



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۲/۱۹

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ اردیبهشت ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته تجربی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضی

کلاس:

بارم	سؤال	ردیف
۰/۷۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $f(x) = \sqrt{x - 2x^2}$ و $g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ آنگاه $\text{gof}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.</p> <p>ب) تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ در دامنه‌اش یکنوای اکید است.</p> <p>ج) خط $y = 4$ بر نمودار $y = 3 \sin 2x + 7$ مماس است.</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۱
۰/۷۵	<p>جمله‌های زیر را با عدد یا کلمه مناسب به جمله صحیح تبدیل کنید.</p> <p>الف) اگر $f(x) = x + \frac{1}{x}$ آنگاه $(f \circ f)'(1)$ برابر است.</p> <p>ب) شعاع دایره $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$ برابر است.</p> <p>ج) اگر A و B دو پیشامد در فضای S باشند به طوری که $P(A - B) = P(A) \cdot P(B')$ آنگاه دو پیشامد A و B هستند.</p>	۲
۱	<p>تابع $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده و سه واحد آن را به سمت چپ انتقال می‌دهیم، ضابطه وارون تابع به دست آمده را به دست آورید.</p>	۳
۱/۲۵	<p>اگر $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ و $g(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$ باشد، بدون تشکیل ضابطه، دامنه تابع $f \circ g$ را یافته سپس مقدار $\text{fog}^{-1}(1)$ را به دست آورید.</p>	۴
۱	<p>بخشی از نمودار تابع $f(x) = 2a + 2b \cos \frac{\pi}{a} x$ در شکل زیر آورده شده است، با فرض $a > 0$ مقدار a و b را بیابید.</p>	۵
۱/۲۵	<p>معادله مثلثاتی $1 + \sin x = 2 \sin^2 x + 2 \sin^3 x$ را حل کنید.</p>	۶
۰/۵	<p>اگر $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - x + 2$ به طوری که f بر $x - 1$ بخش پذیر باشد و بر $x + 2$ باقیمانده‌اش ۳۶ باشد، a و b کدام است؟</p>	۷
۱/۵	<p>هر یک از حدود زیر را بیابید.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{4x^2 + 1}}{4x}$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 4}{x^3 - 8}$</p> <p>ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{3x - 1} - 2}{2x^2 - 3x - 9}$</p>	۸



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۲/۱۹

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ اردیبهشت ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته تجربی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضی

بارم	سؤال	ردیف
۰/۵	اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{2x^2+ax+b} = -\infty$ مقدار a و b کدام است؟	۹
۰/۷۵	اگر $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	۱۰
۱/۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). الف) $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x}$ ب) $g(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3 + x}$	۱۱
۱/۵	اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2$ و f در $x = 1$ پیوسته باشد، خط مماس بر $y = x^2 + f(x)$ در $x = 1$ را به دست آورید.	۱۲
۰/۷۵	تابع $f(x) = x + \sqrt{2x-1}$ با دامنه $[1, 5]$ داده شده است، آهنگ تغییر متوسط تابع در دامنه‌اش با آهنگ تغییر لحظه‌ای در انتهای بازه چقدر اختلاف دارد؟	۱۳
۱	هرگاه $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}$ طول نقاط بحرانی تابع f را بیابید.	۱۴
۰/۷۵	اگر $A(1, 4)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 8$ باشد، مقدار a و b را به دست آورید.	۱۵
۱	اگر جمع شعاع قاعده و ارتفاع مخروط برابر ۳ باشد، بیشترین حجم مخروط را به دست آورید.	۱۶
۱/۲۵	اگر مختصات کانون‌های یک بیضی $(-5, 2)$ و $(-1, -1)$ باشند و خروج از مرکز بیضی $e = \frac{5}{13}$ باشد، جمع فواصل هر نقطه روی بیضی تا دو کانون بیضی چه عددی است؟	۱۷
۱	دو دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 11$ نسبت به هم چگونه هستند؟	۱۸
۲	در یک دبیرستان ۳۰ درصد دانش‌آموزان رشته ریاضی، ۲۵ درصد رشته انسانی و مابقی در رشته تجربی تحصیل می‌کنند. به ترتیب ۸ درصد، ۱۲ درصد و ۲۰ درصد آنها عینکی هستند. یک شخص از این دبیرستان به تصادف انتخاب می‌کنیم، به کدام احتمال عینکی است؟	۱۹
۲۰	جمع بارج	



