



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه سؤال

تسلط بر نیم سال اول



جمعه

۱۴۰۳/۰۹/۲۳



ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی - پایه دوازدهم
آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - مرحله ۳

مدت پاسخگویی: ۱۷۰ دقیقه

تعداد صفحه: ۱۱

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	فارسی	۳	۳۰ دقیقه
۲	عربی، زبان قرآن	۲	۳۰ دقیقه
۳	هویت اجتماعی	۲	۳۰ دقیقه
۴	ریاضی	۲	۴۰ دقیقه
۵	زیست شناسی	۲	۴۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرابی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

دروس اختصاصی

زیست‌شناسی ۳

فصل ۱، ۲ و ۳
صفحه ۱ تا ۴۶

ریاضی ۳

فصل‌های ۱ و ۲ و فصل ۳
(تا پایان درس اول:
حدب‌ی نهایت)
صفحه ۱ تا ۵۷

دروس عمومی

هویت اجتماعی

درس ۱ تا پایان درس ۴
صفحه ۲ تا ۳۳

عربی ۳

درس ۱ و
متن درس ۲
صفحه ۱ تا ۲۱

فارسی ۳

فصل‌های ۱ و ۲ و فصل ۳
(تا انتهای گنج حکمت)
صفحه ۱۱ تا ۵۳

استراتژی و هدف‌گذاری در آزمون‌های شبیه‌ساز نهایی ماز

اهداف کوتاه مدت:

- رسیدن به بودجه‌بندی آزمون بعد
- یادگیری تشریحی خواندن و تشریحی نوشتن

اهداف میان مدت:

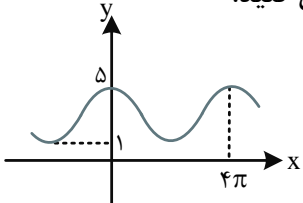
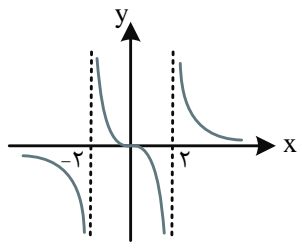
- پیشروی و تسلط بر ۵۰ درصد مباحث نیمسال اول تا آذرماه
- پیشروی و تسلط کامل بر نیمسال اول تا بهمن ماه
- پیشروی و تسلط بر ۵۰ درصد مباحث نیمسال دوم تا ایام نوروز
- پیشروی و تسلط کامل بر نیمسال دوم در اردیبهشت ماه
- تجربه شبیه‌ساز کامل امتحان نهایی در روز قبل از هر امتحان خردادماه

اهداف بلندمدت:

- تبدیل به یک دانش‌آموز حرفه‌ای در امتحان تشریحی و ۲۰ گرفتن
- تسلط بر نحوه تشریحی نوشتن در حد یک مصحح آموزش و پرورش
- تمام اشتباهات احتمالی در امتحان نهایی رو قبل از امتحان نهایی تجربه کنید.

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		تعداد صفحه: ۲	رشته:	علوم تجربی	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - دوازدهم		تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/۰۹/۲۳	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی					
گروه آموزشی ماز					
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره			
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) نقطه $A(1, -4)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه نظیر A روی نمودار تابع $y = \frac{1}{4}f(x-2)$، نقطه $A'(3, -2)$ است.</p> <p>ب) اگر $f(x) = x^3 - 2$ و $g(x) = 2x - 4$ باشد، مقدار $(f \circ g)^{-1}(6)$ برابر ۳ است.</p> <p>ج) تابع $y = -\tan x$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$، اکیداً صعودی است.</p> <p>د) اگر $2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ باشد، آن گاه $\sin \alpha > \tan \alpha$.</p>	۲			
۲	<p>جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) تابع $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ در بازه $[a, +\infty)$ یک به یک است. حداقل مقدار a برابر است.</p> <p>ب) دوره تناوب تابع $f(x) = -\sin(\frac{\pi}{4}x) + 1$ دو برابر دوره تناوب تابع $g(x) = \cos(\frac{\pi}{4} - ax)$ است. مقدار مثبت a برابر است.</p> <p>ج) اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + mx - 1$ بر $x - 2$ برابر ۲ باشد، آن گاه مقدار m برابر است.</p> <p>د) حاصل عبارت $p(x) = 16 \sin x \cos x \cos 2x$ به ازای $x = 7/5^\circ$ برابر است.</p>	۲			
۳	<p>اگر $f(x) = \sqrt{3-2x}$ و $g(x) = \frac{1}{x-2}$ باشند، آن گاه دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.</p>	۱.۲۵			
۴	<p>در شکل مقابل، نمودار تابع f رسم شده است.</p> <p>الف) نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{4}f(1-2x)$ را رسم کنید.</p> <p>ب) دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.</p> <p>ج) مشخص کنید که تابع g در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.</p>	۳.۷۵			
۵	<p>اگر $f(x) = x + a$، $g(x) = x^2 + bx$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 1$ باشند، مقادیر a و b را به دست آورید.</p>	۰.۷۵			
۶	<p>اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $(f \circ g)(x) = x - 1$ باشند، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.</p>	۱.۵			
۷	<p>تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$ مفروض است.</p> <p>الف) دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورید.</p> <p>ب) ضابطه تابع وارون را بیابید.</p>	۲			



