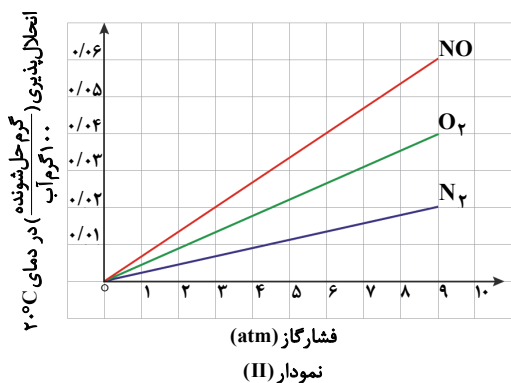
(۱) $\text{HBr} > \text{HF}$; نیروی بین مولکولی هر دو مشابه است، اما HBr جرم مولی بیشتری دارد.

(۲) $\text{HF} > \text{NH}_3$; زیرا HF برخلاف NH_3 دارای مولکول‌های قطبی است.

(۳) $\text{AsH}_3 > \text{PH}_3$; زیرا AsH_3 جرم مولی بیشتری دارد.

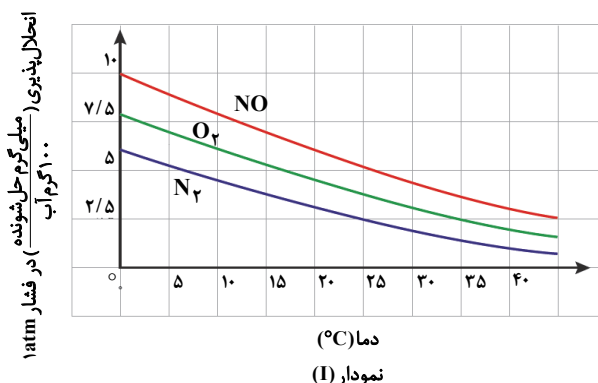
(۴) $\text{HBr} > \text{AsH}_3$; زیرا مولکول‌های HBr برخلاف AsH_3 ، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارند.

۲۰۹- نمونه آبی با دمای ۳۵ درجه سلسیوس، تحت فشار ۶ اتمسفری از جانب گاز نیتروژن مونوکسید قرار دارد. با توجه به نمودارهای زیر، غلظت نیتروژن مونوکسید محلول در این نمونه آب، به تقریب چند ppm است؟ ($\text{NO} = 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



۴۰۰ (۴)

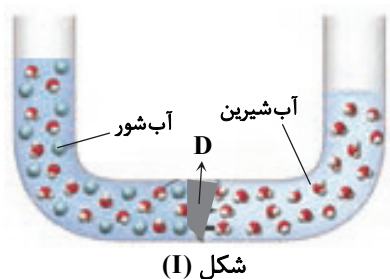
۲۲۵ (۳)



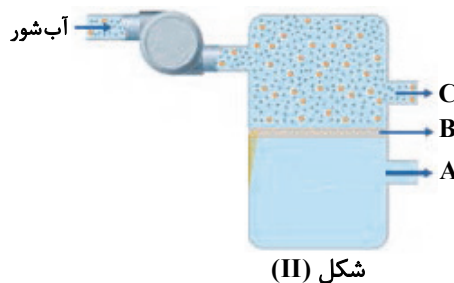
۶۶/۷ (۲)

۳۷/۵ (۱)

۲۱۰- با توجه به شکل‌های داده‌شده، کدام گزینه درست است؟



شکل (I)



شکل (II)

(۱) این شکل‌ها، تهیه آب آشامیدنی به دو روش اسمز و اسمز معکوس را نشان می‌دهند.

(۲) «B» و «D»، غشاء نیمه‌تراوا را نشان می‌دهد که از این غشاء، تنها مولکول‌های کوچکی مانند آب می‌توانند عبور کنند.

(۳) آب تصفیه‌شده در قسمت «A»، دارای میکروپها و ترکیب‌های آلی فرار است.

(۴) غلظت حل‌شونده‌ها در قسمت «C»، نسبت به آب شور ورودی کمتر شده است.

محل انجام محاسبات

داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۰

۲۱۱- اگر در تجزیه ۰/۵ مول آلومینیم سولفات، ۴۰ لیتر فرآورده گازی با چگالی $۲/۴ \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ به دست آید، بازده درصدی واکنش کدام است؟

($\text{O} = ۱۶, \text{S} = ۳۲ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



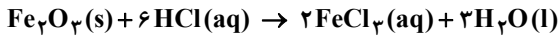
(۴) ۷۰

(۳) ۸۵

(۲) ۷۵

(۱) ۸۰

۲۱۲- نمونه‌ای ناخالص به جرم ۲ گرم از آهن (III) اکسید مطابق معادله شیمیایی زیر به ۲ لیتر محلول هیدروکلریک اسید اضافه شد و به‌طور کامل با آن واکنش داد. اگر پس از کامل شدن واکنش، غلظت آهن (III) کلرید موجود در محلول (۰/۱ مول بر لیتر باشد، درصد خلوص نمونه اولیه کدام است؟ (از تغییر حجم محلول چشم‌پوشی کنید.) ($\text{O} = ۱۶, \text{Fe} = ۵۶ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(۴) ۸۰

(۳) ۸۵

(۲) ۷۰

(۱) ۷۵

۲۱۳- کدام عبارت‌ها درباره ۱- بوتن درست هستند؟

(الف) شمار اتم‌های هیدروژن آن، دو برابر شمار اتم‌های هیدروژن ساده‌ترین آلکان است.

(ب) از آن به‌عنوان سوخت فندک استفاده می‌شود.

(پ) ساختار فرآورده حاصل از بسپارش آن، به‌صورت $\text{-(CH}_2\text{-CH)}_n\text{-}$ است.



(ت) فرمول مولکولی فرآورده حاصل از واکنش آن با آب، $\text{C}_7\text{H}_7\text{OH}$ است.

(۴) پ و ت

(۳) الف و ب

(۲) ب و ت

(۱) الف و پ

۲۱۴- اگر آنتالپی پیوندهای C-H ، C=O ، C=O ، O=O و O-H به ترتیب ۴۱۵، ۸۰۰، ۵۰۰ و ۴۶۵ کیلوژول بر مول باشد، بر اساس واکنش زیر، آنتالپی پیوند C-C چند کیلوژول بر مول است؟



(۴) ۶۹۰

(۳) ۶۵۰

(۲) ۳۴۵

(۱) ۳۲۵

۲۱۵- اگر سرعت متوسط تولید گاز آمونیاک بر اساس معادله واکنش $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{NH}_3(\text{g})$ در بازه زمانی معینی برابر با 4×10^{-2} مول بر ثانیه باشد، سرعت متوسط مصرف گاز هیدروژن بر حسب مول بر ثانیه و سرعت متوسط واکنش بر حسب مول بر دقیقه به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۴) ۱/۲، ۳/۶

(۳) ۱/۲، 6×10^{-2} (۲) 2×10^{-2} ، ۳/۶(۱) 2×10^{-2} ، 6×10^{-2}

۲۱۶- اگر سرعت سوختن گاز متان $6/3 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد، چند دقیقه باید مقدار مشخصی از این گاز بسوزد تا دمای ۲ تن آب 66°C افزایش یابد؟ (ارزش سوختی گاز متان $55 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ می‌باشد و $\text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ، $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4/2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ \text{C}^{-1}$)

(۴) ۲۰۰

(۳) ۱۵۰

(۲) ۱۰۰

(۱) ۵۰

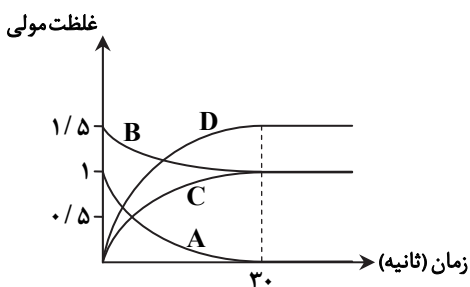
۲۱۷- با توجه به نمودار روبه‌رو که تغییرات غلظت مواد در یک واکنش گازی در یک ظرف نیم‌لیتری با گذشت زمان را نشان می‌دهد، سرعت متوسط واکنش چند مول بر دقیقه است؟

(۱) ۰/۲۵

(۲) ۰/۵

(۳) ۱

(۴) ۲



محل انجام محاسبات

۲۱۸- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- (الف) تعیین تعداد دقیق مونومرهای شرکت کننده در یک واکنش پلیمری شدن ممکن نیست.
 (ب) هرگاه گاز اتن را در فشار بالا گرما دهیم، جامد سفیدرنگی به دست می آید.
 (پ) به واکنش دهنده ها در واکنش پلیمری شدن، تک پار می گویند.

(ت) درشت مولکول ها، دسته ای از پلیمرها هستند که در ساختار آن ها، بخش هایی در سرتاسر مولکول تکرار شده است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱۹- جرم مولی نمونه ای از تفلون، ۸ برابر جرم مولی نمونه ای از پلی وینیل کلرید است. شمار مونومرهای سازنده پلی وینیل کلرید به تقریب چند

برابر شمار مونومرهای سازنده تفلون است؟ ($H = 1, C = 12, F = 19, Cl = 35.5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

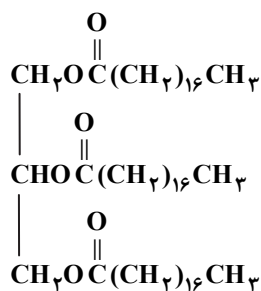
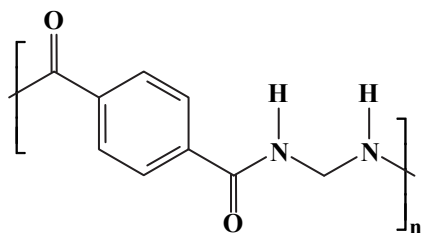
- (۱) ۸ (۲) ۰/۱۲۵ (۳) ۵ (۴) ۰/۲

۲۲۰- کدام گزینه در ارتباط با پلیمر نشان داده شده، درست است؟

- (۱) مانند کولار از دسته پلی آمیدها است و الکل دو عاملی و اسید دو عاملی مونومرهای سازنده آن هستند.
 (۲) اگر در ساختار مونومر نیتروژن دار آن، به جای گروه های آمین، گروه های هیدروکسیل قرار دهیم، اتیلن گلیکول ساخته می شود.
 (۳) فرمول مولکولی اسید دو عاملی سازنده این پلیمر $C_8H_6O_4$ است.
 (۴) اگر در تهیه یک مول از این پلیمر، ۱۰ مول از هر نوع مونومر استفاده شده باشد، ۱۰ مول آب به عنوان فرآورده جانبی تولید می شود.

۲۲۱- با توجه به ساختار روبه رو، کدام عبارت درست است؟

- (۱) مربوط به یک کربوکسیلیک اسید نامحلول در آب است.
 (۲) زنجیرهای هیدروکربنی، بخش های ناقطبی و چربی گریز این مولکول را تشکیل می دهند.
 (۳) نوع گروه عاملی موجود در آن، با گروه عاملی موجود در پلی اتیلن ترفتالات یکسان است.
 (۴) فرمول مولکولی این ترکیب $C_{57}H_{104}O_6$ است.



۲۲۲- کدام گزینه درباره سدیم کلرید نادرست است؟ ($^{23}_{11}\text{Na}$, $^{35}_{17}\text{Cl}$)

- (۱) در واکنش تشکیل آن از اتم های سدیم و کلر، اتم های سدیم با از دست دادن الکترون و اتم های کلر با گرفتن الکترون، به آرایش پایدار گاز نجیب می رسند.
 (۲) جزء ترکیب های یونی دوتایی و الکتروولیتی قوی است.
 (۳) محلول آبی آن، دارای یون های $\text{Na}^+(\text{aq})$ و $\text{Cl}^-(\text{aq})$ است.
 (۴) در حالت جامد و مذاب نارسانا، اما در حالت محلول، رسانای جریان برق است.

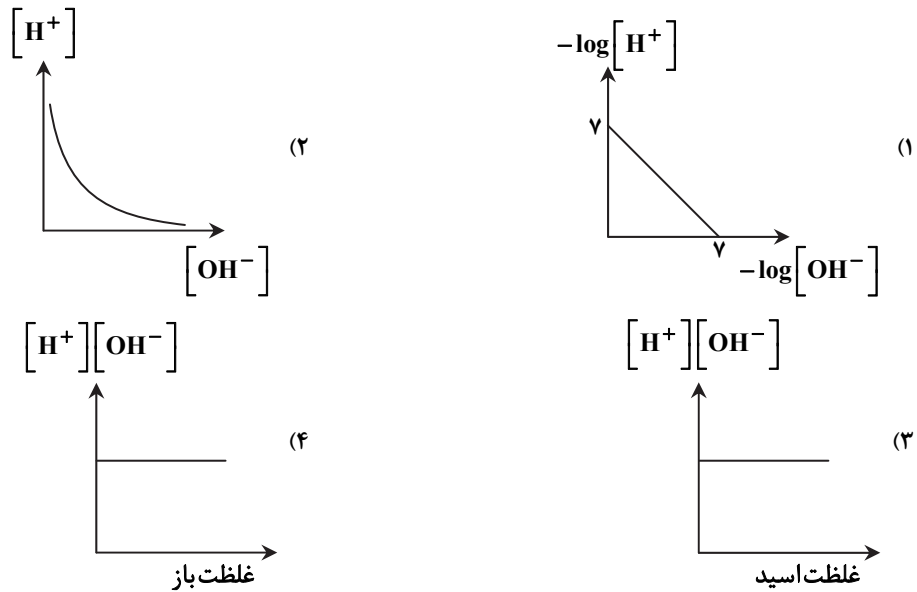
۲۲۳- در محلولی از یک اسید تک پروتون دار با $\text{pH} = 4$ ، تعداد مولکول های یونیده نشده ۳ برابر آنیون های مربوط به یونش اسید موجود در

محلول است. در این شرایط ثابت یونش اسید به تقریب چند مول بر لیتر است؟

- (۱) $3/3 \times 10^{-4}$ (۲) $1/3 \times 10^{-4}$ (۳) $3/3 \times 10^{-5}$ (۴) $1/3 \times 10^{-5}$

محل انجام محاسبات

۲۲۴- کدام نمودار برای یک محلول آبی در دمای اتاق نادرست است؟



۲۲۵- اتیل استنات ($C_4H_8O_2$) استری است که به عنوان حلال چسب کاربرد دارد. اگر برای سنتز این ماده از ۲ لیتر سرکه با $pH = 2/4$ در حضور مقدار کافی اتانول، استفاده شود، به تقریب چند گرم از این ماده به دست می آید و درصد جرمی استیک اسید در سرکه کدام است؟ (چگالی سرکه را $1/05 g \cdot mL^{-1}$ در نظر بگیرید و $\log 2 = 0/3$ ، $K_a(\text{استیک اسید}) = 1/6 \times 10^{-5}$ ، $H=1, C=12, O=16 g \cdot mol^{-1}$)

۵/۷، ۱۷۶ (۴)

۴/۴، ۱۷۶ (۳)

۵/۷، ۸۸ (۲)

۴/۴، ۸۸ (۱)

۲۲۶- تیغه‌ای از جنس مس به جرم ۱۱۴ گرم را در ۲ لیتر محلول نقره نیترات وارد می‌کنیم. اگر در پایان واکنش جرم تیغه به ۱۹۰ گرم برسد، چند مول الکترون در این فرایند مبادله شده است؟ ($Ag = 108$ ، $Cu = 64 g \cdot mol^{-1}$) و فرض کنید همه فرآورده جامد تولیدشده روی تیغه رسوب می‌کند و حجم محلول ثابت است.

۲/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۷۵ (۱)

۲۲۷- اگر تیغه فلزی X برخلاف تیغه فلزی Y، با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش دهد، کدام گزینه درست است؟

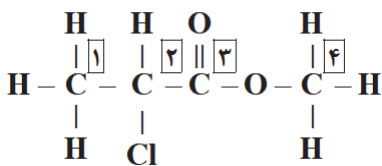
(۱) در سری الکتروشیمیایی، نیم سلول استاندارد X، موقعیت بالاتری نسبت به نیم سلول استاندارد Y دارد.

