سلام به همه مازی‌های عزیز

امسال امتحان‌نهایی شما به خاطر بحث تأثیر معدل توی کنکور اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده و عقل سلیم حکم می‌کنه که امتحان‌نهایی رو به شدت جدی بگیرین. قبل از هر چیز لازمه که بدونیم برای درس ریاضی ۳ و توی نوبت خرداد ماه، چه فصل‌هایی مهم‌ترن و به قول خودمون کدوم فصل‌ها سؤال خیزترن و بارم‌بندی اونا به چه صورتی هست، ببینید:

همون‌طور که می‌بینید، بین تمام فصل‌های کتاب، فصل مشتق به تنهایی با داشتن ۵ نمره بیش‌ترین بارم رو به خودش اختصاص می‌ده و توصیه می‌شه که حتما روی این فصل بیش‌تر تمرکز کنید. (البته برای این‌که اون ۲۰ خوشگل رو بزنی به جیب، نیازه که همه فصل‌ها رو جدی بگیری. 😃)

حالا بریم که یه ذره ریزتر فصل‌های کتاب و سؤالایی که احتمال مطرح شدن اونا زیاده رو بررسی کنیم:

فصل اول (تابع):

۱) از درس توابع چندجمله‌ای و توابع صعودی و نزولی، معمولاً سؤال‌های درست یا نادرست و سؤال‌های جای خالی داده می‌شه.

۲) رسم تابع درجه سوم رو بلد باشین، مخصوصاً وقتی که با بحث انتقال توابع ترکیب می‌شن.

۳) از بحث ترکیب توابع احتمال اومدن تیپ‌های مختلف سؤالی وجود داره اما معمولاً به این شکله که ضابطه (یا نمودار) دوتا تابع f و g رو می‌دن و از ما مقدار fog یا $f^{-1}og^{-1}$ یا ... رو توی یه نقطه می‌پرسن و یا این‌که از ما دامنه توابع fog یا gof رو می‌پرسن و یا این‌که در حالت دیگه‌ای می‌تونن از ما ضابطه توابع fog یا gof رو بپرسن.

۴) از بحث انتقال توابع هم معمولاً یه سؤال رو داریم، اونم می‌تونه به این صورت باشه که نمودار یه تابع رو می‌دن و از ما می‌خوان که نمودار یه تابع دیگه رو که از انتقال تابع اولیه به‌دست میاد، رسم کنیم. توی این سؤال‌ها دقت کنید که ما اول میایم و تغییرات روی دامنه رو اعمال می‌کنیم و بعدش تغییرات روی برد رو انجام می‌دیم.

۵) تابع وارون رو هم معمولاً با مبحث ترکیب توابع مخلوط می‌کنن و یا این‌که ضابطه یه تابع رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که ضابطه وارون اون تابع رو به‌دست بیاریم.

فصل دوم (مثلثات):

تیپ سؤال‌های این فصل تقریباً مشخصه و می‌شه گفت که پیچیدگی خاصی نداره، ببینید:

۱) ضابطه یه تابع مثلثاتی رو می‌دن و از ما می‌خوان که مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب اون رو به‌دست بیاریم.

۲) نمودار یه تابع مثلثاتی رو می‌دن و از ما می‌خوان که ضابطه اون تابع رو بنویسیم، که توی این تیپ از سؤال‌ها هم باید به مقادیر ماکزیمم و مینیمم شکل و دوره تناوب اون دقت کنیم تا بتونیم مقادیر مجهول رو توی ضابطه تابع مشخص کنیم.

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳) از بحث معادله‌های مثلثاتی هم می‌شه گفت که تقریباً هر سال یه سؤال داشتیم؛ به این‌صورت که یه معادله مثلثاتی رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که اون معادله رو حل کنیم. منظور از حل کردن یه معادله مثلثاتی اینه که بتونیم جواب‌های کلی اون رو به‌دست بیاریم. فقط باید دقت کنید که تسلط به روابط مثلثاتی (مخصوصاً روابط مثلثاتی مربوط به زاویه‌های دو برابر کمان)، برای جواب دادن به این سؤال‌ها می‌تونه خیلی بهمون کمک کنه.
۴) از قسمت مربوط به تابع تانژانت و نمودار اون هم معمولاً به‌صورت درست یا نادرست و یا به‌صورت جای خالی سؤال میاد.

فصل سوم (حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت):

۱) از قسمت بخش‌پذیری و قاعده تقسیم، معمولاً سؤال‌های جای خالی و یا درست یا نادرست مطرح می‌شه، که برای جواب دادن به اونا باید توجه کنیم که اگر چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(ax+b)$ بخش‌پذیر باشه اون‌وقت $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ برابر صفره.

۲) یه تیپ دیگه از سؤال‌ها هم مربوط به رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$ و یا حالت $\frac{\infty}{\infty}$ هستن که برای جواب دادن به اونا باید به موارد زیر توجه کنیم:

- ✓ برای رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ در توابع گویا، باید به کمک اتحادها و یا قاعده تقسیم، عامل ابهام رو توی صورت و مخرج کسر ظاهر کنیم و اونا رو حذف کنیم.
- ✓ برای رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ در توابع کسری رادیکالی، باید صورت و مخرج کسر رو توی عامل مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنیم و به کمک اتحاد مزدوج عامل ابهام رو توی صورت و مخرج کسر ظاهر کنیم و اونارو حذف کنیم.
- ✓ برای رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$، باید به کمک هم‌ارزی پرتوان، عبارت‌های پرتوان رو توی صورت و مخرج کسر نگه‌داریم و بقیه عبارت‌ها رو حذف کنیم. بعدش باید باتوجه به کسری که باقی مونده تصمیم بگیریم که حاصل حد چی می‌شه.

۳) توی بعضی از سؤال‌ها هم میان و به ما نمودار یه تابع رو می‌دن و از ما حد تابع رو زمانی که x به سمت یه عدد خاص یا به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کنه می‌پرسن.
۴) توی بعضی از سؤال‌ها حد یه تابعی رو از ما می‌پرسن که توی ضابطه اون تابع قدرمطلق و یا جزء صحیح حضور داره که برای جواب دادن به این نوع سؤال‌ها، قبل از هر چیز باید تکلیف جزء صحیح و قدرمطلق رو مشخص کنیم.

فصل چهارم (مشتق):

۱) از قسمت مفاهیم اولیه مشتق اگر هم سؤال مطرح بشه می‌تونه به این‌صورت باشه که نموداری رو به ما بدن و از ما علامت شیب خط مماس بر منحنی (یا همون علامت مشتق) رو توی نقاط مختلف بپرسن.
۲) پای ثابت سؤالات امتحان نهایی، یه سؤال از مشتق‌گیریه به این‌صورت که چند تابع رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان مشتق اون توابع رو به‌دست بیاریم (فقط حواستون باشه که اگه توی صورت سؤال به ما گفته باشن که "ساده کردن مشتق الزامی نیست" نیازی نیست که ضابطه تابع مشتق رو ساده کنیم).
۳) یکی دیگه از سؤال‌هایی که از این فصل می‌تونه مطرح بشه، سؤالی مربوط به بحث مشتق‌پذیریه؛ می‌دونیم که اگه تابع f تو نقطه مثلاً $x=a$ مشتق‌پذیر باشه، اولاً تابع f توی $x=a$ باید پیوسته باشه و ثانیاً مشتق چپ و مشتق راست تابع f توی نقطه $x=a$ باید باهم برابر باشن.
۴) مباحث آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای هم می‌تونن کاندیدای طرح سؤال باشن به این‌صورت که ضابطه یه تابع (یا معادله حرکت یک متحرک یا رابطه‌ای مربوط به رشد یک توده باکتری و ...) رو به ما می‌دن و از ما آهنگ تغییر متوسط و یا لحظه‌ای اون رو می‌پرسن. فقط دقت کنید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f توی لحظه $x=a$ برابره با $f'(a)$، و آهنگ تغییر متوسط تابع f توی بازه $[a,b]$ برابره با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
۵) اگه توی یه سؤالی از ما نمودار تابع مشتق رو بخوان، اول میایم و از تابع موردنظر مشتق می‌گیریم و بعدش نمودار تابع مشتق رو رسم می‌کنیم. فقط حواستون باشه نقطه‌هایی که تابع موردنظر توی اونا مشتق‌پذیر نباشه، توی دامنه تابع f' وجود ندارن.

فصل پنجم (کاربرد مشتق):

۱) عمده سؤال‌های این فصل مربوط می‌شه به حالتی که ضابطه یه تابعی رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که مختصات نقاط اکسترمم نسبی و یا نقاط اکسترمم مطلق اون رو به‌دست بیاریم (البته بعضی وقتا توی صورت سؤال قید می‌کنه که جدول تغییرات تابع رو هم رسم کنیم)، که برای حل این تیپ از سؤال‌ها گام اول اینه که نقاط بحرانی تابع رو به‌دست بیاریم.

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نقاط بحرانی چیا بودن؟
- نقاطی که تابع توی اونا مشتق‌پذیر نیست.
- نقاطی که مشتق تابع توی اونا برابر صفره.
- نقاط ابتدا و انتهای بازه

حالا اگه از ما مختصات نقاط اکسترمم نسبی رو پرسیدن، جدول تغییرات تابع رو رسم می‌کنیم و از روی اون نظر می‌دیم و اگه از ما نقاط اکسترمم مطلق رو پرسیدن، مقدار تابع رو به ازای طول نقاط بحرانی به‌دست میاریم و بیش‌ترین مقدار رو به عنوان ماکزیمم مطلق و کم‌ترین مقدار رو هم به عنوان مینیمم مطلق معرفی می‌کنیم. فقط باید حواستون به بازه‌ای که صورت سؤال داده هم باشه و نقاط بحرانی که توی بازه گفته شده وجود ندارن رو باید از بازی کنار بزاریم.

۲) در مسائل مربوط به بهینه‌سازی هم قدم اول اینه که با استفاده از اطلاعات سؤال، بتونیم رابطه مرتبط با متغیرها رو به‌دست بیاریم (به درسنامه‌ای که توی پاسخ‌نامه گذاشتیم مراجعه کن).

فصل ششم (هندسه):

۱) از قسمت مربوط به "شکل حاصل از برخورد یک صفحه با یک سطح مخروطی"، می‌تونیم سؤال‌های درست یا نادرست و یا سؤال جای خالی داشته باشیم.

۲) از بخش مربوط به بیضی، ممکنه که مختصات کانون‌های یک بیضی رو به ما بدن و از ما درباره پارامترهای مختلف بیضی (مثل فاصله کانونی، خروج از مرکز بیضی، اندازه قطر کوچک، اندازه قطر بزرگ، مختصات مرکز بیضی، مختصات دو سر قطر بزرگ، مختصات دو سر قطر کوچک و ...) رو بپرسن که توی پاسخ‌نامه و در بخش درسنامه مربوط به بیضی، روش به‌دست آوردن همه اینارو یاد می‌گیری.

۳) در رابطه با بحث دایره چند تیپ مهم سؤال وجود داره:

- ✓ معادله یک دایره رو بدن و از ما بخوان که مختصات مرکز و اندازه شعاع اون رو به‌دست بیاریم.
- ✓ معادله یک خط و معادله یک دایره رو به ما بدن و از ما درباره وضعیت خط نسبت به دایره بپرسن.
- ✓ معادله دوتا دایره رو به ما بدن و از ما دربارهٔ وضعیت دو دایره نسبت به هم بپرسن.

که در همه حالت‌های بالا، گام اول اینه که بیایم و مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره رو به‌دست بیاریم.

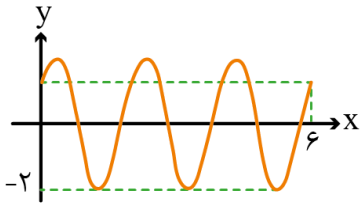
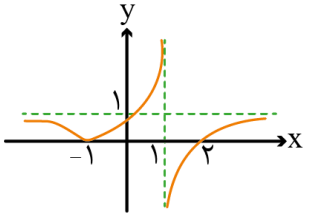
فصل هفتم (احتمال):

برای جواب دادن به سؤالی که از فصل احتمال مطرح می‌شه، مهم‌ترین قدم اینه که بتونیم نمودار درختی مرتبط با سؤال رو رسم کنیم.

و اما توصیه‌های پایانی...

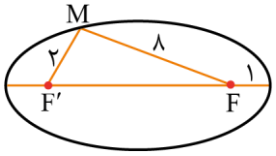
- ✓ قبل از تحویل پاسخ‌نامه امتحانی، حتماً حتماً یه بار دیگه جواب‌هایی که دادی رو چک کن تا یه وقت خدای نکرده، جایی اشتباه نکرده باشی.
- ✓ برای جواب دادن به سؤال‌ها به هیچ عنوان از روش‌های سریع و اصطلاحاً روش‌های تستی استفاده نکن و سعی کن پاسخ تشریحی رو به‌صورت کامل بنویسی (البته توی سؤال‌هایی که چهارگزینه‌ای هستن، اگه راه بده می‌تونی ازشون استفاده کنی؛ یا زمانی که می‌خوای جوابی که به‌دست آوردی رو چک کنی که درسته یا نه هم می‌تونی از این روش‌ها استفاده کنی).
- ✓ سعی کن که هیچ سؤالی رو بدون جواب نذاری.

