

۱. اگر A و B ماتریس‌های $m \times n$ و r یک عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $r(A \pm B) = rA \pm rB$.

پاسخ: فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ داریم:

$$\begin{aligned} r(A \pm B) &= r([a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n}) = r[a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n} = \\ [r(a_{ij} \pm b_{ij})]_{m \times n} &= [ra_{ij} \pm rb_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n} \pm [rb_{ij}]_{m \times n} = \\ r[a_{ij}]_{m \times n} \pm r[b_{ij}]_{m \times n} &= rA \pm rB \end{aligned}$$

۲. اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $(r \pm s)A = rA \pm sA$.

پاسخ: می‌دانیم $rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$ پس داریم:

$$\begin{aligned} (r \pm s)A &= (r \pm s)[a_{ij}]_{m \times n} = [(r \pm s)a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij} \pm sa_{ij}]_{m \times n} = \\ [ra_{ij}]_{m \times n} \pm [sa_{ij}]_{m \times n} &= r[a_{ij}]_{m \times n} \pm s[a_{ij}]_{m \times n} = rA \pm sA \end{aligned}$$

۳. اگر A و B ماتریس‌های $m \times n$ و r عدد حقیقی باشد، ثابت کنید: $A = B \Rightarrow rA = rB$.

پاسخ: فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ، چون $A = B$ ، پس به‌ازای هر i و j نتیجه می‌گیریم $a_{ij} = b_{ij}$ داریم:

$$rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n} = [rb_{ij}]_{m \times n} = r[b_{ij}]_{m \times n} = rB$$

بنابراین $rA = rB$.

۴. با یک مثال نقض نشان دهید اگر $AB = AC$ ، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$. (قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست).

پاسخ: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \\ A \times C &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

دیده می‌شود $AB = AC$ ولی $B \neq C$.

(توجه کنید پیدا کردن ماتریس‌های A و B و C که در شرایط مسئله صدق کند به نظر ساده نیست، ولی کافی است ماتریس A را طوری انتخاب کنید که درمیان A برابر صفر باشد).

۵. اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض‌پذیر باشند ($AB = BA$)، ثابت کنید: $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$.

پاسخ:

$$(A + B)^T = (A + B)(A + B) = A^T + AB + BA + B^T = A^T + AB + AB + B^T = A^T + 2AB + B^T$$

۶. اگر A و B ماتریس‌های 3×3 باشند و داشته باشیم $(A+B)^T = A^T + 2AB + B^T$ ، ثابت کنید $AB = BA$ (یعنی A و B تعویض پذیرند)

پاسخ: ابتدا ماتریس $(A+B)^T$ را محاسبه می‌کنیم.

$$(A+B)^T = (A+B)(A+B) = A^T + AB + BA + B^T \quad (1)$$

$$(A+B)^T = A^T + 2AB + B^T \quad (2) \quad \text{از طرف دیگر بنابر فرض داریم:}$$

$$(2), (1) \Rightarrow A^T + AB + BA + B^T = A^T + 2AB + B^T \Rightarrow AB = BA$$

۷. ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است. (قضیه یکتایی وارون)

پاسخ: فرض کنیم ماتریس A وارون پذیر باشد و ماتریس‌های B و C وارون‌های ماتریس A باشند، در این صورت داریم:

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I$$

اکنون ثابت می‌کنیم $B = C$.

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

پس اگر A وارون پذیر باشد آنگاه فقط یک ماتریس وارون می‌تواند داشته باشد.

۸. نشان دهید دترمینان ماتریس 3×3 که دارای دو سطر مساوی است، برابر صفر می‌باشد.

پاسخ: ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ که دو سطر مساوی دارد را در نظر می‌گیریم. حاصل دترمینان A را برحسب سطر سوم محاسبه می‌کنیم.

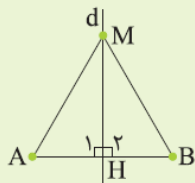
$$|A| = d(-1)^{-4} \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} + e(-1)^{-5} \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f(-1)^{-6} \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= d(0) - e(0) + f(0) = 0$$

۹. ثابت کنید عمود منصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند.

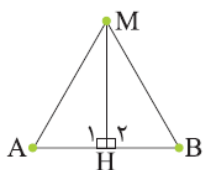
پاسخ: در اینجا یک قضیه دوشرطی مطرح است. باید ثابت کنیم هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است و برعکس.