(۲) مقدار emf سلول گالوانی استاندارد X-Y از emf سلول‌های استاندارد X-SHE و SHE-Y بزرگ‌تر است.

(۳) پتانسیل استاندارد نیم سلول X برخلاف پتانسیل استاندارد نیم سلول Y، عددی مثبت است.

(۴) کاتیون فلز X، اکسنده قوی‌تری از یون هیدروژن و کاتیون فلز Y است.

۲۲۸- عدد اکسایش نیتروژن در اوره با عدد اکسایش کدام کربن در ترکیب زیر یکسان است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

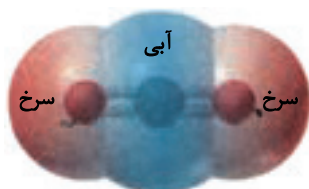
محل انجام محاسبات

۲۲۹- کدام عبارت‌ها درست هستند؟

- (الف) در ساختار گرافیت، لایه‌ها با پیوندهای اشتراکی کربن- کربن به یکدیگر متصل هستند.
 (ب) الماس و سیلیس، به ترتیب دگرشکل‌های کربن و سیلیسیم هستند که جزء جامدهای کووالانسی‌اند.
 (پ) میانگین آنتالپی پیوند کربن- کربن در گرافیت، بیشتر از الماس است.
 (ت) در ساختار ذره‌ای کوارتز، هر اتم سیلیسیم با چهار پیوند اشتراکی به چهار اتم اکسیژن متصل شده است.
- (۱) الف و ب (۲) پ و ت (۳) الف و پ (۴) ب و ت

۲۳۰- ۱۲۳ گرم از یک آلکین ۶ کربنه را با مقدار کافی اکسیژن در یک محفظه بسته به‌طور کامل می‌سوزانیم. نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی چه

تعداد از مولکول‌های تولیدشده به‌صورت روبه‌رو است؟ ($H = 1, C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(۱) $45/15 \times 10^{23}$

(۲) $54/18 \times 10^{24}$

(۳) $54/18 \times 10^{23}$

(۴) $45/15 \times 10^{24}$

۲۳۱- چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست است؟

(الف) نقطه ذوب: $\text{NaCl} < \text{HF} < \text{N}_2$

(ب) شعاع: $_{11}\text{Na}^+ >_{15}\text{P}^{3-} >_{20}\text{Ca}^{2+}$

(پ) آنتالپی فروپاشی شبکه: $\text{MgO} < \text{AlF}_3 < \text{Al}_2\text{O}_3$

(ت) نسبت بار به شعاع: $_{19}\text{K}^+ >_{20}\text{Ca}^{2+} >_{12}\text{Mg}^{2+}$

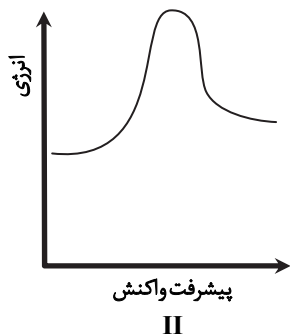
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۳۲- فسفر سفید در دمای اتاق به‌سرعت می‌سوزد (واکنش A). مخلوط گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای اتاق پایدار است و در صورت ایجاد جرقه، با تولید گرما، صدا و نور، به‌سرعت واکنش انجام می‌شود (واکنش B) و مخلوط گازهای نیتروژن و اکسیژن حتی با ایجاد جرقه هم پایدار است، ولی می‌توان در شرایط خاص و با صرف انرژی، مقدار کمی نیتروژن مونواکسید تولید کرد (واکنش C). در کدام گزینه به ترتیب از راست به چپ، نمودارهای متناسب با واکنش‌های A، B و C انتخاب شده‌اند؟



(۱) I, III, II

(۲) II, III, I

(۳) III, I, II

(۴) II, I, III

محل انجام محاسبات

۲۳۳- در ارتباط با مبدل کاتالیستی و عملکرد آن در خودروهایی بنزینی، کدام عبارت درست است؟

(۱) برای افزایش کارایی آن‌ها، سرامیک را به صورت دانه‌های ریز در آورده تا بهتر با آلاینده‌ها واکنش دهد.

(۲) یکی از واکنش‌های انجام شده در مبدل کاتالیستی، سوختن NO و تبدیل آن به موادی با آلایندگی کمتر است.

(۳) در ساخت این مبدل‌ها، از فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) به عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.

(۴) استفاده هم‌زمان از چند کاتالیزگر در مبدل کاتالیستی نشان می‌دهد که یک کاتالیزگر نمی‌تواند همه واکنش‌ها را سرعت ببخشد.

۲۳۴- تعادل $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ در دمای $200^\circ C$ در ظرفی یک‌لیتری برقرار است. در این شرایط، مقدار X مول گاز نیتروژن

به مخلوط گازی موجود در ظرف افزوده می‌شود. با توجه به تغییر انجام شده در این سامانه، کدام عبارت درست است؟

(۱) پس از برقراری تعادلی جدید در ظرف، شمار مول N_2 و H_2 کمتر از شمار مول آن‌ها در تعادل اولیه است.

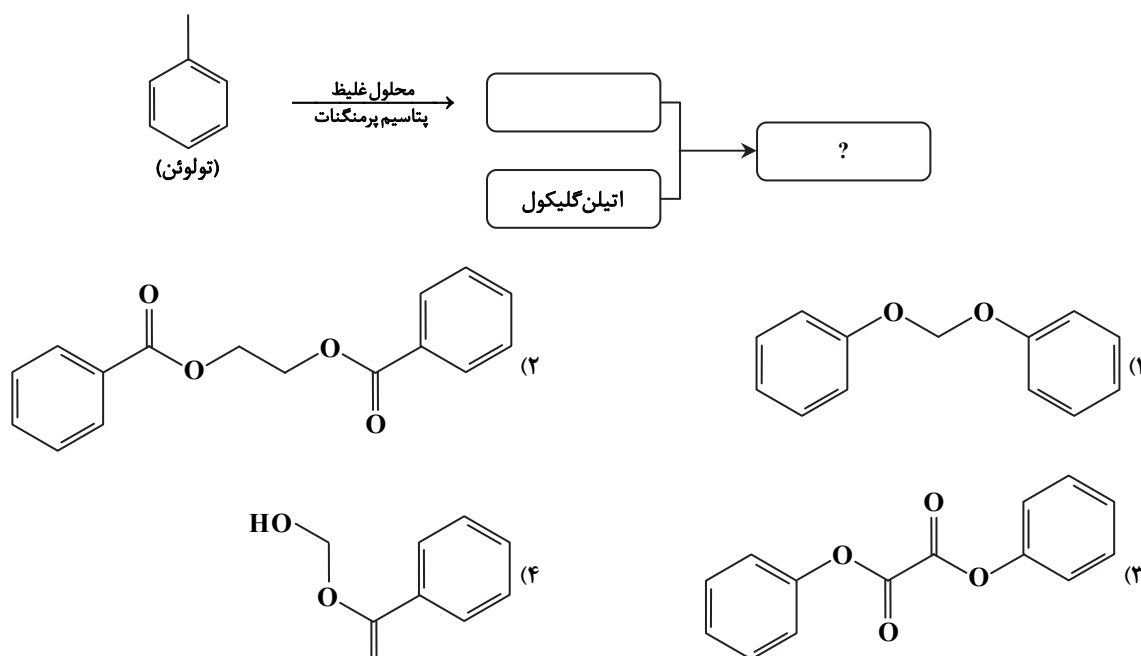
(۲) تغییر ایجاد شده در سامانه، سرعت تولید NH_3 را افزایش داده و سامانه را از حالت تعادل خارج می‌کند.

(۳) در تعادل جدیدی که پس از تغییر برقراری می‌شود، شمار مول مواد موجود در ظرف، X مول بیشتر از تعادل اولیه است.

(۴) تغییر ایجاد شده، مقدار ثابت تعادل و سرعت واکنش‌های رفت و برگشت را افزایش می‌دهد.

۲۳۵- با توجه به مراحل زیر که مربوط به تهیه یک ترکیب آلی است، کدام ساختار را می‌توان به ترکیب مورد نظر نسبت داد؟ (همه مواد به مقدار

کافی وجود دارند).



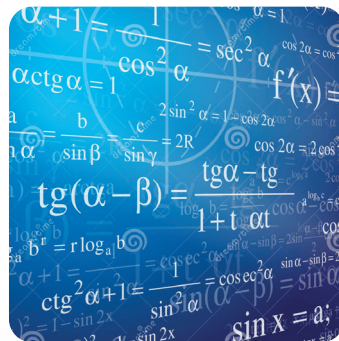
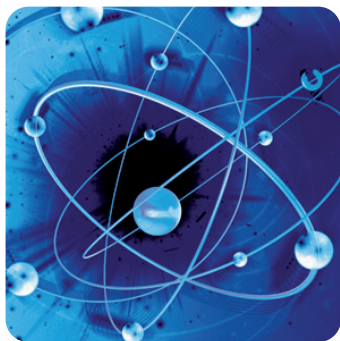
محل انجام محاسبات

دفترچه پاسخ‌های تشریحی

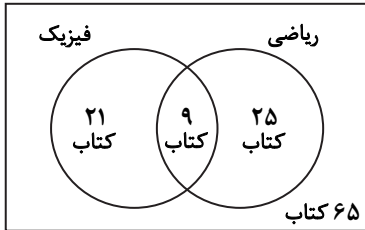
آزمون آزمایشی ۲۵ خرداد ۱۴۰۰ (مرحله ۱۶)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۰

گروه آزمایشی علوم ریاضی



ریاضیات



۱۰۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (فصل ۱، درس ۲)
اطلاعات داده شده در سؤال را در یک نمودار ون نمایش می‌دهیم:

تعداد کتاب‌هایی که فقط موضوع فیزیک دارند، برابر است با:

$$120 - (65 + 25 + 9) = 21$$

بنابراین تعداد کتاب‌هایی که فقط موضوع ریاضی یا فقط موضوع فیزیک دارند، برابر با $21 + 25 = 46$ کتاب است.

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)
نکته: تفاضل دو مجموعه A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

با توجه به نکته، مجموعه‌های $A - B$ و $B - C$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A - B = \{\{a, b, c\}\}$$

$$B - C = \{\{a, b\}\}$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ پاسخ است.

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۳)

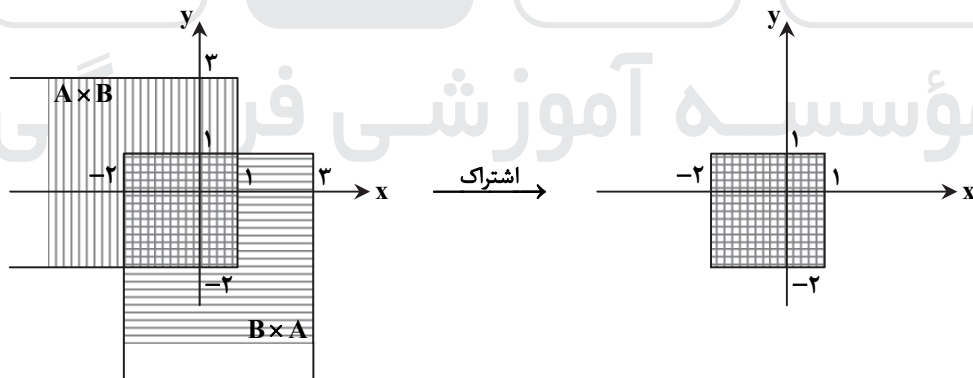
$$\text{نکته ۱: } A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

نکته ۲: برای رسم نمودار دکارتی $A \times B$ ، ضابطه‌های x و y را روی یک دستگاه واحد رسم کرده، سپس اشتراک آن‌ها را هاشور می‌زنیم. با توجه به نکته ۱، داریم:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \leq 1 \wedge -2 \leq y \leq 3\}$$

$$B \times A = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge y \leq 1\}$$

اینک با توجه به نکته ۲، نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



و در نهایت، مساحت مربع حاصل، برابر $S = 3 \times 3 = 9$ است.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

از آنجایی که $p \vee q$ درست و $p \wedge q$ نادرست است، پس از گزاره‌های p و q یکی درست و یکی نادرست است که در این صورت R_1 الزاماً نادرست خواهد بود؛ بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

بررسی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه ۱: اگر q نادرست و p درست باشد، ارزش گزاره به انتهای مقدم درست است.

گزینه ۳: اگر p درست و q نادرست باشد، ارزش گزاره درست است.

گزینه ۴: هم‌ارز منطقی با $p \vee q$ است و همواره درست است.

نکته: اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است. ابتدا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^6 + ax^2 - ax - 1 = (x-1)^2 \cdot q(x)$$

اگر قرار دهیم $x=1$ تساوی برقرار است، یعنی عبارت بر $x-1$ بخش پذیر است، در این حالت با استفاده از تجزیه چندجمله‌ای داریم:

$$x^6 - 1 + a(x^2 - x) = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + (x-1)(ax) = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + ax)$$

برای آنکه بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، کافی است $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + ax$ به ازای $x=1$ صفر شود، بنابراین: $a = -4$

۱۰۶- پاسخ: گزینه ۲ **▲** مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس‌های ۳ و ۴)

نکته: اگر نقطه (a, b) روی تابع وارون پذیر f باشد، آنگاه داریم:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

با استفاده از نکته، مقدار $g^{-1}(3)$ را a در نظر می‌گیریم:

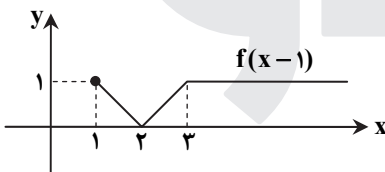
$$g^{-1}(3) = a \Rightarrow g(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ 1 - \frac{2}{3x+1} = 3 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

حال مقدار a را به دست می‌آوریم:

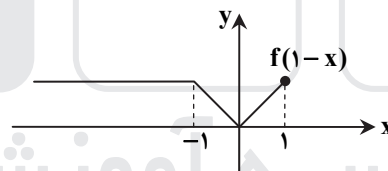
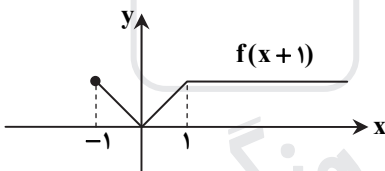
$$\Rightarrow f\left(-\frac{2}{3}\right) = a \Rightarrow \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = a \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

۱۰۷- پاسخ: گزینه ۱ **▲** مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

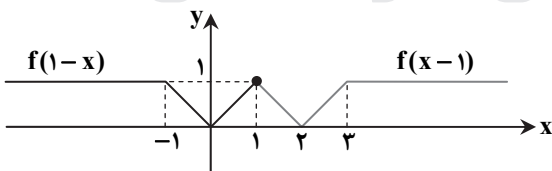
اگر نمودار $y = f(x)$ رسم شده باشد، برای رسم $y = f(x-1)$ کافی است نمودار f را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم.



برای رسم $y = f(1-x)$ ابتدا نمودار را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم:



اگر دو نمودار را در یک دستگاه رسم کنیم، می‌بینیم که فقط در یک نقطه با هم تلاقی دارند.