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) هر تابع یک‌به‌یک، اکیداً یکنوا است. ب) دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin^2 3x-\cos^2 3x$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. پ) در یک تابع اکیداً صعودی، مشتق در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود.	۰/۷۵
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) نمودار تابع $f(x)=x^2$ در بازهٔ $(-2,0)$، ..... از نمودار تابع $g(x)=x^3$ قرار دارد. ب) اگر در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{3}{5}$ باشد، قطر بزرگ بیضی ..... برابر قطر کوچک آن است.	۰/۵
۳	سؤالات چهارگزینه‌ای: I. اگر دامنهٔ تابع $y=f(x+1)$ بازهٔ $[-2,4]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=3-2f(-2[x]+3)$ کدام است؟ الف) $(1,4)$ ب) $[-1,3)$ پ) $[-1,2]$ ت) $(2,3]$ II. مساحت دایره به معادلهٔ $(a-2)x^2+\frac{a}{3}y^2-4x+2ay=4a$ کدام است؟ الف) 5π ب) 25π پ) 4π ت) 16π III. اگر $f(x)$ تابعی خطی با شیب مثبت و $(fof)(x)=4x-6$ باشد، مقدار $f^{-1}(6)$ کدام است؟ الف) ۲ ب) ۳ پ) ۴ ت) ۵	۱/۵
۴	اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-10 & ,\ x>0\\ x+1 & ,\ x\le 0\end{cases}$ باشد، ضابطهٔ تابع $y=(fof)(x)$ را به‌دست آورید.	۰/۵
۵	جواب‌های معادلهٔ $1+\sin x=\cos x+\tan x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌دست آورید.	۱
۶	شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=1+a\cos\left(b\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$ در بازهٔ $[0,6]$ است. $a+b$ چه عددی می‌تواند باشد؟ 	۰/۷۵
۷	نمودار تابع f به‌صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.  الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^+}(fof)(x)$	۰/۵
۸	اگر $\lim\limits_{x\to -1}\frac{a[x]-a^2x}{2x^2-x-3}=-\infty$، آن‌گاه حدود a را بیابید.	۰/۷۵

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	سوالات	نمره
۹	حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^2-9x-2}{3x^2-5x-2}$ پ) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \left[\frac{-2}{3x^2+4x-4}\right]$	۰/۷۵
۱۰	خط $y=3x-2$ در نقطهٔ $x=1$ بر منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ مماس است. حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2f^2(x)-f(x)-1}{x-1}$ را بیابید.	۱
۱۱	مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x)=\frac{\sqrt[5]{(x^2+1)^3}}{x}$ ب) $g(x)=(x^2-3)(x^4+3x^2+9)(x^6+27)$	۱
۱۲	مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x)=(3x^2+x-4)[x]$ را در نقطهٔ $x_0=1$ به‌دست آورید.	۱
۱۳	با فرض این‌که تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $g(x)=f^2(x^2+\sqrt{x})$ و $f'(2)=f(2)=2$ باشد، حاصل $g'(1)$ را به‌دست آورید.	۱
۱۴	گنجایش بشکه‌ای ۱۰۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقیمانده در بشکه از رابطهٔ $v=100\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ به‌دست آید: الف) آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ زمانی $[0,90]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای $-1\frac{L}{s}$ است؟	۱
۱۵	نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{-x-2}}$ را به‌دست آورید.	۱
۱۶	نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ را بیابید.	۱/۲۵
۱۷	مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر ۲ را حول یکی از اضلاع قائم‌اش دوران می‌دهیم تا یک مخروط به‌دست آید. ارتفاع مخروط را طوری بیابید که بیش‌ترین حجم را داشته باشد؟	۱
۱۸	با توجه به شکل زیر طول قطر بزرگ، قطر کوچک، فاصله کانونی و محیط مثلث FMF' را به‌دست آورید. 	۱

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	سوالات	نمره
۱۹	مقدار a را طوری تعیین کنید که دو دایره به معادله‌های $x^2+y^2-8x-12y+43=0$ و $x^2+y^2-2x-4y+a=0$ برهم مماس باشند.	۱/۷۵
۲۰	اگر احتمال به دنیا آمدن نوزاد دختر مبتلا به کم‌خونی ۰/۳ و احتمال به دنیا آمدن نوزاد پسر مبتلا به کم‌خونی ۰/۲ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشند: الف) با چه احتمالی نوزاد آن‌ها مبتلا به کم‌خونی نیست؟ ب) اگر بدانیم فرزند به دنیا آمده مبتلا به کم‌خونی است احتمال آن‌که پسر باشد، چقدر است؟	۲
	موفق باشید	۲۰

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	شما می‌توانید این پاسخبرگ را پرینت بگیرید و پاسخ‌های خود را در آن بنویسید، و سپس عکس یا فایل اسکن شده پاسخبرگ را در سایت آپلود کنید. در صورت عدم پرینت پاسخبرگ، می‌توانید پاسخ سوالات را در یک برگه A۴ سفید به صورت خوش‌خط و منظم بنویسید و سپس در سایت آپلود کنید.	
۱	الف) ..... ب) ..... ج)	۰/۷۵
۲	الف) ..... ب)	۰/۵
۳	I . ..... II . ..... III	۱/۵
۴		۰/۵
۵		۱
۶		۰/۷۵

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۷	الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} (fof)(x)$	۰/۵
۸		۰/۷۵
۹	الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^+}{۲}} \frac{\cos x}{۱-\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۵x^۲-۹x-۲}{۳x^۲-۵x-۲}$	۰/۷۵

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	ادامه سوال ۹:	
	پ) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\left[\dfrac{-۲}{۳x^۲+۴x-۴}\right]$	
۱۰		۱
۱۱	الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt[۵]{(x^۲+۱)^۳}}{x}$	۱
	ب) $g(x)=(x^۲-۳)(x^۴+۳x^۲+۹)(x^۶+۲۷)$	

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۲		۱
۱۳		۱
۱۴	الف) ب)	۱

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۵		۱
۱۶		۱/۲۵
۱۷		۱

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۸		۱
۱۹		۱/۷۵
۲۰	الف) ب)	۲
	موفق باشید	۲۰

www.biomaze.ir

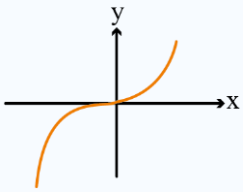
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱		۰/۷۵

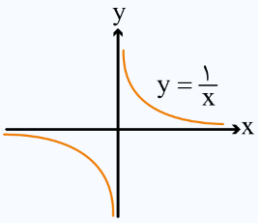
نکته۱:

اگر تابع f اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) باشد آن‌گاه یک‌به‌یک است اما برعکس آن درست نیست.

مثال ۱: تابع $y = x^{۳}$ تابعی اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است.



مثال ۲: تابع $y = \frac{۱}{x}$ تابعی یک‌به‌یک است اما اکیداً یکنوا نیست.



نکته۲:

دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\left.\begin{array}{l} y = a\sin^{n}(bx+c)+d \\ y = a\cos^{n}(bx+c)+d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{۲\pi}{|b|} & n \text{ فرد باشد} \\ T = \frac{\pi}{|b|} & n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = a\tan^{n}(bx+c)+d \\ y = a\cot^{n}(bx+c)+d \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{و چه فرد}]{n \text{ چه زوج باشد}} T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = |a\sin(bx+c)| \\ y = |a\cos(bx+c)| \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

مثال:

$$y = \sin ۲x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

$$y = \cos^{۲} ۴x \Rightarrow T = \frac{\pi}{۴}$$

$$y = |۵\sin ۳x| \Rightarrow T = \frac{\pi}{۳}$$

$$y = ۲\sin ۲x\cos ۲x \Rightarrow y = \sin ۴x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

روابط مثلثاتی مهم:

$$\sin ۲x = \begin{cases} ۲\sin x\cos x \\ \frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x} \end{cases}$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \sin^4 x \\ 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \\ \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \end{cases}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

نکته ۳:
در مورد یکنوایی توابع:

صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
اکیداً صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
اکیداً نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

تابع ثابت در یک بازه، **هم صعودی و هم نزولی** است.

نکته ۴:

اگر در بازه‌ای $f'(x) \ge 0$ باشد:

۱) اگر $f'(x)$ در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً صعودی است.

۲) اگر $f'(x)$ در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f صعودی است.

مثال:

در تابع $f(x) = x^3$ مشتق تابع $f'(x) = 3x^2 \ge 0$ است و چون فقط در $x = 0$ مشتق برابر با صفر است، بنابراین تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است.

نکته ۵:

اگر در بازه‌ای $f'(x) \le 0$ باشد:

۱) اگر $f'(x)$ در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً نزولی است.

۲) اگر $f'(x)$ در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f نزولی است.

پاسخ تشریحی:

الف) نادرست (۰/۲۵)

تابع $y = \frac{1}{x}$ تابعی یک‌به‌یک است اما اکیداً یکنوا نیست.

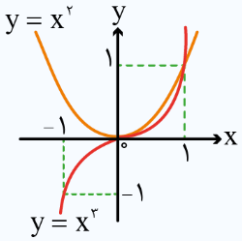
ب) درست (۰/۲۵)

$$\sin^2 3x - \cos^2 3x = -\cos 6x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

پ) نادرست (۰/۲۵)

در تابع $y = x^3$، مشتق در $x = 0$ برابر صفر است ولی اکیداً صعودی است.

ردیف		نمره
۲	**نکته ۱:** در مقایسه توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ داریم: در بازه $(0,1)$ نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد. در بازه $(-\infty,0)$ نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد. در بازه $(1,+\infty)$ نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.	۰/۵



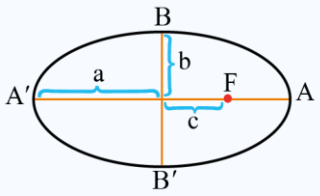
www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

نکته۲:

در یک بیضی خروج از مرکز برابر است با:



$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow e^{۲}=\frac{c^{۲}}{a^{۲}}=۱-\frac{b^{۲}}{a^{۲}} \Rightarrow \frac{b^{۲}}{a^{۲}}=۱-e^{۲} \Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{۱-e^{۲}}$$

پاسخ تشریحی:

الف) بالاتر (۰/۲۵)

ب) $\frac{۵}{۴}$ (۰/۲۵)

$$\frac{b}{a}=\sqrt{۱-e^{۲}}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{\text{قطر بزرگ}}{\text{قطر کوچک}}=\frac{۲a}{۲b}=\frac{a}{b}=\frac{۵}{۴}$$

۳ — ۱/۵

نکته:

در جدول زیر خلاصه‌ای از خواص و ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها آورده شده است.

نمودار جدید $(a,k>۰)$	توضیحات و نحوه رسم	
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ)	
$f(kx)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$\lvert f(x)\rvert$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	
$f(\lvert x\rvert)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	
$\lvert y\rvert=f(x)$	ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

نکته۱:

در فرایند رسم تابع $y=af\left(bx+c\right)+d$ ، از روی تابع $f\left(x\right)$ ، ترتیب مراحل به‌صورت زیر است:

الف) تأثیرات روی دامنه
۱) تأثیر عدد ثابت c
۲) تأثیر ضریب x $\left(b\right)$

ب) تأثیرات روی برد
۱) تأثیر ضریب f $\left(a\right)$
۲) تأثیر عدد ثابت d

نکته۲:

در تابع $y=af\left(bx+c\right)+d$ ، تأثیر a و d روی برد تابع و تأثیر c و b روی دامنهٔ تابع است.

نکته۳:

اگر دامنه تابع $y=f\left(x\right)$ برابر $\left[m,n\right]$ باشد دامنه تابع $g\left(x\right)=af\left(bx+c\right)+d$ برابر است با:

$$y=f\left(x\right)\xrightarrow{\text{دامنه}}m\le x\le n\xrightarrow{\text{محدوده ورودی } f \text{ را پیدا می‌کنیم.}}m\le x\le n$$

ورودی

محاسبه محدوده x که همان دامنه g است. $\xrightarrow[\text{ثابتی دارد.}]{\text{ورودی } f \text{ محدوده}}m\le bx+c\le n\Rightarrow$

مثال:

اگر دامنهٔ تابع $y=2f\left(\frac{x}{2}-4\right)+3$ برابر $[-2,6)$ باشد، دامنهٔ تابع $g\left(x\right)=-3f\left(2x+1\right)$ را به‌دست آورید.

دامنه: $-2\le x<6$

محدودهٔ ورودی f را محاسبه می‌کنیم:

$$-1\le\frac{x}{2}<3\Rightarrow-5\le\frac{x}{2}-4<-1\Rightarrow-5\le f\text{ ورودی}<-1\Rightarrow-5\le2x+1<-1\Rightarrow-6\le2x<-2\Rightarrow-3\le x<-1$$

$$\Rightarrow D_g=[-3,-1)$$

نکته:

$$n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\le x<n+1\Rightarrow\left[x\right]=n$$

$$\boxed{\left[x\right]>n\Rightarrow x\ge n+1}\qquad\boxed{\left[x\right]<n\Rightarrow x<n}$$

$$\boxed{\left[x\right]\ge n\Rightarrow x\ge n}\qquad\boxed{\left[x\right]\le n\Rightarrow x<n+1}$$

مثال:

$$\left[x\right]\ge-2\Rightarrow x\ge-2$$

$$\left[x\right]<4\Rightarrow x<4$$

$$\left[x\right]\le4\Rightarrow x<5$$

$$-1<\left[x\right]\le3\Rightarrow0\le x<4$$

$$-1\le\left[x\right]<3\Rightarrow-1\le x<3$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

معادله دایره

معادله استاندارد دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$

مرکز دایره (α,β) شعاع دایره $=R$

معادله گسترده دایره: $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

مرکز دایره $\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)$ و شعاع دایره $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

توجه: ضریب $x^۲$ و $y^۲$ یکسان و برابر یک است.

مثال:

مرکز و شعاع دایرهٔ $۲x^۲+۲y^۲+۴x-۸y+۲=۰$ را به‌دست آورید.