فرض کنید d عمود منصف پاره خط AB است و M نقطه‌ای روی d باشد. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \begin{array}{c} \Delta \\ \Delta \end{array} \begin{array}{l} MAH \\ MBH \end{array} \cong \Rightarrow MA = MB$$

برعکس فرض کنیم نقطه M از دو نقطه A و B به یک فاصله است. از M عمود MH را بر AB رسم می‌کنیم. داریم:



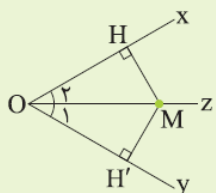
$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \begin{array}{c} \Delta \\ \Delta \end{array} \begin{array}{l} MAH \\ MBH \end{array} \cong \Rightarrow AH = BH$$

پس MH عمود منصف AB است، یعنی M روی عمود منصف AB است.

۱۰. نشان دهید نیمساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند.

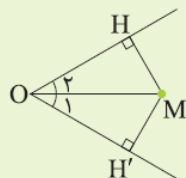
پاسخ: در اینجا یک قضیه دوشرطی مطرح است. باید ثابت کنیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.

فرض کنیم Oz نیمساز زاویه xOy باشد و M نقطه‌ای روی Oz باشد. عمودهای MH و MH' را بر اضلاع زاویه xOy رسم می‌کنیم. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OM = OM \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \Delta MOH \cong \Delta MOH' \Rightarrow MH = MH'$$

برعکس فرض کنیم نقطه M از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله باشد. یعنی $MH = MH'$. از M به O وصل کرده داریم:



$$\left. \begin{array}{l} MH = MH' \\ OM = OM \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \Delta MOH \cong \Delta MOH' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

پس M روی نیمساز زاویه O قرار دارد.

۱۱. مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را به دست آورید.

پاسخ: معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

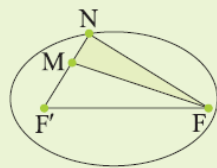
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\text{پس مرکز این دایره } O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ و شعاع آن } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ است.}$$

۱۲. یک نقطه دلخواه مانند M درون بیضی در نظر بگیرید نشان دهید مجموع فواصل M از دو کانون بیضی کمتر از $2a$ است.

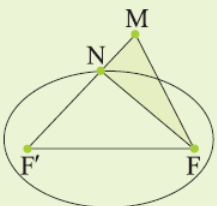
پاسخ: فرض کنیم M درون بیضی با کانون‌های F و F' باشد. MF' را امتداد می‌دهیم تا بیضی را در N قطع کند، چون N روی بیضی است، پس $NF + NF' = 2a$. داریم:



$$\begin{aligned} \Delta MNF : MF &< NF + MN \xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{به طرفین MF}} MF + MF' < NF + MN + MF' \\ \underline{MN + MF' = NF'} &\Rightarrow MF + MF' < NF + NF' \Rightarrow MF + MF' < 2a \end{aligned}$$

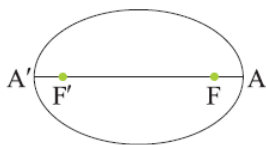
۱۳. یک نقطه دلخواه مثل M بیرون بیضی در نظر بگیرید. نشان دهید مجموع فواصل M از دو کانون بزرگ‌تر از $2a$ است.

پاسخ: فرض کنیم M بیرون بیضی با کانون‌های F و F' باشد و MF' بیضی را در N قطع کند، چون N روی بیضی است، پس $NF + NF' = 2a$. داریم:



$$\begin{aligned} \Delta MNF : NF &< MF + MN \xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{به طرفین NF}} NF + NF' < MF + MN + NF' \\ \underline{MN + NF' = MF'} &\Rightarrow 2a < MF + MF' \end{aligned}$$

۱۴. در بیضی با کانون‌های F و F' ثابت کنید $FA = F'A'$.