ساعات شروع:		رشته:		تعداد صفحه: ۲		سوالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳	
مدت زمان: ۴۰ دقیقه		نام و نام خانوادگی:		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۹/۲۳		دوره دوم متوسطه - دوازدهم	
گروه آموزشی ماز				آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره					
۸	قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos(bx) + c$ به صورت زیر است. ضابطه آن را مشخص کنید. 	۱.۷۵					
۹	معادله مثلثاتی $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$ را حل کنید.	۲					
۱۰	با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.  الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$	۰.۵					
۱۱	حدهای زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است). الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x - \sqrt{x+2}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 6x + 5}$ ج) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{1 + [x]}{ \cos x }$	۲.۵					
۲۰	موفق باشید.						



به نام خدا

ساعت شروع:	علوم تجربی	رشته:	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	۱۴۰۳/۰۹/۲۳	تاریخ آزمون:	دوره دوم متوسطه - دوازدهم	نام و نام خانوادگی:

ردیف	پاسخبرگ	نمره
------	---------	------

پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.

۱	الف) (ب) (ج) (د)	۲
۲	الف) (ب) (ج) (د)	۲
۳		۱.۲۵
۴	الف) ب) ج)	۲.۷۵



به نام خدا

ساعت شروع:	علوم تجربی	رشته:	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	۱۴۰۳/۰۹/۲۳	تاریخ آزمون:	دوره دوم متوسطه - دوازدهم	نام و نام خانوادگی:

نمره	پاسخبرگ	ردیف
------	---------	------

پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.

۰.۷۵		۵
۱.۵		۶
۲		۷ (الف) (ب)





به نام خدا

ساعت شروع:	علوم تجربی	رشته:	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	۱۴۰۳/۰۹/۲۳	تاریخ آزمون:	دوره دوم متوسطه - دوازدهم	نام و نام خانوادگی:

ردیف	پاسخبرگ	نمره
------	---------	------

پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.

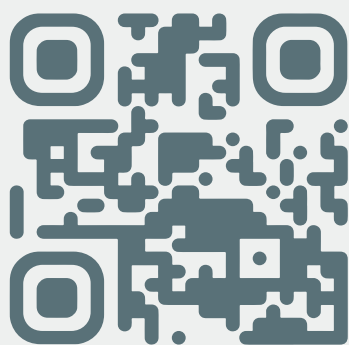
۸		۱.۷۵
۹		۲



به نام خدا

ساعت شروع:	علوم تجربی	رشته:	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	۱۴۰۳/۰۹/۲۳	تاریخ آزمون:	دوره دوم متوسطه - دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
نمره	پاسخبرگ			ردیف
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.				

۰.۵	(الف)	۱۰
	(ب)	
۲.۵	(الف)	۱۱
	(ب)	
	(ج)	
۲۰	موفق باشید.	