ابتدا ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید برابر یک باشد.

$$۲x^۲+۲y^۲+۴x-۸y+۲=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$$

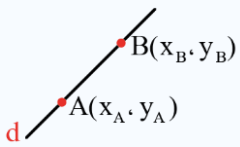
مرکز دایره $\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)=\left(-\frac{۲}{۲},-\frac{(-۴)}{۲}\right)=(-۱,۲)$

شعاع دایره $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴}=۲$$

نکته:

تابع $f(x)=ax+b$، تابعی خطی با شیب a و عرض از مبدأ b است.



شیب خط $d=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

نکته:

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، در این‌صورت داریم:

$$f(a)=b \Rightarrow f^{-۱}(b)=a$$

مثال:

در تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}$، حاصل $f^{-۱}(۳)$ را به‌دست آورید.

فرض می‌کنیم که $f^{-۱}(۳)=\alpha$ باشد در این‌صورت به جای حل این معادله، معادله $f(\alpha)=۳$ را حل می‌کنیم، پس:

$$f(\alpha)=۳ \Rightarrow \sqrt{\alpha+۳}=۳ \Rightarrow \alpha+۳=۹ \Rightarrow \alpha=۶$$

پس $f^{-۱}(۳)=۶$ است.

نکته:

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال:

ضابطه وارون تابع $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$ را به‌دست آورید:

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$f(x)=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y=\frac{-8x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y=-8x+3 \Rightarrow 2y-3=-8x \Rightarrow x=\frac{2y-3}{-8}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} f^{-1}(x)=\frac{2x-3}{-8}$$

نکته:

برای این‌که نشان دهیم دو تابع وارون‌پذیر f و g وارون یکدیگرند، باید ثابت کنیم که ترکیب دو تابع f و g، تابع همانی است به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که:

$$\begin{cases}(fog)(x)=x\\(gof)(x)=x\end{cases}$$

مثال:

نشان دهید که توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)-4=3\left(\frac{x+4}{3}\right)-4=x \qquad (x\in D_g)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+4}{3}=\frac{(3x-4)+4}{3}=x \qquad (x\in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

پاسخ تشریحی:

I. ب (۰/۵)

$$y=f(x+1) \Rightarrow \text{دامنه}: -2\le x\le 4 \Rightarrow -1\le x+1\le 5$$

($x+1$: ورودی f)

$$-1\le \text{ورودی } f\le 5 \Rightarrow -1\le -2[x]+3\le 5$$

$$\Rightarrow -4\le -2[x]\le 2 \Rightarrow -1\le [x]\le 2$$

$$\Rightarrow -1\le x<3 \Rightarrow D_g=[-1,3)$$

II. ب (۰/۵)

$$(a-2)x^2+\frac{a}{3}y^2-4x+2ay=4a$$

ضرایب x^2 و y^2 یکسان و باید برابر یک باشند.

$$a-2=\frac{a}{3} \Rightarrow 3a-6=a \Rightarrow a=3$$

$$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(6)^2-4(-12)}=\frac{1}{2}(10)=5$$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud

ردیف	پاسخنامه	نمره

مساحت دایره $= \pi R^{۲} = ۲۵\pi$

III . پ (۰/۵)

$f(x) \Rightarrow f(x) = ax + b \ , \ a > ۰$ تابعی خطی است.

$$f\big(f(x)\big) = a(ax+b) + b = a^{۲}x + ab + b$$

$$(fof)(x) = a^{۲}x + ab + b = ۴x - ۶$$

با مقایسهٔ طرفین تساوی داریم:

$$a^{۲} = ۴ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$$

$$ab + b = -۶ \xrightarrow{a=۲} ۳b = -۶ \Rightarrow b = -۲$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$\Rightarrow f(x) = ۲x - ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۶) = ?$$

$$f^{-۱}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow ۲a - ۲ = ۶$$

$$\Rightarrow a = ۴ \Rightarrow f^{-۱}(۶) = ۴$$

۴ — **۰/۵**

نکته:

اگر f و g دو تابع باشند، fog را ترکیب $f\big(g(x)\big)$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای xها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب:

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big)$$
$$(fof)(x) = f\big(f(x)\big)$$

مثال:

اگر $f(x) = x^{۲} - ۲$ و $g(x) = ۲x + ۱$ باشند، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ را به‌دست آورید.

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big)$، پس در تابع $g(x)$ به جای xها، تابع $f(x) = x^{۲} - ۲$ را جایگذاری و ساده می‌کنیم.

$$g\big(f(x)\big) = ۲f(x) + ۱ = ۲\big(x^{۲} - ۲\big) + ۱ = ۲x^{۲} - ۳$$

نکته:

$$D_{fog} = \big\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\big\}$$
$$D_{gof} = \big\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\big\}$$

مثال:

اگر $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = ۲x^{۲} - ۱$ باشد، دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

$$\begin{cases} D_f = [۱, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_{fog} = \big\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid ۲x^{۲} - ۱ \in [۱, +\infty)\big\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$$

www.biomaze.ir

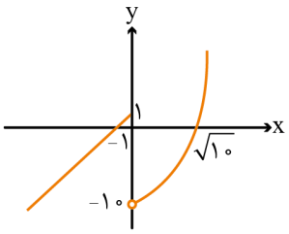
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۱۰ & , \ x>۰\\ x+۱ & , \ x\le ۰\end{cases}$$

$$(fof)(x)=f(f(x))=\begin{cases}f^{۲}(x)-۱۰ & , \ f(x)>۰\\ f(x)+۱ & , \ f(x)\le ۰\end{cases}$$



با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)>۰ \Rightarrow \begin{cases}x>\sqrt{۱۰} \Rightarrow f(x)=x^{۲}-۱۰ \Rightarrow (fof)(x)=\left(x^{۲}-۱۰\right)^{۲}-۱۰\\ -۱<x\le ۰ \Rightarrow f(x)=x+۱ \Rightarrow (fof)(x)=(x+۱)^{۲}-۱۰\end{cases}$$

$$f(x)\le ۰ \Rightarrow \begin{cases}۰<x\le \sqrt{۱۰} \Rightarrow f(x)=x^{۲}-۱۰ \Rightarrow (fof)(x)=\left(x^{۲}-۱۰\right)+۱=x^{۲}-۹\\ x\le -۱ \Rightarrow f(x)=x+۱ \Rightarrow (fof)(x)=(x+۱)+۱=x+۲\end{cases}$$

$$fof(x)=\begin{cases}\left(x^{۲}-۱۰\right)^{۲}-۱۰ & , \ x>\sqrt{۱۰} \quad (۰/۲۵)\\ (x+۱)^{۲}-۱۰ & , \ -۱<x\le ۰\\ x^{۲}-۹ & , \ ۰<x\le \sqrt{۱۰} \quad (۰/۲۵)\\ x+۲ & , \ x\le -۱\end{cases}$$

۵ — ۱

نکته:

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x)=\sin g(x)$:

$$\sin f(x)=\sin g(x) \Rightarrow \begin{cases}f(x)=۲k\pi+g(x)\\ f(x)=۲k\pi+\pi-g(x)\end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x=۰$	$x=k\pi$
$\sin x=۱$	$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$
$\sin x=-۱$	$x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$

مثال:

معادله مثلثاتی $\sin ۲x=\sin x$ را حل کنید.

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\\ ۲x=۲k\pi+\pi-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۲k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳} \ , \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

مثال:

معادله مثلثاتی $\cos ۲\alpha-\sin\alpha+۱=۱$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

می‌دانیم که $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$ است، پس:

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$\left(۱-۲\sin^۲\alpha\right)-\sin\alpha+۱=۱ \Rightarrow ۲\sin^۲\alpha+\sin\alpha-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin\alpha=-۱ \Rightarrow \alpha=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}, & k\in\mathbb{Z} \\ \sin\alpha=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin\alpha=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & , \quad k\in\mathbb{Z} \\ \alpha=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} & , \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال:

معادله مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را حل کنید.

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ داریم:

$$۲\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{۶} & , \quad k\in\mathbb{Z} \\ x=k\pi+\frac{\pi}{۳} & , \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته:

معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x)=\cos g(x)$:

$$\cos f(x)=\cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)=۲k\pi+g(x) \\ f(x)=۲k\pi-g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x=۰$	$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$
$\cos x=۱$	$x=۲k\pi$
$\cos x=-۱$	$x=(۲k+۱)\pi$

مثال:

معادله مثلثاتی $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.

$$۲\cos^۲x-۹\cos x-۵=۰ \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x=۵ \xrightarrow{-۱\le\cos x\le۱} \text{غ ق ق} \\ \cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳} & , \quad k\in\mathbb{Z} \\ x=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳} & , \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روابط مثلثاتی زاویه‌های دو برابر کمان:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

مثال:

مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

می‌دانیم $\sin 15^\circ$ مثبت است پس:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

به عنوان تمرین $\sin 22/5^\circ$ رو خودتون به‌دست بیارین!

مثال:

مقدار عددی $\cos 22/5^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

می‌دانیم $\cos 22/5^\circ$ مثبت است پس:

$$\cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

پاسخ تشریحی:

$$1+\sin x = \cos x + \tan x \Rightarrow 1-\cos x + \sin x - \tan x = 0$$

$$(1-\cos x) - \tan x(1-\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\cos x)(1-\tan x) = 0$$

$$\begin{cases} 1-\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0/25) \\ x = 2\pi & (0/25) \end{cases} \\ 1-\tan x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} & (0/25) \\ x = \dfrac{5\pi}{4} & (0/25) \end{cases} \end{cases}$$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
۶		۰/۷۵

نکته‌های مهم:

نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$، داریم:

بیش‌ترین مقدار: $\max = |a| + c$ ⇐ مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos|

کم‌ترین مقدار: $\min = -|a| + c$ ⇐ مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos| −

$$\Rightarrow \begin{cases} |a| = \dfrac{\max - \min}{۲} \\ c = \dfrac{\max + \min}{۲} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{۲\pi}{|\text{ضریب x}|} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y=a\tan(bx)+c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب x}|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

مثال:

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید:

- $y = -۳\cos ۲\pi x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \dfrac{۲\pi}{|۲\pi|} = ۱ \\ \max = |a| + c = |-۳| + ۱ = ۳ + ۱ = ۴ \\ \min = -|a| + c = -|-۳| + ۱ = -۳ + ۱ = -۲ \end{cases}$

- $y = \sqrt{۳} - \cos\dfrac{\pi}{۲}x \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \dfrac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = ۴ \\ \max = |a| + c = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱ + \sqrt{۳} \\ \min = -|a| + c = -|-۱| + \sqrt{۳} = -۱ + \sqrt{۳} \end{cases}$

- $y = ۱ - ۲\sin\left(-\dfrac{\pi}{۳}x\right) \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \dfrac{۲\pi}{\left|-\frac{\pi}{۳}\right|} = ۶ \\ \max = |a| + c = |-۲| + ۱ = ۲ + ۱ = ۳ \\ \min = -|a| + c = -|-۲| + ۱ = -۲ + ۱ = -۱ \end{cases}$

مثال:

معادله یک تابع سینوسی $y=a\sin(bx)+c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۲} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$$

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-۴,۴]$ است یعنی:

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

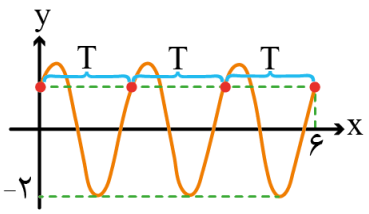
$$\begin{cases}\max = |a|+c = ۴\\ \min = -|a|+c = -۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|a|+c = ۴\\ -|a|+c = -۴\end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \xrightarrow{|a|+c=۴} |a| = ۴ \Rightarrow a = \pm ۴$$

حال:

$$\begin{cases}a = \pm ۴\\ b = \pm\pi\\ c = ۰\end{cases} \Rightarrow y = \pm ۴\sin(\pm\pi x) \Rightarrow \begin{cases}y = ۴\sin(\pi x)\\ y = -۴\sin(-\pi x)\\ y = ۴\sin(-\pi x)\\ y = -۴\sin(\pi x)\end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

$$y = ۱ + a\cos\left(b\pi x - \frac{\pi}{۲}\right) = ۱ + a\sin b\pi x \qquad (۰/۲۵)$$



$$۳T = ۶ \Rightarrow T = ۲ \Rightarrow (۰/۲۵) \qquad T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱$$

$$۱ = \frac{\max+\min}{۲} = \frac{\max-۲}{۲} \Rightarrow \max = ۴$$

$$|a| = \frac{\max-\min}{۲} = \frac{۴+۲}{۲} = ۳ \Rightarrow |a| = ۳$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار در } x=۰ \text{ صعودی است.}} ab\pi > ۰ \Rightarrow ab > ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}a = ۳\\ b = ۱\end{matrix}} \quad (۰/۲۵) \quad \text{یا} \quad \boxed{\begin{matrix}a = -۳\\ b = -۱\end{matrix}} \quad (۰/۲۵)$$

۷	**پاسخ تشریحی:**	۰/۵

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۱$ (۰/۲۵)

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} (fof)(x)$

برای محاسبه $\lim\limits_{x\to ۱^+} (fof)(x)$ یا همان $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(f(x))$ از تابع درونی شروع می‌کنیم. به عبارت دیگر ابتدا باید $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ را به‌دست بیاوریم که برابر است با:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = -\infty$$

پس باید حد تابع بیرونی را زمانی که $x \to -\infty$ میل می‌کند به‌دست بیاوریم.

$$\lim_{x\to ۱^+} (fof)(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = ۱ \qquad (۰/۲۵)$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
۸	پاسخ تشریحی:	۰/۷۵

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{a[x]-a^2x}{2x^2-x-3}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{a\left[(-1)^+\right]-a^2x}{(x+1)(2x-3)}$$

$$=\frac{-a+a^2}{(0^+)(-5)}=\frac{a^2-a}{0^-}=-\infty \Rightarrow a^2-a>0$$

$\Rightarrow \boxed{a<0 \cup a>1}$ A (۰/۲۵)