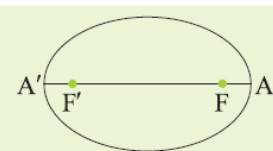
پاسخ: می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $2a$ است. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \\ A' \in \text{بیضی} \Rightarrow A'F + A'F' = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow AF + AF' = A'F + A'F' \quad (1)$$

از طرف دیگر $AF' = AF + FF'$ و $A'F = A'F' + FF'$ از (۱) داریم:

$$AF + AF + FF' = A'F' + FF' + A'F' \Rightarrow 2AF = 2A'F' \Rightarrow AF = A'F'$$

۱۵. نشان دهید طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

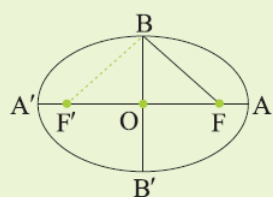


پاسخ: در صورتی که F و F' کانون‌های بیضی باشند و AA' قطر بزرگ بیضی آنگاه $AF = A'F'$

داریم:

$$A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \xrightarrow{AF=A'F'} A'F' + AF' = 2a \Rightarrow AA' = 2a$$

۱۶. در بیضی با قطر بزرگ $AA' = 2a$ و قطر کوچک $BB' = 2b$ و فاصله کانونی $FF' = 2c$ نشان دهید $a^2 = b^2 + c^2$.



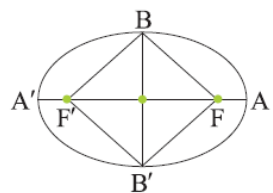
پاسخ: می‌دانیم در بیضی قطر BB' عمود منصف FF' است، پس $BF = BF'$ داریم.

$$B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF=BF'} 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه BOF ، $OB = b$ و $OF = c$ و $BF = a$ داریم:

$$\Delta BOF : BF^2 = OB^2 + OF^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۱۷. در بیضی زیر که AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک و F و F' کانون‌های آن هستند، ثابت کنید محیط چهارضلعی $BFB'F'$ برابر $4a$ است.



پاسخ: می‌دانیم قطر کوچک BB' عمود منصف FF' است، پس $BF = BF'$ داریم:

$$B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF=BF'} 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $a = B'F = B'F' = BF'$ ، پس چهارضلعی $BFB'F'$ لوزی به ضلع a است، پس محیط آن برابر $4a$ است.

۱۸. نشان دهید اگر $\frac{c}{a} = 1$ آنگاه بیضی تبدیل به پاره‌خط می‌شود.

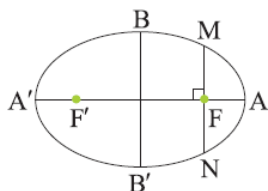
پاسخ: اگر $\frac{c}{a} = 1$ آنگاه $c = a$. از طرف دیگر $a^2 = b^2 + c^2$ بنابراین $b = 0$ ، یعنی قطر کوچک بیضی طول صفر دارد؛ در نتیجه B و

B' بر هم منطبق می‌شوند و بیضی به شکل پاره‌خط خواهد بود.

۱۹. نشان دهید اگر $\frac{c}{a} = 0$ آنگاه بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

پاسخ: اگر $\frac{c}{a} = 0$ آنگاه $c = 0$ و چون $a^2 = b^2 + c^2$ پس $a = b$ ، یعنی طول قطر بزرگ و کوچک بیضی با هم برابرند؛ در نتیجه بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

۲۰. در بیضی شکل زیر با قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ ثابت کنید طول وتر MN که از کانون F گذشته و بر قطر بزرگ عمود است برابر $\frac{2b^2}{a}$ است.

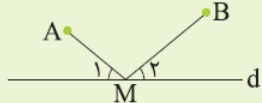


پاسخ: طول پاره خط MF را در مثلث قائم‌الزاویه MFF' به دست می‌آوریم.

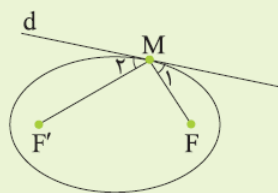
$$\begin{aligned} MF'^2 &= MF^2 + FF'^2 \xrightarrow[\text{پس } MF' = 2a - MF]{MF + MF' = 2a} (2a - MF)^2 = MF^2 + (2c)^2 \\ \Rightarrow 4a^2 + MF^2 - 4a \cdot MF &= MF^2 + 4c^2 \Rightarrow a \cdot MF = a^2 - c^2 \\ \xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2} a \cdot MF &= b^2 \Rightarrow MF = \frac{b^2}{a} \Rightarrow MN = 2MF = \frac{2b^2}{a} \end{aligned}$$

۲۱. نشان دهید اگر از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی بتابد، انعکاس نور از کانون بعدی آن می‌گذرد. (خاصیت بازتابندگی بیضی)

پاسخ: می‌دانیم اگر کوتاه‌ترین مسیر از نقطه A به نقطه B با عبور از نقطه M روی خط d مسیر

