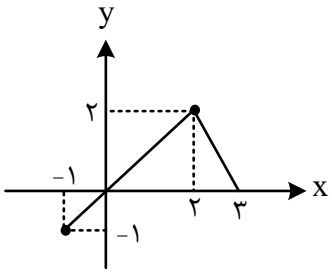
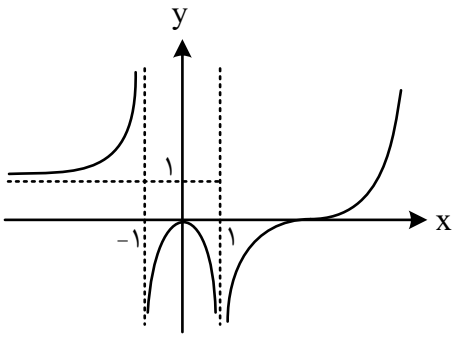
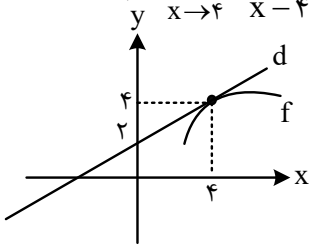
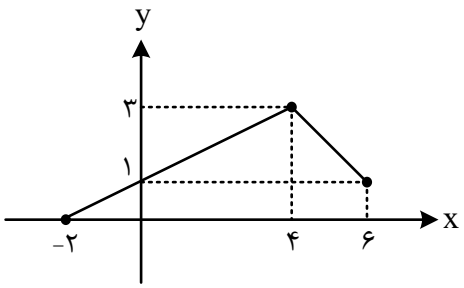
نام درس : ریاضی ۳ رشته: تجربی ساعت شروع: تاریخ آزمون:	**آزمون شبه نهایی پایه دوازدهم** **سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۶**	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه تعداد صفحه: ۳ تعداد سوال: ۱۸ بارم کل: ۲۰	**مدرسه آلفا**
نام و نام‌خانوادگی:		**شماره داوطلب:**	

ردیف	سوالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** الف) نمودار تابع $y = x^2$ در بازهٔ $(0,1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^3$ است. ب) بازه‌ای که تابع تانژانت در آن نزولی باشد، وجود ندارد. پ) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است. ت) دو پیشامد را مستقل گوییم هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تاثیر نداشته باشد.	۱
۲	**جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.** الف) نقطهٔ $A(-2,4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x)+1$ برابر ..... است. ب) برد تابع $y = \tan x$ برابر با ..... است. پ) اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه ..... $= f'(c)$ است. ت) اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را ..... می‌نامیم.	۱
۳	در شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. الف) نمودار تابع $g(x) = f(\frac{x}{2})+1$ را رسم کنید. ب) دامنه و برد تابع g را بیابید. 	۱
۴	اگر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$، آن‌گاه: الف) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید. ب) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱
۵	تابع $f(x) = x^2 - 2x$ با دامنهٔ $(-\infty,1]$ را در نظر بگیرید و ضابطهٔ وارون f را به دست آورید.	۱
۶	مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = a\cos(\frac{x}{2}) + 3$ برابر ۶ می‌باشد.مقدار $\lvert a\rvert$ و دوره تناوب را به دست آورید.	۱

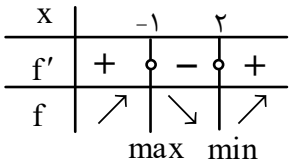
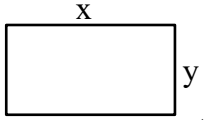
۷	معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x - \sin x = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.	۱/۵
۸	با توجه به نمودار تابع f، حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x\to ۱} f(x) =$ ب) $\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) =$ پ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ ت) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ 	۱
۹	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to ۴} \frac{۳-\sqrt{۵+x}}{x-۴}$ ب) $\lim_{x\to ۲^-} \frac{۲[-x]+۱}{\lvert x-۲\rvert}$ پ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(۳x^۲-۱)(x+۱)+۱}{x^۳+x^۲-۴}$	۱
۱۰	مطابق شکل، خط d در نقطه به طول $x=۴$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x\to ۴} \frac{f(x)-۴}{x-۴}$ را پیدا کنید. 	۱
۱۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۲$ ب) $g(x)=\frac{x^۳+۱}{\sqrt{۳x+۲}}$	۱
۱۲	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\lvert x^۲-۴\rvert$ را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنید.	۱
۱۳	تابع $f(x)=x^۳+x-۵$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازهٔ $[۰,۳]$ به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در چه نقطه‌ای از بازهٔ $[۰,۳]$ برابر ۱۳ است؟	۱/۵
۱۴	نقاط بحرانی تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۹$ را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.	۱/۵

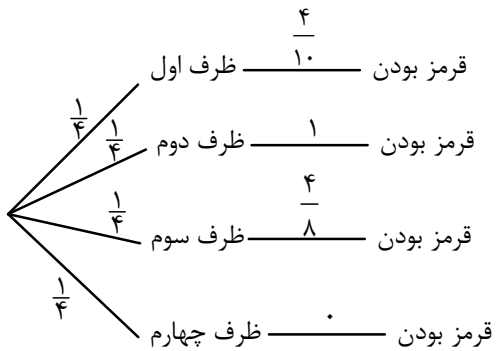
۱۵	طول مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۱۶ سانتی‌مترمربع و محیط آن کمترین مقدار شود.	۱
۱۶	خروج از مرکز بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. الف) فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید.	۱
۱۷	وضعیت دو دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y+۱=۰$ و $(x+۳)^۲+(y-۲)^۲=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۵
۱۸	۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۴ تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همهٔ مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۴ تای آن‌ها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که مهره انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟	۱
	«موفق باشید»	

نام درس : ریاضی ۳ رشته: تجربی ساعت شروع: تاریخ آزمون:	**آزمون شبه نهایی پایه دوازدهم** **سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۶**	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه تعداد صفحه: ۴ تعداد سوال: ۱۸ بارم کل: ۲۰	**مدرسه آلفا**

ردیف	پاسخنامه	بارم
۱	الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) درست	
۲	الف) $(-۱,۵)$ ب) $\mathbb{R}$ پ) صفر ت) هذلولی	
۳	الف) نمودار تابع $g(x)=f(\frac{x}{۲})+۱$ به صورت زیر است:  ب) $D_g=[-۲,۶]$ ، $R_g=[۰,۳]$	
۴	الف) $fog(x)$ همان $f\big(g(x)\big)$ است. با در تابع f به جای xها، $g(x)$ را قرار دهیم: $$f\big(g(x)\big)=\frac{۱}{۱-g(x)}=\frac{۱}{۱-\sqrt{x-۳}}$$ ب) ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را جداگانه به دست می‌آوریم: $$D_f: ۱-x=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow D_f=R-\{۱\}$$ $$D_g: x-۳\geq ۰\Rightarrow x\geq ۳\Rightarrow D_g=[۳,+\infty)$$ حال دامنهٔ fog را طبق تعریف آن به شکل زیر به دست می‌آوریم: $$D_{fog}=\{x\in D_g \,|\, g(x)\in D_f\}=\{x\in[۳,+\infty) \,|\, \sqrt{x-۳}\neq ۱\}$$ حال معادلهٔ $\sqrt{x-۳}\neq ۱$ را حل می‌کنیم: $$\sqrt{x-۳}\neq ۱\Rightarrow x-۳\neq ۱\Rightarrow x\neq ۴$$ بنابراین دامنهٔ fog برابر است با: $$D_{fog}=\{x\in[۳,+\infty) \,|\, x\neq ۴\}=[۳,+\infty)-\{۴\}=[۳,۴)\cup(۴,+\infty)$$	
۵	$$f(x)=x^۲-۲x+۱-۱\Rightarrow f(x)=(x-۱)^۲-۱$$ $$y=(x-۱)^۲-۱\Rightarrow (x-۱)^۲=y+۱$$ $$\Rightarrow |x-۱|=\sqrt{y+۱}\xrightarrow{x\leq ۱} x-۱=-\sqrt{y+۱}$$ $$\Rightarrow x=۱-\sqrt{y+۱}\xrightarrow{\text{تعویض جای } y,x} f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{x+۱}$$	

۶	می‌دانیم ماکزیمم تابع $y = a\cos(bx) + c$ برابر با $\lvert a\rvert + c$ است، پس: $\lvert a\rvert + ۳ = ۶ \Rightarrow \lvert a\rvert = ۳$ دورهٔ تناوب تابع برابر است با: $T = \frac{۲\pi}{\lvert b\rvert} = \frac{۲\pi}{\lvert \frac{۱}{۲}\rvert} = ۴\pi$	
۷	می‌دانیم $\sin ۲x = ۲\sin x\cos x$ است، بنابراین: $\sin ۲x - \sin x = ۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x - ۱) = ۰$ $\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$	
۸	الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = +\infty$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ت) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ۱$	
۹	الف) با جای‌گذاری $x = ۴$ به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و با استفاده از اتحاد مزدوج داریم: $\lim\limits_{x\to ۴}\left(\frac{۳-\sqrt{x+۵}}{x-۴}\times\frac{۳+\sqrt{x+۵}}{۳+\sqrt{x+۵}}\right) = \lim\limits_{x\to ۴}\frac{۹-(x+۵)}{(x-۴)(۳+\sqrt{x+۵})}$ $= \lim\limits_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)}{(x-۴)(۳+\sqrt{x+۵})} = \lim\limits_{x\to ۴}\frac{-۱}{۳+\sqrt{x+۵}} = \frac{-۱}{۳+۳} = -\frac{۱}{۶}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۲[-x]+۱}{\lvert x-۲\rvert} = \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۲(-۲)+۱}{\lvert x-۲\rvert} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(۳x^۲-۱)(x+۱)+۱}{x^۳+x^۲-۴} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(۳x^۲)(x)}{x^۳} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۳x^۳}{x^۳} = ۳$	
۱۰	با توجه به نمودار صورت سوال $f(۴) = ۴$ است، بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با: $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-۴}{x-۴} = \lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = f'(۴)$ با توجه به این‌که $f'(۴)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = ۴$ است، پس: $f'(۴) = m_d = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۴-۲}{۴-۰} = \frac{۱}{۲}$	
۱۱	الف) $f'(x) = (۶x)(۲x-۵)^۲ + ۲\times ۲(۲x-۵)(۳x^۲-۴)$	

	ب) $g'(x)=\dfrac{(3x^2)(\sqrt{3x+2})-\dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+1)}{(\sqrt{3x+2})^2}$	
	تابع $y=f(x)$ در $x=2$ پیوسته است. مشتق چپ و راست تابع f را در $x=2$ محاسبه می‌کنیم: $f'_+(2)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\lvert x^2-4\rvert-0}{x-2}$ $=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$ $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\lvert x^2-4\rvert-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-(x^2-4)}{x-2}$ $=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-(x-2)(x+2)}{x-2}=-4$ بنابراین $f'(2)$ موجود نیست.	۱۲
	الف) $\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ }[0,3]=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{25-(-5)}{3}=\dfrac{30}{3}=10$ ب) باید $f'(x)$ را برابر ۱۳ قرار دهیم: $f'(x)=13\Rightarrow 3x^2+1=13\Rightarrow x^2=4\xrightarrow{x\in[0,3]}x=2$	۱۳
	$f'(x)=6x^2-6x-12=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=2\end{cases}$  نقاط با طول $x=-1$ و $x=2$ نقاط بحرانی تابع هستند. نقطه با طول $x=-1$ ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار آن برابر است با: $f(-1)=-2-3+12+9=16$ نقطه با طول $x=2$ مینیمم نسبی تابع f است و مقدار آن برابر است با: $f(2)=16-12-24+9=-11$	۱۴
	ابعاد مستطیل را x و y در نظر می‌گیریم و داریم:  $S=16\Rightarrow xy=16\Rightarrow y=\dfrac{16}{x}$ $P=2(x+y)\xrightarrow{y=\frac{16}{x}}P(x)=2(x+\dfrac{16}{x})$ $\Rightarrow P'(x)=2(1-\dfrac{16}{x^2})\xrightarrow{P'(x)=0}2(1-\dfrac{16}{x^2})=0$	۱۵

	$\Rightarrow x^{۲}=۱۶\Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۴ \text{ غ ق ق} \end{cases}$ پس به ازای $x=۴$ و $y=۴$ مستطیل کمترین محیط را خواهد داشت. $\begin{array}{c\|ccc} x & & ۴ & \\ \hline P' & - & ۰ & + \\ \hline P & \searrow & \text{min} & \nearrow \end{array}$	
	الف) $e=\frac{c}{a}\xrightarrow{e=\frac{۴}{۵}}\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}c$ $۲b=۶\Rightarrow b=۳$ $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\xrightarrow[b=۳]{a=\frac{۵}{۴}c}(\frac{۵}{۴}c)^{۲}=۳^{۲}+c^{۲}\Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}c^{۲}=۹+c^{۲}$ $\Rightarrow \frac{۹}{۱۶}c^{۲}=۹\Rightarrow c^{۲}=۱۶\Rightarrow c=۴\Rightarrow FF'=۲c=۸$ $c=۴\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}c=\frac{۵}{۴}\times ۴=۵$ ب) $\begin{cases} A(-۹,-۱) \\ A'(۱,-۱) \end{cases}$	۱۶
	$(x+۳)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۴\Rightarrow O_۱(-۳,۲),\ R_۱=۲$ $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y+۱=۰\Rightarrow O_۲(۱,-۱),\ R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴}=۱$ $\Rightarrow \lvert O_۱O_۲\rvert=\sqrt{(۱+۳)^{۲}+(-۱-۲)^{۲}}=۵$ $\lvert O_۱O_۲\rvert > R_۱+R_۲\Rightarrow$ دو دایره متخارج هستند	۱۷
	 $\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۱}{۴}\times ۱+\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۱}{۴}\times ۰=\frac{۴+۱۰+۵+۰}{۴۰}=\frac{۱۹}{۴۰}$	۱۸
	«موفق باشید»	

طراح آزمون: سجاد عظمتی و امیر حسام شکری