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{a[x]-a^2x}{2x^2-x-3}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{a\left[(-1)^-\right]-a^2x}{(x+1)(2x-3)}$$

$$=\frac{-2a+a^2}{(0^-)(-5)}=\frac{a^2-2a}{0^+}=-\infty \Rightarrow a^2-2a<0$$

$\Rightarrow \boxed{0<a<2}$ B (۰/۲۵)

حدود $a = A\cap B=(1,2)$ (۰/۲۵)

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

۹

نکته:

در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هردو تابع f و g در $x=a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک عواملی نظیر اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سؤالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هردو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفر کننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b\\ (\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b\end{cases}$$

مثال:

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(2+\sqrt{x+1})}{(2)^2-(\sqrt{x+1})^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}(2+\sqrt{x+1})}{-\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\left(-(x+3)(2+\sqrt{x+1})\right)=-6\times 4=-24$$

۲) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{1}{5}$

۳) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x+2)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{1\times(3)}=\frac{1}{3}$$

نکته:

در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این‌صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه:

برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{\text{عدد}-}{0^+}=-\infty$	$\frac{\text{عدد}+}{0^-}=-\infty$	$\frac{\text{عدد}-}{0^-}=+\infty$	$\frac{\text{عدد}+}{0^+}=+\infty$

۰/۷۵

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

مثال:

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{2\times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2} = \frac{-2+1}{(-1+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

توجه:

وقتی به جزءصحیح و یا قدرمطلق برخورد می‌کنیم، باید جزءصحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|3-3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{3}\right)} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

در محاسبه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots}$; $(m,n\in\mathbb{N})$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این‌صورت

با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیش‌ترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیش‌تر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کم‌تر باشد.	صفر

مثال:

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2x^4\right) = -2(-\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

پاسخ تشریحی:

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty \qquad (0/25)$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^+-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}=\frac{\sqrt{2}}{0^-}=-\infty \qquad (0/25)$$

ب) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^2-9x-2}{3x^2-5x-2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(5x+1)}{(x-2)(3x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{5x+1}{3x+1}=\frac{11}{7} \qquad (0/25)$$

پ) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\left[\frac{-2}{3x^2+4x-4}\right]=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\left[\frac{-2}{(x+2)(3x-2)}\right]$

$$=\lim_{x\to(-2)^+}\left[\frac{-2}{(0^+)(-8)}\right]=\left[\frac{-2}{0^-}\right]=+\infty \qquad (0/25)$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱۰

نکته:

مشتق تابع $f(x)$ در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با انتخاب $x-a=h$ داریم:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال۱:

اگر $f(x)=۱-۲x^۲$ باشد، $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۱-۲x^۲+۱}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۲(۱-x)(۱+x)}{x+۱}=۴$$

مثال۲:

با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}+۱$ را در نقطهٔ $x=۱$ محاسبه کنید.

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}+۱)-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

مثال۳:

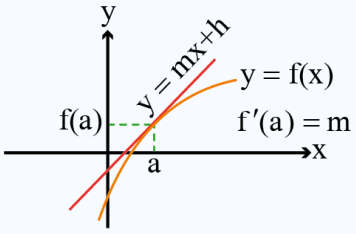
با استفاده ازتعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۵$ به‌دست آورید.

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt{x-۱}-۲}{x-۵}\times\frac{\sqrt{x-۱}+۲}{\sqrt{x-۱}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{x-۵}{(x-۵)(\sqrt{x-۱}+۲)}=\lim_{x\to ۵}\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

نکته:

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در $x=a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطهٔ تماس هم در تابع و هم در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند.



مثال:

با استفاده از تعریف مشتق، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ را در نقطه‌ای به طول $x=۱$ به‌دست آورید.

$$m=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۳)}{x-۱}=۴$$

$$y-۶=۴(x-۱)\Rightarrow y=۴x+۲$$

۱

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

پاسخ تشریحی:

خط $y=۳x-۲$ بر $f(x)$ در $x=۱$ مماس است. اگر $x=۱$ را در خط جایگذاری کنیم $y=۱$ می‌شود. این یعنی $f(۱)=۱$.

شیب خط مماس برابر ۳ است، پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطه تماس برابر است با: $f'(۱)=۳$

$f(۱)=۱$ $(۰/۲۵)$

$f'(۱)=۳$ $(۰/۲۵)$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f^{۲}(x)-f(x)-۱}{x-۱}=\frac{۲f^{۲}(۱)-f(۱)-۱}{۱-۱}=\frac{۰}{۰}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\big(f(x)-۱\big)\big(۲f(x)+۱\big)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۱}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}\big(۲f(x)+۱\big) \qquad (۰/۲۵)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\underbrace{\big(۲f(۱)+۱\big)}_{۳}=۳f'(۱)=۳(۳)=۹ \qquad (۰/۲۵)$$

II

نکته‌های مهم:

نکته ۱: قواعد مشتق‌گیری:

- $y=c\ ,\ c\in\mathbb{R}\longrightarrow y'=۰$
- $y=ax+b\longrightarrow y'=a$
- $y=kf(x)\longrightarrow y'=kf'(x)$
- $y=\sqrt[n]{x^{m}}\longrightarrow y'=\dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y=f(x)\pm g(x)\longrightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$
- $f(x)\times g(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
- $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}\longrightarrow y'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}\ ,\ \big(g(x)\neq ۰\big)$
- $y=\big(f(x)\big)^{n}\longrightarrow y'=nf'(x)\big(f(x)\big)^{n-۱}$
- $y=\sqrt[n]{\big(f(x)\big)^{m}}\longrightarrow y'=\dfrac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{\big(f(x)\big)^{n-m}}}$
- $y=(fog)(x)=f\big(g(x)\big)\longrightarrow y'=g'(x)f'\big(g(x)\big)$

نکته ۲: مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر:

- $f(x)\xrightarrow{\text{مشتق اول}}f'(x)\xrightarrow{\text{مشتق دوم}}f''(x)$

نکته ۳: چندتا مشتق مهم کتاب:

- $y=\sqrt{x}\longrightarrow y'=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$
- $y=\sqrt[۳]{x}\longrightarrow y'=\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$
- $y=\dfrac{۱}{x}\longrightarrow y'=\dfrac{-۱}{x^{۲}}$

I

حالا بریم چندتا مثال باهم ببینیم ...

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

- $y=\frac{9x-2}{\sqrt{x}} \longrightarrow y'=\frac{9\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$
- $y=\frac{1}{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)^4 \longrightarrow y'=\frac{-1}{x^2}\left(2\sqrt{x}-1\right)^4+4\left(2\sqrt{x}-1\right)^3\left(\frac{2}{2\sqrt{x}}-0\right)\left(\frac{1}{x}\right)$
- $y=\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5 \longrightarrow y'=5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4\left(\frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2}\right)$
- $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)\left(x^3+1\right) \longrightarrow y'=\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)\left(x^3+1\right)+3x^2\left(\sqrt{3x+2}\right)$
- $y=\left(x^2+1\right)^3(5x-1) \longrightarrow y'=3(2x)\left(x^2+1\right)^2(5x-1)+5\left(x^2+1\right)^3$
- $y=\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8 \longrightarrow y'=8\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^7\times\left(\frac{-3\left(x^2+5\right)-2x(-3x+1)}{\left(x^2+5\right)^2}\right)$

مثال:

اگر $f(x)=5x^3-4x^2-3x$، مقدار $f''(-1)$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=5x^3-4x^2-3x \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x)=15x^2-8x-3 \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)=30x-8$$

$$\xrightarrow{x=-1} f''(-1)=30(-1)-8=-30-8=-38$$

مثال:

اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوب است محاسبه موارد زیر:

$$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8$$

$$(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3(3)+2(5)=9+10=19$$

مثال:

اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$، $f'(2)=5$، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$ باشد، حاصل $(fg)'(2)$ را به‌دست آورید.

$$(fg)'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=(5)(8)+(-6)(3)=40-18=22$$

پاسخ تشریحی:

الف) $f(x)=\frac{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}}{x}$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$f'(x)=\frac{\frac{۳(۲x)x}{۵\sqrt[۵]{(x^۲+۱)^۲}}-\sqrt[۵]{(x^۲+۱)^۳}}{x^۲} \quad (۰/۲۵)$$

ب) $g(x)=\underbrace{(x^۲-۳)(x^۴+۳x^۲+۹)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}(x^۶+۲۷)$

$$g(x)=\underbrace{(x^۶-۲۷)(x^۶+۲۷)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=x^{۱۲}-۷۲۹ \quad (۰/۲۵)$$

$$g'(x)=۱۲x^{۱۱} \quad (۰/۲۵)$$

در قسمت ب به سایر روش‌های صحیح نمره تعلق گیرد.

روش دوم قسمت ب: (۰/۵)

$$(۲x)(x^۴+۳x^۲+۹)(x^۶+۲۷)+(۴x^۳+۶x)(x^۲-۳)(x^۶+۲۷)+(۶x^۵)(x^۲-۳)(x^۴+۳x^۲+۹)$$

۱۲

نکته:

تابع f را در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و باهم برابر باشد، یعنی:

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

مثال:

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+۳ & x\geq -۱\\ ۲x+۶ & x<-۱\end{cases}$ را در $x=-۱$ بررسی کنید.

اول پیوستگی تابع f را در $x=-۱$ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases}f(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} x^۲+۳=۴\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-} ۲x+۶=۴\end{cases}$$

تابع f در $x=-۱$ پیوسته است حال باید ببینیم که مشتق چپ و راست تابع در $x=-۱$ باهم برابرند یا خیر.

$$\begin{cases}f'_+(x)=۲x \longrightarrow f'_+(-۱)=-۲\\ f'_-(x)=۲ \longrightarrow f'_-(-۱)=۲\end{cases} \Rightarrow f'_+(-۱)\neq f'_-(-۱)$$

پس تابع f در $x=-۱$، پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است.

حالا اگه تو این سؤال از ما ضابطه تابع مشتق رو بخوان چی؟

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۳ & x\geq -۱\\ ۲x+۶ & x<-۱\end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x & x>-۱\\ ۲ & x<-۱\end{cases} \quad (*)$$

۱

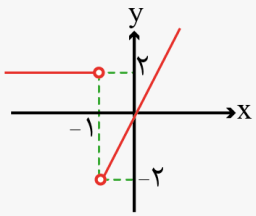
www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

آقا! چرا توی قسمت (*) علامت مساوی رو نذاشتیم؟ گفتیم که تابع f توی $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست پس $x=-1$ نمی‌تونه توی دامنه تابع مشتق حضور داشته باشه.

حالا بیاین نمودار تابع مشتق رو هم رسم کنیم:



مثال:

به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^2-4\right|$ را در $x=-2$ بررسی کنید.

اول از همه باید پیوستگی تابع f رو در $x=-2$ بررسی کنیم (خودت بررسیش کن). در مرحله بعد باید برابری مشتق چپ و راست رو توی $x=-2$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases} f'_+(-2)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\left|x^2-4\right|-0}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-(x^2-4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-(x-2)(x+2)}{x+2}=+4 \\ f'_-(-2)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\left|x^2-4\right|-0}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{(x^2-4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=-4 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'_+(-2)\neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2)$ موجود نیست $\Rightarrow$ تابع f در $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است.

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=\left(3x^2+x-4\right)[x] \Rightarrow f(1)=0 \quad (0/25)$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (0/25)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(3x^2+x-4\right)[x]-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(3x+4)[x]}{x-1} \quad (0/25)$$

$$=\lim_{x\to1^+}(3x+4)[x]=(3+4)\left[1^+\right]=7 \quad (0/25)$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱۳

نکته:

اگر u تابعی برحسب x و $y=f(u)$ باشد آن‌گاه:

$$y'=u'f'(u)$$

$$y=f^n(u) \Rightarrow y'=nf^{n-1}(u)\times u'f'(u)$$

مثال:

$$y=f\left(\sqrt{x}+4x^2\right) \Rightarrow y'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+8x\right)f'\left(\sqrt{x}+4x^2\right)$$

$$y=f^3\left(3x^4\right) \Rightarrow y'=3f^2\left(3x^4\right)\left(12x^3\right)f'\left(3x^4\right)$$

پاسخ تشریحی

$$g(x)=f^2\left(x^2+\sqrt{x}\right) \quad , \quad f'(2)=f(2)=2$$

$$g'(x)=\underbrace{2f\left(x^2+\sqrt{x}\right)}_{(0/25)}\times\underbrace{\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{(0/25)}\times\underbrace{f'\left(x^2+\sqrt{x}\right)}_{(0/25)}$$

$$x=1 \Rightarrow g'(1)=5f(2)f'(2)=5(2)(2)=20 \qquad (0/25)$$

۱

۱۴

نکته:

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال:

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1=2$ به $x_2=7$ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(7)-f(2)}{7-2}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5}=\frac{1}{5}$$

نکته

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

مثال:

معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه $[0,5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ باهم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0,5]=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{(25-5+10)-(10)}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } x=t=f'(t)=2t-1$$

می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[0,5]$ باهم برابر باشند، پس:

$$2t-1=4 \Rightarrow 2t=5 \Rightarrow t=\frac{5}{2}$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

پاسخ تشریحی:

الف)

$$v(۰)=۱۰۰\ ,\ v(۹۰)=۱۰۰\left(۱-\frac{۹۰}{۱۰۰}\right)^{۲}=۱$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{V(۹۰)-V(۰)}{۹۰-۰} \qquad (۰/۲۵)$$

$$=\frac{۱-۱۰۰}{۹۰}=\frac{-۹۹}{۹۰}=\frac{-۱۱}{۱۰} \qquad (۰/۲۵)$$

ب)

$$V'=۱۰۰\times۲\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)\left(\frac{-۱}{۱۰۰}\right)=-۲\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right) \qquad (۰/۲۵)$$

$$-۲\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)=-۱\Rightarrow ۱-\frac{t}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۵۰s \qquad (۰/۲۵)$$

۱۵ — **۱**

نکته:

اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد، نقاط بحرانی تابع f عبارتند از:

- نقاط ابتدا و انتهای بازه
- نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.
- نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است.