۱۰۸- پاسخ: گزینه ۴ **▲** مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۱)

با توجه به شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم:

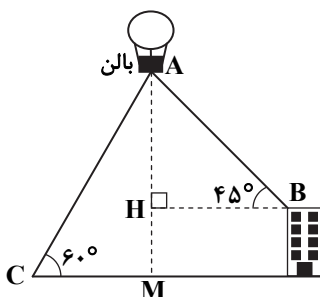
$$\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow AH = HB = x$$

$$\Delta AHB: AH^2 + HB^2 = AB^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = (60\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 7200 \Rightarrow x^2 = 3600 \Rightarrow x = 60$$

پس $AH = 60$ و با توجه به اینکه ارتفاع ساختمان برابر ۳۰ متر است، $AM = 60 + 30 = 90$ در مثلث AMC داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AM}{\sin 60^\circ} = \frac{90}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{180}{\sqrt{3}} = \frac{180\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = 60\sqrt{3}$$



نکته: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ و $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$

می‌دانیم دو زاویه $\frac{3\pi}{10}$ و $\frac{\pi}{5}$ متمم یکدیگر هستند؛ زیرا:

$$\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین عبارت خواسته شده برابر است با:

$$A = \frac{3\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}) - \cos \frac{\pi}{5}}{3\sin(\pi + \frac{\pi}{5})} = \frac{3\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}}{-3\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2\cos \frac{\pi}{5}}{-3\sin \frac{\pi}{5}} = -\cot \frac{\pi}{5}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۱۰- پاسخ: گزینه ۲

نکته: $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$ و $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

معادله را به فرم ساده تری می‌نویسیم:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\sin 3x \sin x - \cos x \cos 3x}{\sin x \cos x} = 2$$

$$-\cos(3x + x) = 2\sin x \cos x \Rightarrow -\cos 4x = \sin 2x \Rightarrow \sin(\frac{3\pi}{2} - 4x) = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} - 4x \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{3\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ -2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در بازه $(0, \pi)$ ، جواب‌های معادله عبارتند از $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{7\pi}{4}$ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۱۱۱- پاسخ: گزینه ۱

نکته: در توابع به فرم $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ، بیشترین مقدار تابع $|a| + c$ ، کمترین مقدار تابع $-|a| + c$ و دوره تناوب

به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

متناسب نمودار، تابع از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 1 - a \cos(-\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

به‌ازای $x = 4\pi$ تابع f برای سومین بار در سمت راست محور y ها، محور x ها را قطع می‌کند.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \cos(bx - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{x=4\pi} \cos(4\pi b - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

از روی دایره مثلثاتی از صفر شروع به حرکت می‌کنیم و سومین نقطه‌ای که به‌ازای آن مقدار

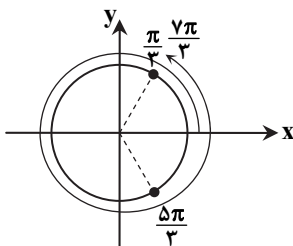
$\cos x$ برابر $\frac{1}{2}$ است را می‌یابیم.

اولین نقطه $\frac{\pi}{3}$ ، دومین نقطه $\frac{5\pi}{3}$ و سومین نقطه $\frac{7\pi}{3}$ است، پس داریم:

$$\cos(4\pi b - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{7\pi}{3} \Rightarrow 4\pi b - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

بنابراین:

$$f(\frac{7\pi}{8}) = 1 - 2\cos(\frac{2}{3} \times \frac{7\pi}{8} - \frac{\pi}{3}) = 1 - 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - \sqrt{2}$$



نکته: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت زیر است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مجموع ۲۰ جمله اول ۱۰۸۰ است، پس داریم:

$$S_{20} = 10(2a_1 + 19d) = 1080 \Rightarrow 2a_1 + 19d = 108 \quad (1)$$

در جمع جملات با شماره‌های زوج، تعداد جملات ۱۰ تاست و جمله اول آن جمله دوم دنباله اصلی است و قدرنسبت $2d$ است، پس:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{20}$$

$$570 = \frac{10}{2}(2a_7 + 9 \times 2d) = 10(a_7 + 9d) \Rightarrow 570 = 10(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1 + 10d = 57 \quad (2)$$

از معادلات (۱) و (۲) مقدار d را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2a_1 + 19d = 108 \\ a_1 + 10d = 57 \end{cases} \Rightarrow -d = -114 + 108 \Rightarrow d = 6$$

۱۱۳- پاسخ: گزینه ۲ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: وارون تابع $f(x) = a^x$ به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ به شرط $a \neq 1$ و $a, x > 0$.

با توجه به نکته، وارون تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2^x}{1+2^x} \Rightarrow y + y \times 2^x = 2^x \Rightarrow 2^x - y \times 2^x = y \Rightarrow 2^x(1-y) = y \Rightarrow 2^x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = \log_2 \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{1-x}$$

با مقایسه این تابع با تابع وارون داده شده می‌توان فهمید:

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{1-x} \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$$

۱۱۴- پاسخ: گزینه ۴ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \times L_2$

ابتدا حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

از طرفی مطابق فرض داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \times g(x)) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \xrightarrow{(*)} \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4$$

۱۱۵- پاسخ: گزینه ۲ \blacktriangle مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

با توجه به سؤال، تابع f باید در $x=1$ از راست پیوسته باشد و همچنین در $x=3$ نیز پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)[x] & 1 \leq x < 3 \\ bx+8 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow -1 = -1 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow 2 = 3b+8 \Rightarrow b = -2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۱۶- پاسخ: گزینه ۲ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس‌های ۱ و ۲)

ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{ax(x+b) - (x^2 - 3x)}{x+b} = \frac{ax^2 + axb - x^2 + 3x}{x+b} = \frac{(a-1)x^2 + (ab+3)x}{x+b}$$

این تابع به شرطی مجانب افقی دارد که $a-1=0$ باشد، پس $a=1$ و داریم:

$$f(x) = \frac{(b+3)x}{x+b} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(b+3)x}{x} = b+3$$

خط $y = b+3$ مجانب افقی است، پس مطابق فرض سؤال $b+3=5$ و $b=2$ است، بنابراین مجانب قائم خط $x = -b$ ، یعنی $x = -2$ است.

نکته: $(f(u))' = u'f'(u)$ مشتق تابع $f(x)$ را به دست آورده و مقدار $x = \pi^2$ را جای گذاری می کنیم:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \tan\sqrt{x}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\pi}{3} + \tan\sqrt{x}\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \tan\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \tan^2\sqrt{x}) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \tan\sqrt{x}\right)$$

$$f'(\pi^2) = \frac{1}{2\pi}(1+0) \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۱۸- پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول: تابع f در همسایگی راست $x = 3$ پیوسته است، پس کافی است $[x] = 3$ را جایگزین کنیم:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} - 6 = x - \sqrt{x^2 - 5}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 5}} \Rightarrow f'(3) = 1 - \frac{3}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

از طرفی:

$$\lim_{h \rightarrow -} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = -f'_+(3) = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

$$\lim_{h \rightarrow -} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow -} \frac{(3-h) - \sqrt{(3-h)^2 + 1} - 6 - [3 - \sqrt{3^2 - 5}] - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -} \frac{2-h - \sqrt{(3-h)^2 - 5} - 2 + \sqrt{3^2 - 5}}{h} = \lim_{h \rightarrow -} \frac{2-h - \sqrt{(3-h)^2 - 5}}{h} \times \frac{(3-h) + \sqrt{(3-h)^2 - 5}}{(3-h) + \sqrt{(3-h)^2 - 5}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -} \frac{(2-h)^2 - (3-h)^2 + 5}{h((3-h) + \sqrt{(3-h)^2 - 5})} = \lim_{h \rightarrow -} \frac{2h}{h((3-h) + \sqrt{(3-h)^2 - 5})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۱۹- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازه $[0, 4]$ به دست می آوریم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(2 + \frac{2}{5}) - 2}{4} = \frac{1}{10}$$

حال آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع را در $x = 1$ به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

بنابراین آهنگ متوسط از آهنگ لحظه‌ای به اندازه $0/1$ بیشتر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس‌های ۱ و ۲)

۱۲۰- پاسخ: گزینه ۴

نکته: فرض کنیم C به ازای هر نقطه x از بازه I موجود باشد.الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر روبه بالا دارد.ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر روبه پایین دارد.پ) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) = 0$ ، آزمون بی نتیجه است.ما به دنبال بازه‌ای هستیم که در آن $f' > 0$ و $f'' > 0$ باشد، پس f' و f'' را محاسبه و تعیین علامت می کنیم:

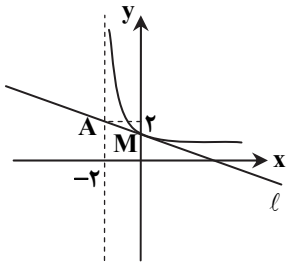
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
f'		+	+	+	-
f''		-	+	-	-

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4-4x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{8}{9\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-8-4x}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

بنابراین پاسخ بازه $(-2, 0)$ است.

نکته: تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم. در این تابع $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی و $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم است.



با توجه به شکل، خط l بر تابع f در نقطه $x = 0$ مماس است، پس شیب خط l برابر است با:

$$m_l = f'(0) = -\frac{a}{4}$$

از طرفی مجانب قائم تابع f ، خط $x = -2$ است، پس محل تقاطع خط مماس و مجانب قائم نقطه $(-2, 2)$ است. پس معادله خط l به صورت روبه‌رو است:

$$y = -\frac{a}{4}x - \frac{a}{2} + 2$$

خط از نقطه $M(0, \frac{a}{c})$ می‌گذرد، پس:

$$\frac{a}{c} = -\frac{a}{4} + 2 \Rightarrow a = 2$$

۱۲۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس‌های ۳ و ۴)

نکته ۱: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشد، آنگاه دو مثلث متشابه‌اند.
نکته ۲: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های متناظر با نسبت تشابه برابر است.
ابتدا با توجه به نکته ۱ داریم:

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B}' \text{ (مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \triangle ABH \sim \triangle CBH'$$

اکنون با توجه به نکته ۲ داریم:

$$\frac{AH}{CH'} = \frac{BH}{BH'} \Rightarrow \frac{5}{CH'} = \frac{2}{3} \Rightarrow CH' = 7.5$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۲۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته ۱: دو دایره مماس خارج، دارای دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی هستند، یعنی تنها سه مماس مشترک دارند.
نکته ۲: طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به شعاع‌های R و R' ، برابر است با:

$$2\sqrt{RR'}$$

با توجه به نکته ۱، دو دایره، مماس خارج هستند و مطابق شکل در این حالت، بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره، طول پاره خط AB برابر با $2(R + R')$ است و داریم:

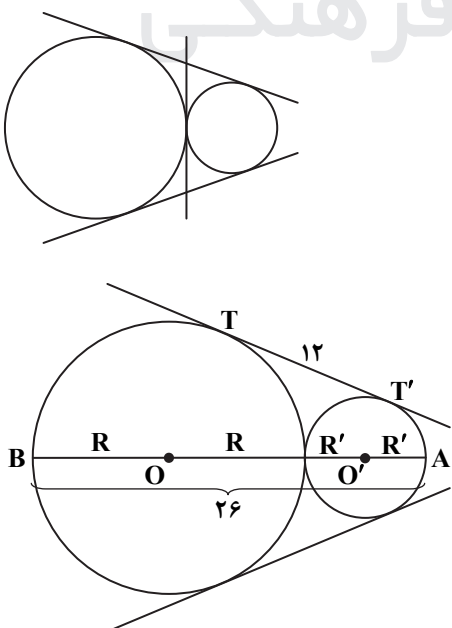
$$2(R + R') = 26 \Rightarrow R + R' = 13 \quad (1)$$

همچنین با توجه به نکته ۲، داریم:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 12 \Rightarrow RR' = 36 \quad (2)$$

اینک با حل دستگاه معادلات شامل روابط (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} R + R' = 13 \\ RR' = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \\ R' = 4 \end{cases}$$



نکته ۱: بر طبق قضیه سینوس ها در مثلث، داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (R, \text{ شعاع دایره محیطی مثلث است.})$$

نکته ۲: بر طبق قضیه کسینوس ها در مثلث، داریم:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

ابتدا با توجه به شکل، در مورد زوایا، داریم:

$$\Delta AKC: \hat{K} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Delta AKB: \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

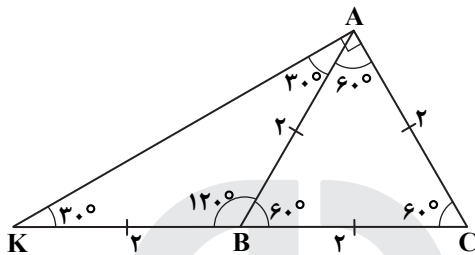
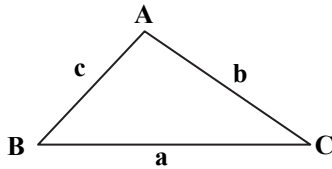
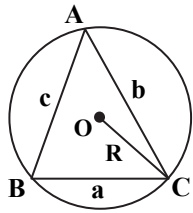
پس مثلث ABK در رأس B متساوی الساقین است و داریم: $KB = 2$
راه حل اول:

با توجه به نکته ۱ (قضیه سینوس ها)، در مثلث AKB ، داریم:

$$\frac{AK}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{AK}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AK = 2\sqrt{3}$$

راه حل دوم:

با توجه به نکته ۲ (قضیه کسینوس ها)، در مثلث AKB ، داریم:

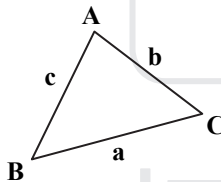


$$AK^2 = BA^2 + BK^2 - 2BA \times BK \times \cos 120^\circ = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AK^2 = 8 + 4 = 12 \Rightarrow AK = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

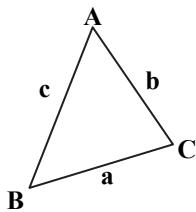
۱۲۵- پاسخ: گزینه ۳ \blacktriangle مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۳، درس های ۱ و ۲)

نکته (قضیه سینوس ها): در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع، به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع، برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (R, \text{ شعاع دایره محیطی مثلث است.})$$

نکته (قضیه کسینوس ها): در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع، برابر است با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن ها.



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

ابتدا با توجه به نکته ۱، داریم:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{6}{AC} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

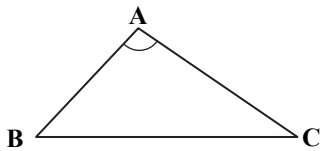
سپس با توجه به نکته ۲، خواهیم داشت:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos 135^\circ = 18 + 36 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 90 \Rightarrow AB = \sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10}$$

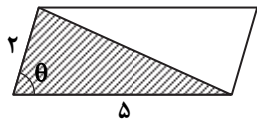
بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

نکته: قطر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند.
نکته: مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

با استفاده از نکات بالا برای محاسبه مساحت متوازی الاضلاع داریم:



$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin \theta = 10 \times \sin \theta$$

با توجه به اینکه بیشترین مقدار $\sin \theta$ برابر ۱ است که به‌ازای $\hat{\theta} = 90^\circ$ رخ می‌دهد، پس بیشترین مقدار ممکن برای مساحت این متوازی الاضلاع برابر با ۱۰ است.

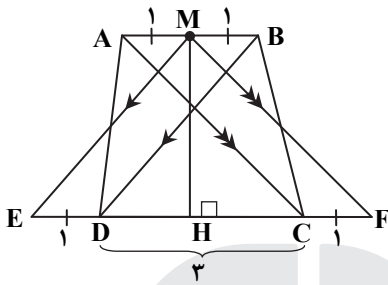
۱۲۷- پاسخ: گزینه ۱ **▲** مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۱)

نکته ۱: متوازی الاضلاع، چهارضلعی است که هر دو ضلع مقابل آن، موازی باشد.

نکته ۲: در هر متوازی الاضلاع، هر دو ضلع مقابل، هم‌اندازه‌اند.

نکته ۳: مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های قاعده در ارتفاع.

مطابق شکل و با توجه به نکته ۱، چهارضلعی‌های AMFC و MBDE متوازی الاضلاع هستند، پس با توجه به نکته ۲، داریم:



$$\begin{cases} AM = CF = 1 \\ MB = ED = 1 \end{cases}$$

پس $EF = 1 + 2 + 1 = 5$ و مساحت مثلث MEF، با توجه به نکته ۳، برابر است با:

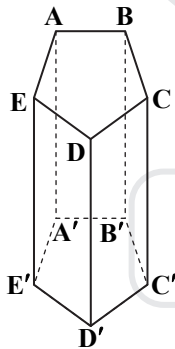
$$S_{\Delta MEF} = \frac{1}{2} MH \times EF = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$

۱۲۸- پاسخ: گزینه ۲ **▲** مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۴، درس ۱)

نکته ۱: دو خط در فضا را متناظر گوئیم، هرگاه هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آن‌ها باشد.

با توجه به شکل، یال جانبی CC' با یال‌های CD, CB ، $C'B'$ و $C'D'$ متقاطع و با یال‌های AA' ، BB' ، DD' و EE' موازی است، پس با توجه به نکته بالا، با یال‌های $AB, AE, ED, A'B', A'E', E'D'$ متناظر است.