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه پاسخ

تسلط بر نیم سال اول



جمعه

۱۴۰۳/۰۹/۲۳



ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی - پایه دوازدهم
آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - مرحله ۳

ویراستاری	مسئول درس	درس
علیرضا جعفری	حسن وسگری - فاطمه عباسی	فارسی
کیارش پور مهدی - مریم آقایی	هاله کریمی - محمدعلی تابانفر	عربی، زبان قرآن
سعید ستودمهر - عرفان شهر آئینی	زهرا ظلم خانی	هویت اجتماعی
حمیدرضا ولی پور - نرجس تیمناک احسان بهروزپور	محدثه شیخعلی - سیدجواد نظری	ریاضی
شهیده رستمی - رضاخازن	فرزین فردوسی	زیست شناسی

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرابی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصصح شو:



پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصصح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصصح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳	رشته:	علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/۰۹/۲۳
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	ساعت شروع:	

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

مصحح شو!

الف) نادرست (۰/۵) ب) درست (۰/۵) ج) نادرست (۰/۵) د) درست (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) نادرست است. (مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰)

اگر نقطه $A(1, -4)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار داشته باشد، آن‌گاه نقطه $A_1(1, 7)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. از طرفی، اگر نقطه $A_1(1, 7)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشد، مختصات نقطه نظیر آن روی نمودار تابع $y = \frac{1}{2}f(x - 2)$ به صورت $A'(3, \frac{7}{2})$ است.

۲۰ شو

۱) اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشد، نقطه $A'(\frac{x-c}{b}, ay+d)$ بر روی نمودار $y = af(bx+c)+d$ قرار دارد.
 ۲) اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$ قرار داشته باشد، نقطه $A'(bx+c, \frac{y-d}{a})$ بر روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد.

ب) درست است. (مرتبط با تمرین ۷ صفحه ۲۹)

۲

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 2 \\ g(x) = 2x - 4 \end{cases}$$

$$(fog)^{-1}(6) = (g^{-1} \circ f^{-1})(6) = g^{-1}(f^{-1}(6)) = a$$

$$f^{-1}(6) = b \Rightarrow f(b) = 6 \Rightarrow b^3 - 2 = 6 \Rightarrow b^3 = 8 \Rightarrow b = \sqrt[3]{8} \Rightarrow b = 2$$

$$g^{-1}(b) = a \xrightarrow{b=2} g^{-1}(2) = a \Rightarrow g(a) = 2 \Rightarrow 2a - 4 = 2 \Rightarrow a = 3$$

$$(fog)^{-1}(6) = (g^{-1} \circ f^{-1})(6) = g^{-1}(f^{-1}(6)) = 3$$

در نتیجه:

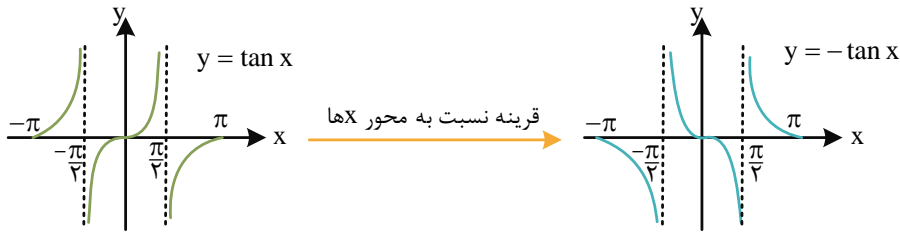
وارون ترکیب دو تابع

۱) اگر f و g توابعی وارون‌پذیر باشند در این صورت:

$$\begin{cases} (fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \\ (gof)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \end{cases}$$

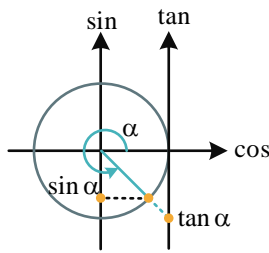
۲) اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه: $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$

ج) نادرست است. (مرتبط با صفحه ۳۹)



(د) درست است. (مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۴۱)

می‌دانیم که انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس:



$$\sin \alpha > \tan \alpha$$

مصصح شو!