مثال:

نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$۴-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow x^{۲}\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$$

می‌دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، جزء نقاط بحرانی‌اند پس $x=۲$ و $x=-۲$ بحرانی‌اند.

از طرفی می‌دانیم در نقاطی که مشتق تابع برابر صفر باشد، آن نقاط نیز جزء نقاط بحرانی‌اند، لذا:

$$f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^{۲}}}=۰\Rightarrow -۲x=۰\Rightarrow x=۰$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتند از: $x=۰$ ، $x=+۲$ و $x=-۲$

پاسخ تشریحی:

ابتدا دامنه تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۳}{\sqrt{-x-۲}}$$

$$-x-۲>۰\Rightarrow x<-۲\Rightarrow D_f=(-\infty,-۲) \qquad (۰/۲۵)$$

حال نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f'(x)=\frac{۲x\sqrt{-x-۲}+\frac{x^{۲}+۳}{۲\sqrt{-x-۲}}}{-x-۲} \qquad (۰/۲۵)$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$f'(x)=\frac{۴x(-x-۲)+x^۲+۳}{۲(-x-۲)\sqrt{-x-۲}}=\frac{-۳x^۲-۸x+۳}{۲(-x-۲)\sqrt{-x-۲}}=۰$$

$$-۳x^۲-۸x+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ & \text{ق ق} \quad (۰/۲۵) \\ x=+\frac{۱}{۳} & \text{غ ق ق} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

ریشه مخرج: $-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۲$ غ ق ق

بنابراین تابع $f(x)$ فقط یک نقطه بحرانی در $x=-۳$ دارد.

۴ — **۱/۲۵**

نکته:

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی یک **تابع پیوسته** به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) دامنه تابع را به‌دست می‌آوریم.

۲) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

۳) جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

۴) حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:

- اگر علامت f' در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.
- اگر علامت f' در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.
- اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهارنظر کرد.

توجه: هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترمم نسبی نیست.

مثال:

در تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲-۹x-۱۰$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$D_f=\mathbb{R}$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f، مشتق آن را به‌دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x)=۰$ را حل کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲+۶x-۹=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=-۳ \end{cases}$$

بنابراین $x=۱$ و $x=-۳$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-۳	۱	$+\infty$
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \longrightarrow \text{طول } max \text{ نسبی} \\ x=۱ \longrightarrow \text{طول } min \text{ نسبی} \end{cases}$$

$$f(x)=x^۳+۳x^۲-۹x-۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \to f(-۳)=۱۷ \Rightarrow A(-۳,۱۷) \to max \text{ نسبی} \\ x=۱ \to f(۱)=-۱۵ \Rightarrow B(۱,-۱۵) \to min \text{ نسبی} \end{cases}$$

نکته:

با فرض این‌که تابع $y=f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه (a,b)، نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این‌صورت:

$$\left.\begin{matrix} f'(a)=۰ \\ f(a)=b \end{matrix}\right\}$$

مثال:

اگر نقطه $(۲,۱)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید.

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

چون نقطه $(۲,۱)$، نقطه اکسترمم نسبی تابع f است پس اولاً $f(۲)=۱$ و ثانیاً $f'(۲)=۰$ است:

$$f(۲)=۱ \Rightarrow ۸+۴b+d=۱ \Rightarrow ۴b+d=-۷$$

$$f'(۲)=۰ \longrightarrow f'(x)=۳x^۲+۲bx \xrightarrow{f'(۲)=۰} ۱۲+۴b=۰ \Rightarrow b=-۳ \xrightarrow{۴b+d=-۷} d=۵$$

نکته:

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق تابع f به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

۲) مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی به‌دست می‌آوریم.

۳) از بین مقادیر به‌دست آمده در مرحله ۲، بیش‌ترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق و کم‌ترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع f معرفی می‌کنیم.

توجه: در بعضی از سؤالات، از روش رسم نمودار نیز می‌توان برای تعیین اکسترمم‌های تابع کمک گرفت.

مثال:

اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^۳-۳x+۷$ را در بازه $[-۱,۳]$ در صورت وجود تعیین کنید.

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[-۱,۳]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

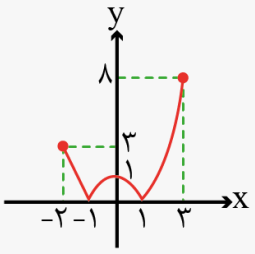
پس $x=۳$ و $x=-۱$ (نقاط ابتدا و انتهای بازه) و $x=۱$، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. حال باید مقدار تابع f را به ازای نقاط بحرانی به‌دست بیاوریم:

$$f(x)=x^۳-۳x+۷ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \longrightarrow f(۱)=۱-۳+۷=۵ \rightarrow \text{مطلق } \min \\ x=-۱ \longrightarrow f(-۱)=-۱+۳+۷=۹ \\ x=۳ \longrightarrow f(۳)=۲۷-۹+۷=۲۵ \rightarrow \text{مطلق } \max \end{cases}$$

مثال:

نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ را در بازه $[-۲,۳]$ رسم کرده و باتوجه به آن نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را تعیین کنید.

باتوجه به نمودار زیر:



نقطه $(-۱,۰)$: نقطه مینیمم مطلق / نقطه مینیمم نسبی

نقطه $(۰,۱)$: نقطه ماکزیمم نسبی

نقطه $(۱,۰)$: نقطه مینیمم مطلق / نقطه مینیمم نسبی

نقطه $(۳,۸)$: نقطه ماکزیمم مطلق

پاسخ تشریحی:

تابع f همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس از تابع مشتق گرفته و جدول تعیین علامت آن را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$$

$$f'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x(x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲} \quad (۰/۲۵)$$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱-x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$ (۰/۲۵)

x	-۱		۱	
f'	$-$	۰	$+$	۰ $-$
f	↘	$-\frac{۱}{۲}$ min	↗	$\frac{۱}{۲}$ max ↘

(تکمیل جدول ۰/۲۵)

با توجه به جدول، نقطهٔ $\left(-۱,-\frac{۱}{۲}\right)$ مینیمم نسبی و نقطهٔ $\left(۱,\frac{۱}{۲}\right)$ ماکزیمم نسبی تابع است.

مینیمم نسبی $\left(-۱,-\frac{۱}{۲}\right)$ (۰/۲۵)

ماکزیمم نسبی $\left(۱,\frac{۱}{۲}\right)$ (۰/۲۵)

۱۷ — **۱**

نکته:

برای حل مسائل بهینه‌سازی:

۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به‌دست می‌آوریم.

۲) رابطه به‌دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل کنیم.

۳) سپس از رابطه تک متغیره به‌دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به‌دست می‌آوریم.

٤) حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.

مثال:

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

۱) کمیتی که قرار است بهینه شود، حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی است یعنی قرار است $p=xy$ کم‌ترین باشد.

۲) باتوجه به مسئله می‌دانیم که تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است یعنی $y-x=۱۰$ است حال باید رابطه به‌دست آمده در مرحله قبل را تک‌متغیره کنیم:

$$\begin{cases} p=xy \\ y-x=۱۰ \rightarrow y=۱۰+x \end{cases} \Rightarrow p=x(۱۰+x)=x^۲+۱۰x$$

حال از رابطه تک‌متغیره $p=x^۲+۱۰x$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به‌دست می‌آوریم:

$$p'=۰ \Rightarrow ۲x+۱۰=۰ \Rightarrow x=-۵ \xrightarrow{y=۱۰+x} y=۵$$

مثال:

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن ۲۷π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

می‌خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کم‌ترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می‌دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه‌ای که قرار است بهینه شود برابر است با:

$$S=\underbrace{\pi r^۲}_{\text{سطح قاعده}}+\underbrace{۲\pi rh}_{\text{سطح جانبی}} \qquad (*)$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

از طرفی طبق اطلاعات مسئله می‌دانیم که حجم قوطی برابر ۲۷π مترمکعب است یعنی:

$$v = \pi r^۲ h = ۲۷\pi \Rightarrow r^۲ h = ۲۷$$

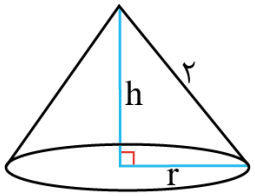
حال باید به کمک $r^۲ h = ۲۷$، رابطه (*) را به‌صورت تک‌متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم:

$$\begin{cases} S = \pi r^۲ + ۲\pi r h \\ r^۲ h = ۲۷ \Rightarrow h = \dfrac{۲۷}{r^۲} \end{cases} \Rightarrow S = \pi r^۲ + ۲\pi r\left(\frac{۲۷}{r^۲}\right) = \pi r^۲ + \frac{۵۴\pi}{r}$$

$$\Rightarrow S' = ۲\pi r - \frac{۵۴\pi}{r^۲} = ۰ \Rightarrow ۲\pi r^۳ = ۵۴\pi \Rightarrow r = ۳ \xrightarrow{h=\frac{۲۷}{r^۲}} h = ۳$$

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$۴ = h^۲ + r^۲ \Rightarrow r^۲ = ۴ - h^۲ \quad (۰/۲۵)$$

حجم مخروط برابر است با:

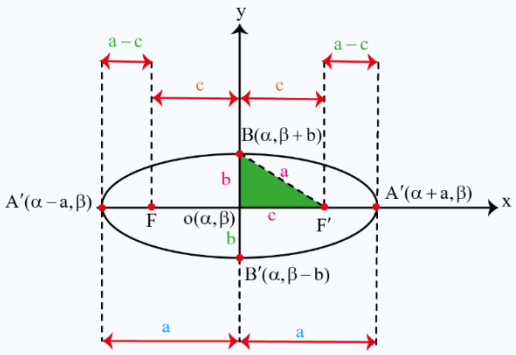
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi\left(۴ - h^۲\right)h = \frac{\pi}{۳}\left(۴h - h^۳\right) \quad (۰/۲۵) \quad , \quad ۰ < h < ۲$$

ماکزیمم مقدار تابع V، در نقطهٔ بحرانی آن رخ می‌دهد، پس مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V'(h) = \frac{\pi}{۳}\left(۴ - ۳h^۲\right) = ۰ \quad (۰/۲۵) \quad \Rightarrow h^۲ = \frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{۰<h<۲} h = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \quad (۰/۲۵)$$

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱۸	**نکته:**  $\begin{cases} OA = OA' = a \\ OB = OB' = b \\ OF = OF' = c \end{cases}$ $\begin{cases} \text{قطر بزرگ (قطر کانونی)} = AA' = ۲a \\ \text{قطر کوچک (قطر ناکانونی)} = BB' = ۲b \\ \text{فاصله کانونی} = FF' = ۲c \end{cases}$ $BF' = BF = B'F = B'F' = a$ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ (باتوجه به مثلث قائم‌الزاویه OBF') فاصله یک کانون تا دورترین رأس $= a + c$	۱

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$a-c=$ فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس

خروج از مرکز بیضی:

۱) مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهیم.

۲) همواره خروج از مرکز بیضی بین ۰ و ۱ است. $(0<e<1)$

۳) هرچه نسبت $e=\frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به عبارتی شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

٤) هرچه نسبت $e=\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد بود.

مثال:

اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$، در این‌صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.

$$\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}\Rightarrow a^2=b^2+c^2\Rightarrow 25=9+c^2\Rightarrow c^2=25-9=16\Rightarrow c=\sqrt{16}=4$$

می‌دانیم که فاصله کانونی برابر $2c$ است پس:

$$FF'=2c=8$$

مثال:

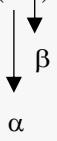
در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی بیضی را به‌دست آورید.

$$\begin{cases}\text{طول قطر بزرگ}=2a=8\Rightarrow a=4\\ \text{طول قطرکوچک}=2b=6\Rightarrow b=3\end{cases}$$

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 16=9+c^2\Rightarrow c^2=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

$$\text{فاصله کانونی}=FF'=2c=2\sqrt{7}$$

حال در این مثال اگر مرکز بیضی افقی با مختصات $(4,5)$ باشد مختصات دو سر قطر بزرگ و مختصات دو سر قطر کوچک را به‌دست آورید.