بنابراین هر یال جانبی در این منشور، با ۶ یال دیگر متناظر است.
پس گزینه ۲ پاسخ است.



۱۲۹- پاسخ: گزینه ۱ **▲** مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: در دو دایره متخارج، مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المركزین در یک نقطه هم‌مرس هستند و خط‌المركزین نیمساز زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی است.

نکته: در دو دایره متخارج با شعاع‌های R و R' و خط‌المركزین d ، طول مماس مشترک خارجی از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

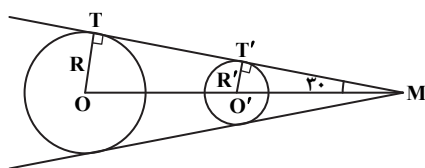
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 30° برابر با نصف وتر است.

در دو دایره شکل روبه‌رو با شعاع‌های R و R' ، چون خط‌المركزین نیمساز زاویه بین مماس‌های مشترک خارجی است، داریم:

$$O'MT' : O'MT = 30^\circ \Rightarrow O'T' = R' = \frac{1}{2} O'M \Rightarrow O'M = 2R'$$

$$O'OT : O'OT = 30^\circ \Rightarrow OT = R = \frac{1}{2} OM \Rightarrow OM = 2R$$

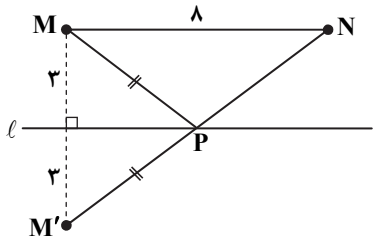
$$\Rightarrow OO' = d = OM - O'M$$



$$\Rightarrow d = 2R - 2R' = 2(R - R') \quad , \quad TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4(R - R')^2 - (R - R')^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{3(R - R')^2}$$

$$\Rightarrow (R - R')\sqrt{3} = 9 \Rightarrow R - R' = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

با توجه به روش هرون برای به دست آوردن کوتاه ترین مسیر، مطابق شکل در مثلث $MM'N$ داریم:



$$M'N = \sqrt{MN^2 + MM'^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$MP + PN = M'P + PN = M'N = 10$$

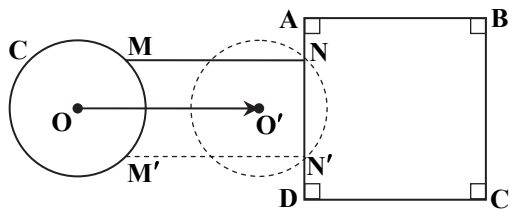
بنابراین کمترین مقدار ممکن برای محیط مثلث MNP برابر است با:

$$\underbrace{MP + PN}_{10} + MN = 10 + 8 = 18$$

۱۳۱- پاسخ: گزینه ۳ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

نکته: انتقال تحت بردار \vec{V} ، تبدیلی است که در آن اگر نقطه A' تبدیل یافته نقطه A باشد، در این صورت داریم:

$$\overline{AA'} = \vec{V}$$



با توجه به نکته، نقطه N انتقال یافته نقطه M در انتقال تحت بردار \overline{AB} است. M را نداریم، اما جایگاه نقطه M (دایره C) را داریم، پس کافی است دایره C را تحت بردار \overline{AB} انتقال دهیم تا مربع را در نقطه N قطع کند. با داشتن N می توان نقطه M را نیز به دست آورد. در شکلی که ما رسم کرده ایم، دو جواب داریم. ($M'N'$ و MN).
بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۳۲- پاسخ: گزینه ۲ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)

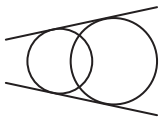
نکته: در دو دایره به شعاع های R و R' اگر d طول خط المרכזین آنها باشد، این دو دایره متقاطع هستند هرگاه: $|R' - R| < d < R + R'$

نکته: مختصات مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ به صورت زیر است:

$$\text{مرکز } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

نکته: اگر دو دایره متقاطع باشند، فقط دو مماس مشترک خارجی دارند.

ابتدا وضعیت دو دایره نسبت به یکدیگر را تعیین می کنیم:



$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow \text{مرکز } O(2, 1) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 - 4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow \text{مرکز } O'(-2, 0) \text{ و } R' = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 0 - 4(-12)} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4$$

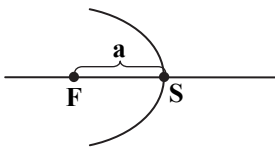
$$d = OO' = \sqrt{(2+2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \Rightarrow 4-3 < \sqrt{17} < 4+3$$

دو دایره داده شده متقاطع هستند و مطابق نکته، فقط ۲ مماس مشترک خارجی دارند.

۱۳۳- پاسخ: گزینه ۳ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

نکته ۱: معادله سهمی افقی رو به چپ به فاصله کانونی a و رأس (h, k) عبارتست از $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ که در آن، مختصات کانون به صورت $F(h-a, k)$ است.

نکته ۲: در هر سهمی، فاصله مرکز تا کانون را با a نمایش داده و فاصله کانونی می نامیم.



$$FS = a$$

با توجه به نکات، مقدار a و مختصات رأس سهمی عبارتند از:

$$FS = a \Rightarrow a = 4 + 2 = 6, S(2, 1) \text{ رأس سهمی}$$

پس با توجه به نکته ۱، معادله سهمی به صورت زیر است:

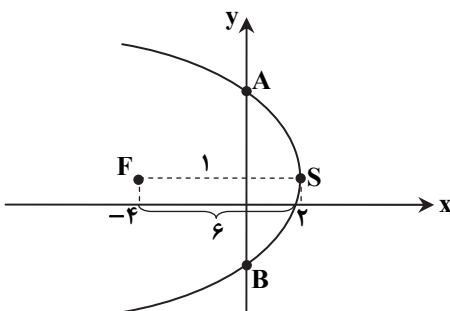
$$(y-1)^2 = -24(x-2)$$

و اینک محل تلاقی سهمی با محور y ها را به دست می آوریم:

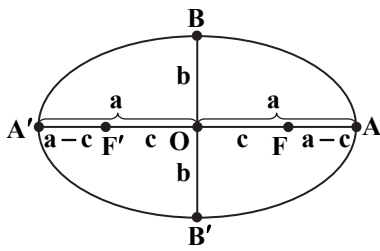
$$x=0 \Rightarrow (y-1)^2 = 48 \Rightarrow y-1 = \pm 4\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + 4\sqrt{3} \\ y = 1 - 4\sqrt{3} \end{cases}$$

و در نهایت، طول پاره خط AB ، برابر است با:

$$AB = \Delta y = (1 + 4\sqrt{3}) - (1 - 4\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$$



نکته: در بیضی به طول قطر بزرگ $2a$ و AA ، طول قطر کوچک $2b$ و BB فاصله کانونی $FF' = 2c$ ، مطابق شکل، رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است:



یادآوری: ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است.

با توجه به نکته و به کمک یادآوری، از آنجایی که OA ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع ABB' است، داریم:

$$OA = \frac{\sqrt{3}}{2} BB' \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2b \Rightarrow a = \sqrt{3}b \quad (*)$$

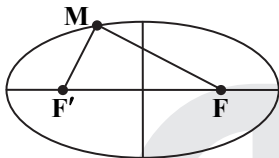
و به کمک رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در بیضی و مقدار $OF = c = 2$ ، خواهیم داشت:

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{(*)} (\sqrt{3}b)^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 3b^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 2b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \xrightarrow{(*)} a = \sqrt{3}b = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

و در نهایت، طول قطر بزرگ بیضی برابر $AA' = 2a = 2\sqrt{6}$ خواهد بود.

۱۳۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس های ۱ تا ۳)

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است، یک بیضی به کانون‌های آن دو نقطه ثابت است.

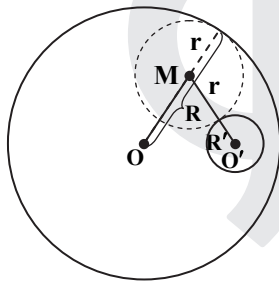


مقدار ثابت $MF + MF'$

مطابق شکل، داریم:

$$MO + MO' = (R - r) + (r + R') \Rightarrow MO + MO' = R + R' \text{ مقدار ثابت}$$

پس با توجه به نکته، مکان هندسی نقطه M (مراکز دایره‌ی که بر C و C' مماسند) یک بیضی است به کانون‌های O و O' ، زیرا مجموع فواصل M از O و O' مقداری ثابت است؛ بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.



۱۳۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

نکته: دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ زمانی فاقد جواب است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = 5 \\ x + my = m+3 \end{cases} \Rightarrow \frac{m-1}{1} = \frac{2}{m} \neq \frac{5}{m+3}$$

با توجه به دستگاه داده شده و نکته داریم:

$$m-1 = \frac{2}{m} \Rightarrow m^2 - m = 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{m} \neq \frac{5}{m+3} \Rightarrow 5m \neq 2m+6 \Rightarrow m \neq 2$$

پس فقط $m = -1$ قابل قبول است.

۱۳۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: اگر یک سطر یا یک ستون ماتریس را در عددی ضرب کنیم، دترمینان ماتریس نیز در آن عدد ضرب می‌شود و به همین ترتیب می‌توان در دترمینان یک ماتریس، از عامل مشترک یک سطر یا یک ستون ماتریس، فاکتور گرفت.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

با توجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1+m & 1+m & 1+m \\ d & e & f \end{bmatrix} = 20 \xrightarrow{\text{نکته}} (1+m) \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ d & e & f \end{bmatrix} = 20 \Rightarrow (1+m)m = 20 \Rightarrow m^2 + m - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5 \end{cases}$$



نکته ۱: درایه a_{ij} را درایه عمومی ماتریس $A_{m \times n}$ می‌نامیم که در آن $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ تغییر می‌کند. همه درایه‌های ماتریس A را می‌توان توسط درایه عمومی نمایش داد و به اختصار آن را به صورت $A = [a_{ij}]$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۲: ماتریس همانی مرتبه ۳، عبارتست از:

$$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته ۳: در محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 به روش بسط، سطر یا ستونی را بسط می‌دهیم که تعداد بیشتری درایه صفر دارد.

نکته ۴: دترمینان ماتریس 3×3 به روش بسط نسبت به ستون سوم، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ابتدا با توجه به نکته ۱، ماتریس A را با درایه‌هایش می‌نویسیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & : i < j \\ 1 & : i = j \\ -2 & : i > j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اینک با توجه به نکات ۲، ۳ و ۴، داریم:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A + 2I| = 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3(9 - 0) = 27 \quad (1)$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - 2I| = -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1(1 - 0) = -1 \quad (2)$$

و از روابط (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$|A + 2I| - |A - 2I| = 27 - (-1) = 28$$

۱۳۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۱)

نکته: دو بردار ناصفر \vec{a} و \vec{b} موازی‌اند هرگاه عدد حقیقی r وجود داشته باشد که: $\vec{a} = r\vec{b}$

نکته: اندازه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

دو بردار a و b موازی‌اند، پس می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = (-2, m, 3) \quad \text{و} \quad \vec{b} = (3, -1, n-1)$$

$$\vec{a} = r\vec{b} \Rightarrow (-2, m, 3) = r(3, -1, n-1) = (3r, -r, r(n-1))$$

$$\begin{cases} 3r = -2 \Rightarrow r = -\frac{2}{3} \\ m = -r \Rightarrow m = \frac{2}{3} \\ r(n-1) = 3 \Rightarrow -\frac{2}{3}(n-1) = 3 \Rightarrow n-1 = -\frac{9}{2} \Rightarrow n = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

پس دو بردار a و b به صورت زیر هستند:

$$\vec{a} = (-2, \frac{2}{3}, 3) \quad \text{و} \quad \vec{b} = (3, -1, -\frac{9}{2})$$

حال بردار c را به دست می‌آوریم:

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 4\vec{b} = 3(-2, \frac{2}{3}, 3) + 4(3, -1, -\frac{9}{2}) = (-6, 2, 9) + (12, -4, -18) \Rightarrow \vec{c} = (6, -2, -9)$$

بنابراین اندازه بردار c برابر است با:

$$|\vec{c}| = \sqrt{36 + 4 + 81} = \sqrt{121} = 11$$

یادآوری: در هر شش ضلعی منتظم به ضلع a ، طول قطر بزرگ برابر با $2a$ و طول قطر کوچک، برابر با $a\sqrt{3}$ است. همچنین هر زاویه داخلی برابر با 120° است.

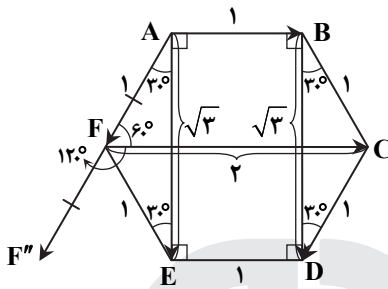
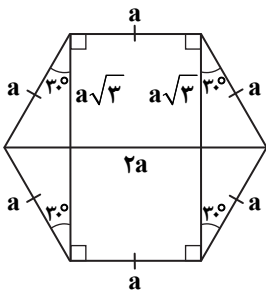
نکته ۱: ضرب داخلی دو بردار \vec{a} و \vec{b} که با هم زاویه θ می‌سازند را با $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نمایش داده و برابر است با:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

نکته ۲: اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها برابر با صفر است:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

نکته ۳: دو بردار را مساوی یا هم‌سنگ گوئیم، هرگاه اندازه و جهت آن‌ها یکسان باشد. با توجه به نکات و مطابق شکل، هریک از قسمت‌های عبارت را حساب می‌کنیم.



$$1) \overline{AB} \cdot \overline{BD} = \frac{\overline{AB} \perp \overline{BD}}{2 \text{ نکته}} \cdot$$

$$2) \overline{CD} \cdot \overline{AE} = \frac{\overline{CD} = \overline{AE}}{2 \text{ نکته}} = \frac{\overline{AF} \cdot \overline{AE}}{2 \text{ نکته}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$3) \overline{AF} \cdot \overline{FC} = \frac{1 \text{ نکته}}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BD} + \overline{CD} \cdot \overline{AE} + \overline{AF} \cdot \overline{FC} = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

و در نهایت، خواهیم داشت:

۱۴۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۱)

نکته ۱: احتمال اینکه پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد را با $P(A - B)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

نکته ۲: تعداد اعداد بخش پذیر بر k در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

اگر مجموعه A را اعضای از مجموعه S که بر ۴ بخش پذیرند و مجموعه B را اعضای از مجموعه S که بر ۵ بخش پذیرند در نظر بگیریم، با توجه به اطلاعات مسئله و نکات، داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \left(\left\lfloor \frac{400}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{250}{4} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{400}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{250}{20} \right\rfloor \right) = \frac{(100 - 62) - (20 - 12)}{400 - 250} = \frac{38 - 8}{150} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0.2$$

۱۴۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

نکته (تعمیم اصل لانه کبوتری): هرگاه $kn + 1$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار گیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k + 1$ کبوتر در آن قرار دارد.

طبق نکته داریم:

$$k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$$

$$n = \frac{12}{2} \times \frac{7}{1} = 84$$

روز هفته ماه سال

$$kn + 1 = 2 \times 84 + 1 = 169$$

۱۴۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۱)

از آنجایی که مجموع ارقام این عدد سه رقمی باید ۲۵ باشد، حداقل یکی از ارقام آن باید ۹ باشد، زیرا اگر هر سه رقم آن ۸ یا کمتر از ۸ باشد، مجموع آن‌ها ۲۴ یا کمتر است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۲} \Rightarrow (9 + 8 + 8 = 25) \Rightarrow \text{دو رقم دیگر: } 8, 8 \\ \text{حالت ۳} \Rightarrow (9 + 9 + 7 = 25) \Rightarrow \text{دو رقم دیگر: } 9, 7 \end{array} \right\} \text{یکی از رقم‌ها ۹ است.}$$

طبق اصل جمع، مجموعاً ۶ عدد سه رقمی با این شرایط وجود دارد.



*

)

$$\text{نکته: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A: برآمدهای دو تاس یکسان باشد.

