



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۲/۱۹

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ اردیبهشت ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

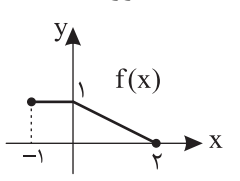
کلاس:

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ آنگاه $\sin \alpha < \tan \alpha$ است.</p> <p>ب) خط $y = 2$ مجانب افقی تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ است.</p> <p>ج) تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ در $x = 0$ مماس قائم دارد.</p> <p>د) اگر f' در بازه I اکیداً صعودی باشد، آنگاه تقعر f در این بازه رو به بالاست.</p>	۱
۱	<p>نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y = 2 - f(x+1)$ را رسم کنید و برد آن را به دست آورید.</p> 	۲
۱/۲۵	<p>الف) به کمک نمودار $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x^2 + 3)(x - 3)$ را رسم کنید.</p> <p>ب) اگر $\log(2x - 3) \leq \log(x + 1)$، حدود x را به دست آورید.</p>	۳
۰/۷۵	<p>مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 1$ و $x + 2$ بخش پذیر باشد.</p>	۴
۱/۲۵	<p>دوره تناوب و ماکزیمم تابع مثلثاتی $y = 2b + a \sin \frac{x}{b}$ به ترتیب برابر 4π و -1 است. ضمن محاسبه a و b، مینیمم تابع را به دست آورید. ($b < 0$)</p>	۵
۱/۵	<p>معادله مثلثاتی $1 + \cos 2x = 3 \sin x$ را حل کنید.</p>	۶
۱/۵	<p>حاصل حدهای زیر را بیابید.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x}$</p> <p>ج) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$</p>	۷



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۲/۱۹

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ اردیبهشت ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

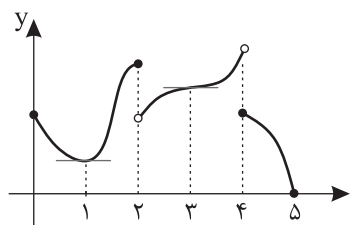
کلاس:

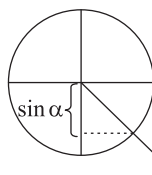
پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۱/۲۵	مقدار a را به گونه‌ای بیابید که $x = -1$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + a}$ باشد. سپس نمودار f را در مجاورت مجانب قائم آن رسم کنید.	۸
۱/۵	اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد به کمک تعریف مشتق، تابع مشتق f را به دست آورید.	۹
۱/۵	اگر $f(x) = \sqrt[3]{x} g(x)$ و $g(1) = 3$ و $g'(1) = -3$ باشد، مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.	۱۰
۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست). الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (\Delta x - 1)$ ب) $g(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \tan^2 x}$	۱۱
۰/۷۵	آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 4(1 - \frac{x}{10})^2$ را در نقطه $x = 5$ بیابید.	۱۲
۰/۷۵	با توجه به نمودار f ، جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. 	۱۳
۱	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را روی بازه $[-2, 2]$ به دست آورید.	۱۴
۱	مقادیر a و b را طوری به دست آورید که نقطه $(1, 5)$ ، یک نقطه عطف تابع $f(x) = ax^4 + bx^2$ باشد.	۱۵
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{-x}{x+3}$ را رسم کنید.	۱۶
۲۰	جمع بارم	



$$\tan \alpha < \sin \alpha < 0$$

پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) نادرست

در ناحیه چهارم هم سینوس و هم تانژانت هر دو منفی اند.

ب) درست

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

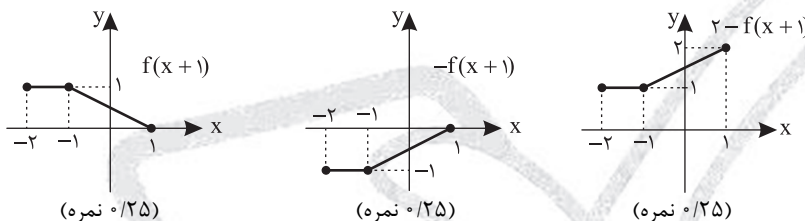
ج) درست، در توابع $\sqrt[3]{f}$ و \sqrt{f} ریشه $f=0$ مماس قائم است. (f خطی است).

د) درست، چون $f'' > 0$ است تقعر رو به بالا است.

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۳۴، ۶۷، ۱۰۰ و ۱۲۸)

پاسخ سؤال ۲: (۱ نمره)

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

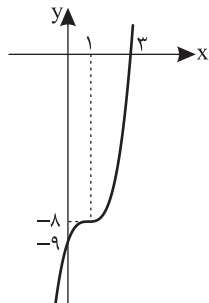


$$R = [1, 2] \text{ (نمره } 25/0 \text{)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۸)

پاسخ سؤال ۳: (۲۵/۱ نمره)

الف) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x-1)^3 - 8$ (نمره ۲۵/۰)



(نمره ۲۵/۰)

$$\left. \begin{aligned} 2x-3 \leq x+1 &\Rightarrow x \leq 4 \text{ (نمره } 25/0) \\ 2x-3 > 0 &\Rightarrow x > \frac{3}{2} \text{ (نمره } 25/0) \\ x+1 > 0 &\Rightarrow x > -1 \text{ (نمره } 25/0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} < x \leq 4 \text{ (نمره } 25/0)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۱۴ و ۱۸)

پاسخ سؤال ۴: (۲۵/۰ نمره)

اگر $f(a) = 0$ آنگاه f بر $x-a$ بخش پذیر است.

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+2=0 \text{ (نمره } 25/0) \\ 4a-2b-7=0 \text{ (نمره } 25/0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ (نمره } 25/0)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

پاسخ سؤال ۵: (۲۵/۱ نمره)

در تابع $y = c + a \sin bx$ ، دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم به ترتیب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ ، $c + |a|$ و $c - |a|$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \xrightarrow{b < 0} b = -2 \text{ (نمره } 25/0)$$

$$\max = 2b + |a| = -4 + |a| = -1 \Rightarrow |a| = 3 \text{ (نمره } 25/0)$$

$$\min = 2b - |a| = -4 - 3 = -7 \text{ (نمره } 25/0)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)



پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$1 + (1 - 2\sin^2 x) = 3\sin x \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \quad (\text{نمره } 0/25) \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (\text{نمره } 0/25) \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۴۴)

پاسخ سؤال ۷: (هر مورد ۵/۵ نمره)

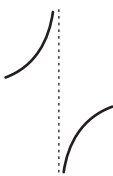
$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \cos 2x}{x} = \frac{1}{-\infty} = -\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۵۳، ۵۵ و ۶۶)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۲۵ نمره)

 $x = -1$ ریشهٔ مخرج است.

$$x^2 - 2x + a = 0 \xrightarrow{x=-1} 1 + 2 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۶)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۹۱)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}} g(x) + g'(x) \sqrt{x} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} g(1) + g'(1) = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۹۴)

پاسخ سؤال ۱۱: (هر مورد ۱ نمره)

$$\text{الف) } f'(x) = 6x(x^2 + 1)^2 (\Delta x - 1) + 5(x^2 + 1)^2$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{-\cos x(1 + \tan^2 x) - 2 \tan x(1 + \tan^2 x)(1 - \sin x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$$

$$2 \text{ راه: } g(x) = (1 - \sin x) \cos^2 x$$

$$g'(x) = -\cos^2 x - 2 \sin x \cos x (1 - \sin x)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۹۷ و ۱۰۱)



پاسخ سؤال ۱۲: (۷۵/۰ نمره)

$$f'(x) = 4 \times 2 \left(-\frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{x}{10}\right) \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$f'(5) = -\frac{4}{10} \left(1 - \frac{5}{10}\right) = -\frac{2}{5} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۱۰)

پاسخ سؤال ۱۳: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

ج) $x = 1$

ب) $x = 2$

الف) $x = 3$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۱۵)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & |x| < 1 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & |x| > 1 \\ -2x & |x| < 1 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

نقاط بحرانی $x = \pm 2, 0, \pm 1$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = f(-1) = 0 \text{ min} \\ f(2) = f(-2) = 3 \text{ max} \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۱۸)

پاسخ سؤال ۱۵: (۱ نمره)

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2b \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\begin{cases} f''(1) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ f(1) = 5 \Rightarrow a + b = 5 \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۳۶)

پاسخ سؤال ۱۶: (۲ نمره)

$$\text{مجاانبها: } \begin{cases} x = -3 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ y = -1 \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+3)^2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+3)^3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۴۴)

x	-3	
f'(x)	-	-
f''(x)	∩	∪
f(x)	↘	↘

(نمره ۰/۵)

(نمره ۰/۵)