مختصات دو سر قطر بزرگ:
$$\begin{cases}A'(\alpha+a,\beta)=A'(4+4,5)=A'(8,5)\\A(\alpha-a,\beta)=A(4-4,5)=A(0,5)\end{cases}$$

مختصات دو سر قطر کوچک:
$$\begin{cases}B(\alpha,\beta+b)=B(4,5+3)=B(4,8)\\B'(\alpha,\beta-b)=B'(4,5-3)=B'(4,2)\end{cases}$$

مثال:

خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$، مرکز آن $(-1,-4)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. مطلوبست محاسبه:

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی

$$2b=6\longrightarrow b=3$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}\xrightarrow{c^2=a^2-b^2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{a^2-9}{a^2}=\frac{16}{25}\Rightarrow 16a^2=25a^2-225$$

$$\Rightarrow 9a^2=225\Rightarrow a^2=\frac{225}{9}=25\Rightarrow a=5\xrightarrow{e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}}\frac{c}{5}=\frac{4}{5}\Rightarrow c=4$$

$$\text{قطر بزرگ}=2a=10$$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

فاصله کانونی $= ۲c = ۸$

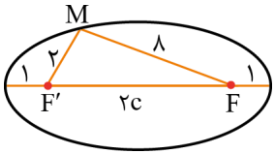
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ بیضی:

مختصات مرکز بیضی: $(-۴,-۱) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۴ \\ \beta = -۱ \end{cases}$

$A'(\alpha+a,\beta) = A'(-۴+۵,-۱) = A'(۱,-۱)$

$A(\alpha-a,\beta) = A(-۴-۵,-۱) = A(-۹,-۱)$

پاسخ تشریحی:



$MF + MF' = ۲a$

$۲+۸ = ۲a \Rightarrow a = ۵$

$۱+۲c+۱ = ۲a = ۱۰ \Rightarrow ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow b = ۳$

طول قطر بزرگ $= ۲a = ۲(۵) = ۱۰$ (۰/۲۵)

طول قطر کوچک $= ۲b = ۲(۳) = ۶$ (۰/۲۵)

فاصلهٔ کانونی $= ۲c = ۲(۴) = ۸$ (۰/۲۵)

محیط مثلث $FMF' = MF + MF' + ۲c = ۲a + ۲c = ۱۰ + ۸ = ۱۸$ (۰/۲۵)

۱۹ — **۱/۷۵**

نکته:

اگر $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز یک دایره و r شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$$

مثال:

اگر معادله دایره به‌صورت $(x+۱)^۲ + y^۲ = ۴$ باشد مطلوبست:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره:

$$(x+۱)^۲ + (y-۰)^۲ = (۲)^۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ \\ \beta = ۰ \\ r = ۲ \end{cases} \Rightarrow O(-۱,۰)$$

ب) مختصات نقاط تقاطع دایره با محور x ها و محور y ها:

برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور x ها، باید در معادله دایره، $y = ۰$ قرار دهیم که در این‌صورت:

$$(x+۱)^۲ + y^۲ = ۴ \xrightarrow{y=۰} (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۲ \rightarrow x = ۱ \\ x+۱ = -۲ \rightarrow x = -۳ \end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(-۳,۰)$ و $(۱,۰)$ محل تقاطع دایره با محور x ها هستند.

و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور y ها، باید در معادله دایره، $x = ۰$ را قرار بدهیم:

$$(x+۱)^۲ + y^۲ = ۴ \xrightarrow{x=۰} ۱ + y^۲ = ۴ \Rightarrow y^۲ = ۳ \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{۳} \\ y = -\sqrt{۳} \end{cases}$$

پس نقاط $(۰,\sqrt{۳})$ و $(۰,-\sqrt{۳})$، محل تقاطع دایره با محور y ها هستند.

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

نکته:

اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادله گسترده یک دایره باشد، داریم:

مختصات مرکز دایره: $O\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)$

شعاع دایره: $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

مثال:

معادله گسترده دایره‌ای به‌صورت $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

$$O\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)\Rightarrow O\left(-\frac{-۶}{۲},-\frac{۲}{۲}\right)\Rightarrow O(۳,-۱)$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+(۲)^۲-۴(۶)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۲۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=۲$$

در مثال فوق، معادله دایره را به‌صورت استاندارد بنویسید:

$$\begin{cases}O(۳,-۱)\\ r=۲\end{cases}\Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲\Rightarrow (x-۳)^۲+\big(y-(-۱)\big)^۲=۴\Rightarrow (x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

اوضاع نسبی خط و دایره:

برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم (OH)

حال باتوجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره، داریم:

خط ℓ، داره را قطع نمیکند	خط ℓ، بر دایره مماس است	خط ℓ، با دایره متقاطع است
$OH>r$	$OH=r$	$OH<r$

یادآوری:

خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.

فاصله نقطه $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال:

وضعیت خط $x+y=۱$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۱=۰$ مشخص نمایید.

ابتدا مختصات مرکز دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$O\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)\Rightarrow O\left(-\frac{۲}{۲},-\frac{۲}{۲}\right)\Rightarrow O(-۱,-۱)$$

حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله $x+y-۱=۰$ به‌دست می‌آوریم:

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$OH=\frac{|(۱\times-۱)+(۱\times-۱)-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|-۳|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\Rightarrow OH=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\sim ۲/۱$$

شعاع دایره را به‌دست آورده و آن را با اندازه OH مقایسه می‌کنیم:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-(-۴)}=\frac{\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\sim ۱/۷$$

چون $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}>\sqrt{۳}$ است پس $OH>r$ است در نتیجه خط $x+y=۱$ دایره را قطع نمی‌کند.

مثال:

معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۰,۳)$ و بر خط $۳x-۴y=۳$ مماس باشد.

برای نوشتن معادله یک دایره به دو چیز نیاز داریم: ۱) مختصات مرکز دایره ۲) شعاع دایره

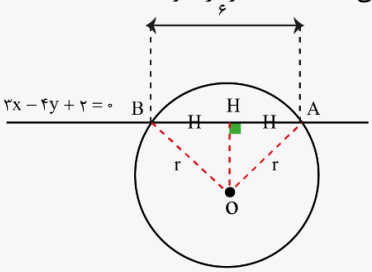
می‌دانیم که خط به معادله $۳x-۴y-۳=۰$ بر دایره مماس است در نتیجه فاصله مرکز دایره تا این خط برابر شعاع دایره است پس:

$$\text{شعاع دایره}=r=OH=\frac{|(۳\times۰)-(۴\times۳)-۳|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{|-۱۵|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\begin{cases}O(۰,۳)\\ r=۳\end{cases}\Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲\Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۳)^۲=۳^۲\Rightarrow x^۲+(y-۳)^۲=۹$$

مثال:

مرکز دایره‌ای، نقطه $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.



ابتدا شکلی رسم کرده و اطلاعات مسئله را روی آن پیاده می‌کنیم:

حال فاصله مرکز دایره را از خط $۳x-۴y+۲=۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}O(۲,-۳)\\ ۳x-۴y+۲=۰\end{cases}\Rightarrow OH=\frac{|(۳\times۲)-(۴\times-۳)+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

می‌دانیم که دو مثلث OHA و OHB، هم‌نهشت هستند پس $AH=BH=\frac{AB}{۲}=۳$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OHA داریم:

$$(OA)^۲=(OH)^۲+(AH)^۲\Rightarrow OA=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۲۵}=۵\Rightarrow OA=r=۵$$

در نتیجه معادله دایره موردنظر برابر است با:

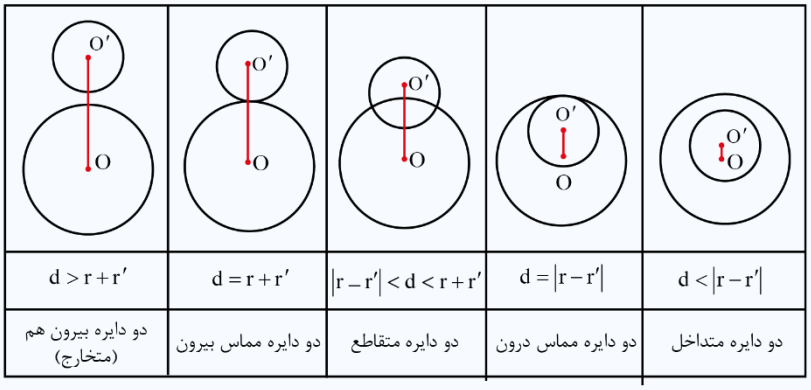
$$\begin{cases}O(۲,-۳)\\ r=۵\end{cases}\Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲\Rightarrow (x-۲)^۲+(y-(-۳))^۲=۵^۲\Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۲۵$$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

اوضاع نسبی دو دایره:

دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را در نظر بگیرید؛ اگر اندازه پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند (خط‌المرکزین) برابر d باشد، داریم:



$d > r + r'$	$d = r + r'$	$\lvert r - r' \rvert < d < r + r'$	$d = \lvert r - r' \rvert$	$d < \lvert r - r' \rvert$
دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل

توجه شود که اگر $d = ۰$ باشد دو دایره هم‌مرکز خواهند بود.

برای تشخیص وضعیت دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$؛ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به‌دست می‌آوریم.

۲) سپس طول خط‌المرکزین دو دایره $d = \lvert OO' \rvert$ را نیز به‌دست می‌آوریم.

۳) در نهایت $(r + r')$ و $\lvert r - r' \rvert$ را نیز محاسبه کرده و آن‌ها را با اندازه $d = \lvert OO' \rvert$ مقایسه می‌کنیم.

مثال:

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,-۱)$ و با دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ مماس درون باشد.

برای نوشتن معادله یک دایره به دو پارامتر احتیاج داریم: ۱) مختصات مرکز دایره و ۲) شعاع دایره

از طرفی می‌دانیم که اگر دو دایره مماس درون باشند $d = \lvert r - r' \rvert$ است پس:

$$C' : x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O' = \left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) \Rightarrow O(۲,۳) \\ r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ - ۴(-۳)} = \frac{\sqrt{۶۴}}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴ \end{cases}$$

حال فاصله خط‌المرکزین دو دایره را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} O(-۱,-۱) \\ O'(۲,۳) \end{cases} \qquad d = OO' = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (-۱-۳)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

باید $d = \lvert r - r' \rvert$ باشد، پس:

$$۵ = \lvert r - ۴ \rvert \Rightarrow \begin{cases} r - ۴ = ۵ \rightarrow r = ۹ \quad ✓ \\ r - ۴ = -۵ \rightarrow r = -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره موردنظر برابر $r = ۹$ و مرکز آن $O(-۱,-۱)$ است:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲ \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۸۱$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

پاسخ تشریحی:

$$C: x^2+y^2-8x-12y+43=0$$

$$\begin{cases} O\left(-\frac{-8}{2},-\frac{-12}{2}\right)=(4,6) & (0/25) \\ R=\frac{1}{2}\sqrt{64+144-172}=3 & (0/25) \end{cases}$$

$$C': x^2+y^2-2x-4y+a=0$$

$$\begin{cases} O'\left(-\frac{-2}{2},-\frac{-4}{2}\right)=(1,2) & (0/25) \\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4a}=\sqrt{5-a} & (0/25) \end{cases}$$

برای دو دایرهٔ C و C' دو حالت مماس امکان‌پذیر است:

۱) C و C' مماس خارج باشند:

$$OO'=R+R' \Rightarrow OO'=5=3+\sqrt{5-a} \Rightarrow \sqrt{5-a}=2 \Rightarrow a=1 \qquad (0/25)$$

۲) C و C' مماس داخل باشند:

$$OO'=|R-R'|$$

$$5=|3-\sqrt{5-a}| \Rightarrow 3-\sqrt{5-a}=5 \Rightarrow \sqrt{5-a}=-2 \text{ غیرممکن} \qquad (0/25)$$

$$3-\sqrt{5-a}=-5 \Rightarrow \sqrt{5-a}=8 \Rightarrow 5-a=64 \Rightarrow a=-59 \qquad (0/25)$$

۲۰	**پاسخ تشریحی:**	۲

الف)

A_1: فرزند به دنیا آمده پسر باشه

A_2: فرزند به دنیا آمده دختر باشه

B: فرزند به دنیا آمده مبتلا به کم‌خونی نباشه

با توجه به قانون احتمال کل داریم:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2) \quad (0/5)$$

$$=\frac{1}{2}(1-0/2)+\frac{1}{2}(1-0/3)=0/4+0/35=0/75 \quad (0/5)$$

ب)

C: ابتلای نوزاد به دنیا آمده به کم‌خونی $\Rightarrow C=B'$

$$P(C)=1-P(B)=1-0/75=0/25 \quad (0/25)$$

$$P(C|A_1)=\frac{P(A_1\cap C)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1\cap C)=P(A_1)P(C|A_1) \qquad (0/25)$$

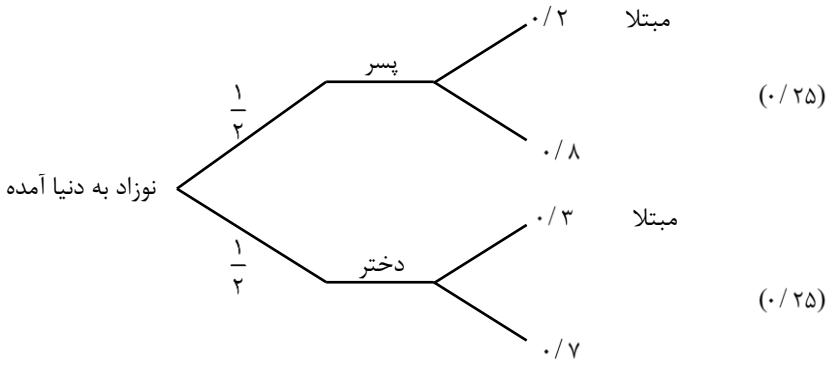
$$P(A_1|C)=\frac{P(A_1\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(C)} \quad (0/25)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(0/2)}{0/25}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}=0/4 \qquad (0/25)$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
	توجه: روش درختی هم صحیح است.	
	روش دوم:	



(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

الف)

$$P(B)=\frac{۱}{۲}(۰/۸)+\frac{۱}{۲}(۰/۷)=۰/۴+۰/۳۵=۰/۷۵ \quad (۰/۵)$$

ب)