(د) ۲ (۰/۵)

(ج) $-\frac{5}{2}$ (۰/۵)

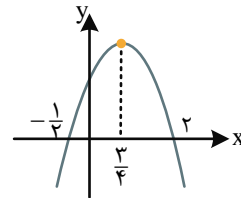
(ب) π (۰/۵)

(الف) $\frac{3}{4}$ (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

(الف) $\frac{3}{4}$ (مرتبط با مثال صفحه ۲۸) با توجه به نمودار تابع $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ ، این تابع در کل دامنه خود یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[\frac{3}{4}, +\infty)$ و یا $(-\infty, \frac{3}{4}]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 2 \\ x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$



می‌دانیم که تابع f در بازه $[\frac{3}{4}, +\infty)$ ، یک‌به‌یک است، بنابراین حداقل مقدار a برابر $\frac{3}{4}$ است.

۲۰ شو

تابع درجه دوم (سه‌می) با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ در حالت کلی یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه این تابع را به بعد از رأس سه‌می و یا قبل از آن محدود کنیم، تابعی یک‌به‌یک خواهیم داشت. به عبارت دیگر با محدود کردن دامنه این تابع به صورت $x \geq -\frac{b}{2a}$ و یا $x \leq -\frac{b}{2a}$ هر زیرمجموعه‌ای از این دو محدوده، تابعی یک‌به‌یک به دست می‌آید.

$x = -\frac{b}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$
$f(x) = ax^2 + bx + c; x \leq -\frac{b}{2a}$	$f(x) = ax^2 + bx + c; x \in \mathbb{R}$	$f(x) = ax^2 + bx + c; x \geq -\frac{b}{2a}$
یک‌به‌یک	غیریک‌به‌یک	یک‌به‌یک

(ب) π (مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۴۰)

$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = \frac{4\pi}{\pi} = 4, \quad g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) = \sin ax \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{|a|}$$

می‌دانیم که دوره تناوب تابع f ، دو برابر دوره تناوب تابع g است، پس:

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow \frac{4\pi}{|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \pi \Rightarrow a = \pm\pi \xrightarrow{a > 0} a = \pi$$

(ج) $-\frac{5}{2}$ (مرتبط با صفحه ۵۰ و ۵۱)

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

می‌دانیم که باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + mx - 1$ بر $x - 2$ برابر ۲ است، به عبارتی $f(2) = 2$ است، پس:

$$(2)^3 + 2m - 1 = 2 \Rightarrow 8 + 2m - 1 = 2 \Rightarrow 2m = -5 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

تقسیم چندجمله‌ای بر دو جمله‌ای درجه اول

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax + b)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

نتیجه: اگر $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax + b)$ بخش‌پذیر است.

مثال: چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای $(x + 1)$ بخش‌پذیر است چرا که $f(-1) = 0$ است.

(د) ۲ (مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۴۸)

ابتدا عبارت $p(x)$ را به کمک روابط مثلثاتی به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$p(x) = 16 \sin x \cos x \cos 2x = 8 \times \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} \cos 2x = 4 \times \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\sin 4x}$$

$$p(x) = 4 \sin 4x \xrightarrow{x=7/5^\circ} p(7/5^\circ) = 4 \sin(4 \times 7/5^\circ) = 4 \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

روابط مثلثاتی مهم

$$*\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$*\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad * \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$* 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \cos \alpha \neq 0$$

$$* 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \sin \alpha \neq 0$$

$$* \tan \alpha \times \cot \alpha = 1; \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$* \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$* \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

مصوح شو!

(مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۲۲)

$$f(x) = \sqrt{3-2x}; 3-2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_f : \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

(۰/۲۵)

$$g(x) = \frac{1}{x-2}; x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_g : \mathbb{R} - \{2\}$$

(۰/۲۵)

$$1.25 \quad D_{g \circ f} = \underbrace{\left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\left\{x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \mid \sqrt{3-2x} \in \mathbb{R} - \{2\}\right\}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\sqrt{3-2x} \neq 2 \Rightarrow 3-2x \neq 4 \Rightarrow 2x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \mid x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\} \Rightarrow D_{g \circ f} = \underbrace{\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]}_{(۰/۲۵)}$$

دامنه توابع مرکب

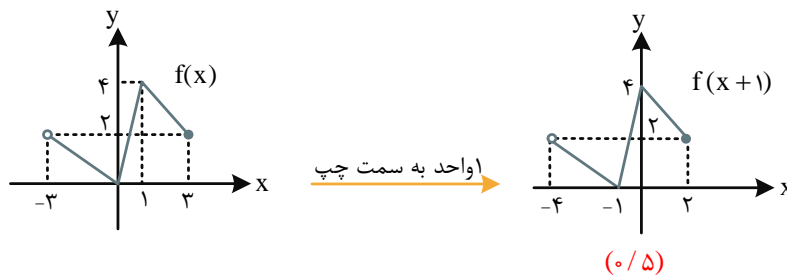
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}, D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مصوح شو!

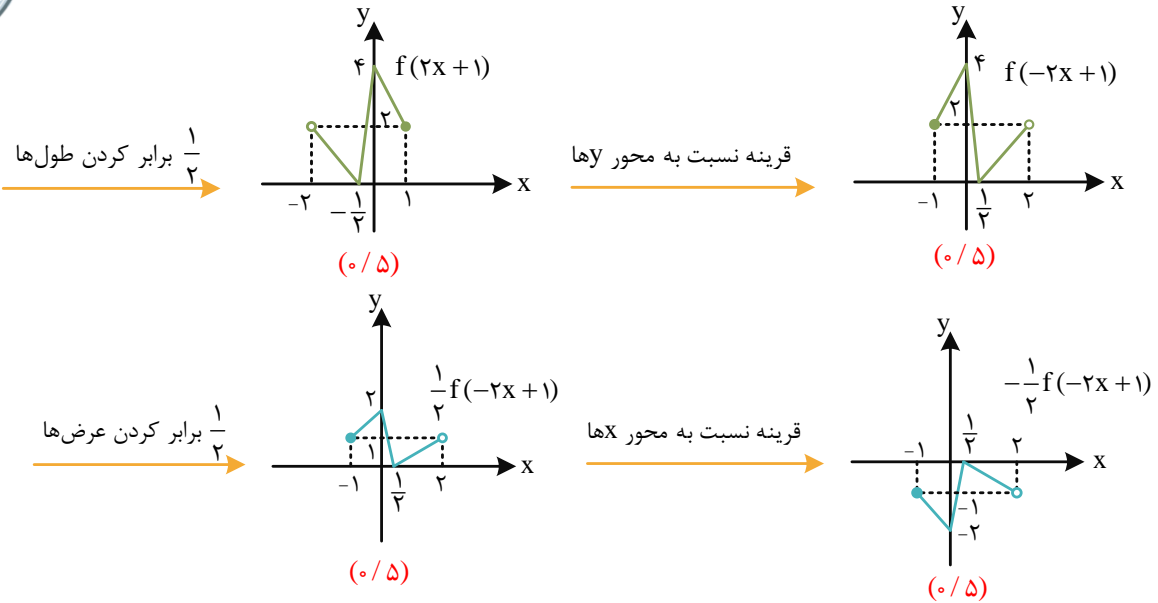
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰)

الف) تغییرات خواسته شده را به ترتیب زیر، روی نمودار تابع f ، اعمال می‌کنیم:

۳.۷۵



۴



راهنمای مصحح

در هر یک از تبدیلات، (۰/۵) نمره برای رسم شکل در نظر گرفته شود. (مجموعاً ۲/۵ نمره)

ب) با توجه به نمودار تابع g ، دامنه و برد تابع $g(x) = -\frac{1}{2}f(1-2x)$ برابر است با:

$$D_g = [-1, 2] \quad (۰/۲۵) \quad , \quad R_g = [-۲, ۰] \quad (۰/۲۵)$$

ج) با توجه به نمودار تابع g داریم:

در بازه $[-1, ۰]$ تابع g ، نزولی (یا اکیداً نزولی) است. (۰/۲۵)

در بازه $[۰, \frac{1}{2}]$ تابع g ، صعودی (یا اکیداً صعودی) است. (۰/۲۵)

در بازه $[\frac{1}{2}, ۲]$ تابع g ، نزولی (یا اکیداً نزولی) است. (۰/۲۵)

تبدیل و انتقال نمودار

توضیحات و نحوه رسم	نمودار جدید ($a, k > ۰$)
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	$f(x+a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	$f(x-a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	$f(x)+a$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	$f(x)-a$
نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	$f(-x)$
نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	$-f(x)$
نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. (قرینه نسبت به مبدأ)	$-f(-x)$

نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(kx)$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم. $k > 1$
$kf(x)$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم. $0 < k < 1$
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. $k > 1$
$f(x)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. $0 < k < 1$
$ y = f(x)$	ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

رسم نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) تاثیرات روی دامنه:

۱. تاثیر عدد ثابت c : اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت چپ و اگر $c < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت راست می‌بریم.

۲. تاثیر ضریب x : طول تمامی نقاط را در $\frac{1}{|b|}$ ضرب می‌کنیم. (اگر b منفی باشد نمودار تابع رو نسبت به محور y هم قرینه می‌کنیم.)

ب) تاثیرات روی برد:

۳. تاثیر ضریب f : عرض تمامی نقاط را در $|a|$ ضرب می‌کنیم. (اگر a منفی باشد نمودار تابع رو نسبت به محور x ها هم قرینه می‌کنیم.)

۴. تاثیر عدد ثابت d : اگر $d > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت بالا و اگر $d < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

مصحح شو!

(مرتبط با مثال صفحه ۱۴)

ابتدا به کمک توابع f و g ، ضابطه تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = x + a$$

$$g(x) = x^2 + bx$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = x^2 + bx + a$$

(۰/۲۵)

۰.۷۵

از طرفی می‌دانیم که $(fog)(x) = x^2 + 4x + 1$ است، بنابراین با مقایسه این ضابطه با ضابطه به‌دست آمده، داریم:

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + bx + a \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & (۰/۲۵) \\ b = 4 & (۰/۲۵) \end{cases}$$

۵

تابع ترکیب

اگر f و g دو تابع باشند، $f \circ g$ را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم. یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

مصحح شو!

(مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۲۲)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 2g(x)$$

(۰/۲۵)

$$g^2(x) + 2g(x) = x - 1 \xrightarrow{\text{طرفین} + 1} g^2(x) + 2g(x) + 1 = x - 1 + 1$$

(۰/۲۵)

۱.۵

$$(g(x) + 1)^2 = x \Rightarrow g(x) + 1 = \pm \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = \sqrt{x} - 1 & (۰/۲۵) \\ g(x) = -\sqrt{x} - 1 & (۰/۲۵) \end{cases}$$

(۰/۲۵)

۲۰ شو

اگر ضابطه توابع f و $f \circ g$ را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم ضابطه تابع درونی (یعنی g) را به دست بیاوریم، به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱. در تابع f به جای تمامی x ها، $g(x)$ قرار می‌دهیم.

۲. عبارت به دست آمده در مرحله قبل را با ضابطه تابع $f \circ g$ برابر قرار می‌دهیم و با عملیات جبری، $g(x)$ را تنها می‌کنیم.

مصحح شو!

(مرتبط با صفحه ۲۹)

الف) ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 2 ; x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f : [2, +\infty)$$

(۰/۲۵)

برای پیدا کردن برد تابع f به دو روش می‌توانیم عمل می‌کنیم:

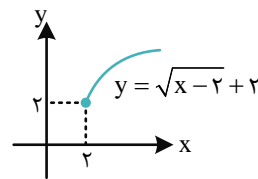
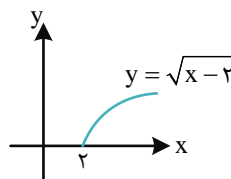
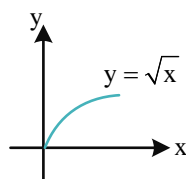
(۱) روش اول:

۲

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \xrightarrow{\text{طرفین} + 2} \sqrt{x-2} + 2 \geq 2 \Rightarrow R_f : [2, +\infty)$$

(۰/۲۵)

(۲) روش دوم: (رسم شکل)



۶

۷

نمودار در شروع از صفر به صورت نزولی حرکت می کند (به عبارتی، نمودار شبیه خود $\cos x$ است) بنابراین $a > 0$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = \pm \frac{1}{2} \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3 \\ f(x) = 2 \cos\left(-\frac{1}{2}x\right) + 3 \end{cases} \quad (0/25)$$

روش دوم برای پیدا کردن a و c :

$$c = \frac{\max + \min}{2} \Rightarrow c = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow c = 3 \quad (0/25)$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} \Rightarrow |a| = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \quad (0/25)$$

توابع مثلثاتی:

در توابع مثلثاتی $y = a \cos(bx + d) + c$ و $y = a \sin(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

مقدار بیشترین مقدار: \cos یا \sin ضرب ثابت + مقدار ثابت $\Rightarrow \max = |a| + c$
مقدار کمترین مقدار: $-\cos$ یا $-\sin$ ضرب ثابت + مقدار ثابت $\Rightarrow \min = -|a| + c$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضرب } x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضرب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \cos bx$ و $y = a \sin bx$:

$y = a \sin bx$		$y = a \cos bx$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$

مصحح شو!

(مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۴۸)

۲

ابتدا معادله $1 = 2 \cos x (\cos x - \sin x)$ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\underbrace{2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x}_{(0/25)}$$

۹

می دانیم که $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ است، پس:

$$\underbrace{\cos 2x = \sin 2x}_{(0/25)} \xrightarrow{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin \alpha} \underbrace{\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2}-2x)}_{(0/25)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2}-2x)}_{(0/25)} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow \underbrace{4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}}_{(0/25)} ; k \in \mathbb{Z} \\ \underbrace{2x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2}-2x)}_{(0/25)} \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \times \end{array} \right.$$

معادلات مثلثاتی

۱) معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲) معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

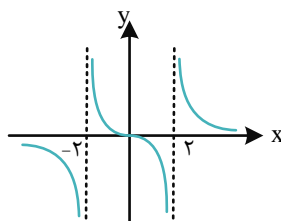
معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

مصصح شو!

(مرتبط با مثال صفحه ۵۶)

با توجه به نمودار تابع f داریم:

۰.۵



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
(0/25)

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty$
(0/25)

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0}$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x - \sqrt{x+2}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(x + \sqrt{x+2})}{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})}$$

(۰/۲۵)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(x + \sqrt{x+2})}{x^2 - (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(x + \sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2}$$

(۰/۲۵)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(x + \sqrt{x+2})}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)(2+x)(x + \sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{(-4)(4)}{3} = \frac{-16}{3}$$

(۰/۲۵)

(ب) ابتدا صورت و مخرج کسر را در $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1})$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{0}{0}$$

۲.۵

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 6x + 5} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{(x^2 - 6x + 5)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1})}$$

(۰/۵)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-5)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-5)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1})} = \frac{1}{(-4)(3)} = \frac{-1}{12}$$

(۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{1 + [x]}{|\cos x|}$$

(ج)

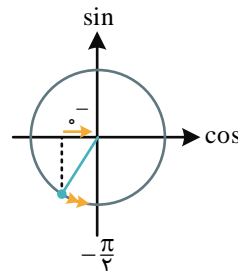
می‌دانیم زمانی که $x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-$ میل می‌کند، داریم:

$$[x] = \left[(-\frac{\pi}{2})^- \right] = -2$$

$$x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^- : \cos x \rightarrow 0^- \Rightarrow |\cos x| = |0^-| = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{1 + [x]}{|\cos x|} = \frac{1 + (-2)}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)



الف) محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم:

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{|3 - 3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^+} \frac{[x]}{|3x + 1|} = \frac{[-\frac{1}{3}]}{|3(-\frac{1}{3}) + 1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ب) محاسبه حد بی‌نهایت در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد، در این صورت، حاصل حد، نامتناهی

($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ ، باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم:

$\frac{+ \text{ عدد}}{0^+} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^-} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{0^-} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^+} = -\infty$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x + 1}{(2x + 1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2}) + 1}{(2(-\frac{1}{2}) + 1)^2} = \frac{-2 + 1}{(-1 + 1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

پ) رفع ابهام در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد هر دو تابع f و g در $x = a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک اتحادها،

گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سوالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارتهای رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفرکننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b \end{cases}$$