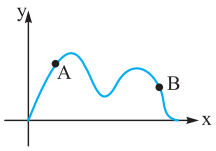
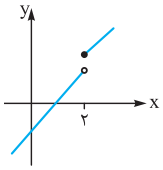
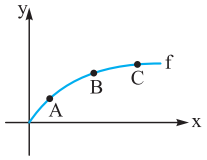
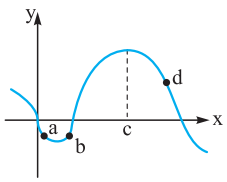
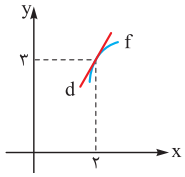
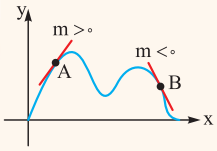
آزمون ۷	ریاضی (۳)	پایهٔ دوازدهم ـ رشته: علوم تجربی	خیلی سبز!
	◀ فصل ۴: مشتق (آزمون جامع ۱) ▶	مـدت آزمـون: ۶۰ دقیقه	

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) در شکل روبه‌رو مشتق تابع در نقاط A و B یک عدد مثبت است.  ب) اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد، می‌توان گفت تابع f قطعاً در $x=a$ مشتق‌پذیر است. پ) نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع در بازهٔ $[2,+\infty)$ مشتق‌پذیر است. 	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $h(x)=3x^4+2x^2-1$، حاصل $h''(1)$ برابر ..... است. ب) در شکل روبه‌رو، مشتق تابع f در نقطهٔ ..... بزرگ‌تر از مشتق تابع f در نقطهٔ B است.  پ) مجموع شیب‌های نیم‌مماس‌های چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 1\\ 2x^2-x & x<1\end{cases}$ در نقطه به طول $x=1$ از تابع برابر با ..... می‌باشد.	۰/۷۵
۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده‌کردن الزامی نیست). الف) $f(x)=(2x^3+\sqrt[3]{x}-3)^5$ ب) $g(x)=\sqrt{2x}\left(\frac{3x^2+1}{x^2+5}\right)$	۲
۴	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c و d را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*  | x | $f'(x)$ | |---|---| | | $-\frac{1}{2}$ | | | ۰ | | | ۰/۳ | | | -2 |	۱
۵	اگر $f(x)=x^2-2x+3$ باشد، $f'(3)$ را به دست آورید و معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن بنویسید.	۱
۶	معادلهٔ حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازهٔ زمانی $[0,5]$ داده شده است: الف) در کدام لحظه در این بازه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط برابرند؟ ب) لحظه‌ای را مشخص کنید که سرعت جسم برابر ۱۷ m/s باشد.	۱/۲۵
۷	اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آن‌گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	۱
۸	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 0\\ x & x>0\end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۹	با توجه به شکل اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5f(x)-15}{x-2}=10$ باشد، معادلهٔ خط d را به دست آورید. 	۱
	موفق باشید	جمع نمرات ۱۰

آزمون ۷ (فصل چهارم: جامع ۱)

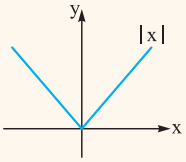
۱ الف) نادرست (۰/۲۵)

می‌دانیم که مشتق تابع در یک نقطه برابر شیب خط مماس در آن نقطه است.



ب) نادرست (۰/۲۵)

به عنوان مثال تابع $f(x)=|x|$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است، اما $x=0$ یک نقطهٔ گوشه‌ای است و تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.



پ) درست (۰/۲۵) با توجه به نمودار اولاً تابع در بازهٔ $(2,+\infty)$ مشتق‌پذیر است، ثانیاً در نقطهٔ $x=2$ پیوستگی راست و مشتق راست دارد.

۲ الف) ۴۰ (۰/۲۵)

$$h(x)=3x^4+2x^2-1 \Rightarrow h'(x)=12x^3+4x$$
$$\xrightarrow{\text{مشتق}} h''(x)=36x^2+4 \Rightarrow h''(1)=36(1)^2+4=40$$

ب) A (۰/۲۵) شیب مماس در A بزرگ‌تر از شیب مماس در B است پس می‌توان گفت: $f'(B)<f'(A)$.

پ) $\frac{7}{2}=3/5$ (۰/۲۵)

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & x>1 \Rightarrow f'_+(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\\ 4x-1 & x<1 \Rightarrow f'_-(1)=4(1)-1=3\end{cases}$$
$$\Rightarrow f'_+(1)+f'_-(1)=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}=3/5$$

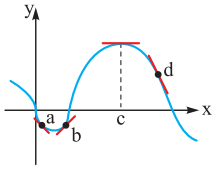
۳ الف) $f(x)=(2x^3+\sqrt[3]{x}-3)^5$

$$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{5}_{(0/25)}\underbrace{(2x^3+\sqrt[3]{x}-3)^4}_{(0/25)}\Big(\underbrace{6x^2}_{(0/25)}+\underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{(0/25)}\Big)$$

ب) $g(x)=\sqrt{2x}\left(\frac{3x^2+1}{x^2+5}\right)$

$$g'(x)=\underbrace{\frac{2}{2\sqrt{2x}}\left(\frac{3x^2+1}{x^2+5}\right)}_{(0/25)}+\sqrt{2x}\Big(\frac{\overbrace{(6x)(x^2+5)}^{(0/25)}-\overbrace{(2x)(3x^2+1)}^{(0/25)}}{\underbrace{(x^2+5)^2}_{(0/25)}}\Big)$$

۴



$a \to -\frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $\quad c \to 0$ (۰/۲۵)

$b \to 0/3$ (۰/۲۵) $\quad d \to -2$ (۰/۲۵)

۵ شیب خط مماس: $f'(3)=4$ (۰/۲۵)

$f'(x)=2x-2 \Rightarrow$

$f(3)=(3)^2-2(3)+3=6$ (۰/۲۵)

روش ۱: $y=m(x-a)+b \Rightarrow y=4(x-3)+6$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y=4x-6$ (۰/۲۵)

روش ۲: $y=mx+h \xrightarrow[y=6]{m=4} 6=4(3)+h$

$\Rightarrow h=-6$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{y=4x-6}_{(0/25)}$

۶ الف) سرعت متوسط در بازهٔ $[0,5]$ برابر است با:

$$\underbrace{\frac{f(5)-f(0)}{5-0}}_{(0/25)}=\frac{((5)^2-(5)+10)-(0-0+10)}{5}=4\ m/s \quad (0/25)$$

سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ t برابر $f'(t)$ است: $f'(t)=2t-1$ (۰/۲۵)

طبق فرض سرعت لحظه‌ای برابر با سرعت متوسط است:

$2t-1=4 \Rightarrow t=\frac{5}{2}\ s$ (۰/۲۵)

در نتیجه در لحظهٔ $t=\frac{5}{2}\ s$ سرعت لحظه‌ای برابر سرعت متوسط است.

ب) سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t\neq 0$ را برابر ۱۷ قرار می‌دهیم:

$$f'(t)=17 \Rightarrow f'(t)=2t-1 \Rightarrow 2t-1=17 \Rightarrow \underbrace{t=9\ s}_{(0/25)}$$

۷

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ (0/25)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$\xrightarrow[\text{مزدوج صورت ضرب می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج را در}} \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}}_{(0/25)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}}_{(0/25)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{(0/25)}$$

۸ ابتدا پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0\\ f(0)=(0)^2=0\end{array}\right\}\ (0/25)$$

تابع در $x=0$ پیوسته است (۰/۲۵). حال به بررسی مشتق می‌پردازیم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}x=0 \quad (0/25)$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}1=1 \quad (0/25)$$

بنابراین $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ یعنی تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵)

۹

$$\lim_{x\to 2}\frac{5(f(x)-f(2))}{x-2}=5f'(2)\ (0/25) \Rightarrow 5f'(2)=10$$
$$\Rightarrow \overbrace{f'(2)=2}^{(0/25)} \xrightarrow[(2,3)]{m=2} y-3=2(x-2)\ (0/25) \Rightarrow y=2x-1\ (0/25)$$