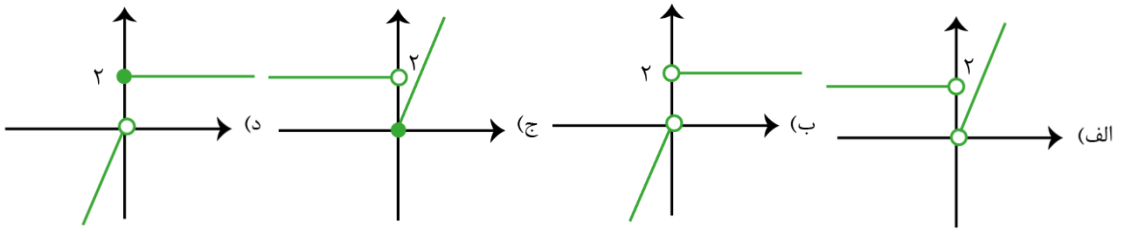
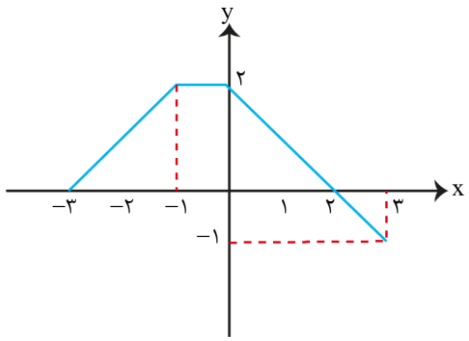
$$P(C)=\underbrace{\frac{۱}{۲}(۰/۲)}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{\frac{۱}{۲}(۰/۳)}_{(۰/۲۵)}=۰/۲۵$$

$$P(A_۱\mid C)=\frac{\frac{۱}{۲}(۰/۲)}{۰/۲۵}=\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۲}{۵}=۰/۴ \quad (۰/۵)$$

	موفق باشید	۲۰

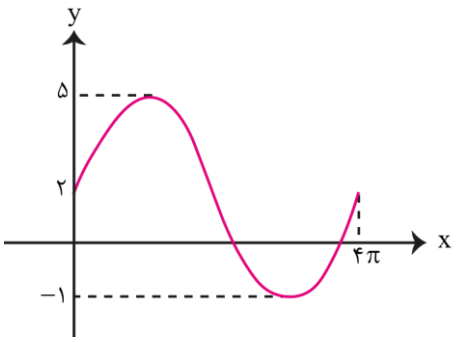
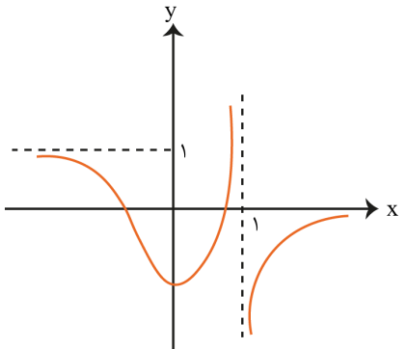
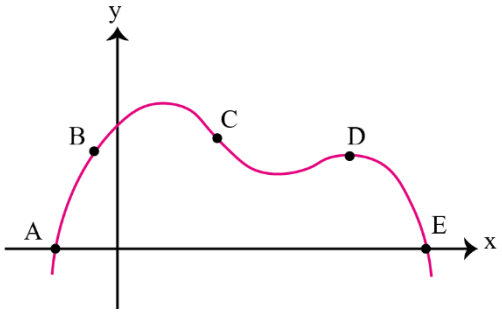
www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) چندجمله‌ای $p(x)=(۲-x)^۲(x+۱)^۳$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است. ب) چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دوجمله‌ای $(x+۲)$ بخش‌پذیر است.	۰/۵
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) نمودار تابع $f(x)=x^۳$ در بازه $(۰,۱)$، ..... از نمودار تابع $g(x)=x^۲$ قرار دارد. ب) اگر $\left(\frac{۱}{۲۷}\right)\leq\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲x+۱}$ باشد، حدود x برابر ..... است. ج) دو پیشامد A و B را ..... گوییم هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد.	۰/۷۵
۳	سؤالات چهارگزینه‌ای: I. اگر $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x+\lvert x\rvert$ باشد، حاصل $(g^{-۱}of^{-۱})(۱۵)$ کدام است؟ الف) ۳ ب) ۴/۵ ج) ۹ د) ۶ II. اگر $f(x)=۲x+۳\lvert x-۱\rvert$ و $g(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ باشد، دامنه تابع $y=(gof)(x)$ کدام است؟ الف) $\{۱\}$ ب) $[۱,۳]$ ج) $\left[\frac{۳}{۵},۳\right]$ د) $\left[\frac{۳}{۵},۱\right]$ III. اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ ۲x+۱ & x<۰\end{cases}$ باشد، نمودار تابع f' کدام است؟  	۱/۵
۴	نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}f(۳x)$ را رسم کنید.  	۰/۵
۵	ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$ را به‌دست آورید.	۰/۷۵

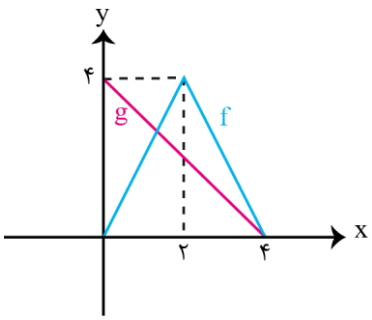
www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	سوالات	نمره
۶	نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y=a\sin bx+c$ است. مقادیر a، b و c را محاسبه کرده و ضابطه آن را مشخص کنید. 	۱/۵
۷	معادله مثلثاتی $\cos 2x-\cos x+1=0$ را حل کنید.	۱/۵
۸	نمودار تابع f به‌صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.  الف) $\lim\limits_{x\to(1)^+} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} (fof)(x)=$	۰/۷۵
۹	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{\lvert 2x-1\rvert}$ ب) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$	۱
۱۰	از بین نقاط مشخص شده A، B، C، D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه: الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟ ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟ 	۰/۵
۱۱	مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x)=\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$ ب) $g(x)=\left(3x^2-4\right)(2x-5)^3$	۱

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	سوالات	نمره
۱۲	اگر $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ x^2+3x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.	۱
۱۳	نمودار تابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x)=\frac{x+f(x)}{x-g(x)}$ باشد، $h'(3)$ را بیابید. 	۱
۱۴	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1\leq t\leq 4$ چقدر است؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=4$ چقدر است؟	۱
۱۵	تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ را در نظر بگیرید: الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[0,3]$ را در صورت وجود به‌دست آورید.	۲
۱۶	می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن 27π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟	۱
۱۷	کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است. الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب) اگر $a=6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.	۱/۲۵
۱۸	وضعیت دو دایره به معادلات $(y-2)^2+(x+1)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۲۵
۱۹	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی این مهره سبز است؟	۱/۲۵
	موفق باشید	۲۰

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱	**پاسخ تشریحی:** الف) درست (۰/۲۵) $p(x)=(۲-x)^{۲}(x+۱)^{۳} \Rightarrow p(x)=\underbrace{\underbrace{(۴-۴x+x^{۲})}_{\text{درجه ۲}}\underbrace{(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱)}_{\text{درجه ۳}}}_{\text{درجه ۵}}$ ب) درست (۰/۲۵) $x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \xrightarrow{f(-۲)} f(-۲)=۲(-۲)^{۳}+۵(-۲)^{۲}-۳(-۲)-۱۰=-۱۶+۲۰+۶-۱۰=۰$	۰/۵
۲	**پاسخ تشریحی:** الف) پایین‌تر (۰/۲۵) ب) $[۱,+\infty)$ (۰/۲۵) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲x+۱} \le \left(\frac{۱}{۲۷}\right) \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲x+۱} \le \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳}$ چون تابع $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}$، تابعی اکیداً نزولی است پس با برداشتن پایه‌ها از طرفین نامساوی فوق، جهت نامساوی عوض می‌شود: $۲x+۱ \ge ۳ \Rightarrow ۲x \ge ۲ \Rightarrow x \ge ۱$ ج) مستقل (۰/۲۵)	۰/۷۵
۳	**پاسخ تشریحی:** I. الف (۰/۵) f و g توابعی وارون‌پذیرند. در ابتدا فرض می‌کنیم: $(g^{-۱}of^{-۱})(۱۵)=\alpha \Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(۱۵))=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=f^{-۱}(۱۵)$ اما حالا فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۱۵)=\beta$ باشد، پس: $f^{-۱}(۱۵)=\beta \Rightarrow f(\beta)=۱۵$ $\beta+۲\sqrt{\beta}=۱۵ \Rightarrow \beta+۲\sqrt{\beta}-۱۵=۰ \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\beta}=۳ \ \checkmark \\ \sqrt{\beta}=-۵ \ \times\end{cases} \Rightarrow \beta=۹$ پس $f^{-۱}(۱۵)=۹$ پس طبق رابطه $g(\alpha)=f^{-۱}(۱۵)$ نتیجه می‌گیریم که $g(\alpha)=۹$ است، بنابراین: $۲\alpha+\lvert\alpha\rvert=۹ \Rightarrow \begin{cases}\alpha \ge ۰ \Rightarrow ۳\alpha=۹ \Rightarrow \alpha=۳ \ \checkmark \\ \alpha<۰ \Rightarrow \alpha=۹ \ \times \qquad (\alpha<۰)\end{cases}$ پس: $(g^{-۱}of^{-۱})(۱۵)=\alpha=۳$ II. الف (۰/۵) $D_{gof}=\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}: \begin{cases}D_f=\mathbb{R} \\ D_g=[۰,۲]\end{cases}$ $D_{gof}=\{x \in \mathbb{R} \mid ۲x+۳\lvert x-۱\rvert \in [۰,۲]\}$ $۰ \le ۲x+۳\lvert x-۱\rvert \le ۲ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge ۱: ۰ \le ۵x-۳ \le ۲ \Rightarrow \frac{۳}{۵} \le x \le ۱ \xrightarrow{x \ge ۱} x=۱ \\ x<۱: ۰ \le -x+۳ \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x-۳ \le ۰ \Rightarrow ۱ \le x \le ۳ \xrightarrow{x<۱} \varnothing \end{array}\right\} \xrightarrow{\cup} x=۱$	۱/۵

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

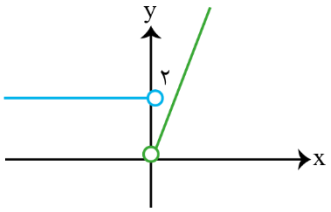
بنابراین: $D_{gof}=\{1\}$

III . الف (۰/۵)

ابتدا ضابطه f' را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ 2 & x<0\end{cases}$$

چون تابع f در $x=0$ پیوسته نیست بنابراین این تابع در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است لذا $x=0$ در دامنه تابع f' حضور ندارد و نمودار تابع f' به‌صورت زیر است:

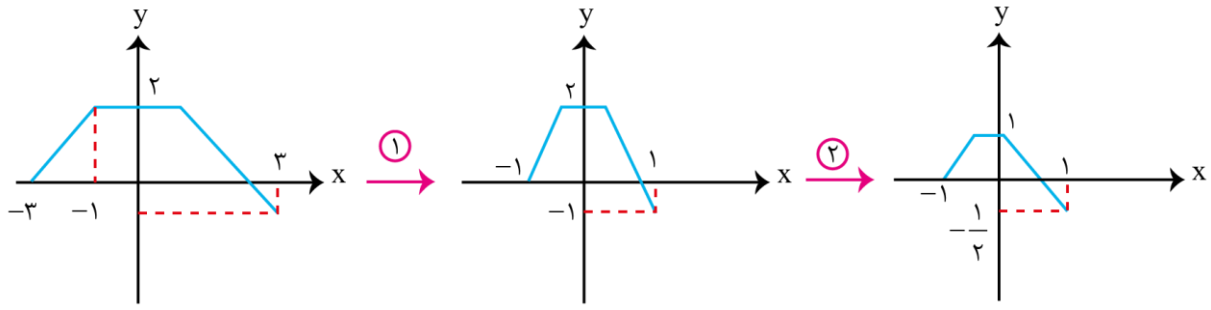


۴ — **۰/۵**

پاسخ تشریحی:

برای رسم نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{2}f(3x)$، ابتدا باید نمودار تابع f را با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای محور xها منقبض کرده و سپس نمودار حاصل را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور yها منقبض کنیم به عبارتی:

$$f(x)\xrightarrow[(1)]{\text{انقباض طولی }\frac{1}{3}\text{ برابر}}f(3x)\xrightarrow[(2)]{\text{انقباض عرضی }\frac{1}{2}\text{ برابر}}\frac{1}{2}f(3x)$$



(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۵ — **۰/۷۵**

پاسخ تشریحی:

$$y=-5-\sqrt{3x+1}\Rightarrow y+5=-\sqrt{3x+1}\Rightarrow \sqrt{3x+1}=-(y+5)\Rightarrow \underbrace{3x+1=(y+5)^2}_{(۰/۲۵)}$$

$$3x=(y+5)^2-1\Rightarrow x=\frac{(y+5)^2-1}{3}\quad (۰/۲۵)$$

حال x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم:

$$y=\frac{(x+5)^2-1}{3}\Rightarrow \underbrace{g^{-1}(x)=\frac{(x+5)^2-1}{3}}_{(۰/۲۵)}$$

توجه شود که دامنه g^{-1} همان برد تابع f است یعنی $D_{g^{-1}}=(-\infty,-5]$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

۶ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} \text{دوره تناوب} = 4\pi \\ \text{بیشترین مقدار} = 5 \\ \text{کمترین مقدار} = -1 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2} \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 5 \\ \min = -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -1 \end{cases}}_{\text{۰/۵ نمره}} \xrightarrow{(+)} 2c = 4 \Rightarrow \underbrace{c = 2}_{\text{۰/۲۵ نمره}} \xrightarrow{|a|+c=5} |a| = 3 \Rightarrow \underbrace{a = \pm 3}_{\text{۰/۲۵ نمره}}$$

$$\begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm\frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{y = \pm 3\sin\left(\pm\frac{1}{2}x\right) + 2}_{\text{۰/۲۵ نمره}} \Rightarrow \begin{cases} y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 2 \\ y = -3\sin\left(-\frac{1}{2}x\right) + 2 \\ y = 3\sin\left(-\frac{1}{2}x\right) + 2 \\ y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 2 \end{cases}$$

راستی! طبق نمودار تابع $y = a\sin bx + c$ که سؤال داده، چون $f(0) = 2$ هست پس از همون‌جا می‌تونستیم بگیم که $c = 2$ میشه. ولی توی امتحان سعی کن که راه‌حل کامل و تشریحی رو بنویسی.