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) نادرست ب) نادرست ج) درست

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه‌های ۱۰، ۱۴ و ۳۳)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) صفر ب) $R = \sqrt{5}$ ج) مستقل از هم

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه‌های ۸۷، ۱۳۷ و ۱۴۴)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، یعنی X را به $-X$ تبدیل می‌کنیم:

$$y = \sqrt{4 + 2x} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

سه واحد به چپ انتقال می‌دهیم یعنی X را به $X + 3$ تبدیل می‌کنیم:

$$y = \sqrt{4 + 2(x+3)} \Rightarrow y = \sqrt{2x+10} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

حال ضابطه وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{2x+10} \quad \left. \begin{array}{l} x \geq -5 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 = 2x+10 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^2 - 10}{2} \quad y \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 10) \quad x \geq 0 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه‌های ۱۹ و ۲۶)

پاسخ سؤال ۴: (۲۵/۱ نمره)

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$D_g = [1, +\infty), D_f = [0, 4] \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow 0 \leq 2 - \sqrt{x-1} \leq 4 \Rightarrow -2 \leq \sqrt{x-1} \leq 2$$

$\sqrt{x-1} \geq -2$ بدیهی است پس نامعادله $\sqrt{x-1} \leq 2$ را حل می‌کنیم و داریم:

$$x-1 \leq 4 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$D_{f \circ g} = [1, 5]$$

$$f \circ g^{-1}(1) = ?$$

$$g^{-1}(1) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{\alpha-1} = 1 \Rightarrow \alpha = 2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$f \circ g^{-1}(1) = f(2) = \sqrt{8-4} = 2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ و ۲۷)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

اولاً با توجه به نمودار $2T = 8$ پس $T = 4$ از طرفی:

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = 2a \Rightarrow a = 2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

ثانیاً $f(0) = 1$ (نمره ۰/۲۵) یعنی:

$$f(0) = 2a + 3b \cos 0 = 4 + 3b = 1 \Rightarrow b = -1 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۳۵)

پاسخ سؤال ۶: (۲۵/۱ نمره)

$$2 \sin^2 x (\sin x + 1) = 1 + \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \end{cases}$$



$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۴۵)

پاسخ سؤال ۷: (۵/۰ نمره)

$$f(1) = 0 \Rightarrow 3 + a + b - 1 + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -4$$

(نمره ۰/۲۵)

$$f(-2) = 36 \Rightarrow 48 - 8a + 4b + 4 = 36 \Rightarrow 2a - b = 4$$

$$a = 0, b = -4 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۵۰)

پاسخ سؤال ۸: (هر مورد ۵/۰ نمره)

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |2x|}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\Delta x}{4x} = \frac{\Delta}{4} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 4}{x^x - 8}$$

تابع $y = 2^x$ صعودی اکید است و $2^3 = 8$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4 - x^2}{0^+} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر مثبت}} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-1} - 2}{(x-3)(2x+3)} \times \frac{\sqrt{(3x-1)^2} + 2\sqrt{3x-1} + 4}{\sqrt{(3x-1)^2} + 2\sqrt{3x-1} + 4} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)}{(x-3)(2x+3) \times 12} = \frac{3}{9 \times 12} = \frac{1}{36} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه های ۵۳، ۵۷ و ۶۰)

پاسخ سؤال ۹: (۵/۰ نمره)

باید مخرج ریشه مضاعف $x = -2$ داشته باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{2(x+2)^2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow 2(x+2)^2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow 2x^2 + 8x + 8 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 8 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۵۶)

پاسخ سؤال ۱۰: (۷۵/۰ نمره)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h(x+h)^2 x^2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2 x^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه های ۷۱ تا ۷۳)



پاسخ سؤال ۱۱: (هر مورد ۷۵/۰ نمره)

$$\text{الف) } f'(x) = 1 + \frac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x)^2}} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{2(x^2-1) \times 2x(x^2+x) - (2x^2+1)(x^2-1)^2}{(x^2+x)^2} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۸۷)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x)-1)(f'(x)+f(x)+1)}{(x-1)(x-2)} = 2$$

دقت کنید مخرج به ازای $x=1$ برابر صفر شده است و چون $f'(x)+f(x)+1=0$ ریشه ندارد، پس باید $f(1)=1$ از طرفی طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

پس:

$$f'(1) \times \frac{3}{-1} = 2 \Rightarrow f'(1) = -\frac{2}{3}, f(1) = 1 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$y = x^2 + f(x) \quad M \Big|_2^1$$

$$y' = 2x + f'(x) \Rightarrow y'(1) = 2 + f'(1) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\text{خط مماس: } y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه های ۷۱ تا ۷۳)

پاسخ سؤال ۱۳: (۷۵/۰ نمره)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5)-f(1)}{4} = \frac{(5+3)-(1+1)}{4} = \frac{3}{2} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \Rightarrow f'(5) = \frac{4}{3} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\text{اختلاف} = \left| \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right| = \frac{9-8}{6} = \frac{1}{6} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۹۵)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱ نمره)

$$D_f = \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x-6}{\sqrt[3]{(x^2-6x+5)^2}} = \frac{2x-6}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-5)^2}} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

نقاط بحرانی:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ x = 5 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \end{cases}$$

طول نقاط بحرانی $\{1, 3, 5\}$ هستند.

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۱۰۶)

پاسخ سؤال ۱۵: (۷۵/۰ نمره)

$$f(1) = +4 \Rightarrow 1 + a + b + 8 = 4 \Rightarrow a + b = -5 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a + b + 3 = 0 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} a + b = -5 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -7 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۱۱۲)



پاسخ سؤال ۱۶: (۱ نمره)

$$\begin{array}{c} h \\ V'(h) \\ V(h) \end{array} \Rightarrow V_{\max} = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\begin{cases} V = \frac{\pi}{3} r^2 h \\ h + r = 3 \end{cases} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi}{3} (3-h)^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} h(h-3)^2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} ((h-3)^2 + 2h(h-3)) = 0 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$h-3=0 \Rightarrow h=3 \Rightarrow V(3)=0$$

$$h-3+2h=0 \Rightarrow h=1 \Rightarrow V(1) = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۸)

پاسخ سؤال ۱۷: (۱/۲۵ نمره)

$$F \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} 2 \\ -5 \end{vmatrix} \Rightarrow FF' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$rc = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{r}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{5}{12} \Rightarrow 2a = 12 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

اگر M یک نقطه روی بیضی باشد $MF + MF' = 2a = 12$ (نمره ۰/۵)

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۱)

پاسخ سؤال ۱۸: (۱ نمره)

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 11 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 36 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow O_1(4, -3), R_1 = 6 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O_2(0, 0), r = 1$$

$$d_A = O_1 O_2 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$d = |R_1 - R_2| \Rightarrow \text{دو دایره مماس داخلی هستند.} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۱۴۰)

در مورد دایره اول داریم:

در مورد دایره دوم داریم:

پاسخ سؤال ۱۹: (۲ نمره)

$$P(\text{ریاضی / عینکی}) = P(\text{ریاضی بودن}) \cdot P(\text{عینکی بودن})$$

$$+ P(\text{انسانی / عینکی}) \cdot P(\text{انسانی بودن}) \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$+ P(\text{تجربی / عینکی}) \cdot P(\text{تجربی بودن}) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \frac{240}{10000} + \frac{300}{10000} + \frac{900}{10000} = \frac{1440}{10000} = \frac{144}{1000} = 0.144 \quad (\text{نمره } 0/75)$$

(ریاضی تجربی دوازدهم، صفحه ۱۴۶)