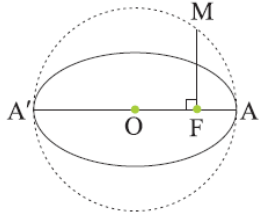


باشد، آنگاه $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. (مسئله هرون)



حال فرض کنیم خط d در نقطه M بر بیضی با کانون‌های F و F' مماس باشد. در این صورت هر نقطه روی خط d انتخاب کنیم مجموع فاصله‌های آن نقطه از دو کانون F و F' بیشتر از $2a$ است، زیرا این نقاط بیرون بیضی هستند و فقط در نقطه M این مجموع برابر $2a$ است. پس مجموع فواصل M از F و F' مینیمم است، در نتیجه $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. پس بنابر ویژگی آینه‌های تخت اگر از کانون F شعاع نوری بر بیضی بتابد، بازتابش آن از کانون F' می‌گذرد، زیرا زاویه تابش و بازتابش برابرند.

۲۲. در شکل قطر دایره برابر قطر بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

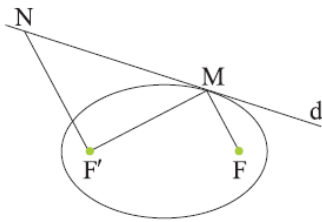


پاسخ: چون قطر دایره برابر قطر بیضی است، پس شعاع دایره مساوی a است. $\frac{AA'}{2} = \frac{2a}{2} = a$ است. از O به M وصل می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \Delta OMF : OM^2 &= MF^2 + OF^2 \xrightarrow{OM=a, OF=c} a^2 = MF^2 + c^2 \\ MF^2 &= a^2 - c^2 \xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2} MF^2 = b^2 \Rightarrow MF = b \end{aligned}$$

پس MF مساوی نصف قطر کوچک بیضی است.

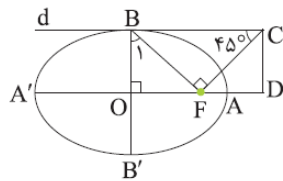
۲۳. در بیضی شکل زیر خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. از کانون F' خطی موازی MF رسم می‌کنیم تا d را در N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$ (F کانون بعدی است).



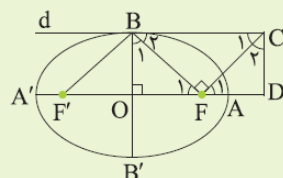
پاسخ: بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ است. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MF \parallel NF' \\ \text{مورب } d \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{M}_1 \xrightarrow{\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2} \widehat{N}_1 = \widehat{M}_2 \Rightarrow NF' = MF'$$

۲۴. در بیضی زیر AA' و BB' دو قطرند و خط d در نقطه B مماس بر بیضی است. اگر CD بر امتداد قطر بزرگ عمود باشد و $\widehat{BFC} = 90^\circ$ و $\widehat{BCF} = 45^\circ$ ، آنگاه مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

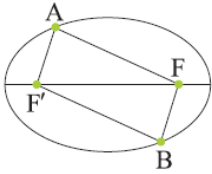


پاسخ: مثلث‌های ΔOBF و ΔBFC و ΔFCD قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند، زیرا $\widehat{B}_1 = \widehat{F}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \widehat{F}_1 = 45^\circ$. چون $OB = b$ ، پس $OF = FD = CD = b$ داریم:



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \xrightarrow{b=c} a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b, \quad AF = OA - OF = a - c \\ \frac{AD}{AF} &= \frac{FD - AF}{AF} = \frac{b - (a - c)}{a - c} = \frac{b - a + c}{a - c} = \frac{b - \sqrt{2}b + b}{\sqrt{2}b - b} \\ &= \frac{2b - \sqrt{2}b}{\sqrt{2}b - b} = \frac{\sqrt{2}b(\sqrt{2} - 1)}{b(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۲۵. در بیضی شکل زیر $BF = AF'$ نشان دهید $AF \parallel BF'$. (F و F' دو کانون بیضی هستند).

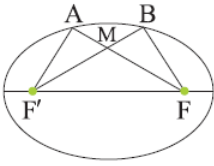


پاسخ: می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون بیضی برابر $2a$ است.

$$\left. \begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \\ B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{BF=AF'} AF = BF'$$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل آن دو به دو مساوی‌اند، پس $AF \parallel BF'$.

۲۶. در بیضی شکل زیر $AF' = BF$ ، نشان دهید $MF = MF'$. (F و F' دو کانون بیضی هستند).



پاسخ: می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون بیضی برابر $2a$ است.

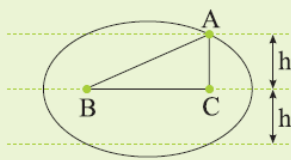
$$\left. \begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \\ B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{AF'=BF} AF = BF'$$

$$\left. \begin{array}{l} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF = FF' \end{array} \right\} \xrightarrow{(\text{ض.ض.})} \triangle AFF' \cong \triangle BFF' \Rightarrow \widehat{AF'} = \widehat{BF} \Rightarrow MF = MF'$$

پس:

۲۷. فرض کنید از مثلث ABC اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث داده شده باشد با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.

پاسخ: فرض کنیم $AH = h$ و $BC = a$ و P مساوی محیط مثلث باشد. بنابر فرض $AB + AC = P - a$.



چون P و a ثابت هستند، پس $AB + AC$ ثابت است و چون نقاط B و C ثابت هستند، پس مجموع فواصل نقطه A از دو نقطه ثابت B و C مقدار ثابت $P - a$ است، در نتیجه مکان هندسی رأس A روی یک بیضی به کانون‌های B و C و مقدار ثابت $P - a$ است. از طرف دیگر رأس A روی دو خط موازی با BC و به فاصله h از آن قرار دارد، بنابراین برای رسم مثلث ابتدا بیضی با کانون‌های B و C و مقدار ثابت $P - a$ را رسم می‌کنیم. سپس دو خط موازی با خط BC و به فاصله h از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط با بیضی رأس A است و

$\triangle ABC$ مثلث مطلوب است.

۲۸. به کمک یک گونیا سهمی با کانون F و خط هادی d را رسم کنید. طریقه رسم را توضیح دهید.

پاسخ: یک گونیا انتخاب کرده و ضلع قائم BC را در راستای خط هادی d قرار می‌دهیم. نخ به طول ضلع قائم بعدی (یعنی AB) انتخاب کرده یک سر نخ را به کانون F و سر دیگر را به نقطه A می‌بندیم و با یک مداد نخ را به صورت کشیده درمی‌آوریم تا نخ به ضلع AB بچسبد. در این صورت نقطه M نوک مداد روی سهمی است. زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول نخ} = AB = MA + MB \\ \text{طول نخ} = MA + MF \end{array} \right\} \Rightarrow MF = MB \Rightarrow M \text{ روی سهمی است}$$

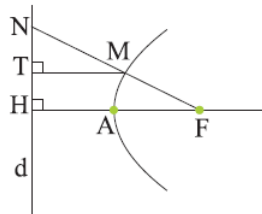
اکنون با حرکت گونیا در راستای خط هادی به طوری که نخ همواره کشیده بوده و به ضلع AB چسبیده باشد، سهمی رسم می‌شود.

۲۹. خطی از کانون یک سهمی موازی با خط هادی آن رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط M و N قطع کند. نشان دهید طول وتر MN برابر ۴a است.

پاسخ: از M عمود MH' را بر خط هادی d رسم می‌کنیم. در این صورت چهارضلعی MH'HF مستطیل است. از طرف دیگر M روی سهمی است، پس $MF = MH'$ بنابراین چهارضلعی MH'HF مربع است در نتیجه $MF = FH = 2a$ پس:

$$MN = 2MF = 4a$$

۳۰. در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا d را در N قطع کند و عمود MT را بر d رسم می‌کنیم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$.



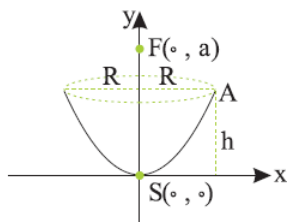
پاسخ: می‌دانیم فاصله هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی برابر است.

$$M \in \text{سهمی} \Rightarrow MF = MT, A \in \text{سهمی} \Rightarrow AF = AH$$

چون MT و FH بر خط d عمودند، پس $MT \parallel FH$ با استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} MT \parallel FH \Rightarrow \frac{NT}{TH} = \frac{MN}{MF} \xrightarrow{MF=MT} \frac{NT}{TH} = \frac{MN}{MT} \\ MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{MN}{FN} \xrightarrow{FH=2AF} \frac{FN}{2AF} = \frac{MN}{MT} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{FN}{2AF} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{FN}{AF} = \frac{2NT}{TH}$$

۳۱. شکل زیر یک دیش مخابراتی است. ثابت کنید $a = \frac{R^2}{4h}$.



پاسخ: با توجه به شکل نقطه A به مختصات (R, h) است. در ضمن از مقابل این دیش یک سهمی قائم با رأس $S(0, 0)$ است و معادله این سهمی به صورت زیر است.

$$x^2 = 4ay \xrightarrow{A \in \text{سهمی}} R^2 = 4ah \Rightarrow a = \frac{R^2}{4h}$$

۳۲. سهمی $y = x^2$ را خطوط موازی $y = ax + b$ (a ثابت و b متغیر) قطع می‌کند. ثابت کنید وسط وترهای ایجادشده روی خطی موازی محور سهمی قرار دارند.

پاسخ: سهمی را با خطوط موازی $y = ax + b$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$$

در صورتی که A و B نقاط برخورد خط با سهمی باشند و M نقطه وسط پاره خط AB باشد داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \xrightarrow{x_A + x_B = S = \frac{a}{1}} x_M = \frac{a}{2}$$

اکنون اگر خطها موازی $y = ax + b$ را با سهمی قطع دهیم دیده می‌شود طول نقطه وسط وترهای ایجادشده روی سهمی همگی برابر $\frac{a}{2}$ است، پس مکان هندسی این نقاط خط $x = \frac{a}{2}$ است که خطی موازی با محور سهمی است.

۳۳. سهمی با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F عبور کند و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس.

پاسخ: فرض کنیم M نقطه‌ای روی سهمی باشد. دایره‌ای به مرکز M گذرا از F رسم می‌کنیم. درواقع MF شعاع این دایره است. چون M روی سهمی است، پس $MF = MH$ ، در نتیجه فاصله M تا خط d برابر شعاع دایره است. پس دایره به مرکز M و شعاع MF بر خط هادی d مماس است.

برعکس فرض کنیم دایره‌ای از کانون F گذشته و بر خط هادی d مماس است. پس مرکز دایره از کانون و خط هادی به یک فاصله است؛ در نتیجه بنا بر تعریف سهمی مرکز دایره روی سهمی قرار دارد.

۳۴. اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند و $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. آنگاه ثابت کنید: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$.

پاسخ: می‌دانیم $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ داریم:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

در صورتی که θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد آنگاه بنابر قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2 b_2 + a_3^2 + b_3^2 + 2a_3 b_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3 = 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

۳۵. سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید به طوری که $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

پاسخ: بردارهای $\vec{a} = (1, -2, 3)$ ، $\vec{b} = (2, 1, 1)$ و $\vec{c} = (0, 0, 1)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, -2, 3) \cdot (2, 1, 1) = 2 - 2 + 3 = 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (1, -2, 3) \cdot (0, 0, 1) = 0 + 0 + 3 = 3$$

دید می‌شود $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

۳۶. ثابت کنید $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a} = (x, y, z)$ داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{a}|^2$$

۳۷. نشان دهید دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد و برعکس.

پاسخ: در صورتی که θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \xrightarrow{|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0} \cos \theta = 0 \xrightarrow{0 \leq \theta \leq \pi} \theta = 90^\circ$$

(توجه کنید وقتی بین رابطه‌ها علامت دوطرفه $(\Leftrightarrow)$ قرار می‌دهیم یعنی قضیه و عکس قضیه با هم ثابت شده است.)

۳۸. بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض‌اند. نشان دهید: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a} = (x, y, z)$ ، $\vec{b} = (x', y', z')$ و $\vec{c} = (x'', y'', z'')$ داریم:

$$\vec{b} + \vec{c} = (x' + x'', y' + y'', z' + z'')$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (x, y, z) \cdot (x' + x'', y' + y'', z' + z'') =$$

$$xx' + xx'' + yy' + yy'' + zz' + zz'' = (xx' + yy' + zz') + (xx'' + yy'' + zz'') = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

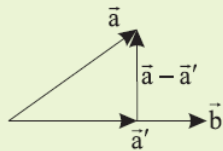
۳۹. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، ثابت کنید: (نامساوی کوشی - شواتز) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$.

پاسخ: اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$|\cos \theta| \leq 1 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

۴۰. دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر بردار $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، نشان دهید: $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$.

پاسخ: در شکل $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ است و بردار $\vec{a} - \vec{a}'$ بر $\vec{b}$ عمود است پس داریم:



$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}' \cdot \vec{b} = 0 \quad (۱)$$

از طرف دیگر $\vec{a}'$ در امتداد $\vec{b}$ است پس $\vec{a}' \parallel \vec{b}$ پس $\vec{a}' = m\vec{b}$ در نتیجه:

$$(۱) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - m\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \xrightarrow{\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2} m = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \quad (۲)$$

بنابراین:

$$\vec{a}' = m\vec{b} \xrightarrow{(۲)} \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

۴۱. نشان دهید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر قائم یکی از آنها بر امتداد دیگری بردار صفر است.

پاسخ: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند پس $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ بنابراین:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{0}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \vec{0}$$

۴۲. دو بردار $\vec{a} = (x, y, z)$ و $\vec{b} = (x', y', z')$ مفروض‌اند. ثابت کنید: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.

پاسخ: ابتدا بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - y'z)\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

اکنون:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (x, y, z) \cdot (yz' - y'z, -xz' + x'z, xy' - x'y) = xyz' - xy'z - xyz' + x'yz + xy'z - x'yz = 0$$

۴۳. نشان دهید اگر $\vec{a} \parallel \vec{b}$ آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ خود بردار $\vec{a}$ است.

پاسخ: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی‌اند پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مضرب یکدیگرند. فرض کنیم $\vec{a} = m\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{m\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{m|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = m\vec{b} = \vec{a}$$

پس $\vec{a}' = \vec{a}$.

۴۴. اگر $\vec{a} = (x, y, z)$ و $\vec{b} = (x', y', z')$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه بین آنها باشد آنگاه نشان دهید:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

پاسخ: ابتدا مختصات بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{a} = (x, y, z) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - y'z)\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

اکنون اندازه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (yz' - y'z)^2 + (xz' - x'z)^2 + (xy' - x'y)^2 =$$

$$y^2 z'^2 + y'^2 z^2 - 2yz'y'z + x^2 z'^2 + x'^2 z^2 - 2xz'x'z + x^2 y'^2 + x'^2 y^2 - 2xy'xy' \quad \text{حال عبارت}$$

را اضافه و کم می‌کنیم

$$(x^2 x'^2 + y^2 y'^2 + z^2 z'^2 + y^2 z'^2 + y'^2 z^2 + x^2 z'^2 + x'^2 z^2 + x^2 y'^2 + x'^2 y^2) - (x^2 x'^2 + y^2 y'^2 + z^2 z'^2 + 2yz'y'z + 2xz'x'z + 2xy'xy') =$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 =$$

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \Rightarrow$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

۴۵. اگر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی باشند ثابت کنید: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ و برعکس.

پاسخ: فرض کنیم θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \xleftarrow{|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0} \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۴۶. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، نشان دهید: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$.

پاسخ: اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

۴۷. اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ آنگاه ثابت کنید: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

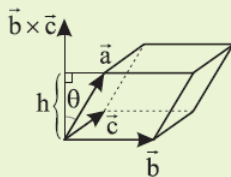
پاسخ: طرفین فرض را یکبار در بردار $\vec{a}$ و بار دیگر در بردار $\vec{b}$ ضرب خارجی می کنیم.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} &\xrightarrow{\vec{a} \times} \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{0} \Rightarrow \vec{0} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} \quad (1) \\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} &\xrightarrow{\vec{b} \times} \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{0} \Rightarrow \vec{b} \times \vec{a} + \vec{0} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \end{aligned}$$

۴۸. اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه یال هم‌رس یک متوازی‌السطوح باشند، ثابت کنید: $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = \text{حجم متوازی‌السطوح}$.

پاسخ: متوازی‌السطوح نوعی منشور است پس حجم آن مساوی حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است. در شکل بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ که

عمود بر صفحه $\vec{b}$ و $\vec{c}$ رسم شده و ارتفاع h اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b} \times \vec{c}$ است. اگر θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b} \times \vec{c}$ باشد داریم:



$$\cos \theta = \frac{h}{|\vec{a}|} \Rightarrow h = |\vec{a}| \cos \theta, \text{ مساحت قاعده } = |\vec{b} \times \vec{c}|$$

اکنون می‌نویسیم:

$$\text{حجم} = (\text{ارتفاع})(\text{مساحت قاعده}) = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos \theta$$