B: مجموع اعداد ظاهر شده، بزرگتر از ۵ باشد.

$$B = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\} - \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow n(B) = 36 - 10 = 26$$

$$A \cap B = \{(3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{26}{36}} = \frac{4}{26} = \frac{2}{13}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

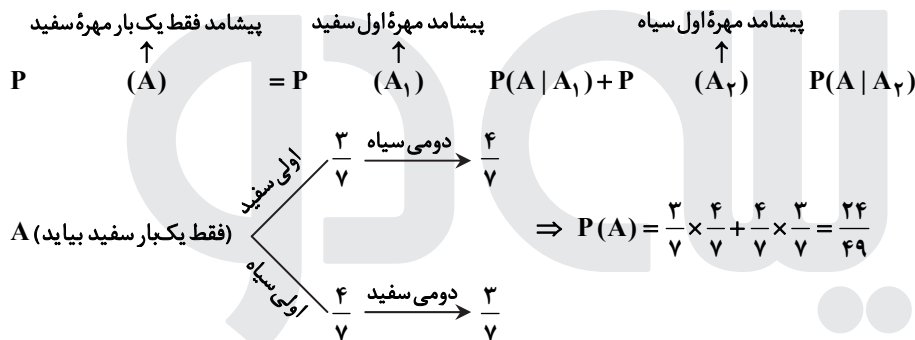
۱۴۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته: در حل مسائل قانون احتمال کل که پیشامد A به پیشامدهای $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ وابسته است، داریم:

$$P(A) = P(A_1) \times P(A|A_1) + \dots + P(A_n) \times P(A|A_n)$$

که برای پرهیز از استفاده از فرمول و سهولت در حل مسئله می‌توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم.

با توجه به نکته، داریم:



▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس‌های ۲ و ۳)

۱۴۶- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: اگر فضای نمونه‌ای یک تجربه تصادفی به صورت $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ ، غیرهم‌شانس باشد، داریم:

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(s_1) + P(s_2) + P(s_3) + \dots + P(s_n) = 1$$

همچنین اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ ، یک پیشامد در این فضا باشد، داریم:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + \dots + P(a_k)$$

نکته ۲: احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد را با $P(A|B)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

با توجه به نکته ۱ و روابط $P(y) = P(x) + \frac{1}{5}$ و $P(z) = P(x) + \frac{2}{5}$ ، داریم:

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1 \Rightarrow P(x) + \frac{1}{5} + P(x) + \frac{2}{5} + P(x) = 1 \Rightarrow 3P(x) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(x) = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(y) = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \\ P(z) = \frac{2}{15} + \frac{2}{5} = \frac{8}{15} \end{cases}$$

اینک با توجه به نکته ۲، خواهیم داشت:

$$P(\{x, y\}|\{y, z\}) = \frac{P(\{x, y\} \cap \{y, z\})}{P(\{y, z\})} = \frac{P(y)}{P(y) + P(z)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{8}{15}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{15}} = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$$

نکته ۱: در نمودار میله‌ای، محور x بیانگر داده‌ها و محور y نمایشگر فراوانی هر داده است.
نکته ۲: عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها که به صورت صعودی مرتب شده‌اند را میانه یا Q_2 می‌نامیم.

اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه، دقیقاً عدد وسط است.

اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر است با میانگین دو داده وسط.

نکته ۳: میانه نیمه اول داده‌ها را با Q_1 نمایش داده و چارک اول می‌نامیم و میانه نیمه دوم داده‌ها را با Q_3 نمایش داده و چارک سوم می‌نامیم.

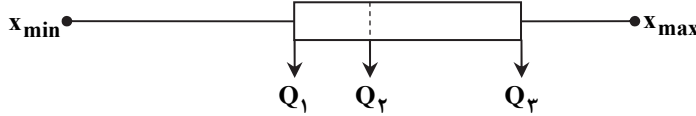
نکته ۴: نمودار جعبه‌ای، نموداری است که پراکندگی

داده‌ها را بر اساس پنج معیار کوچک‌ترین داده، چارک

اول، میانه، چارک سوم و بزرگ‌ترین داده، به صورت

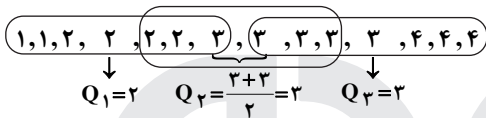
روبه‌رو نشان می‌دهد:

نکته ۵: میانگین n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را با \bar{x} نمایش داده و برابر است با:



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

با توجه به نکات، ابتدا داده‌ها را از نمودار میله‌ای استخراج کرده، به صورت صعودی مرتب کرده و میانه و چارک‌ها را به دست می‌آوریم و در نهایت، داده‌های داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای را تعیین می‌کنیم:



واضح است که داده‌های ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳ داخل جعبه قرار دارند و میانگین آن‌ها با توجه به نکته ۵، برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{(2 \times 2) + (4 \times 3)}{2 + 4} = \frac{4 + 12}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

۱۴۸- پاسخ: گزینه ۱

راه حل اول:

نکته: مطابق قضیه تقسیم داریم: $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) که در آن a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌گوییم.
با توجه به نکته، داریم: $a = 4b + 23$ (*)

حال اگر مقدار x واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم به طوری که خارج قسمت تغییر نکند، خواهیم داشت:

$$a = 4(b+x) + r \quad 0 \leq r < b+x$$

$$\xrightarrow{(*)} 4b + 23 = 4b + 4x + r \Rightarrow r = 23 - 4x \xrightarrow{\substack{r \geq 0 \\ \text{نکته}}} 23 - 4x \geq 0 \Rightarrow 23 \geq 4x \Rightarrow x \leq \frac{23}{4} \Rightarrow x \leq 5$$

پس اگر حداکثر ۵ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند؛ بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

راه حل دوم:

نکته: در یک تقسیم با خارج قسمت و باقی‌مانده q و r ، حداکثر مقداری که می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند، برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{r}{q} \right\rfloor$$

با توجه به نکته و اعداد $q = 4$ و $r = 23$ ، داریم:

$$\left\lfloor \frac{r}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{23}{4} \right\rfloor = 5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

۱۴۹- پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر $a | b$ ، آنگاه: $(a, b) = |a|$ و $[a, b] = |b|$.

با توجه به نکته، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: ($m \in \mathbb{Z}$)

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad m^2 | m^3 &\Rightarrow (m^2, m^3) = |m^2| = m^2 \\ 2) \quad m^2 | m^5 &\Rightarrow [m^5, m^2] = |m^5| \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{دلیل درستی}$$

$$1) \quad 4m | 8m^2 \Rightarrow (4m, 8m^2) = |4m| \leftarrow \text{دلیل نادرستی}$$

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad m | m^2 &\Rightarrow [m^2, m] = |m^2| = m^2 \\ 4) \quad m | m^2 &\Rightarrow (m^2, m) = |m| \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{دلیل نادرستی}$$

$$3) \quad 4m | 8m^2 \Rightarrow [4m, 8m^2] = |8m^2| \leftarrow \text{دلیل نادرستی}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

راه حل اول: نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_i \geq r_i$ برابر است با:

$$\binom{n+k-1-\sum_{i=1}^k r_i}{k-1}$$

برای معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \\ x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \\ x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \\ x_4 > 4 \Rightarrow x_4 \geq 5 \\ x_5 > 5 \Rightarrow x_5 \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \binom{25+5-1-20}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$$

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

راه حل دوم: نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

شروط معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow \overbrace{x_1 - 2}^{t_1} \geq 0 \Rightarrow x_1 = t_1 + 2$$

$$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow \overbrace{x_2 - 3}^{t_2} \geq 0 \Rightarrow x_2 = t_2 + 3$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow \overbrace{x_3 - 4}^{t_3} \geq 0 \Rightarrow x_3 = t_3 + 4$$

$$x_4 > 4 \Rightarrow x_4 \geq 5 \Rightarrow \overbrace{x_4 - 5}^{t_4} \geq 0 \Rightarrow x_4 = t_4 + 5$$

$$x_5 > 5 \Rightarrow x_5 \geq 6 \Rightarrow \overbrace{x_5 - 6}^{t_5} \geq 0 \Rightarrow x_5 = t_5 + 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25 \Rightarrow t_1 + 2 + t_2 + 3 + t_3 + 4 + t_4 + 5 + t_5 + 6 = 25 \Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 5$$

$$\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$$

حال معادله به دست آمده را با شرط $t_i \geq 0$ حل می‌کنیم که جواب‌های آن برابر است با:

۱۵۱- پاسخ: گزینه ۳ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء به طوری که در میان آن‌ها r_1 شیء یکسان از نوع A و r_2 شیء یکسان از نوع B و r_3 شیء یکسان از

نوع C و ... و r_k شیء یکسان از نوع D وجود دارد برابر است با: $(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k) = n$

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3! \times \dots \times r_k!}$$

تعداد کل جایگشت‌ها بدون در نظر گرفتن تکراری‌ها برابر است با:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 4 \times 5! = 480$$

$$\frac{480}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{480}{8} = 60$$

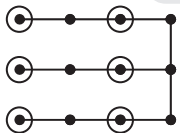
و تعداد کل جایگشت‌ها با احتساب تکرارها برابر است با:

۱۵۲- پاسخ: گزینه ۲ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۲)

نکته: یک مجموعه احاطه‌گر را مینیمال گوئیم هرگاه با حذف هر عضو آن دیگر احاطه‌گر نباشد. مجموعه

احاطه‌گر مینیمال با حداکثر عضو به صورت روبه‌رو است؛ یعنی حداکثر ۶ عضو می‌تواند داشته باشد.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.



۱۵۳- پاسخ: گزینه ۴ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

نکته ۱: گراف P_n گرافی است که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده است و دارای n رأس و $n-1$ یال است.



نکته ۲: یک مسیر از رأس a به رأس b در گراف G ، دنباله‌ای از رئوس دوه‌دو متمایز است که از a آغاز و به b ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی از این دنباله در گراف G مجاورند.

نکته ۳: هر یال در گراف، یک مسیر به طول یک محسوب می‌شود، پس هر گراف از اندازه q ، تعداد q مسیر به طول یک دارد.

در گراف‌های P_n با انتخاب هر دو رأس، یک مسیر ایجاد می‌شود که این مسیر، تنها مسیر بین آن دو رأس است، پس در گراف P_7 تعداد

$$\binom{7}{2} = 21 \text{ مسیر وجود دارد.}$$

اما برای محاسبه تعداد مسیرهای به طول حداقل ۲، بایستی مسیرها به طول یک را از کل مسیرها کم کنیم که با توجه به نکات ۱ و ۳، در

گراف P_7 تعداد ۶ مسیر به طول یک وجود دارد.

پس تعداد مسیرها به طول حداقل دو در گراف P_7 ، برابر است با:

$$21 - 6 = 15$$

یادآوری ۱ (زیرگراف): یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد.

یادآوری ۲: گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد، با P_n نمایش می‌دهیم.

$$P_2: \bullet - \bullet \quad P_3: \bullet - \bullet - \bullet \quad P_4: \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$$

نکته ۱: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G نامیده و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۲: در هر گراف G با n رأس، اگر ماکزیمم درجه رئوس Δ باشد، داریم:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$$

با توجه به نکات و یادآوری‌ها، زیرگراف‌هایی از گراف P_4 (●—●—●—●) را که در آن‌ها $\gamma = 2$ است، می‌یابیم:

(۱) اگر ۲ رأس منفرد از مجموعه گراف P_4 برداریم، در تمام این زیرگراف‌ها $\gamma(G) = 2$ می‌شود، پس تعداد آن‌ها $\binom{4}{2} = 6$ است، مانند

$\{a, c\}$ و $\{a, b\}$ و... که زیرگراف‌هایی بدون یال هستند.

(۲) زیرگراف‌های زیر، یک یال دارند و در آن‌ها نیز $\gamma = 2$ است:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} \bullet - \bullet \\ a \quad b \end{array} \quad \{a, c\} & \begin{array}{c} \bullet - \bullet \\ b \quad c \end{array} \quad \{b, a\} & \begin{array}{c} \bullet - \bullet \\ c \quad d \end{array} \quad \{c, a\} \\ \hline \begin{array}{c} \bullet - \bullet \\ a \quad b \end{array} \quad \{a, d\} & \begin{array}{c} \bullet - \bullet \\ b \quad c \end{array} \quad \{b, d\} & \begin{array}{c} \bullet - \bullet \\ c \quad d \end{array} \quad \{c, b\} \\ \hline \end{array}$$

۶ زیرگراف

(۳) چنانچه زیرگراف‌ها به شکل زیر نیز باشند، $\gamma(G) = 2$ می‌شود. (زیرگراف‌های ۲ یالی)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \bullet - \bullet - \bullet \\ a \quad b \quad c \end{array} \quad \{b, d\} & \\ \hline \begin{array}{c} \bullet - \bullet - \bullet \\ b \quad c \quad d \end{array} \quad \{a, c\} & \text{۳ زیرگراف} \\ \hline \begin{array}{c} \bullet - \bullet - \bullet \\ a \quad b \quad c \end{array} \quad \{a, c\} & \\ \hline \end{array}$$

(۴) در خود گراف P_4 نیز که زیرگرافی از خودش است، $\gamma(G) = 2$ می‌باشد. (زیرگراف ۳ یالی)

پس در کل $16 = 1 + 3 + 6 + 6$ زیرگراف از P_4 وجود دارد که در آن‌ها $\gamma = 2$ است و گزینه ۴ پاسخ است.

۱۵۵- پاسخ: گزینه ۳ \blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

هر مربع لاتین از n سطر شامل ارقام ۱ تا n تشکیل شده است، پس مجموع درایه‌ها برابر است با:

$$n(1+2+3+\dots+n) = n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}n^2(n+1)$$

حال گزینه‌ها را یک به یک در فرمول قرار داده تا به عدد ۷۵ برسیم. واضح است که اگر $n = 5$ باشد:

$$\frac{1}{2} \times 25 \times 6 = 75$$

فیزیک

\blacktriangle مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

۱۵۶- پاسخ: گزینه ۱

در نیمه سمت چپ تندی سنج کمترین درجه‌بندی ابزار $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ است، پس دقت برابر $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ خواهد بود و اندازه خطای دستگاه نصف آن

یعنی $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ است. عقربه از ۱۱۰ عبور کرده، حدس می‌زنیم مقدار عبوری حدود دو واحد است؛ پس می‌توان سرعت را بر حسب $112 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

اندازه‌گیری نمود و با توجه به اینکه خطا $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ است، پس گزارش ما باید به صورت $112 \frac{\text{km}}{\text{h}} \pm 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ باشد.

گزینه‌های ۳ و ۴ خطا را اشتباه نشان داده‌اند و در گزینه ۲ رقم حدسی نادرست است.

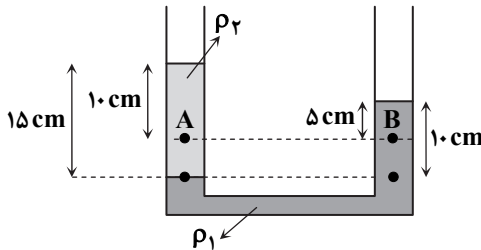
۱۵۷- پاسخ: گزینه ۱ \blacktriangle مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} \times m \times 10^2 \Rightarrow m = \frac{1}{5} \text{kg} = 200 \text{g}$$

$$\text{W}_t = \Delta K \Rightarrow \text{W}_{\text{وزن}} + \text{W}_{\text{مقاومت هوا}} = K_2 - K_1 \Rightarrow 48 - 18 = K_2 - 10 \Rightarrow K_2 = 40 \text{J}$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{1}{2} \times m \times v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{400} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

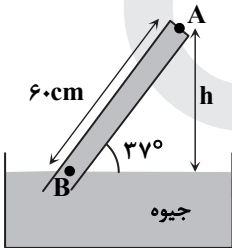
قضیه کار و انرژی جنبشی: $W_f = \Delta K \Rightarrow W_{\text{وزن}} + W_{\text{پمپ}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$
 $-40 \times 10 \times 10 + W_{\text{پمپ}} = \frac{1}{2} \times 40 \times 5^2 - 0 \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = 500 + 400 = 4500 \text{ J} \Rightarrow W_{\text{خروجی}} = 4500 \text{ J}$
 انرژی ورودی = $\frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 \Rightarrow 75 = \frac{4500}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 \Rightarrow \text{انرژی ورودی} = 6000 \text{ J} = 6 \text{ kJ}$



$$P_A - P_B = (P_0 + \rho_2 g \times \frac{10}{100}) - (P_0 + \rho_1 g \times \frac{5}{100})$$

$$= 1000 \times 10 \times 0.1 - 1500 \times 10 \times 0.05 = 1000 - 750 = 250 \text{ Pa}$$

طبق معادله پیوستگی، $A_A v_A = A_B v_B$ است و چون $A_A > A_B$ است، $v_A < v_B$ خواهد بود.
 از طرفی، طبق اصل برنولی (برای شاره‌ای که به‌طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند) در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد، پس $P_A > P_B$ خواهد بود.



$$\sin 37^\circ = \frac{h}{60} = 0.6 \Rightarrow h = 36 \text{ cm}$$

$$P_0 = P_B = P_A + 36 \text{ cmHg} \Rightarrow P_A = 76 - 36 = 40 \text{ cmHg}$$

$$P_A = \rho g h = 13600 \times 10 \times \frac{40}{100} = 54400 \text{ Pa}$$

$$F = PA = 54400 \times 1 \times 10^{-2} = 544 \text{ N}$$

ظرف: $\Delta V = V_1 \alpha \Delta \theta$
 مایع: $\Delta V' = V_1' \beta \Delta \theta$
 $V_1' = V_1$
 حجم مایع بیرون ریخته $= \Delta V' - \Delta V$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{20 \times 10^{-6}}{7/4 \times 10^{-5} \times 50} = \frac{20 \times 10^{-1}}{7/4 \times 50} = 0.0054 \text{ m}^3 = 5.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 5.4 \text{ L}$$

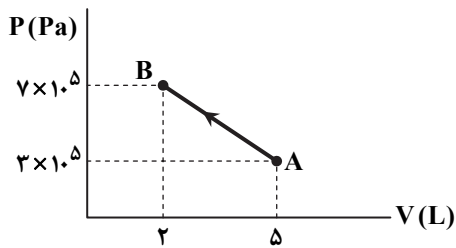
گرمای لازم: $Q = mc_i \Delta \theta_i + mL_F + mc_w \Delta \theta_w = 0.1(2100 \times 10 + 337000 + 4200 \times 10) = 4 \times 10^4 \text{ J}$
 بازده: $Ra = \frac{Q}{Pt} \Rightarrow \frac{80}{100} = \frac{4 \times 10^4}{2000t} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{20}{t} \Rightarrow t = 25 \text{ s}$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_1 c_{\text{آب}} \Delta \theta + m_2 c_{\text{آب}} \Delta \theta + C \Delta \theta = 0$$

$$\Rightarrow m_1 \times 4200 \times (7/5 - 10) + 0.24 \times 4200 \times (7/5 - 0) + 84 \times (7/5 - 10) = 0$$

$$\Rightarrow -10500m_1 + 7560 - 210 = 0 \Rightarrow m_1 = 0.7 \text{ kg} = 700 \text{ g}$$

بی‌دروزی $\Delta U = nC_V \Delta T = n \times \frac{3}{2} R \times (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} (nRT_2 - nRT_1) = \frac{3}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$
 $\Rightarrow W_{\text{دروزی}} = \frac{3}{2} (3/2 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-2} - 1 \times 10^5 \times 10 \times 10^{-2}) = \frac{3}{2} (1600 - 1000) = 900 \text{ J}$



مساحت سطح زیر نمودار فرایند در صفحه $P-V$

$$= \frac{(7+3) \times 10^5}{2} \times (5-2) \times 10^{-3} = 1500 \text{ J}$$

$$W > 0 \Rightarrow W = 1500 \text{ J}$$

با توجه به شکل داریم:

$$\Delta U = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T = \frac{3}{2} (P_B V_B - P_A V_A)$$

$$= \frac{3}{2} (7 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} - 3 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3}) = -150 \text{ J}$$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = -150 - 1500 = -1650 \text{ J}$$

پس گاز 1650 J گرما به محیط می‌دهد.

قانون اول ترمودینامیک بیانی دیگر از پایستگی انرژی است؛ بنابراین وجود یک ماشین گرمایی با بازده ۱۰۰ درصد قانون اول ترمودینامیک را نقض نمی‌کند بلکه عدم امکان ساخت چنین ماشینی بر اساس قانون دوم ترمودینامیک است.

$$q'_1 = q'_2 = \frac{-\Delta q_1 + q_1}{2} = -2q_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت اول: } \left. \begin{array}{l} q_1 \\ -\Delta q_1 \end{array} \right\} F = \frac{kq_1 \times \Delta q_1}{d^2} = \frac{\Delta kq_1^2}{d^2} \\ \text{حالت دوم: } \left. \begin{array}{l} -2q_1 \\ -2q_1 \end{array} \right\} F' = \frac{k(2q_1)(2q_1)}{d^2} = \frac{4kq_1^2}{d^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{4}{5}$$

$$F = 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-6} \times 10^{-6}}{1^2} = 9 \times 10^{-3} \text{ N}$$

نیروی هر کدام از بارهای q_1 و q_2 بر q_3 برابر است با:

$$F_{\text{برآیند}} = \sqrt{F^2 + F^2} = F\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \times 10^{-3} \text{ N}$$

برآیند نیروهای وارد بر q_3 از طرف q_1 و q_2 برابر است با:

برآیند این نیرو باید با نیروی وارد از طرف بار q_4 که با فاصله x تا مبدأ مختصات و در ناحیه چهارم قرار دارد، صفر شود.

$$9\sqrt{2} \times 10^{-3} = 9 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{2} \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{x^2} \Rightarrow x = 1 \text{ m}$$

$$\Delta U = -W_E = -\Delta K \Rightarrow \Delta U = -\Delta K \Rightarrow \Delta U = -\left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) = -\frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-10} \times 10^4 = -10^{-6} \text{ J}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-10^{-6}}{2 \times 10^{-9}} = -500 \text{ V}$$

چون بار ذره باردار منفی است، پس نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی است؛ ولی جابه‌جایی در جهت میدان است، لذا داریم:

$$W_{E_1}, W_{E_2} < 0 \xrightarrow{\Delta U = -W_E} \Delta U_1, \Delta U_2 > 0$$

از طرفی مقدار جابه‌جایی هر دو یکسان است، ولی اندازه میدان در محدوده BC بیشتر از AB است، لذا:

$$|W_{E_2}| > |W_{E_1}| \xrightarrow{\text{ذره برخلاف میل جابه‌جاشده است}} \Delta U_2 > \Delta U_1$$

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{48}{2} = 24 \text{ V}$$

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|V_B - V_A|}{\frac{d}{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}}} \Rightarrow \frac{24}{d} = \frac{|V_B - V_A|}{\frac{5d}{12}} \Rightarrow |V_B - V_A| = 10 \text{ V}$$

با توجه به پایانه‌های باتری، صفحه سمت راست خازن دارای بار مثبت و میدان الکتریکی در بین صفحات خازن به طرف چپ است، از این رو پتانسیل نقطه A از پتانسیل نقطه B کمتر است.

$$V_A - V_B = -10 \text{ V}$$

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{V_A}{I_A}}{\frac{V_B}{I_B}} = \frac{\frac{2V_1}{0.75I_1}}{\frac{V_1}{I_1}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

۱۷۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

ابتدا در مسیر شامل باتری (۱)، از نقطه A به نقطه B می‌رویم تا جریان را محاسبه کنیم. (فرض می‌کنیم جریان در مدار پادساعت‌گرد است.)
 $V_A - 2I + 10 - 2I = V_B \Rightarrow \underbrace{V_A - V_B + 10 - 5I = 0}_{20} \Rightarrow 20 + 10 - 5I = 0 \Rightarrow I = 6 \text{ A}$

اکنون یک دور کامل در مدار حرکت می‌کنیم تا نیروی محرکه مولد \mathcal{E}_3 محاسبه شود.

$$V_A - 12I + 10 + 90 - \mathcal{E}_3 = V_A \Rightarrow \mathcal{E}_3 = 100 - 12 \times 6 = 28 \text{ V}$$

۱۷۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

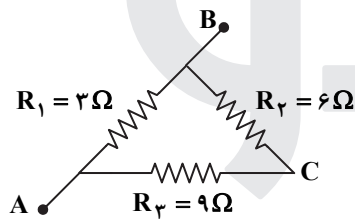
$$\left. \begin{aligned} V &= RI \\ R &= \rho \frac{L}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = \rho \frac{L}{A} \times I$$

$$L_{MN} = L - \frac{L}{3} - \frac{L}{2} = \frac{1}{6}L \Rightarrow R_{MN} = \rho \times \frac{\frac{1}{6}L}{A} = \frac{1}{6}R$$

$$V_{MN} = R_{MN} \times I = \frac{1}{6}RI = \frac{1}{6}V$$

۱۷۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

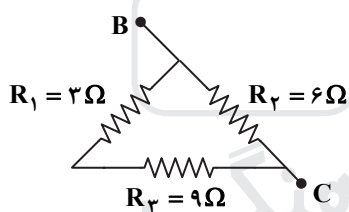
برای محاسبه مقاومت معادل بین دو نقطه A و B، ابتدا دو مقاومت R_2 و R_3 را متوالی در نظر می‌گیریم که مجموعه آن‌ها با R_1 موازی است.



$$R_2 + R_3 = 6 + 9 = 15 \Omega$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} \Rightarrow R_{AB} = \frac{5}{2} = 2.5 \Omega$$

حال برای محاسبه مقاومت معادل بین دو نقطه B و C، باید R_2 و R_1 به صورت متوالی و معادل آن‌ها با R_3 موازی در نظر گرفته شود.



$$R_1 + R_2 = 3 + 9 = 12 \Omega$$

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_{BC} = 4 \Omega$$

$$\frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{2.5}{4} = \frac{5}{8}$$

۱۷۷- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

میدان حلقه ۲ در مرکز حلقه، درون سو و میدان حلقه ۱ برون سو است و صفر بودن میدان خالص در مرکز حلقه به این معنا است که اندازه

$$B_2 = B_1 \Rightarrow \mu_0 \frac{I_2}{2R_2} = \mu_0 \frac{I_1}{2R_1} \Rightarrow \frac{I_2}{R_2} = \frac{I_1}{R_1} \Rightarrow \frac{2}{R_2} = \frac{1}{R_1} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 2$$

۱۷۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۳)

$$F_{(1)} = I_1 \ell B_2 \sin \theta \Rightarrow 10^{-3} = 10 \times 0.2 B_2 \times \sin 90^\circ \Rightarrow B_2 = 5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

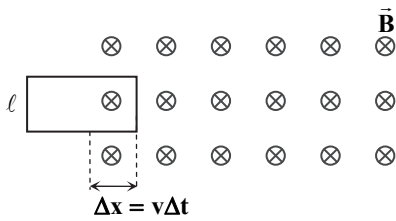
چون دو سیم یکدیگر را می‌رانند، جهت جریان سیم (۲) خلاف جهت جریان سیم (۱) است.

۱۷۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

تغییرات شار در بازه‌های صفر تا ۲۰s و ۳۰s تا ۵۰s خطی است. در نتیجه مقدار لحظه‌ای آهنگ تغییر شار با مقدار متوسط آن برابر است، لذا نیروی محرکه القایی هر یک از لحظات این بازه‌ها با نیروی محرکه القایی متوسط در آن بازه برابر است:

$$\mathcal{E}_{t=10s} = \bar{\mathcal{E}}_{20s \text{ تا } 0} = \frac{10^{-2} - 0}{20 - 0} = 0.5 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4} \text{ V}$$

$$|\mathcal{E}_{t=40s}| = |\bar{\mathcal{E}}_{40s \text{ تا } 30s}| = \left| \frac{0 - 10^{-2}}{40 - 30} \right| = 10^{-2} \text{ V}$$



$$\bar{I} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{N}{R} \cdot \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = \frac{N}{R} \times B \cos\theta \times \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{N}{R} B \cos\theta \times l \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{50} \times 200 \times 10^{-4} \times 1 \times 0.5 \times 8 = 1/6 \times 10^{-4} \text{ A}$$

طبق قانون لنز، جهت جریان القایی پادساعت گرد است.

در قسمت‌هایی که نمودار مکان-زمان خطی است، سرعت ثابت بوده و v با v_{av} برابر است.

$$t_1 = 3s \Rightarrow v_1 = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 - (-10)}{4} = 10 \frac{m}{s} \quad t_2 = 13s \Rightarrow v_2 = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-10 - 30}{15 - 13} = -20 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-20 - 10}{13 - 3} = -3 \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{av}| = 3 \frac{m}{s^2}$$

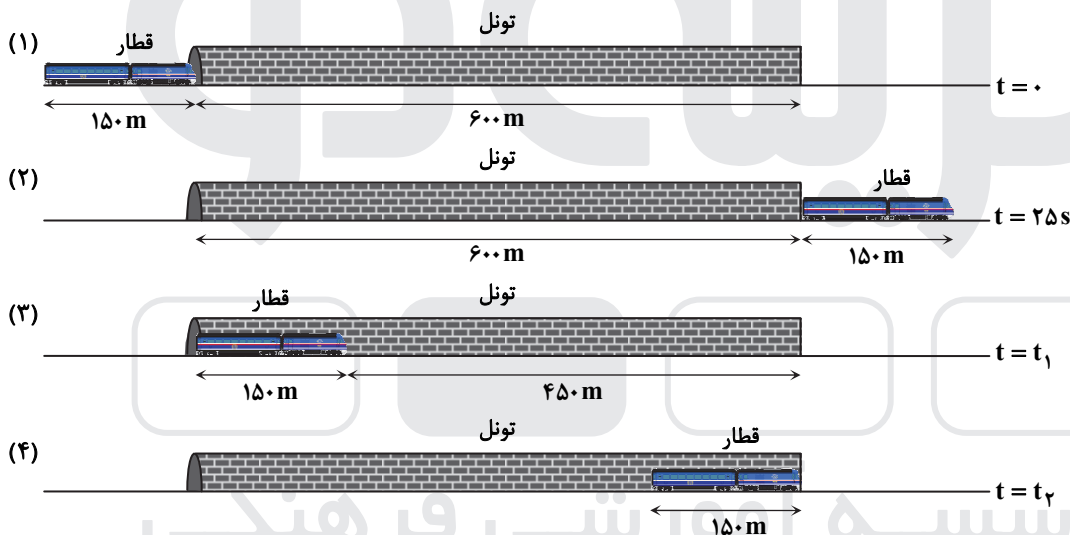
$$10.8 \frac{km}{h} \xrightarrow{\div 3/6} 30 \frac{m}{s} \quad \Delta x = v \cdot \Delta t = 30 \times 25 = 750 \text{ m}$$

۷۵۰ متر حاصل جمع طول تونل و طول قطار بوده و در نتیجه طول قطار ۱۵۰ متر است.

شکل‌های (۱) و (۲) عبور کامل قطار از تونل را نشان می‌دهند که در این مدت قطار ۷۵۰ متر پیش می‌رود.

مدتی که قطار، کاملاً داخل تونل است از t_1 تا t_2 است که در این مدت، قطار ۴۵۰ متر پیش می‌رود.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{450}{30} = 15s$$



راه حل اول:

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \quad \text{و} \quad v = at + v_0$$

$$\Delta x_1 = \frac{v(0) + v(4)}{2} \times 4 = \frac{v(0) + (v(0) + 4 \times 3)}{2} \times 4 = 2[2v(0) + 12] = 4v(0) + 24$$

$$\Delta x_2 = \frac{v(4) + v(10)}{2} \times 6 = \frac{v(4) + (v(4) - 2 \times 6)}{2} \times 6 = \frac{v(4) + (v(4) - 12)}{2} \times 6 = \frac{v(0) + 12 + v(0)}{2} \times 6 = 6v(0) + 36$$

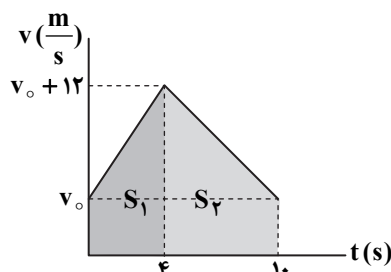
$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 240 = 10v(0) + 60 \Rightarrow v(0) = 18 \frac{m}{s}$$

راه حل دوم:

مساحت زیر نمودار v-t در هر بازه زمانی با جابه‌جایی در آن بازه زمانی برابر است:

$$240 = \frac{v_0 + (12 + v_0)}{2} \times 4 + \frac{(v_0 + 12) + v_0}{2} \times 6 = 5(2v_0 + 12)$$

$$\Rightarrow 36 = 2v_0 \Rightarrow v_0 = 18 \frac{m}{s}$$



راه حل اول: نقطه $x = 0$ را همان محل دو متحرک در $t = 0$ در نظر می‌گیریم و معادله حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_B = 15t$$

$$x_A = \frac{1}{2}at^2 + vt$$

$$t = 10s \xrightarrow{x_A = x_B} 15 \times 10 = 50a + 70 \Rightarrow 80 = 50a \Rightarrow a = \frac{8}{5} \frac{m}{s^2}$$

$$\text{فاصله } A \text{ و } B \text{ از یکدیگر} = |x_A - x_B| = \left| \frac{4}{5}t^2 - 8t \right| = t \left| \frac{4}{5}t - 8 \right|$$

در تمام مدت $t = 0$ تا $t = 10$ عبارت $(\frac{4}{5}t - 8)$ منفی است، پس داریم:

$$\text{فاصله } A \text{ و } B \text{ از یکدیگر} = -\frac{4}{5}t^2 + 8t = \frac{4}{5}(-t^2 + 10t) = \frac{4}{5}(25 - (t-5)^2)$$

بیشینه این عبارت به ازای $t = 5s$ رخ می‌دهد و مقدار آن ۲۰ متر است.

راه حل دوم:

سطح زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی بوده و هر دو متحرک از یک محل شروع به حرکت کرده‌اند، بنابراین با توجه به نمودار روبه‌رو، زمان به‌هم‌رسیدن دو متحرک دو برابر زمان مساوی شدن سرعت آن‌هاست و بیشینه فاصله آن‌ها برابر با مساحت یکی از مثلث‌های هاشورزده خواهد بود که در این سؤال می‌شود:

$$\frac{8 \times 5}{2} = 20m$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۱۸۵- پاسخ: گزینه ۳

به شخص همواره دو نیروی وزن از طرف زمین و F_N از طرف ترازو وارد می‌شود و عددی که ترازو نشان می‌دهد برابر با F_N است. با انتخاب جهت مثبت به طرف بالا داریم $F_N - mg = ma$ پس $F_N = m(g+a)$. چنانچه جهت شتاب به طرف پایین باشد ($a < 0$)، F_N از mg کمتر است (حالت ت).

در حالت (ب) با توجه به اینکه جهت سرعت به طرف پایین بوده و بزرگی آن نیز در حال افزایش است، حرکت به طرف پایین و تندشونده خواهد بود و شتاب با سرعت هم‌جهت است؛ یعنی شتاب منفی است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۱۸۶- پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e + h}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_e + R_e}{R_e + 3R_e} = \frac{1}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۱۸۷- پاسخ: گزینه ۳

جسم روی سطح افقی چه حرکت نکند و چه حرکت نکند، در راستای قائم، ساکن است.

$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_N = mg + F_3 = (4 \times 10) + 20 = 60N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = 0.6 \times 60 = 36N$$

$$F_1 - F_2 = 50 - 20 = 30N$$

$$30N < 36N \Rightarrow \text{جسم حرکت نمی‌کند.} \Rightarrow (F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 - f_s = 0$$

$$\Rightarrow f_s = 30N$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۱۸۸- پاسخ: گزینه ۳

جابه‌جایی خودرو در مدت زمان واکنش:

جابه‌جایی خودرو حین ترمز گرفتن:

جهت حرکت خودرو را در جهت محور x در نظر می‌گیریم:

$$\Delta x_1 = vt = 40 \times 0.5 = 20m$$

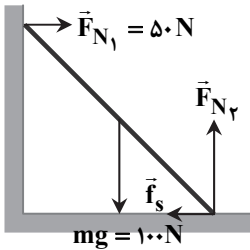
$$\Delta x_2 = 520 - 20 = 500m$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 10^2 - 40^2 = 2a \times 500 \Rightarrow a = -1/5 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{net} = ma = 1000 \times (-1/5) = -1500N$$

بر خودرو در امتداد حرکت فقط نیروی اصطکاک وارد می‌شود. از طرفی بر ایندو دو نیروی \vec{F}_N و \vec{mg} نیز صفر است، پس نیروی خالص همان نیروی اصطکاک خواهد بود و علامت منفی نشان می‌دهد این نیرو در خلاف جهت محور x (خلاف حرکت) بر خودرو وارد می‌شود.

یک سطح بدون اصطکاک، تنها در راستای عمود بر سطح بر جسم نیرو وارد می‌کند، پس دیوار فقط نیروی $F_{N_1} = 50\text{ N}$ بر میله وارد می‌کند، اما کف اتاق اصطکاک دارد و دو نیروی \vec{f}_s و \vec{F}_N بر میله وارد می‌نماید.



$$F_{N_2} - mg = 0 \Rightarrow F_{N_2} = 100\text{ N}$$

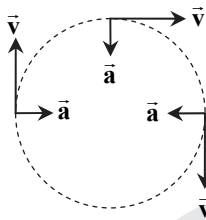
$$f_s - F_{N_1} = 0 \Rightarrow f_s = 50\text{ N}$$

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_{N_2}^2} = \sqrt{50^2 + 100^2} = 50\sqrt{5}\text{ N}$$

$$\Rightarrow f_s \leq \mu_s F_{N_2} \Rightarrow 50 \leq 100\mu_s \Rightarrow 0.5 \leq \mu_s$$

توجه: حالت $f_{s,max} = \mu_s F_N$ فقط برای وقتی است که میله در آستانه لغزیدن باشد.

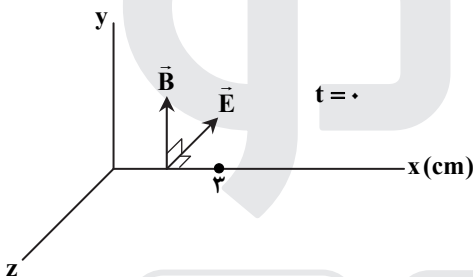
جهت بردارهای سرعت و شتاب پیوسته تغییر می‌کند، پس \vec{v} ، \vec{a} و \vec{F}_{net} ثابت نیستند. تندی و اندازه شتاب ثابت هستند. مسافت طی شده در هر بازه زمانی هم برابر است با تندی (که ثابت است) ضربدر مدت زمان؛ بنابراین عبارتهای الف و ب نادرست و عبارتهای پ و ت درست هستند.



با توجه به شکل داریم:

$$\frac{\lambda}{2} = 3\text{ cm} \Rightarrow \lambda = 6\text{ cm}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{6 \times 10^{-2}}{3 \times 10^8} = 2 \times 10^{-10}\text{ s} = 0.2\text{ ns}$$



$\Delta t = 0.1\text{ ns}$ برابر نصف دوره موج است. با توجه به شکل در لحظه $t = 0$ ، در مکان $x = 1/5\text{ cm}$ میدان الکتریکی و مغناطیسی بیشینه‌اند و با توجه به قاعده دست راست جهت منفی محور z است. در مدت $T/4$ میدان الکتریکی و مغناطیسی قرینه می‌شوند؛ یعنی میدان الکتریکی در جهت مثبت محور z می‌شود.

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow 94 - 88 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow \log \frac{I_2}{I_1} = 0.6 = 2 \times 0.3 = 2 \log 2 = \log 4 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 4 \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 2 \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$$

با توجه به شکل موج در لحظه $t = 0$ داریم:

$$\lambda + \frac{\lambda}{4} = 3 \Rightarrow \frac{5\lambda}{4} = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{5} = 2.4\text{ m}$$

تندی نقطه M در لحظه‌های $(2n-1)\frac{T}{4}$ بیشینه می‌شود، بنابراین:

$$\frac{3T}{4} = 0.6 \Rightarrow T = \frac{2/4}{3} = 0.8\text{ s}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2.4}{0.8} = 3\text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 3 = \sqrt{\frac{F}{0.4}} \Rightarrow 9 = \frac{F}{0.4} \Rightarrow F = 3.6\text{ N}$$

چنانچه در مدت معین Δt آونگ N نوسان انجام دهد، دوره آونگ برابر است با $T = \frac{\Delta t}{N}$ و چون طول آونگ با دوره نوسان آن رابطه مستقیم دارد، با کاهش طول تعداد نوسان زیاد می شود.

$$\frac{\Delta t}{N_1} = T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$$

$$\frac{\Delta t}{N_1 + 10} = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1 - 15}{g}}$$

$$\frac{\frac{\Delta t}{70}}{\frac{\Delta t}{70 + 10}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_1 - 15}} \Rightarrow \frac{70}{70 + 10} = \sqrt{\frac{L_1}{L_1 - 15}} \Rightarrow \frac{64}{49} = \frac{L_1}{L_1 - 15} \Rightarrow 64L_1 - 64 \times 15 = 49L_1 \Rightarrow 15L_1 = 64 \times 15 \Rightarrow L_1 = 64 \text{ cm}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۱۹۵- پاسخ: گزینه ۴

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.02}{0.8} = \frac{1}{40} = 2/5 \times 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{250}{2/5 \times 10^{-2}}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

فاصله شکم از یک سر تار 30 cm و از سر دیگر آن 50 cm است و هر دوی اینها مضارب فرد $\frac{\lambda}{4}$ هستند. بزرگترین عددی که 30 و 50

$$\frac{\lambda}{4} = 10 \Rightarrow \lambda_{\max} = 40 \text{ cm} \quad \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow 0.4 = \frac{100}{f} \Rightarrow f_{\min} = 250 \text{ Hz}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۱۹۶- پاسخ: گزینه ۱

بخشی از جبهه موج c که وارد محیط R شده از امتداد این جبهه موج در محیط I جلوتر رفته است؛ در نتیجه تندی موج در محیط R بیشتر است. همچنین اگر ادامه جبهه موج d را در محیط R رسم کنیم، می بینیم فاصله بین جبهه موج های c و d در محیط R بیش از فاصله آنها در محیط I است که در نتیجه طول موج در محیط R بیشتر از محیط I خواهد بود؛ از این رو ضریب شکست $1/2$ مربوط به محیط R و ضریب شکست $1/5$ مربوط به محیط I است.

$$\frac{n_R}{n_I} = \frac{v_I}{v_R} = \frac{\lambda_I f}{\lambda_R f} = \frac{\lambda_I}{\lambda_R} \Rightarrow \frac{1/2}{1/5} = \frac{40}{\lambda_R} \Rightarrow \lambda_R = 50 \text{ nm}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۱۹۷- پاسخ: گزینه ۲

$$K_{\max} = hf - W_0 \Rightarrow 3 = 4 \times 10^{-15} \times 2 \times 10^{15} - W_0 \Rightarrow W_0 = 5 \text{ eV}$$

$$W_0 = hf_0 \Rightarrow 5 = 4 \times 10^{-15} f_0 \Rightarrow f_0 = 1/25 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۱۹۸- پاسخ: گزینه ۲

$$n = 6 \text{ : سومین خط } \Rightarrow n' = 3 \text{ : رشته پاشن}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 0.1 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} \right) \Rightarrow \lambda = 1200 \text{ nm}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۱۹۹- پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{1}{2} \rightarrow 50 \text{ درصد} \quad \frac{1}{4} \rightarrow 25 \text{ درصد} \quad \frac{1}{8} \rightarrow 12.5 \text{ درصد} \quad \frac{1}{16} \rightarrow 6.25 \text{ درصد}$$

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow t = 4T_{1/2} = 4 \times 5730 = 22920 \approx 23000 \text{ سال}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۲۰۰- پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} N_{0A} &= 10^{25} \\ N_{2A} &= 10^{25} - 5 \times 10^{24} - 3/75 \times 10^{24} = 1/25 \times 10^{24} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{2A} = \frac{N_{0A}}{2^{nA}} \Rightarrow 2^{nA} = \frac{10^{25}}{1/25 \times 10^{24}} = 8$$

برای ماده A ، 3 نیمه عمر سپری شده است. $\Rightarrow n_A = 3$

$$\left. \begin{aligned} N_{0B} &= 10^{25} - 5 \times 10^{24} = 5 \times 10^{24} \\ N_{2B} &= N_{2A} = 1/25 \times 10^{24} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{2B} = \frac{N_{0B}}{2^{nB}} \Rightarrow 2^{nB} = \frac{5 \times 10^{24}}{1/25 \times 10^{24}} = 4 \Rightarrow n_B = 2$$

3 نیمه عمر A برابر 2 نیمه عمر B است؛ بنابراین:

$$3T_A = 2T_B \Rightarrow T_B = \frac{3}{2}T_A$$

شیمی ۶۶

۲۰۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

در یک گرم گاز متان (CH_4) که جرم مولی آن $16 g \cdot mol^{-1}$ است، $\frac{1}{16} \times 5$ مول اتم وجود دارد.

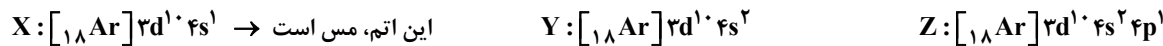
$$1) \frac{1}{16} \times 5 = \frac{x}{44} \times 3 \Rightarrow x \neq 6/25 \quad 2) \frac{1}{16} \times 5 = \frac{x}{46} \times 3 \Rightarrow x \neq 6/25$$

$$3) \frac{1}{16} \times 5 = \frac{x}{76} \times 5 \Rightarrow x \neq 6/25 \quad 4) \frac{1}{16} \times 5 = \frac{x}{80} \times 4 \Rightarrow x = 6/25$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

۲۰۲- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اینکه تعداد الکترون‌های ظرفیتی «W»، بیشتر از ۸ می‌باشد، این عنصر قطعاً به دسته d تعلق دارد؛ بنابراین آرایش الکترونی فشرده آن به صورت $[18Ar] 3d^4 4s^2$ است؛ بنابراین:



با توجه به آرایش الکترونی «W»، عدد اتمی آن ۲۸ است که با عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود (۱۸Ar)، ۱۰ واحد اختلاف دارد. بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) در بیرونی‌ترین لایه الکترونی دارای الکترون اتم «Y»، ۲ الکترون وجود دارد.

۲) بیرونی‌ترین زیرلایه دارای الکترون اتم «Z»، ۴p است؛ بنابراین حاصل (n+1) آن برابر با ۵ است.

۴) رنگ شعله عنصر مس، سبز و رنگ نور حاصل از بازگشت الکترون از لایه پنجم به لایه دوم در اتم هیدروژن، آبی است.

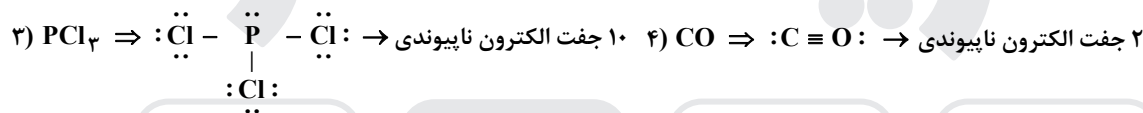
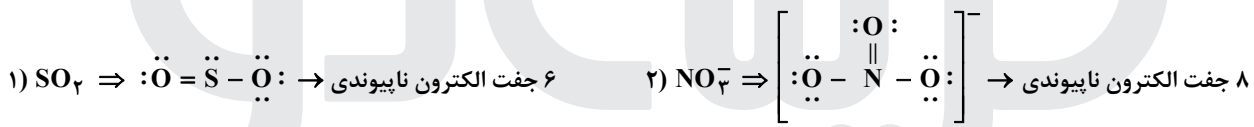
▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

۲۰۳- پاسخ: گزینه ۲

فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، آرگون است، ولی از هلیوم برای خنک کردن قطعات الکترونیکی استفاده می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل‌های ۲ و ۳)

۲۰۴- پاسخ: گزینه ۳



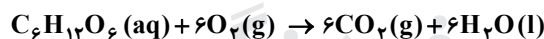
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

۲۰۵- پاسخ: گزینه ۱

معادله موازنه شده به صورت $6S_2Cl_2 + 16NH_3 \rightarrow S_8N_4 + S_8 + 12NH_4Cl$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

۲۰۶- پاسخ: گزینه ۱



ابتدا حجم گاز را در شرایط STP به دست می‌آوریم:

روش اول: $0.05 \text{ mol } C_6H_{12}O_6 \times \frac{6 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{22.4 \text{ L } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 6.72 \text{ L } CO_2$

روش دوم:

$\frac{0.05}{1 \times 1} = \frac{x}{6 \times 22.4/4} \Rightarrow x = 6.72 \text{ L}$

$\frac{6.72}{2} = 3.36 \text{ L}$

با دو برابر شدن فشار گاز در دمای ثابت، حجم آن نصف می‌شود:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۲۰۷- پاسخ: گزینه ۳

غلظت مولی یون برمید در محلول $CaBr_2$ دو برابر غلظت مولی محلول ($0.2 \times 2 = 0.4$) و در نتیجه دو برابر غلظت مولی محلول گلوکز است. بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) با توجه به اینکه جرم مولی گلوکز و کلسیم برمید متفاوت است، غلظت دو محلول برحسب ppm با هم برابر نخواهد بود.

۲) در یک لیتر از محلول گلوکز، ۰/۲ مول گلوکز و در یک لیتر از محلول کلسیم برمید، ۰/۲ مول کلسیم برمید وجود دارد.

$(0.2 \times 200) - (0.2 \times 180) = 0.2 \times 20 = 4 \text{ g}$

۴) در ۱۰۰ mL از محلول کلسیم برمید، ۰/۰۶ مول یون وجود دارد:

یون 0.06 mol $100 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0.2 \text{ mol } CaBr_2}{1 \text{ L}} \times \frac{3 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol } CaBr_2} = 0.06 \text{ mol}$

۲۰۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱

نوع نیروی بین مولکولی AsH_3 و PH_3 مشابه است؛ بنابراین با توجه به بیشتر بودن جرم مولی AsH_3 ، نقطه جوش آن بالاتر است. بررسی گزینه‌های نادرست:
 (۱) مولکول‌های HF توانایی برقراری پیوند هیدروژنی دارند و این ماده نسبت به HBr نقطه جوش بالاتری دارد.
 (۲) NH_3 نیز همانند HF قطبی است و هر دو توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارند. با توجه به بیشتر بودن جرم مولی HF ، نقطه جوش آن بالاتر است.

(۴) HBr توانایی برقراری پیوند هیدروژنی ندارد. (ضمناً نقطه جوش AsH_3 از HBr بالاتر است).

۲۰۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

با توجه به نمودار «I»، انحلال‌پذیری گاز نیتروژن مونوکسید در دمای $35^\circ C$ درجه سلسیوس و فشار ۱ اتمسفر، در حدود $3/75$ میلی‌گرم در 100 گرم آب است. از نمودار «II» درمی‌یابیم که انحلال‌پذیری گاز نیتروژن مونوکسید با تغییر فشار به صورت خطی تغییر می‌کند و نمودار تابع انحلال‌پذیری برحسب فشار برای این گاز از مبدأ مختصات عبور می‌کند. در دمای $35^\circ C$ ، دو نقطه از این تابع وجود دارد (مبدأ مختصات و نقطه $S = 3/75$ $\frac{mg}{100g H_2O}$ و $P = 1 atm$)؛ پس معادله آن به صورت $S = 3/75 \times P$ است، بنابراین:

$$S = \frac{3}{75} \times P \Rightarrow S = \frac{3}{75} \times 6 = \frac{22}{5} \frac{mg}{100g H_2O}$$

$$ppm(NO) = \frac{\text{جرم نیتروژن مونوکسید}}{\text{جرم نیتروژن مونوکسید} + \text{جرم آب}} \times 10^6 \rightarrow ppm(NO) = \frac{22/5 \times 10^{-3} g}{100 g} \times 10^6 = 225$$

۲۱۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) شکل «I»، پدیده اسمز را نشان می‌دهد که روشی برای تهیه آب آشامیدنی نیست.
 (۳) در روش اسمز معکوس، کلیه آلاینده‌ها به جز میکروب‌ها حذف می‌شوند.
 (۴) آب خروجی از قسمت «C»، دارای غلظت بیشتری از آلاینده‌ها و نمک‌ها است.

۲۱۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$40 L SO_3 \times \frac{100}{R} \times \frac{2/4 g SO_3}{1 L SO_3} \times \frac{1 mol SO_3}{80 g SO_3} \times \frac{1 mol Al_2(SO_4)_3}{3 mol SO_3} = 0/5 mol Al_2(SO_4)_3 \Rightarrow R = 80\%$$

۲۱۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

با توجه به غلظت و حجم محلول پس از واکنش، می‌توان نتیجه گرفت شمار مول $FeCl_3$ برابر با $0/02$ مول است:

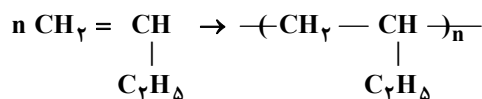
$$0/02 mol FeCl_3 \times \frac{1 mol Fe_2O_3}{2 mol FeCl_3} \times \frac{160 g Fe_2O_3}{1 mol Fe_2O_3} = 1/6 g Fe_2O_3$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{1/6}{2} \times 100 = 80\%$$

۲۱۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل‌های ۱ و ۳)

(الف) ۱- بوتن، یک آلکن ۴ کربنه با فرمول مولکولی C_4H_8 و ساده‌ترین آلکان، متان با فرمول مولکولی CH_4 است.

(پ) ساختار ۱- بوتن، به صورت $CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_3$ است، بنابراین:



بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) از بوتان به عنوان سوخت فندک استفاده می‌شود.

(ت) از واکنش آلکن‌ها با آب، الکل‌ها به دست می‌آیند:



۲۱۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$-2850 = [2\Delta H(C-C) + (12 \times 415) + (7 \times 500)] - [(8 \times 800) + (12 \times 465)]$$

$$\Rightarrow -2850 = 2\Delta H(C-C) + 8480 - 11980 \Rightarrow \Delta H(C-C) = 325 kJ \cdot mol^{-1}$$

۲۱۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$\frac{\bar{R}(H_2)}{2} = \frac{\bar{R}(NH_3)}{2} \Rightarrow \bar{R}(H_2) = \frac{3}{2} \times 4 \times 10^{-2} = 6 \times 10^{-2} mol \cdot s^{-1}$$

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(NH_3)}{2} = \frac{4 \times 10^{-2}}{2} = 2 \times 10^{-2} mol \cdot s^{-1} \times \frac{60 s}{1 min} = 1/2 mol \cdot min^{-1}$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 2000 \times 4 / 2 \times 66$$

$$\frac{2000 \times 4 / 2 \times 66}{55} = 400 \times 4 / 2 \times 6 \Rightarrow \frac{400 \times 4 / 2 \times 6}{16} = 630 \text{ mol}$$

$$\bar{R} = \frac{\Delta n}{\Delta t} \Rightarrow 6 / 3 = \frac{630}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 100 \text{ min}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

۲۱۷- پاسخ: گزینه ۲

A و B واکنش دهنده و C و D فرآورده هستند. با توجه به تغییرات غلظت این مواد در بازه زمانی یکسان، معادله واکنش به صورت $2A + B \rightarrow 2C + 2D$ است؛ بنابراین سرعت متوسط واکنش با سرعت مصرف B برابر است:

$$\bar{R} (\text{واکنش}) = \bar{R}(B) = -\frac{(1-1/5) \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}{3 \text{ s}} \times 0.5 \text{ L} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 0.5 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۲۱۸- پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

(ت) پلیمرها دسته‌ای از درشت‌مولکول‌ها هستند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۲۱۹- پاسخ: گزینه ۴

$$(C_7F_7) \text{ مونومر تفلون} = 2(12) + 4(19) = 100 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$(C_7H_7Cl) \text{ مونومر پلی وینیل کلرید} = 2(12) + 3(1) + 35/5 = 62/5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{جرم مولی پلی وینیل کلرید} = 8 \times \text{جرم مولی تفلون} \Rightarrow 100n_1 = 8 \times 62/5 n_2 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{100}{8 \times 62/5} = 0.2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۲۲۰- پاسخ: گزینه ۳

بررسی عبارت‌های نادرست:

(۱) مانند کولار از دسته پلی‌آمیدها است و آمین دو عاملی و اسید دو عاملی، مونومرهای سازنده این پلیمر هستند.

(۲) اگر در ساختار مونومر نیتروژن دار آن، به جای گروه‌های آمین، گروه‌های هیدروکسیل قرار دهیم، $HO-CH_2-CH_2-OH$ حاصل می‌شود نه اتیلن گلیکول $(HO-CH_2-CH_2-OH)$!

(۴) اگر در تهیه یک مول از این پلیمر، ۱۰ مول از هر نوع مونومر استفاده شده باشد، ۲۰ مول آب به‌عنوان فرآورده جانبی تولید می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل‌های ۱ و ۴)

۲۲۱- پاسخ: گزینه ۳

ساختار نشان داده شده مربوط به یک استر سنگین سه‌عاملی است که مانند پلی‌اتیلن ترفتالات (PET)، دارای گروه عاملی استری است. بررسی عبارت‌های نادرست:

(۱) مربوط به یک استر سنگین و نامحلول در آب است.

(۲) زنجیرهای هیدروکربنی چربی دوست هستند.

(۴) فرمول مولکولی این ترکیب $C_{57}H_{110}O_6$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل‌های ۱ و ۳)

۲۲۲- پاسخ: گزینه ۴

سدیم کلرید در حالت مذاب و محلول، رسانای جریان برق است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۲۲۳- پاسخ: گزینه ۳

در محلول ذکر شده غلظت یون هیدرونیوم برابر با $10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ است:

$$\text{غلظت تعادلی} \quad 3 \times 10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 10^{-4}$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{10^{-4} \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-4}} \approx 3/3 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۲۲۴- پاسخ: گزینه ۱

باید در نمودار به جای عدد ۷ عدد ۱۴ نوشته شود تا نمودار درست شود.

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2/4} = 10^{-2} \times (10^{0/2})^2 = 4 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow M = \frac{16 \times 10^{-6}}{1/6 \times 10^{-5}} = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$(C_2H_4O_2) \text{ اسید استیک} = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1} \times 2L = 2 \text{ mol}$$

در واکنش سنتز استر، به ازای مصرف هر مول اسید، یک مول استر به دست می آید:

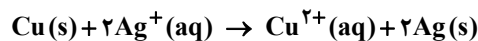
$$(C_2H_4O_2) \text{ جرم استر} = 2 \text{ mol} \times 88 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 176 \text{ g}$$

$$\text{درصد جرمی اسید در سرکه} = \frac{2 \text{ mol} \times 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{200 \text{ mL} \times 1/05 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}} \times 100 = 5/7 \%$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۲۲۶- پاسخ: گزینه ۲

واکنش انجام شده به صورت زیر است:



۱۵۲g = ۶۴ - ۲۱۶: جرم اضافه شده به تیغه به ازای مصرف ۱ مول Cu و مبادله ۲ مول الکترون

با توجه به اینکه جرم تیغه از ۱۱۴g به ۱۹۰g رسیده است (۷۶g افزایش جرم) می توان نوشت:

$$76 \text{ g} \times \frac{2 \text{ mole}^-}{152 \text{ g}} = 1 \text{ mol } e^-$$

۲ مول الکترون مبادله شده

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۲۲۷- پاسخ: گزینه ۲

تیغه فلزی X برخلاف تیغه فلزی Y با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می دهد؛ یعنی فلز X کاهنده قوی تری از هیدروژن و هیدروژن هم کاهنده قوی تری از فلز Y است.

بررسی گزینه های نادرست:

- (۱) در سری الکتروشیمیایی، نیم سلول استاندارد X موقعیت پایین تری نسبت به نیم سلول استاندارد Y دارد.
- (۳) پتانسیل استاندارد نیم سلول X برخلاف پتانسیل استاندارد نیم سلول Y، عددی منفی است.
- (۴) کاتیون فلز X، اکسندۀ ضعیف تری از یون هیدروژن و کاتیون فلز Y است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۲۲۸- پاسخ: گزینه ۱



ساختار اوره به صورت $\text{H} - \text{N} - \text{C} - \text{N} - \text{H}$ و عدد اکسایش N در آن برابر با ۳- است که با عدد اکسایش کربن شماره ۱ در ساختار داده شده، یکسان است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۲۲۹- پاسخ: گزینه ۲

عبارت های «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت های نادرست:

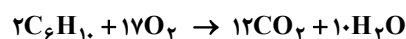
(الف) در گرافیت، بین لایه ها، نیروی وان دروالسی وجود دارد.

(ب) سیلیس (SiO_2) دگرشکل سیلیسیم (Si) نیست.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۲۳۰- پاسخ: گزینه ۳

معادله واکنش سوختن آلکین ۶ کربنه (C_6H_{10}) به صورت زیر است:



نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی داده شده، مربوط به CO_2 است؛ بنابراین باید شمار مولکول های CO_2 تولیدی را محاسبه کنیم:

$$123 \text{ g } C_6H_{10} \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{10}}{82 \text{ g } C_6H_{10}} \times \frac{12 \text{ mol } CO_2}{2 \text{ mol } C_6H_{10}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ molecule } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 54/18 \times 10^{23} \text{ molecule } CO_2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۲۳۱- پاسخ: گزینه ۳

مقایسه های «الف»، «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی مورد نادرست:

(ب) دو یون $^{3-}P_{15}$ و $^{2+}Ca_{20}$ ، هم الکترون هستند و در یون های هم الکترون، شعاع آنیون بیشتر از شعاع کاتیون است.

۲۳۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳

با توجه به اطلاعات سؤال، واکنش‌های A و B هر دو گرماده هستند و واکنش A انرژی فعال‌سازی کمتری در مقایسه با واکنش B دارد، ولی واکنش C گرماگیر است.

۲۳۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) برای افزایش کارایی آن‌ها، سرامیک را به‌صورت دانه‌های ریز درآورده، ولی سرامیک با آلاینده‌ها واکنش نمی‌دهد بلکه دارای کاتالیزگرهایی برای تسریع واکنش‌های آلاینده‌ها است.

(۲) در مبدل کاتالیستی NO نمی‌سوزد، بلکه تجزیه می‌شود: $2NO \rightarrow N_2 + O_2$

(۳) در ساخت این مبدل‌ها از فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) به‌عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.

۲۳۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

با افزودن گاز نیتروژن به ظرف، غلظت مولی آن افزایش می‌یابد و با افزایش یافتن سرعت واکنش رفت، سامانه از تعادل خارج می‌شود. بررسی عبارت‌های نادرست:

(۱) پس از برقراری تعادلی جدید در ظرف، شمار مول H_2 کمتر از شمار مول آن در تعادل اولیه، ولی شمار مول N_2 و NH_3 بیشتر از شمار مول آن‌ها در تعادل اولیه است.

(۳) واکنش با پیشرفت در جهت رفت دوباره به تعادل می‌رسد و طی این فرایند به‌ازای مصرف شدن ۴ مول گاز، ۲ مول گاز تولید می‌شود؛ بنابراین نمی‌توان گفت در تعادل جدید، شمار مول مواد، X مول افزایش یافته است.

(۴) تغییر ایجادشده مقدار ثابت تعادل را تغییر نمی‌دهد.

۲۳۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

با توجه به اکسایش پارازیلین در حضور محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات می‌توان نتیجه گرفت که گروه متیل در تولوئن، توسط این محلول اکسند به گروه کربوکسیل اکسایش می‌یابد و از واکنش مولکول حاصل با یک دی‌الکل (اتیلن گلیکول) یک دی‌استر تولید می‌شود.