۷ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ است پس:

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \left(2\cos^2 x - 1\right) - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos x\left(2\cos x - 1\right) = 0}_{(0/5)} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} & (0/5) \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} & (0/5) \end{cases}$$

۸ — نمره: ۰/۷۵

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x \to (1)^+} f(x) = -\infty \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad (0/25)$$

برای محاسبه $\lim_{x \to -\infty} (fof)(x)$ ، یا همان $\lim_{x \to -\infty} f(f(x))$ ، از تابع درونی شروع می‌کنیم. به عبارت دیگر ابتدا باید $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ را به‌دست بیاوریم که می‌شود:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$$

سپس باید حد تابع بیرونی را زمانی که $x \to 1^-$ میل می‌کند به‌دست بیاوریم:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

www.biomaze.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
	پس: $\lim\limits_{x\to-\infty}(fof)(x)=+\infty$ (۰/۲۵)	
۹	**پاسخ تشریحی:**	۱

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^-}\dfrac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=\dfrac{\left[\frac{۱}{۲}\right]-۳}{\left|۲\left(\frac{۱}{۲}\right)-۱\right|}=\dfrac{۰-۳}{۰^+}=\dfrac{-۳}{۰^+}=-\infty$ (۰/۲۵)

ب) $\lim\limits_{x\to-۱}\dfrac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}=\dfrac{۰}{۰}$

$\lim\limits_{x\to-۱}\dfrac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}\times\dfrac{x-\sqrt{۲x+۳}}{x-\sqrt{۲x+۳}}=\lim\limits_{x\to-۱}\dfrac{(x^۲-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-(۲x+۳)}$ (۰/۲۵)

$=\lim\limits_{x\to-۱}\dfrac{(x^۲-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-۲x-۳}=\lim\limits_{x\to-۱}\dfrac{(x-۱)\cancel{(x+۱)}(x-\sqrt{۲x+۳})}{\cancel{(x+۱)}(x-۳)}$ (۰/۲۵)

$=\lim\limits_{x\to-۱}\dfrac{(x-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x-۳}=\dfrac{(-۲)(-۲)}{-۴}=\dfrac{۴}{-۴}=-۱$ (۰/۲۵)

۱۰	**پاسخ تشریحی:**	۰/۵

الف) A (۰/۲۵)

ب) C (۰/۲۵)

باتوجه به نمودار داده شده مشخص است که مقدار تابع در نقاط A و E برابر صفر است و مقدار تابع در نقاط B، C و D مثبت است یعنی:

$$\begin{cases}f(A)=f(E)=۰\\ f(B),f(C),f(D)>۰\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه با مشتق تابع در آن نقطه برابر است، پس:

$$\begin{cases}f'(B)>۰\\ f'(C)<۰\\ f'(D)=۰\end{cases}$$

۱۱	**پاسخ تشریحی:**	۱

الف) $f(x)=\sqrt{\dfrac{۹x-۲}{x+۱}}\longrightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{۹(x+۱)-۱(۹x-۲)}{(x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $g(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳\to\underbrace{(۶x)(۲x-۵)^۳}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{(۳)(۲)(۲x-۵)^۲(۳x^۲-۴)}_{(۰/۲۵)}$

۱۲	**پاسخ تشریحی:**	۱

ابتدا باید تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد:

www.biomaze.ir

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+3x+1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} ax+1=1 \end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ پیوسته است. (۰/۲۵)

حال باید مشتق چپ و راست تابع f در $x=0$ باهم برابر باشند:

$$\begin{cases} f'_+(x)=2x+3 \longrightarrow f'_+(0)=3 & (0/25) \\ f'_-(x)=a \longrightarrow f'_-(0)=a & (0/25) \end{cases} \Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0) \Rightarrow a=3 \quad (0/25)$$

۱۳ — **۱**

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه توابع f و g را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 2 \\ -2x+8 & 2\le x\le 4 \end{cases} \qquad g(x)=-x+4$$

حال از ضابطه تابع h مشتق گرفته و $x=3$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$h(x)=\frac{x+f(x)}{x-g(x)}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{\big(1+f'(x)\big)\big(x-g(x)\big)-\big(1-g'(x)\big)\big(x+f(x)\big)}{\big(x-g(x)\big)^2}$$

$$\xrightarrow{x=3} h'(3)=\frac{\big(1+f'(3)\big)\big(3-g(3)\big)-\big(1-g'(3)\big)\big(3+f(3)\big)}{\big(3-g(3)\big)^2} \qquad (*) \quad (0/25)$$

$$g(x)=-x+4 \xrightarrow{g'} g'(x)=-1 \Rightarrow \begin{cases} g(3)=1 \\ g'(3)=-1 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 2 \\ -2x+8 & 2\le x\le 4 \end{cases} \xrightarrow{f'} f'(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x<2 \\ -2 & 2<x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(3)=-2 \\ f(3)=2 \end{cases} \quad (0/25)$$

مقادیر به‌دست آمده را در رابطه (*) جایگذاری کرده و حاصل خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$h'(3)=\frac{\big(1+(-2)\big)\big(3-1\big)-\big(1-(-1)\big)\big(3+2\big)}{\big(3-1\big)^2}=\frac{-2-10}{4}=\frac{-12}{4}=-3 \quad (0/25)$$

۱۴ — **۱**

پاسخ تشریحی:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط جرم توده باکتری}=\frac{\overbrace{f(4)-f(1)}^{(0/25)}}{4-1}=\frac{130-3}{4-1}=\frac{127}{3} \quad (0/25)$$

$$\text{آهنگ رشد جرم توده باکتری در } t=4 = f'(t)=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{(0/25)}+6t^2 \xrightarrow{t=4} f'(4)=\frac{1}{4}+96 \quad (0/25)$$

۱۵ — **۲**

پاسخ تشریحی:

الف)

$$D_f=\mathbb{R}$$

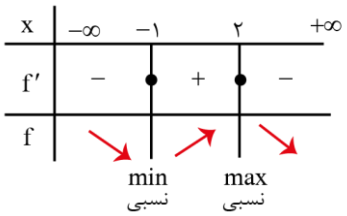
حال نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم که برای این کار باید معادله $f'(x)=0$ را حل کنیم:

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ \xrightarrow[a+c=b]{f'(x)=۰} \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

حال جدول تغییرات را رسم کرده و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:



$$\begin{cases} x = -۱ \rightarrow \text{نسبی } min \text{ طول} \\ x = ۲ \rightarrow \text{نسبی } max \text{ طول} \end{cases}$$

(تکمیل جدول ۰/۵ نمره)

$$f(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \rightarrow f(-۱) = -۱۶ \Rightarrow A(-۱,-۱۶) \rightarrow \text{نسبی } min \\ x = ۲ \rightarrow f(۲) = ۱۱ \Rightarrow B(۲,۱۱) \rightarrow \text{نسبی } max \end{cases} \quad (۰/۵)$$

ب) می‌دانیم که $x = -۱$ و $x = ۲$ (ریشه‌های مشتق)، $x = ۳$ و $x = ۰$ (نقاط ابتدا و انتهای بازه)، نقاط بحرانی‌اند. حال باید مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی به‌دست بیاوریم. فقط باید دقت کنیم که سؤال مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق را در بازه $[۰,۳]$ پرسیده است. بنابراین $x = -۱$ را از بازی خارج می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(۲) = ۱۱ \longrightarrow \text{مطلق Max} & (۰/۲۵) \\ f(۰) = -۹ \longrightarrow \text{مطلق Min} & (۰/۲۵) \\ f(۳) = ۰ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

۱۶ — **پاسخ تشریحی:** — **۱**

می‌خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کم‌ترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می‌دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه‌ای که قرار است بهینه شود برابر است با:

$$S = \underbrace{\pi r^۲}_{\text{سطح قاعده}} + \underbrace{۲\pi rh}_{\text{سطح جانبی}} \quad (*) \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی طبق اطلاعات مسئله می‌دانیم که حجم قوطی برابر ۲۷π مترمکعب است یعنی:

$$v = \pi r^۲ h = ۲۷\pi \Rightarrow r^۲ h = ۲۷$$

حال باید به کمک $r^۲h = ۲۷$، رابطه (*) را به‌صورت تک‌متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم:

$$\begin{cases} S = \pi r^۲ + ۲\pi rh \\ r^۲ h = ۲۷ \rightarrow h = \dfrac{۲۷}{r^۲} \end{cases} \Rightarrow S = \pi r^۲ + ۲\pi r\left(\frac{۲۷}{r^۲}\right) = \pi r^۲ + \frac{۵۴\pi}{r} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow S' = ۲\pi r - \frac{۵۴\pi}{r^۲} = ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ۲\pi r^۳ = ۵۴\pi \Rightarrow r = ۳ \xrightarrow{h=\frac{۲۷}{r^۲}} h = ۳ \quad (۰/۲۵)$$

۱۷ — **پاسخ تشریحی:** — **۱/۲۵**

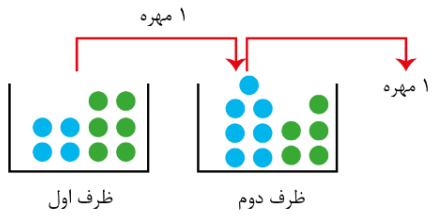
الف) می‌دانیم که مرکز بیضی وسط دو کانون بیضی قرار دارد بنابراین مختصات آن برابر است با:

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_F + x_{F'}}{۲} = \dfrac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ y_O = \dfrac{y_F + y_{F'}}{۲} = \dfrac{-۵+۳}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow O(۱,-۱) \quad (۰/۲۵)$$

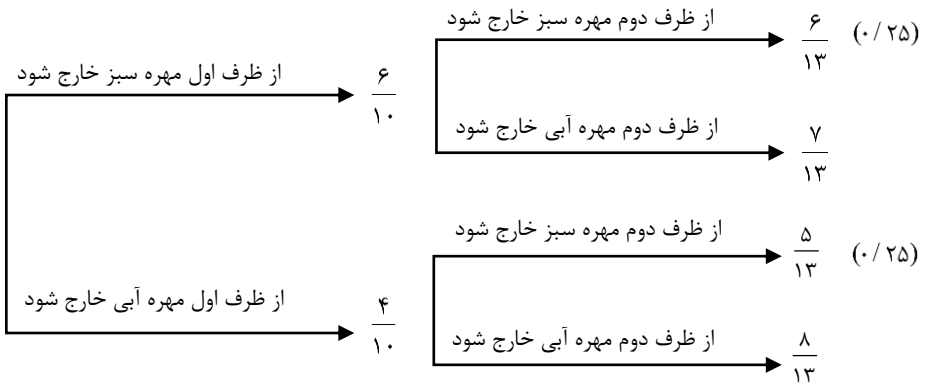
از طرفی چون بیضی قائم است، فاصله کانونی برابر فاصله عرض دو کانون است یعنی:

$$FF' = |۳ - (-۵)| = ۸ \quad (۰/۲۵)$$

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
	ب) می‌دانیم که فاصله کانونی برابر ۸ است، پس: $\begin{cases} ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴ \\ a = ۶ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۳۶ = b^۲ + ۱۶ \Rightarrow b^۲ = ۲۰ \Rightarrow b = ۲\sqrt{۵}$ (۰/۲۵) بنابراین اندازه قطر کوچک بیضی برابر است با: $\text{قطر کوچک} = ۲b = ۲\left(۲\sqrt{۵}\right) = ۴\sqrt{۵}$ (۰/۲۵) و خروج از مرکز بیضی نیز برابر است با: $e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$ (۰/۲۵)	
۱۸	**پاسخ تشریحی:** ابتدا مختصات مرکز و نیز اندازه شعاع هردو دایره را به‌دست می‌آوریم: $(x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} O(-۱, ۲) \\ r = ۱ \end{cases}$ (۰/۲۵) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O'\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = O(۱, -۲) \\ r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۴^۲ - ۴(۱)} = \frac{\sqrt{۱۶}}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \end{cases}$ (۰/۲۵) سپس طول خط‌المرکزین دو دایره را نیز به‌دست می‌آوریم: $d = \lvert OO' \rvert = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۲-(-۲))^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$ (۰/۲۵) در نهایت مقادیر $(r+r')$ و $\lvert r-r' \rvert$ را محاسبه کرده و آن‌ها را با اندازه d مقایسه می‌کنیم. $\begin{cases} r + r' = ۱ + ۲ = ۳ \\ \lvert r - r' \rvert = \lvert ۱ - ۲ \rvert = \lvert -۱ \rvert = ۱ \end{cases}$ (۰/۲۵) همان‌طور که می‌بینید، $d > r + r'$ است. بنابراین دو دایره بیرون هم (متخارج) هستند. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۹	**پاسخ تشریحی:**  روش اول: $P(A) = P(B_۱)P(A \mid B_۱) + P(B_۲)P(A \mid B_۲)$ (۰/۵) $P(A) = \underbrace{\left(\frac{۶}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۳}\right)}_{۰/۲۵} + \underbrace{\left(\frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۳}\right)}_{۰/۲۵} = \frac{۵۶}{۱۳۰}$ ۰/۲۵	۱/۲۵

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	پاسخنامه	نمره
	روش دوم:  $P(\text{مطلوب}) = \underbrace{\left(\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}\right)}_{۰/۲۵} + \underbrace{\left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۳}\right)}_{۰/۲۵} = \underbrace{\frac{۵۶}{۱۳۰}}_{۰/۲۵}$	
	موفق باشید	۲۰

www.biomaze.ir
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir