



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



شبیه ساز امتحان نهایی



دفعه سؤال

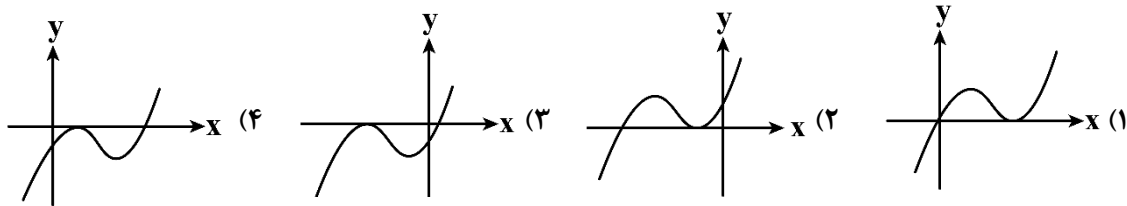
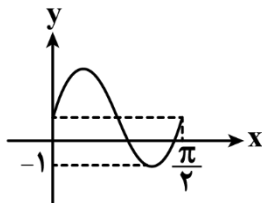
چهارشنبه ۲۴ تیرماه ۱۴۰۵

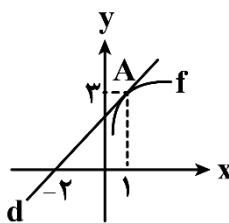
جامع کل کتاب

بودجه آزمون

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	حسابان (۲)	۲	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
۱		درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$. ب) خط $x=0$ مماس قائم منحنی $y= x $ است. پ) تابع $f(x)=\frac{x}{x-2}$ در دامنه خود اکیداً نزولی است.					
۲		جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\tan \alpha$ از مقدار $\sin \alpha$ است. ب) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}$ برابر است. پ) مقدار مشتق تابع $y = \sin^2 x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر است.					
۳		نقطه $A(-1,1)$ نقطه عطف تابع درجه سوم f است. نمودار f کدام گزینه می‌تواند باشد؟ 					
۴		نقطه $A(x_0, y_0)$ از نمودار تابع $y = f(x)$ با نقطه A' روی نمودار $g(x) = f(2x-1)$ متناظر است. مختصات نقطه A' را بیابید.					
۵		نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ - x & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و تعیین کنید در چه فاصله‌ای صعودی و در چه فاصله‌ای نزولی است؟					
۶		اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^3 - ax^2 + 2$ بر $x-2$ برابر a باشد، مقدار a را بیابید.					
۷		نمودار تابع $f(x) = c - 2 \sin(bx)$ در یک دوره تناوب به صورت زیر است. مقادیر b و c را بیابید. 					
۸		معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.					
صفحه ۱ از ۲							

سؤالات آزمون شبیه ساز نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
۹		دو ضلع مثلثی با مساحت $۱۲\sqrt{3}$ برابر ۴ و ۱۲ است. زاویه بین این دو ضلع را بیابید.					
۱۰		حاصل حدهای زیر را بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3x}{2x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2 + 4x + 4}$					
۱۱		ابتدا مقدار a را به گونه ای بیابید که خط $x=3$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{a-x}$ باشد و سپس نمودار تابع f را در نزدیکی مجانب قائم آن رسم کنید.					
۱۲		در شکل مقابل، خط d در نقطه $A(1,3)$ بر منحنی f مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 3f(x)}{x-1}$ را بیابید. 					
۱۳		به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x x-1 $ در نقطه $x=1$ را بررسی کنید.					
۱۴		مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست) الف) $f(x) = \frac{2x+9}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = \tan^2 x + \cos x$					
۱۵		معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 20$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ است. در کدام لحظه، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ برابر است؟					
۱۶		یک مستطیل با بیشترین مساحت ممکن در یک نیم دایره به شعاع ۶ محاط شده است. طول و عرض مستطیل را بیابید.					
۱۷		مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $x=1$ طول نقطه اکسترمم نسبی و $x=-1$ طول نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ باشند.					
۱۸		جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^2(x-3)$ را رسم کنید.					
۲۰		موفق باشید.					
		صفحه ۲ از ۲					



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



شبیه‌ساز امتحان نهایی



چهارشنبه ۲۴ تیرماه ۱۴۰۵

پاسخبرگ حسابان (۲)

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

مازی‌های عزیز

برای شرکت در آزمون تشریحی به این نکات دقت کنید:

از ساعت ۸ تا ۱۱

توی آزمون شرکت کنید و پاسخ برگرتون رو داخل پنل بارگذاری کنید تا تیم مصححان ماز برگه‌تون رو بررسی کنن.

◀ با توجه به استقبال خیلی زیاد دانش آموزها، برگه‌های شما به ترتیب الویت بارگذاری؛ توسط **مصححان انسانی** (و نه هوش مصنوعی) تصحیح می‌شن. به همین خاطر، با اینکه تیم ما با تمام توان مشغول تصحیح برگه‌هاست، ممکنه به **خاطر محدودیت ظرفیت**، نتونیم همه برگه‌ها رو بررسی کنیم. اگر تصحیح برگه‌تون کمی طول کشید یا برگه‌تون در اولویت تصحیح قرار نگرفت، نگران نباشید؛ راهنمای کامل مصحح داخل پاسخنامه قرار گرفته و می‌تونید دقیقاً مثل معیارهای امتحان نهایی، برگه‌تون رو خودتون بررسی و تصحیح کنید.

اولویت تصحیح با دانش آموزهایی هست که زودتر پاسخ برگشون رو بارگذاری کنن.

رأس ساعت ۱۱ این موارد داخل پنل براتون فعال می‌شه:

- ◀ پاسخنامه کامل آزمون + راهنمای مصحح
- ◀ جزوه آموزش تشریحی نویسی (قلق‌های نمره‌گرفتن)
- ◀ جزوه دوپینگ فوری شب امتحان
- ◀ پاسخ ویدیویی و تحلیل آزمون توسط اساتید ماز (لینک تحلیل داخل پاسخنامه)



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۲	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۳		۰/۲۵
۴		۱
۵		۱
۶		۱
۷		۱

آزمون شبیه ساز نهایی درس: حسابان ۲	تعداد صفحه: ۴	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۸		۱
۹		۰/۷۵
۱۰	الف) ب) پ)	۱/۵
۱۱		۱

ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۲		۱
۱۳		۱/۲۵
۱۴	الف) ب)	۲
۱۵		۰/۷۵

ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۶		۱/۵
۱۷		۱/۵
۱۸		۲
	موفق باشید.	۲۰



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



شبیه ساز امتحان نهایی



دفترچه پاسخ

چهارشنبه ۲۴ تیرماه ۱۴۰۵

جامع کل کتاب

بودجه آزمون

ویراستاران

طراحان

درس

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی پور

حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
مهدی عزیزی

حسابان (۲)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

مصَحَّح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصَحَّح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا بینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

محدثه عربگری

زهرة صفری

محدثه شیخ علی

یگانه پوراابراهیم

مرضیه بنیانی

ساره محمدعلی نسب

سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

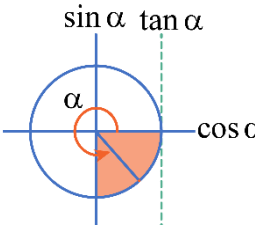
دکتر رسول خنجری

@konkurbanks / @Tahlilazemoon

برای دیدن پاسخ نامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی QR Code
را اسکن کنید یا روی لینک زیر ضربه بزنید.

پاسخنامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: حسابان ۲		رشته: ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	ساعت شروع:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	گروه آموزشی ماز	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصّحّح شو  الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۶۲) ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۸۸) پ) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۶) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه  بررسی دقیق تر:  پ) روی دامنه اش غیریکنواست، اما روی $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است.	۰/۷۵
۲	مصّحّح شو  الف) کمتر (کوچک تر) (۰/۲۵) (صفحه ۳۴) ب) صفر (۰/۲۵) (صفحه ۵۳) پ) ۱ (۰/۲۵) (صفحه ۹۶) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه  بررسی دقیق تر:  الف) با توجه به دایره مثلثاتی، در ربع چهارم:  $\sin \alpha - \tan \alpha = \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right)$ $-\infty < 1 - \frac{1}{\cos \alpha} < 0 \Leftarrow 1 < \frac{1}{\cos \alpha} < \infty \Leftarrow 0 < \cos \alpha < 1 \text{ و } \sin \alpha < 0$ که چون در نتیجه حاصل ضرب آنها مثبت است و داریم: $\sin \alpha - \tan \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha > \tan \alpha$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pm \infty} = 0$ (عدد حقیقی) $\frac{\pi}{2}$ $(\sin^2 x)' = 2 \cos x \sin x = \sin(2x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ب) پ)	۰/۷۵
۳	مصّحّح شو  گزینه ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۱۳۶) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه 	۰/۲۵
۴	مصّحّح شو  روش اول: $f(x_0) = y_0 \Rightarrow 2x - 1 = x_0 \Rightarrow x = \frac{x_0 + 1}{2}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱

مختصات A' به صورت $(\frac{x_0+1}{2}, y_0)$ است. (صفحه ۱۰)
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

روش دوم:

ترتیب انتقال‌ها برای رسیدن به $f(2x-1)$ از $f(x)$ را روی نقطه A اعمال می‌کنیم:

$$A(x_0, y_0) \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{f(x-1)} A(x_0+1, y_0) \xrightarrow[\text{نصف کردن طول نقاط}]{f(2x-1)} A(\frac{x_0+1}{2}, y_0) = A'$$

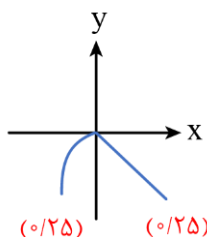
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۵ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصصح شو

در بازه $[-\infty, 0]$ صعودی (۰/۲۵) و در بازه $[0, +\infty)$ نزولی است. (صفحه ۱۸)
(۰/۲۵)



سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

مصصح شو

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad (0/25)$$

$$f(2)=a \Rightarrow 8-4a+2=a \Rightarrow a=2$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(صفحه ۲۲)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

چندجمله‌ای‌ها

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک اتحاد بالا می‌توان نتیجه گرفت که:
♦ اگر n فرد باشد:

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

♦ اگر n زوج باشد:

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

یه نمونه باحال

هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^6 - 1$ با عامل $(x+1)$:

$$x^6 - 1 = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

(ب) $x^6 - 1$ با عامل $(x - 1)$:

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

یه نمونه باحال 

چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را برحسب عامل $(x + 2)$ تجزیه کنید.

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

تقسیم چندجمله‌ای بر دو جمله‌ای درجه اول 

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax + b)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است.

نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a}) = 0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر است.

یه نمونه باحال 

چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای $(x + 1)$ بخش پذیر است چرا که $f(-1) = 0$ است.

مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال، در سوال ۶ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو 

با توجه به نمودار تابع، دوره تناوب برابر $\frac{\pi}{4}$ و کمترین مقدار تابع -1 است.

$$\min = c - 2 = -1 \Rightarrow c = 1 \quad (0/25)$$

$$T = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 4 \xrightarrow{b < 0} b = -4 \quad (0/25)$$

(0/25)

توجه! دقت کنید که چون شروع تابع از $x = 0$ صعودی بوده، باید حاصل ضرب ضریب پشت $\sin$ و ضریب x در کمان آن مثبت باشد. $(-2b > 0 \Rightarrow b < 0)$ (صفحه ۲۸)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه 

توابع مثلثاتی 

در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

مقدار بیش‌ترین مقدار: $|a| + c$ ضریب $\sin$ یا $\cos$:
مقدار کمترین مقدار: $-|a| + c$ ضریب $\sin$ یا $\cos$:

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$:

$y = a \sin bx$		$y = a \cos bx$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$

مصّحح شو

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \text{ (۰/۲۵)} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

(صفحه ۴۰)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه



حالا نوبت به معادلات مثلثاتی رسید...

۱) معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲) معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

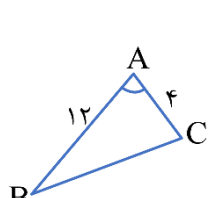
$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

مصّحّح شو

۰/۷۵



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$12\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 \times \sin \hat{A} \quad (0/25)$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \frac{2\pi}{3} \quad (0/25) \quad (0/25)$$

۹

(صفحه ۴۴)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

مصّحّح شو

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty \quad (0/25) \quad (صفحه ۶۹)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \quad (صفحه ۵۴)$

$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} = -\infty + 1 = -\infty \quad (0/25)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (صفحه ۵۵) \quad (0/25)$

۱/۵

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم. چند مثال ببینید:

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{|3^\pm - 3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)} \frac{[x]}{|3x + 1|} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3\left(-\frac{1}{3}\right)^\pm + 1\right|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

۱۰

۱- حد نامتناهی

نکته: در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر حدی باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{+ عدد}{+} = +\infty$	$\frac{- عدد}{-} = +\infty$	$\frac{+ عدد}{-} = -\infty$	$\frac{- عدد}{+} = -\infty$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

۲- محاسبه حد توابع کسری در بی نهایت

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند که در این صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می کنیم:

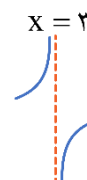
نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر است.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.	صفر

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۱۰ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو

$x = 3$ ریشه مخرج است.
(رسم نمودار $(0/25)$)



$$a - x = 0 \Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{3-x} = -\infty \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{3-x} = +\infty \quad (0/25)$$

(صفحه ۵۷ و ۵۸)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

حالا مجانب‌ها رو خوب یاد بگیرید...

خط $x = a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

در توابع کسری ریشه‌های مخرج کسر که ریشه صورت کسر نباشند.

خطوط $x = (2k+1)\frac{\pi}{2a}$ در توابع $y = \tan(ax)$

قائم

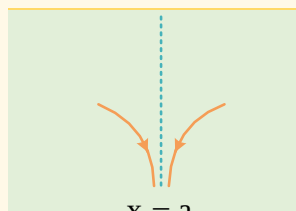
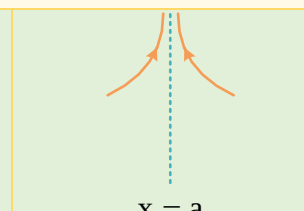
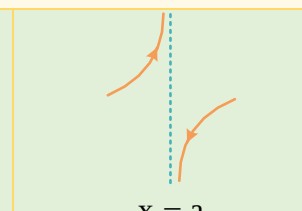
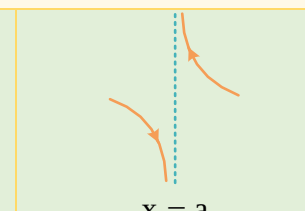
کاندیدهای مجانب قائم

مجانب‌ها

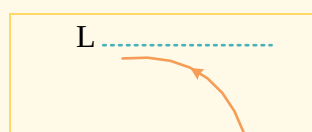
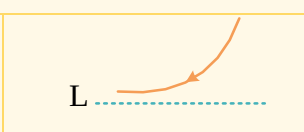
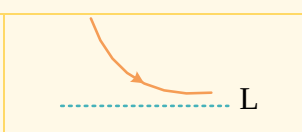
افقی ← خط $y = L$ را مجانب افقی تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$

ماایل ← در محدوده کتاب درسی نیست.

رفتار تابع در نزدیکی مجانب قائم

			
$x = a$	$x = a$	$x = a$	$x = a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

رفتار تابع در نزدیکی مجانب افقی

			
L	L	L	L
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^-$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^+$

مصّحّح شو

شیب خط مماس برابر $f'(1)$ است.

$$m = 1 \Rightarrow f'(1) = 1 \quad (0/25)$$

۱۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 3f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(f(x)-3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{f(x)-3}{x-1}}_{(0/25)} \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \times 3 = 3 \quad (0/25)$$

(صفحه ۸۳)

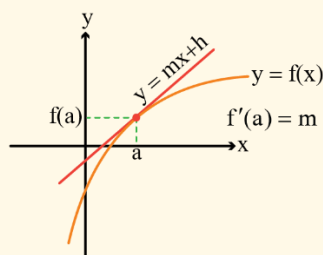
سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

بررسی دقیق تر:

دقت کنید که برای محاسبه شیب خط d ، دو نقطه $(-2, 0)$ و $(1, 3)$ روی آن را داریم، با توجه به این نقاط به ازای هر سه واحد جلو رفتن، سه واحد بالا می‌رویم، پس شیب خط یک‌ه!

شیب خط مماس

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطه تماس هم در تابع و هم در معادله خط مماس صدق می‌کند.



مثال:

با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$y - 6 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 2$$

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۱۲ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x-1|}{x-1} \quad (0/25)$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \quad (0/25)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -1 \quad (0/25)$$

چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس f در $x = 1$ مشتق ناپذیر است. (۰/۲۵) (صفحه ۸۶)

۱۳

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه



مشتق پذیری

تابع f را در نقطه $x = a$ مشتق پذیر گوئیم، هرگاه:

(۱) تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

(۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ موجود (متناهی) و باهم برابر باشند، یعنی: $f'_+(a) = f'_-(a)$

مصطح شو

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+9)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\text{ب) } g'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) - \sin x$$

(صفحه ۱۰۱)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه



یه عالمه قواعد مشتق گیری

- $y = c ; c \in \mathbb{R} \rightarrow y' = 0$
- $y = ax + b \rightarrow y' = a$
- $y = kf(x) \rightarrow y' = kf'(x)$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $y = f(x) \times g(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
- $y = (f(x))^n \rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \rightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$
- $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$
- $y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$
- $y = \sin(f(x)) \rightarrow y' = f'(x)\cos(f(x))$

- $y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$
- $y = \cos(f(x)) \rightarrow y' = -f'(x) \sin(f(x))$
- $y = \tan x \rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$
- $y = \tan(f(x)) \rightarrow y' = f'(x)(1 + \tan^2(f(x)))$

مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر 

$$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)$$

مثال: 

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$y = \frac{9x+1}{x-x^2} \rightarrow y' = \frac{9(x-x^2) - (1-2x)(9x+1)}{(x-x^2)^2}$$

$$y = \frac{x^2-3x+1}{-3x+2} \rightarrow y' = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$$

$$y = (\sqrt{3x+2})(x^2+1) \rightarrow y' = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right)(x^2+1) + (2x)(\sqrt{3x+2})$$

$$y = (-3x^2+x)^5(2x) \rightarrow y' = 5(-6x+1)(-3x^2+x)^4(2x) + (2)(-3x^2+x)^5$$

$$y = \sin(3x^2) \rightarrow y' = 6x \cos(3x^2)$$

$$y = \cos^3(2x) \rightarrow y' = -6 \cos^2(2x)(\sin(2x))$$

$$y = \sin^3 x + \cos^2 x \rightarrow y' = 3 \sin^2 x \cos x + 2 \cos x (-\sin x)$$

$$y = 3 \tan^2 x + \cos(x^2) \rightarrow y' = 6 \tan x (1 + \tan^2 x) + 2x(-\sin(x^2))$$

$$y = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \rightarrow y' = -\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \times \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y = 3x(x^2-6x)^3 + \cos(2x) \rightarrow y' = \left[3(x^2-6x)^3 + (3(2x-6)(x^2-6x)^2) \times 3x \right] - 2 \sin(2x)$$

$$y = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2+\sqrt{x}} \rightarrow y' = \frac{\left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)(x^2+\sqrt{x}) - \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{(x^2+\sqrt{x})^2}$$

$$y = \frac{1-\sin x}{\cos x} \rightarrow y' = \frac{-\cos x(\cos x) - (-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$$

مثال: 

اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos(2x)$ مقدار $f''(\frac{\pi}{6})$ را حساب کنید.

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin(2x) = \sin(2x) + 2 \sin(2x) = 3 \sin(2x)$$

$$f''(x) = 6 \cos(2x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f''(\frac{\pi}{6}) = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 3$$

مثال: 

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 1$ ، $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ باشند، مطلوبست محاسبه موارد زیر:

- $(fg)'(2) = (f'g + g'f)(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = (1 \times (-3)) + (2 \times 3) = -3 + 6 = 3$
- $(f + g)'(2) = (f' + g')(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)(2) = \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{(g(2))^2} = \frac{(1 \times (-3)) - (2 \times 3)}{(-3)^2} = \frac{-3 - 6}{9} = -1$

مصطح شو 

$$\bar{f} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{40 - 20}{5} = 4 \quad (0/25)$$

$$f'(t) = 4 \Rightarrow 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \quad (0/25)$$

توجه! دقت کنید که چون $f(t)$ سهمی است، مقدار سرعت متوسط آن در بازه $[a, b]$ با مقدار سرعت لحظه‌ای آن در

$$\frac{a+b}{2} \text{ برابر است و برای سوال تستی از این روش بهره می‌بریم. (صفحه ۱۰۹)}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 

آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع 

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

۰/۷۵

۱۵

مثال ۱ 

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$f \text{ آهنگ تغییر متوسط تابع} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x = a$ برابر است با: $f'(a)$

مثال ۲ 

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (10)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

	$x = t$ سرعت لحظه‌ای در لحظه $f'(t) = 2t - 1$ می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[0, 5]$ باهم برابر باشند، پس: $2t - 1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$																	
۱/۵	مصحح شو $x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$ (۰/۲۵) $S(x) = 2xy = 2x\sqrt{36 - x^2}$ (۰/۲۵) $S'(x) = 2\sqrt{36 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{72 - 4x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$ (۰/۲۵) $S'(x) = 0 \Rightarrow 72 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$ (۰/۲۵) $\begin{cases} \text{طول} = 2x = 6\sqrt{2} & (۰/۲۵) \\ \text{عرض} = y = 3\sqrt{2} & (۰/۲۵) \end{cases}$ (صفحه ۱۲۶) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه	۱۶																
۱/۵	مصحح شو $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases}$ $\begin{cases} f'(1) = 0 & (۰/۲۵) \\ f''(-1) = 0 & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 & (۰/۲۵) \\ -6 + 2a = 0 & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -9 & (۰/۲۵) \\ a = 3 & (۰/۲۵) \end{cases}$ (صفحه ۱۳۶) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه مسیر تمرینی: مشابه این سوال، در سوال ۱۷ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.	۱۷																
۲	مصحح شو $f(x) = x^3 - 3x^2$ $f'(x) = 3x^2 - 6x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 & (۰/۲۵) \\ x = 2 \Rightarrow y = -4 & (۰/۲۵) \end{cases}$ $f''(x) = 6x - 6$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$ نقطه عطف (۰/۲۵) <table style="margin: 10px auto;"><tr><th>x</th><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><th>f'</th><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><th>f''</th><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><th>f</th><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table> $\begin{matrix} \text{max نسبی} & \text{عطف} & \text{min نسبی} \\ & & -2 \end{matrix}$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۳۹) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه	x	0	1	2	f'	+	0	-	f''	-	-	+	f	↑	↓	↑	۱۸
x	0	1	2															
f'	+	0	-															
f''	-	-	+															
f	↑	↓	↑															

مراحل رسم نمودار توابع

برای رسم نمودار یک تابع باید همه و یا بعضی از مراحل زیر را انجام داده و به کمک آن‌ها جدول رفتار تابع را تشکیل دهیم و سپس نمودار تابع را رسم کنیم:

- (۱) دامنه تابع را به دست می‌آوریم. (۲) محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات را در صورت وجود تعیین می‌کنیم.
- (۳) رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را مشخص می‌کنیم. (۴) مجانب‌های افقی و قائم تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.
- (۵) f' را به دست آورده و با تعیین علامت آن بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها صعودی و یا نزولی است، معین می‌کنیم.
- (۶) نقاط بحرانی و اکسترمم‌های تابع (نسبی و مطلق) را در صورت وجود به دست می‌آوریم.
- (۷) f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع را در بازه‌های مختلف مشخص می‌کنیم.
- (۸) نقطه عطف تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.
- (۹) جدولی رسم می‌کنیم و اطلاعات حاصل از f ، f' و f'' را که به دست آورده‌ایم درون آن پیاده می‌کنیم.
- (۱۰) نمودار تابع را به کمک اطلاعات مراحل قبل رسم می‌کنیم (اگر لازم شد از یه سری نقاط کمکی دیگه هم استفاده می‌کنیم)

تابع هموگرافیک و ویژگی‌های آن

- (۱) تابع به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$ باشد را یک تابع هموگرافیک می‌نامیم.
- اگر $C=0$ باشد این تابع به یک تابع خطی تبدیل می‌شود. • اگر $ad-bc=0$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

(۲) دامنه تابع هموگرافیک به صورت $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ و برد آن هم به صورت $R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ است.

(۳) تابع هموگرافیک، در کل دامنه خود نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) است.

(۴) این تابع دارای مجانب افقی $y = \frac{a}{c}$ و مجانب قائم $x = -\frac{d}{c}$ است.

(۵) مشتق این تابع هموگرافیک برابر است با: $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

رسم نمودار یک تابع هموگرافیک:

برای رسم یک تابع هموگرافیک مراحل زیر را طی می‌کنیم:

• ابتدا ریشه عبارت مخرج کسر را پیدا می‌کنیم که همان مجانب قائم تابع است. $(x = -\frac{d}{c})$

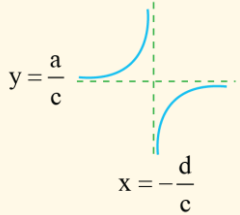
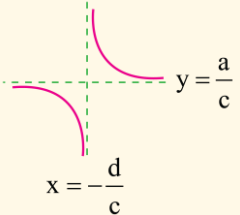
• سپس حاصل حد تابع را در $\pm\infty$ پیدا می‌کنیم که همان مجانب افقی تابع است. $(y = \frac{a}{c})$

محل برخورد با محور x ها $\rightarrow f(x) = 0$
محل برخورد با محور y ها $\rightarrow f(0)$

• محل برخورد تابع با محورهای مختصات را (در صورت وجود) پیدا می‌کنیم:

• از تابع مشتق گرفته و با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

• با توجه به علامت مشتق و به کمک جدول زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	



دوپیند فوری شب امتحان



حسابان دوازدهم ریاضی



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir

فهرست

فصل ۱: تابع ۱

فصل ۲: مثلثات..... ۷

فصل ۳: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۱۴

فصل ۴: مشتق ۲۰

فصل ۵: کاربردهای مشتق ۲۸



فصل اول: تابع

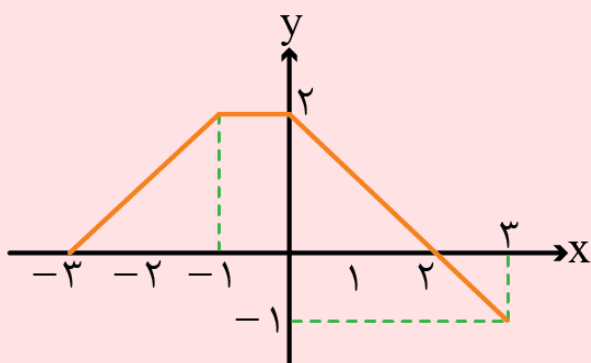
هر آنچه باید در مورد خواص و ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها بدانید!

نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x + a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x - a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x) + a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x) - a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ)
$f(kx)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$f(x)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$ y = f(x)$	ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



مثال

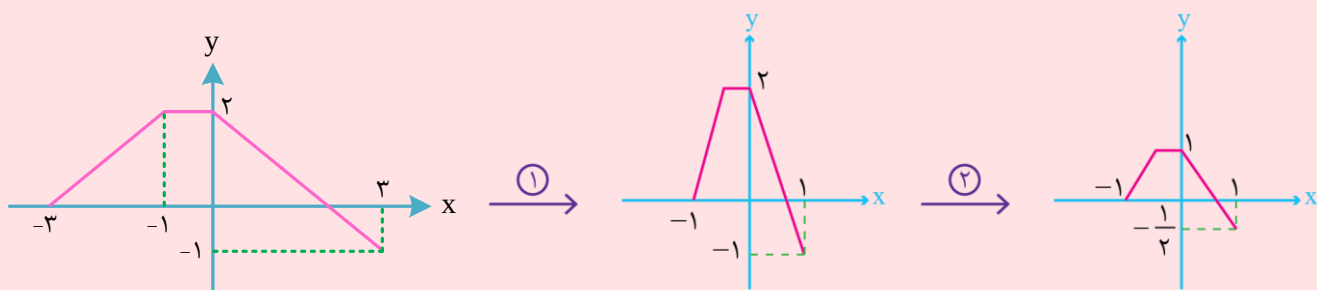
نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{2}f(3x)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



پاسخ:

برای رسم نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{2}f(3x)$ ، ابتدا باید نمودار تابع f را با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای محور x ها منقبض کرده و سپس نمودار حاصل را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور y ها منقبض کنیم به عبارتی:

$$f(x) \xrightarrow[\text{(۱)}]{\text{انقباض طولی } \frac{1}{3} \text{ برابر}} f(3x) \xrightarrow[\text{(۲)}]{\text{انقباض عرضی } \frac{1}{2} \text{ برابر}} \frac{1}{2}f(3x)$$



دامنه تابع g : $[-1, 1]$ برد تابع g : $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

یکنوایی توابع:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	صعودی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	نزولی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	اکیداً صعودی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	اکیداً نزولی

تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

مثال

مجموعه جواب نامعادله $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ را به دست آورید.

پاسخ:

چون تابع $y = \log x$ ، تابعی اکیداً صعودی است بنابراین با برداشتن لگاریتم از طرفین نامعادله فوق، جهت نامعادله عوض نمی شود، یعنی:

$$\log(x+1) \leq \log(2x-3) \Rightarrow (x+1) \leq (2x-3) \Rightarrow x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$



مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{27}\right)$ را به دست آورید.

پاسخ:

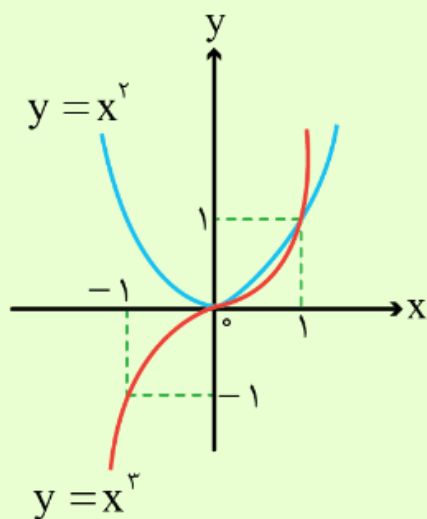
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{27}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

چون تابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ، تابعی اکیداً نزولی است پس با برداشتن پایه‌ها از طرفین نامساوی فوق، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$2x+1 \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$$

نکته طلایی

در مقایسه توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ داریم:



- در بازه $(0, 1)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(-\infty, 0)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(1, +\infty)$: نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

تابع چندجمله‌ای:

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم.



توابع زیر نمونه‌ای از توابع چندجمله‌ای هستند:

$$y = \sqrt{2}x - x^2 \quad (\text{چندجمله‌ای درجه دوم})$$

$$y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x^2 \quad (\text{چندجمله‌ای درجه ۵})$$



نکته طلابی

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک اتحاد بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

• اگر n فرد باشد:

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

• اگر n زوج باشد:

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

مثال

هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته شده تجزیه کنید.

(الف) $x^6 - 1$ با عامل $(x + 1)$

(ب) $x^6 - 1$ با عامل $(x - 1)$

پاسخ:

(الف) $x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$

(ب) $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

مثال

چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را برحسب عامل $(x + 2)$ تجزیه کنید.

پاسخ:

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

تقسیم چندجمله‌ای:

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax + b)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است. در نتیجه اگر $f(-\frac{b}{a}) = 0$ باشد به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر است.

مثال

اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^2 + kx - 1$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد مقدار k را بیابید.

پاسخ:

چون باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + 1$ برابر ۲ است پس $f(-1) = 2$ است در نتیجه:

$$f(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^2 + k(-1) - 1 = 2 \Rightarrow 1 - k - 1 = 2 \Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$$



مثال



مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (*) \\ f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} 4a + 2b = -9 \xrightarrow{a=b} 4a + 2a = -9 \Rightarrow 6a = -9$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

مثال



باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به‌دست آورید.

پاسخ:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(2x + 1)$ برابر صفر است.

مثال



مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.

پاسخ:

می‌دانیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر است، یعنی:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4a + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -6 \Rightarrow 2a + b = -3$$

از طرفی باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x + 1)$ برابر ۳ است، یعنی:

$$P(-1) = 3 \Rightarrow -1 + a - b - 2 = 3 \Rightarrow a - b = 6$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$



◀ تابع جزء صحیح:

در مورد جزء صحیح: اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد، آن گاه:

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] > n \Rightarrow x \geq n+1 \quad [x] < n \Rightarrow x < n$$

$$[x] \geq n \Rightarrow x \geq n \quad [x] \leq n \Rightarrow x < n+1$$



$$[x] \geq -2 \Rightarrow x \geq -2$$

$$[x] < 4 \Rightarrow x < 4$$

$$[x] \leq 4 \Rightarrow x < 5$$

$$-1 < [x] \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x < 4$$

$$-1 \leq [x] < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 3$$



فصل دوم: مثلثات

◀ دوره تناوب توابع:

در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

$\Rightarrow \max = |a| + c$ مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos|: بیشترین مقدار

$\Rightarrow \min = -|a| + c$ مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos|: کمترین مقدار

$$\Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|x \text{ ضریب}|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$



مثال

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید:

الف) $y = -3 \cos 2\pi x + 1$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

پ) $y = 1 - 2 \sin(-\frac{\pi}{3} x)$

پاسخ:

$$\begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \\ \text{الف) } y = -3 \cos 2\pi x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \max = |a| + c = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ \min = -|a| + c = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases} \end{cases}$$



$$\text{ب) } y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = 4 \\ \max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \\ \min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{پ) } y = 1 - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3} x\right) \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|-\frac{\pi}{3}\right|} = 6 \\ \max = |a| + c = |-2| + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \min = -|a| + c = -|-2| + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$



معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

پاسخ:

می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$$

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-4, 4]$ است یعنی:

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 0$$

$$\Rightarrow c = 0 \xrightarrow{|a|+c=4} |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

حال:

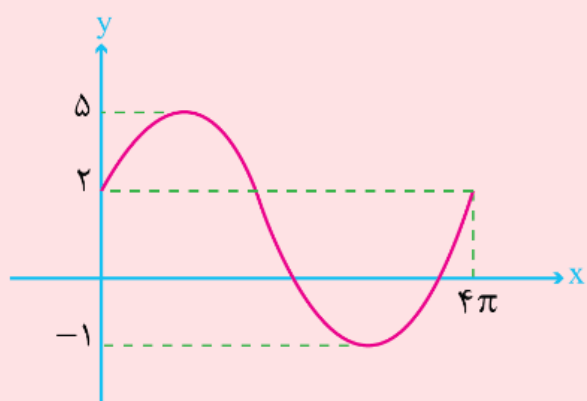
$$\begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm \pi \Rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm \pi x) \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \sin(\pi x) \\ y = -4 \sin(-\pi x) \\ y = 4 \sin(-\pi x) \\ y = -4 \sin(\pi x) \end{cases}$$



نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. مقادیر a ، b و c را مشخص کرده و ضابطه تابع را بنویسید.

پاسخ:

مطابق شکل می توان گفت:



$$\begin{cases} \text{دوره تناوب} = 4\pi \\ \text{بیشترین مقدار} = 5 \\ \text{کمترین مقدار} = -1 \\ f(0) = 2 \\ ab > 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 5 \\ \min = -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 4$$

$$\Rightarrow c = 2 \xrightarrow{|a|+c=5} |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$\begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm \frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 3 \sin(\pm \frac{1}{2}x) + 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \sin(\frac{1}{2}x) + 2 \quad \checkmark \\ y = -3 \sin(-\frac{1}{2}x) + 2 \quad \checkmark \\ y = 3 \sin(-\frac{1}{2}x) + 2 \quad \times \quad (ab < 0) \\ y = -3 \sin(\frac{1}{2}x) + 2 \quad \times \quad (ab < 0) \end{cases}$$

راستی! طبق نمودار تابع $y = a \sin bx + c$ که سؤال داده، چون $f(0) = 2$ هست پس از همونجا می تونستیم بگیریم که $c = 2$ می شه. ولی توی امتحان سعی کن که راه حل کامل و تشریحی رو بنویسی.

◀ دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{cases} y = a \sin^n(bx + c) + d \\ y = a \cos^n(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} & n \text{ رد باشد} \\ T = \frac{\pi}{|b|} & n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a \tan^n(bx + c) + d \\ y = a \cot^n(bx + c) + d \end{cases} \xrightarrow{n \text{ چه زوج باشد و چه فرد}} T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases} y = |a \sin(bx + c)| \\ y = |a \cos(bx + c)| \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$



مثال



$$y = \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = \cos^2 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

$$y = |\sin 3x| \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

$$y = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow y = \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

◀ معادلات مثلثاتی:

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

مثال



معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال

معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

پاسخ:

می‌دانیم که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ است، پس:

$$(1 - 2\sin^2 \alpha) - \sin \alpha + 1 = 1 \Rightarrow 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال

معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

پاسخ:

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ داریم:

$$2\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k + 1)\pi$



مثال

معادله مثلثاتی $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

پاسخ:

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x = 5 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \text{غقق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال

معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

پاسخ:

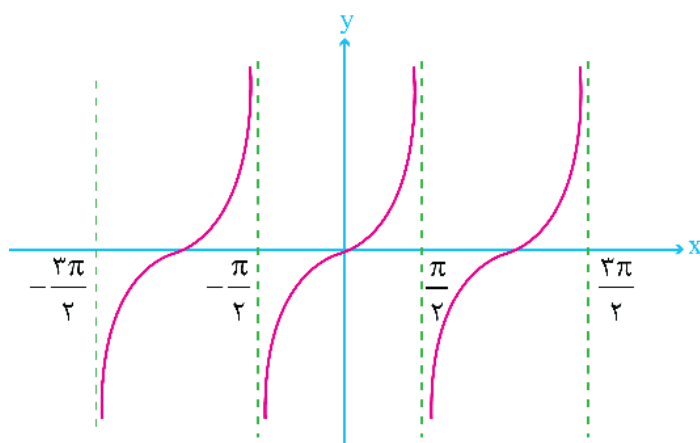
می‌دانیم که $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ است پس:

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow (2\cos^2 x - 1) - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تابع تانژانت:



• دامنه تابع $y = \tan x$ به صورت $\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ یا $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ است. ($k \in \mathbb{Z}$)

• دوره تناوب تابع $y = \tan x$ به صورت $T = \pi$ است.

• تابع $y = \tan x$ در هر بازه به صورت $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است.

• جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\tan f(x) = \tan g(x)$ به صورت $f(x) = k\pi + g(x)$ است. ($k \in \mathbb{Z}$)



مثال

معادله $\tan 5x = \tan 2x$ را حل کنید.

پاسخ:

$$5x = k\pi + 2x \Rightarrow 5x - 2x = k\pi \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

نکته طلایی

اتحادهای مثلثاتی زیر را به خاطر بسپارید:

- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

مثال

مقدار $\tan 15^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\tan(15^\circ) = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} &= \frac{9 - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{(3)^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{12 - 6\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$



فصل سوم: درهای نامتناهی - در دربی نهایت

رفع ابهام حد:

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه:

برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$$\frac{+ \text{ عدد}}{+} = +\infty$$

$$\frac{- \text{ عدد}}{-} = +\infty$$

$$\frac{+ \text{ عدد}}{-} = -\infty$$

$$\frac{- \text{ عدد}}{+} = -\infty$$



حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2})+1}{(2(-\frac{1}{2})+1)^2} = \frac{-2+1}{(-1+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

توجه: وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|3-3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$



- $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{[-\frac{1}{3}]}{|3(-\frac{1}{3})+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 5x + [-x]}{2x} = \frac{\sin(0^+) + [-(0^+)]}{0^+} = \frac{0^+ + [0^-]}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$

برای محاسبه این حد، ابتدا حد چپ و حد راست تابع $y = \tan x$ را در $x = \frac{\pi}{2}$ به صورت جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = \frac{(\frac{\pi}{2}+1)}{(\infty)} = 0$$

جمع‌بندی سریع

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ ، حد عبارت صورت و مخرج

کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.	صفر



حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x + 2}{5 - x} - \frac{1}{x} \right)$

پاسخ:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7}{2x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4) = -2(-\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{(-\infty)^2} = \frac{5}{+\infty} = 0$

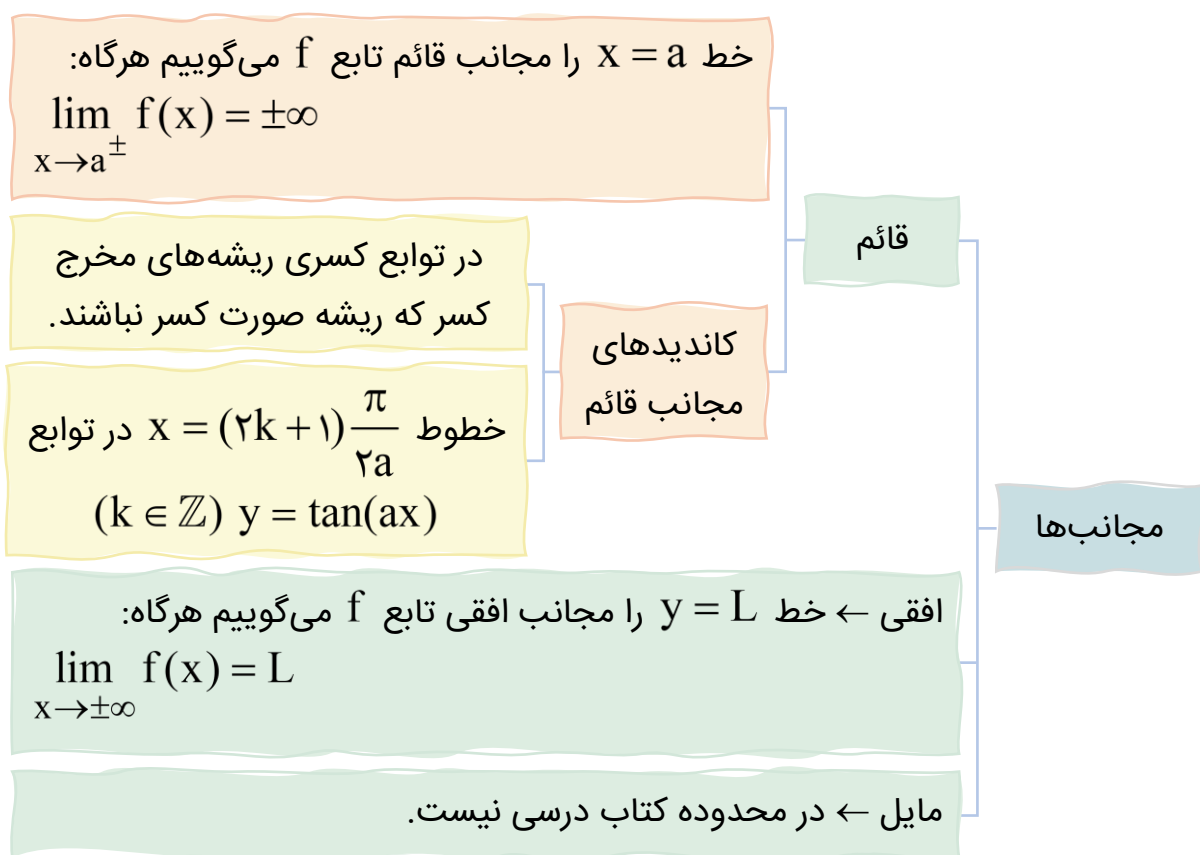
ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{3 + \frac{1}{+\infty}}{\frac{4}{+\infty} - 5} = \frac{3 + 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = -2(-\infty)^3 = -2(-\infty) = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x + 2}{5 - x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x}{-x} - \frac{1}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -4 - 0 = -4$



◀ مجانب‌ها:



رفتار تابع در نزدیکی مجانب قائم:

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

رفتار تابع در نزدیکی مجانب افقی:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^-$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^+$



مثال

اگر خط $y = 2$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 3x}$ باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ:

خط $y = 2$ مجانب افقی تابع f است یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 3x} = 2 \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{2x^2} = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

مثال

مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^2 - 1}$ را در صورت وجود بیابید.

پاسخ:

ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را می‌یابیم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

چون $x = 1$ و $x = -1$ ، هیچ‌کدام ریشه صورت کسر نیستند بنابراین هر دو مجانب قائم تابع هستند.

حال حد تابع را زمانی که $x \rightarrow \pm\infty$ میل می‌کند به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x^2}{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

و $y = -2$ نیز تنها مجانب افقی این تابع است.

مثال

نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^3 + x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

پاسخ:

ابتدا ریشه مخرج کسر را می‌یابیم:

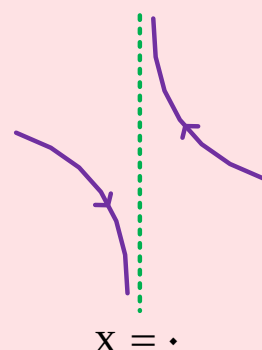
$$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \checkmark \\ x^2 = -1 \quad \times \end{cases}$$

چون $x = 0$ ریشه صورت کسر نیست پس مجانب قائم تابع f است. حال برای اینکه رفتار

تابع f را در اطراف $x = 0$ بدانیم باید حاصل حد تابع را زمانی که $x \rightarrow 0^+$ و $x \rightarrow 0^-$ میل می‌کند پیدا کنیم:

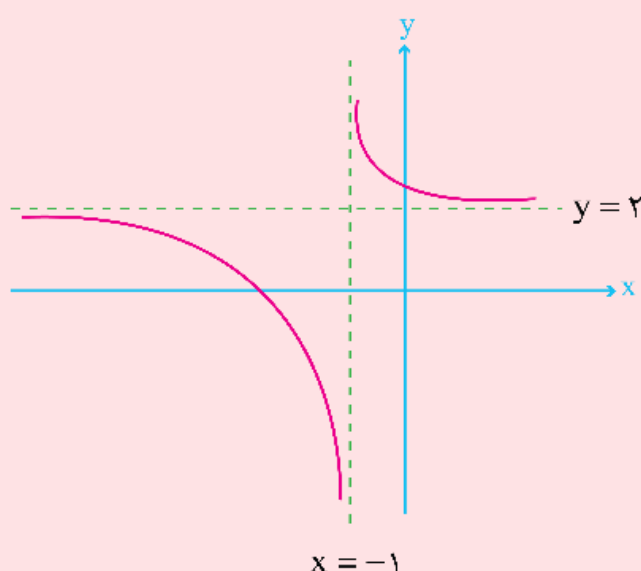
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^3 + x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x^3 + x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$





اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{(a+1)x+7}{2x+b}$ به صورت زیر باشد آن گاه مقدار $a+b$ را پیدا کنید.



پاسخ:

همان طور که از شکل تابع مشخص است خط $x = -1$ مجانب قائم و خط $y = 2$ مجانب افقی تابع هستند یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x+7}{2x+b} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x}{2x} = 2 \Rightarrow \frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow a = 3$$

و چون $x = -1$ مجانب قائم تابع است پس می توان گفت که $x = -1$ ریشه مخرج است پس:

$$2x+b = 0 \xrightarrow{x=-1} -2+b = 0 \Rightarrow b = 2$$

در نتیجه حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b = 3+2 = 5$$



نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد.

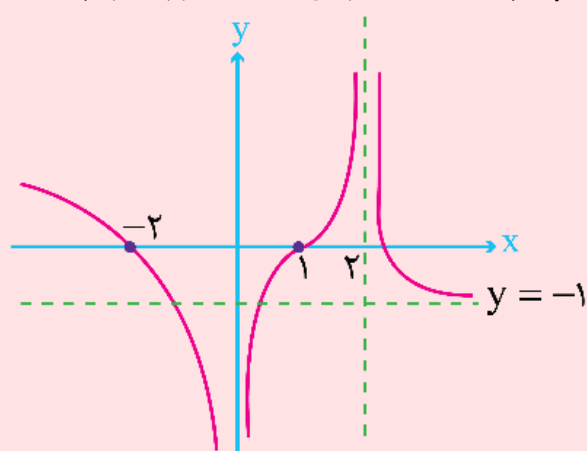
الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

پاسخ:

نمودارهای مختلفی با شرایط گفته شده می توان رسم کرد که یکی از آنها به صورت زیر است.





فصل چهارم: مشتق

مشتق:

مشتق تابع $f(x)$ در $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با انتخاب $x - a = h$ داریم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال

اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد، $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.
پاسخ:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(1-x)(1+x)}{x+1} = 4 \end{aligned}$$

مثال

با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} + 1$ را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.
پاسخ:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال

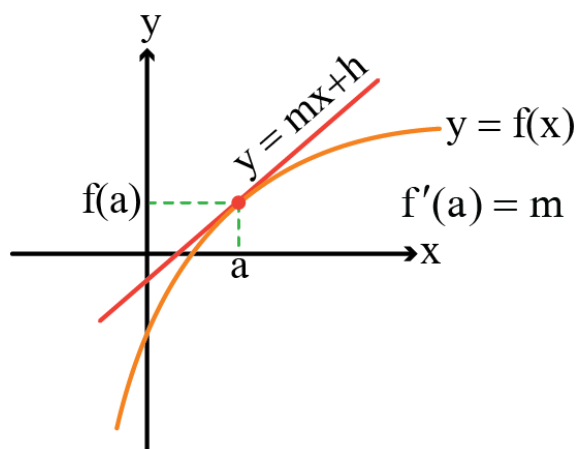
با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 5$ به دست آورید.
پاسخ:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} \times \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



◀ شیب خط مماس:

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطه تماس هم در تابع و هم در معادله خط مماس صدق می کند.



مثال

با استفاده از تعریف، معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

پاسخ:

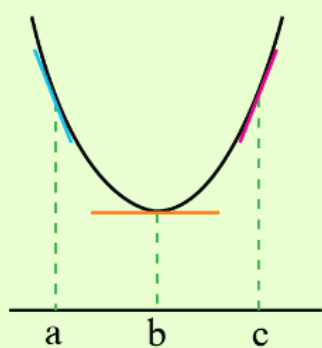
$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = 4$$

$$y - 6 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 2$$

نکته طلایی

در بعضی از سؤالات از ما می خواهند که شیب خط مماس بر نمودار تابع در چند نقطه را با هم مقایسه کنیم و یا اینکه درباره علامت مشتق در یک نقطه سؤالاتی مطرح می شود که برای پاسخ دادن به این سؤالات توجه به موارد زیر می تواند کمک کننده باشد:

- در بازه هایی که تابع f صعودی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع مثبت است پس در آن بازه $f' > 0$ است.
 - در بازه هایی که تابع f نزولی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع منفی است پس در آن بازه $f' < 0$ است.
 - در نقاطی از تابع f که شیب خط مماس بر نمودار تابع صفر است (مماس افقی است)، $f' = 0$ است.
- یه مثال ببینیم:



$$\begin{cases} f'(a) < 0 \\ f'(b) = 0 \\ f'(c) > 0 \end{cases}$$

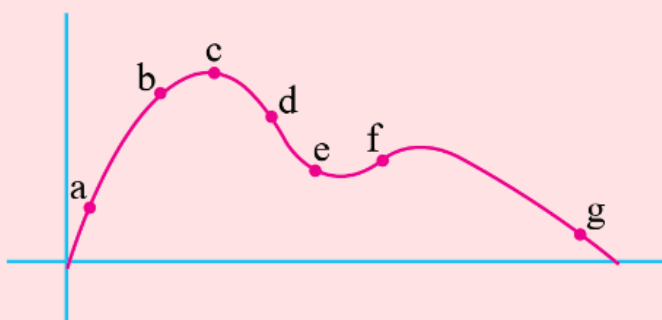
یادتون باشه که:

$f'(x_0)$ = مشتق تابع f در x_0 = شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه ای به طول $x = x_0$.



مثال

نقاط a, b, c, d, e, f, g روی منحنی شکل زیر قرار گرفته‌اند. شیب خطوط مماس بر منحنی در این نقاط را با هم مقایسه کنید.



پاسخ:

$$\begin{aligned} m_a, m_b, m_f > 0 &\Rightarrow m_a > m_b > m_f \\ m_c &= 0 \\ m_d, m_e, m_g < 0 &\Rightarrow m_g > m_e > m_d \\ \Rightarrow m_a > m_b > m_f > m_c > m_g > m_e > m_d \end{aligned}$$

مشتق‌پذیری:

تابع f را در نقطه $x = a$ مشتق‌پذیر گوئیم، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \text{۱- تابع } f \text{ در } x = a \text{ پیوسته باشد، یعنی:}$$

۲- مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

مثال

$$\text{مشتق‌پذیری تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases} \text{ را در } x = -1 \text{ بررسی کنید.}$$

پاسخ:

اول پیوستگی تابع f را در $x = -1$ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 2x + 6 = 4 \end{cases}$$

تابع f در $x = -1$ پیوسته است حال باید ببینیم که مشتق چپ و راست تابع در $x = -1$ با هم برابرند یا خیر.

$$\begin{cases} f'_+(x) = 2x \Rightarrow f'_+(-1) = -2 \\ f'_-(x) = 2 \Rightarrow f'_-(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

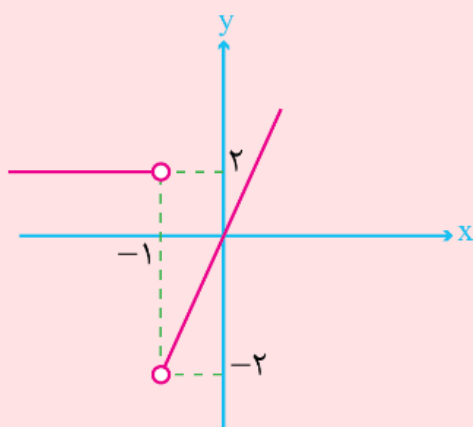
پس تابع f در $x = -1$ ، پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است.

حالا اگر تو این سؤال از ما ضابطه تابع مشتق رو بخوان چی؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases} (*)$$



آقا! چرا توی قسمت (*) علامت مساوی رو نداشتیم؟ گفتیم که تابع f توی $x = -1$ مشتق‌پذیر نیست پس $x = -1$ نمی‌تونه توی دامنه تابع مشتق حضور داشته باشه. حالا بیاین نمودار تابع مشتق رو هم رسم کنیم:



به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = -2$ بررسی کنید.

پاسخ:

اول از همه باید پیوستگی تابع f رو در $x = -2$ بررسی کنیم (خودت بررسیش کن). در مرحله بعد باید برابری مشتق چپ و راست رو توی $x = -2$ بررسی کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} f'_+(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = +4 \\ f'_-(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = -4 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین: تابع f در $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است.

◀ قواعد مشتق‌گیری:

- $y = c ; c \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = 0$
- $y = ax + b \Rightarrow y' = a$
- $y = kf(x) \Rightarrow y' = kf'(x)$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $y = f(x) \times g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$



- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
- $y = (f(x))^n \Rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \Rightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$
- $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$
- $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$
- $y = \sin(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cos(f(x))$
- $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$
- $y = \cos(f(x)) \Rightarrow y' = -f'(x)\sin(f(x))$
- $y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$
- $y = \tan(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)(1 + \tan^2(f(x)))$

مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر

• $f(x) \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)$



مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $y = \frac{9x+1}{x-x^2}$

ب) $y = \frac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

پ) $y = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

ت) $y = (-3x^2+x)^5(2x)$

ث) $y = \sin(3x^2)$

ج) $y = \cos^3(2x)$

چ) $y = \sin^3 x + \cos^2 x$

ح) $y = 3\tan^2 x + \cos x^2$

خ) $y = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

د) $y = 3x(x^2-6x)^3 + \cos 2x$

ذ) $y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{x^2 + \sqrt{x}}$

ر) $y = \frac{1-\sin x}{\cos x}$

پاسخ:

الف) $y = \frac{9x+1}{x-x^2} \Rightarrow y' = \frac{9(x-x^2) - (1-2x)(9x+1)}{(x-x^2)^2}$

ب) $y = \frac{x^2-3x+1}{-3x+2} \Rightarrow y' = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$

پ) $y = (\sqrt{3x+2})(x^3+1) \Rightarrow y' = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^3+1) + (3x^2)(\sqrt{3x+2})$

ت) $y = (-3x^2+x)^5(2x)$

$\Rightarrow y' = 5(-6x+1)(-3x^2+x)^4(2x) + (2)(-3x^2+x)^5$



ث) $y = \sin(3x^2) \Rightarrow y' = 6x \cos(3x^2)$

ج) $y = \cos^3(2x) \Rightarrow y' = -6 \cos^2(2x) (\sin(2x))$

چ) $y = \sin^3 x + \cos^3 x \Rightarrow y' = 3 \sin^2 x \cos x + 2 \cos x (-\sin x)$

ح) $y = 3 \tan^2 x + \cos x^2 \Rightarrow y' = 6 \tan x (1 + \tan^2 x) + 2x (-\sin x^2)$

خ) $y = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \Rightarrow y' = -\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \times \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2}$

د) $y = 3x(x^2 - 6x)^3 + \cos 2x$

$\Rightarrow y' = \left[3(x^2 - 6x)^3 + (3(2x - 6)(x^2 - 6x)^2) \times 3x \right] - 2 \sin 2x$

ذ) $y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{x^2 + \sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\right)(x^2 + \sqrt{x}) - (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(\sin \frac{x}{2})}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$

ر) $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{-\cos x (\cos x) - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$



اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ مقدار $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ را حساب کنید.

پاسخ:

$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x = \sin 2x + 2 \sin 2x = 3 \sin 2x$

$f''(x) = 6 \cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 3$



اگر f و g توابعی مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 1$ ، $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ باشند، مطلوبست محاسبه موارد زیر:

الف) $(fg)'(2)$ ب) $(f+g)'(2)$ پ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

پاسخ:

الف) $(fg)'(2) = (f'g + g'f)(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2)$
 $= (1 \times (-3)) + (2 \times 3) = -3 + 6 = 3$

ب) $(f+g)'(2) = (f' + g')(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$

پ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)(2) = \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{(g(2))^2}$
 $= \frac{(1 \times (-3)) - (2 \times 3)}{(-3)^2} = \frac{-3 - 6}{9} = -1$



جمع بندی سریع



اگر u تابعی بر حسب x و $y = f(u)$ باشد آن گاه:

$$y' = u'f'(u)$$

$$y = f^n(u) \Rightarrow y' = nf^{n-1}(u) \times u'f'(u)$$

مثال



$$y = f(\sqrt{x} + 4x^2) \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8x\right)f'(\sqrt{x} + 4x^2)$$

$$y = f^3(3x^4) \Rightarrow y' = 3f^2(3x^4)(12x^3)f'(3x^4)$$

مثال



با فرض اینکه تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر بوده و برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(2) = f(2) = 2$ و $g(x) = f^2(x^2 + \sqrt{x})$ باشد، حاصل $g'(1)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$g(x) = f^2(x^2 + \sqrt{x}) \quad , \quad f'(2) = f(2) = 2$$

$$g'(x) = 2f(x^2 + \sqrt{x}) \times \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times f'(x^2 + \sqrt{x})$$

$$x = 1 \Rightarrow g'(1) = 2f(2)f'(2) = 2(2)(2) = 2.$$

آهنگ تغییر:

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال



آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می کند به دست آورید.

پاسخ:

$$f \text{ آهنگ تغییر متوسط تابع } = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

نکته طلایی



آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در نقطه $x = a$ برابر است با: $f'(a)$



مثال

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (10)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x = t \text{ لحظه } f'(t) = 2t - 1$$

می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[0, 5]$ باهم برابر باشند، پس:

$$2t - 1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$



فصل پنجم: کاربردهای مشتق

◀ نقاط بحرانی:

- اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، نقاط بحرانی تابع f عبارتند از:
- نقاط ابتدا و انتهای بازه
 - نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.
 - نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است.
- توجه:** نقاط بحرانی در دامنه تابع قرار دارند.



نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ:

ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

می‌دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، جزء نقاط بحرانی‌اند پس $x = -2$ و $x = 2$ بحرانی‌اند.

از طرفی می‌دانیم در نقاطی که مشتق تابع برابر صفر باشد، آن نقاط نیز جزء نقاط بحرانی‌اند، لذا:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتند از: $x = -2$ و $x = +2$ ، $x = 0$

◀ اکسترم نسبی:

برای پیدا کردن نقاط اکسترم نسبی یک **تابع پیوسته** به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ۱- دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
 - ۲- نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.
 - ۳- جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.
 - ۴- حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:
- اگر علامت f' در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.
 - اگر علامت f' در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.
 - اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهار نظر کرد.



توجه: هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترمم نسبی نیست.



در تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

پاسخ:

$$D_f = \mathbb{R}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f ، مشتق آن را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین $x = -3$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f		↗	↘	↗
		max نسبی	min نسبی	

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow \text{طول max نسبی} \\ x = 1 \Rightarrow \text{طول min نسبی} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow f(-3) = 17 \Rightarrow A(-3, 17) \Rightarrow \text{max نسبی} \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = -15 \Rightarrow B(1, -15) \Rightarrow \text{min نسبی} \end{cases}$$



با فرض اینکه تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه (a, b) ، نقطه اکسترمم نسبی تابع

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ f(a) &= b \end{aligned} \right\} \text{ f باشد در این صورت:}$$



اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

پاسخ:

چون نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f است پس اولاً $f(2) = 1$ و ثانیاً $f'(2) = 0$ است:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 12 + 4b = 0$$

$$\Rightarrow b = -3 \xrightarrow{4b+d=-7} d = 5$$



◀ اکسترمم مطلق:

- برای پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق تابع f به روش زیر عمل می‌کنیم:
- ۱- نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.
 - ۲- مقدار تابع را به‌ازای نقاط بحرانی به‌دست می‌آوریم.
 - ۳- از بین مقادیر به‌دست آمده در مرحله ۲، بیشترین مقدار را به‌عنوان ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار را به‌عنوان مینیمم مطلق تابع f معرفی می‌کنیم.
- توجه:** در بعضی از سؤالات، از روش رسم نمودار نیز می‌توان برای تعیین اکسترمم‌های تابع کمک گرفت.



اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود تعیین کنید.

پاسخ:

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[-1, 3]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس $x = -1$ و $x = 3$ (نقاط ابتدا و انتهای بازه) و $x = 1$ ، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. حال باید مقدار تابع f را به‌ازای نقاط بحرانی به‌دست بیاوریم:

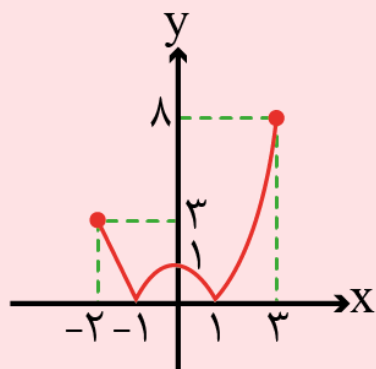
$$f(x) = x^3 - 3x + 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 7 = 5 \Rightarrow \text{min مطلق} \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 + 3 + 7 = 9 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = 27 - 9 + 7 = 25 \Rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$



نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کرده و با توجه به آن نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را تعیین کنید.

پاسخ:

با توجه به نمودار زیر:



نقطه $(-1, 0)$: $\left. \begin{array}{l} \text{نقطه مینیمم مطلق} \\ \text{نقطه مینیمم نسبی} \end{array} \right\}$

نقطه $(0, 1)$: نقطه ماکزیمم نسبی

نقطه $(1, 0)$: $\left. \begin{array}{l} \text{نقطه مینیمم مطلق} \\ \text{نقطه مینیمم نسبی} \end{array} \right\}$

نقطه $(3, 8)$: نقطه ماکزیمم مطلق



بهبهینه سازی:

- ۱- ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به دست می آوریم.
- ۲- رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل کنیم.
- ۳- سپس از رابطه تک متغیره به دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم و ریشه مشتق را به دست می آوریم.
- ۴- حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می کنیم.



دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

پاسخ:

- ۱- کمیتی که قرار است بهینه شود، حاصل ضرب دو عدد حقیقی است یعنی قرار است $p = xy$ کمترین باشد.
- ۲- باتوجه به مسئله می دانیم که تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است یعنی $y - x = 10$ است حال باید رابطه به دست آمده در مرحله قبل را تک متغیره کنیم:

$$\begin{cases} p = xy \\ y - x = 10 \Rightarrow y = 10 + x \end{cases} \Rightarrow p = x(10 + x) = x^2 + 10x$$

حال از رابطه تک متغیره $p = x^2 + 10x$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم و ریشه مشتق را به دست می آوریم:

$$p' = 0 \Rightarrow 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5 \xrightarrow{y=10+x} y = 5$$



می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن 27π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کاررفته در تولید آن مینیمم شود؟

پاسخ:

می خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کمترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه ای که قرار است بهینه شود برابر است با:

$$S = \underbrace{\pi r^2}_{\text{سطح قاعده}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{سطح جانبی}} \quad (*)$$

از طرفی طبق اطلاعات مسئله می دانیم که حجم قوطی برابر 27π مترمکعب است یعنی:

$$V = \pi r^2 h = 27\pi \Rightarrow r^2 h = 27$$

حال باید به کمک $r^2 h = 27$ ، رابطه (*) را به صورت تک متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم:

$$\begin{cases} S = \pi r^2 + 2\pi r h \\ r^2 h = 27 \Rightarrow h = \frac{27}{r^2} \end{cases} \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{27}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$$



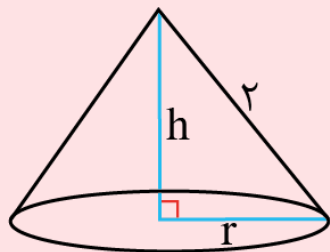
$$\Rightarrow S'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 54\pi \Rightarrow r = 3 \xrightarrow{h = \frac{27}{r^2}} h = 3$$

مثال

مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر ۲ را حول یکی از اضلاع قائمه‌اش دوران می‌دهیم تا یک مخروط به دست آید. ارتفاع مخروط را طوری بیابید که بیشترین حجم را داشته باشد.

پاسخ:

مطابق شکل طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$4 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 4 - h^2$$

حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(4 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(4h - h^3), \quad 0 < h < 2$$

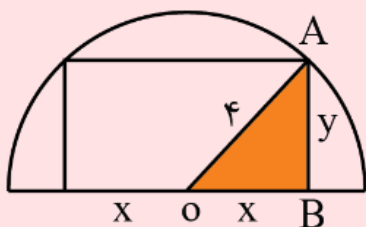
ماکزیم مقدار تابع V ، در نقطه بحرانی آن رخ می‌دهد، پس مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3} \xrightarrow{0 < h < 2} h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

مثال

یک مستطیل درون یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

پاسخ:



با توجه به شکل مقابل، اگر طول مستطیل را برابر $2x$ و عرض آن را برابر y فرض کنیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow 16 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

از طرفی رابطه‌ای که قرار است بهینه شود مساحت مستطیل است:

$$S = (2x)(y) = 2xy \quad (2)$$

حال به کمک روابط ۱ و ۲، یک رابطه تک‌متغیره می‌سازیم:

$$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow y = \sqrt{16 - x^2} \xrightarrow{S=2xy} S(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$$

حال برای اینکه مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد باید از رابطه $S(x)$ ، مشتق گرفته و آن را تعیین علامت کنیم:

$$S'(x) = \frac{-4(x^2 - 8)}{\sqrt{16 - x^2}} \xrightarrow{S'(x)=0} x = 2\sqrt{2} \xrightarrow{y=\sqrt{16-x^2}} y = 2\sqrt{2}$$

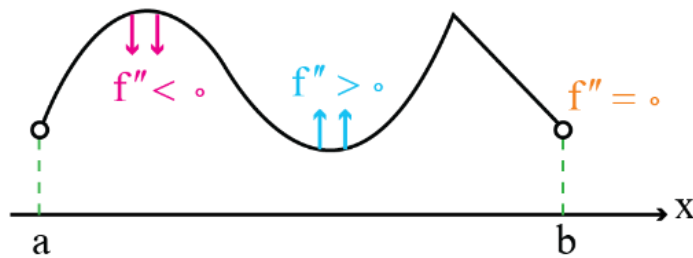


و بیشترین مساحت مستطیل برابر است با:

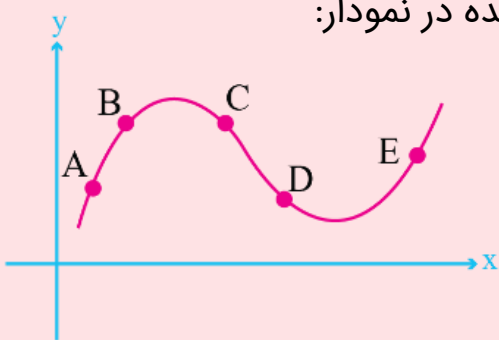
$$S_{\max} = (2x)(y) = 2(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 16$$

◀ جهت تقعر منحنی:

- با فرض اینکه $f''(x)$ به ازای هر x از بازه (a, b) ، موجود باشد:
- اگر به ازای هر x از بازه (a, b) ، $f''(x) > 0$ باشد آن گاه تقعر تابع f در این بازه **روبه بالا** است.
 - اگر به ازای هر x از بازه (a, b) ، $f''(x) < 0$ باشد آن گاه تقعر تابع f در این بازه **روبه پایین** است.
 - اگر به ازای هر x از بازه (a, b) ، $f''(x) = 0$ باشد آن گاه این آزمون بی نتیجه است.



مثال



شکل زیر را در نظر بگیرید. در کدامیک از نقاط مشخص شده در نمودار:

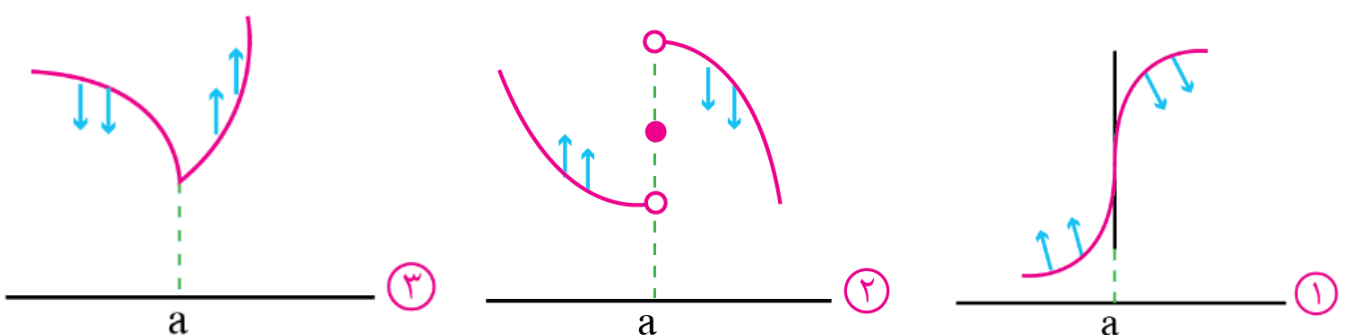
- الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی اند؟
 ب) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است؟
 پ) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو مثبت اند؟
 ت) $f'(x)$ مثبت و $f''(x)$ منفی است؟

پاسخ:

- الف) C ب) D پ) E ت) A و B

◀ نقطه عطف:

- نقطه $(a, f(a))$ را نقطه عطف تابع f می گوئیم هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشد:
- ۱- تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.
 - ۲- نمودار تابع f در این نقطه خط مماس واحد (افقی، مایل و یا قائم) داشته باشد.
 - ۳- جهت تقعر تابع f در این نقطه تغییر کند — یعنی — خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(a, f(a))$ از نمودار تابع عبور می کند.



۱) $x = a$ ، نقطه عطف است

۲) $x = a$ ، نقطه عطف نیست

(دلیل: عدم پیوستگی)

(دلیل: عدم وجود مماس واحد)



توجه مهم: اگر نقطه $(a, f(a))$ نقطه عطف تابع f باشد در این صورت یا $f''(a)$ وجود ندارد و یا اینکه $f''(a) = 0$ است.



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
 الف) در نقطه عطف علامت f'' تغییر می‌کند.
 ب) هر نقطه‌ای که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطه عطف است.
 پ) هر نقطه‌ای که در آن f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.
 ت) یک تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد.
 ث) تابع اکیداً صعودی، نقطه عطف ندارد.

پاسخ:

الف) درست
 ب) نادرست (به شکل شماره ۲ و ۳ در بالا نگاه کن)
 پ) نادرست
 ت) درست (ممکن است f'' بیش از یک ریشه داشته باشد و در آن‌ها تغییر علامت دهد).
 ث) نادرست (به شکل شماره ۱ در بالا نگاه کن)

◀ پیدا کردن نقطه عطف:

برای پیدا کردن نقطه (نقاط) عطف تابع f ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:
 ۱- ابتدا نقاط بحرانی تابع مشتق (f') را پیدا می‌کنیم.
 ۲- سپس از بین نقاط پیدا شده در مرحله ۱، نقاطی را به‌عنوان نقطه عطف معرفی می‌کنیم که هر سه شرط زیر را داشته باشند:
 • تابع f در آن پیوسته باشد.
 • تابع f در آن مماس واحد داشته باشد.
 • تابع f'' در آن تغییر علامت دهد.



جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را مشخص کنید.

پاسخ:

$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 \xrightarrow{f''=0} 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$
 حال جدول تعیین علامت f'' را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''			

همان‌طور که می‌بینید، f'' در $x = -1$ ، تغییر علامت می‌دهد از طرفی می‌دانیم که تابع f ، تابعی همواره پیوسته و مشتق پذیر است پس نقطه به طول $x = -1$ نقطه عطف تابع است.

$y = x^3 + 3x^2 + 1 \xrightarrow{x=-1} y = 3$
 مختصات نقطه عطف: $(-1, 3)$



مثال

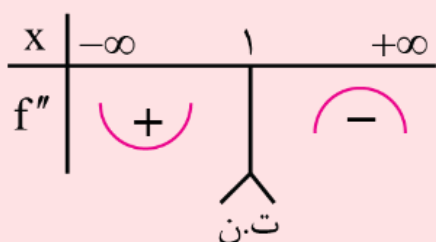
جهت تقعر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در دامنه‌اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

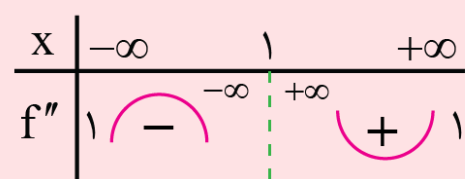
با توجه به ضابطه تابع f می‌توان گفت که تابع f در $x=1$ پیوسته است و همچنین اگر $x > 1$ باشد آن‌گاه $f'' < 0$ بوده و جهت تقعر منحنی رو به پایین است و اگر $x < 1$ باشد $f'' > 0$ بوده و جهت تقعر منحنی رو به بالاست پس جهت تقعر تابع f در $x=1$ عوض می‌شود از طرفی از فصل مشتق می‌دانیم که این تابع در $x=1$ دارای مماس قائم است بنابراین $x=1$ نقطه عطف تابع f است. ببینید:



مثال

ابتدا جهت تقعر تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده و سپس وجود نقطه عطف آن را بررسی کنید.

پاسخ:



$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

همان‌طور که می‌بینید، در بازه $(1, +\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه $(-\infty, 1)$ تقعر رو به پایین است از طرفی این تابع نقطه عطف ندارد و $x=1$ نیز در دامنه تعریف تابع قرار ندارد.

جمع‌بندی سریع

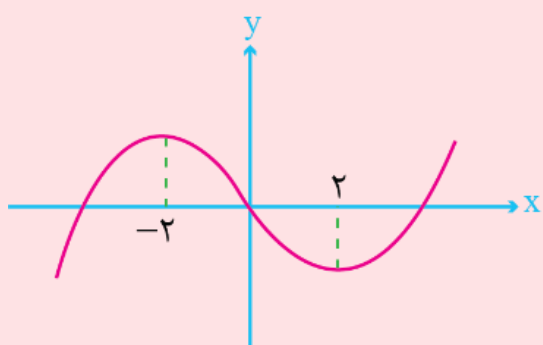
اگر نقطه (a, b) ، یک نقطه عطف تابع f باشد، داریم:

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f''(a) = 0 \end{cases}$$



مثال

اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطه $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a ، b و c را پیدا کنید.



پاسخ:

چون نقطه $(0,0)$ نقطه عطف تابع است پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \xrightarrow{f''(0)=0} 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

از طرفی با توجه به شکل مشخص است که در $x = 2$ و $x = -2$ ، مماس افقی داریم، پس:

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{a=0} f'(x) = 3x^2 + b$$

$$\xrightarrow{f'(2)=0} 3(4) + b = 0 \rightarrow b = -12$$

◀ مراحل رسم نمودار توابع:

برای رسم نمودار یک تابع باید همه و یا بعضی از مراحل زیر را انجام داده و به کمک آن‌ها جدول رفتار تابع را تشکیل دهیم و سپس نمودار تابع را رسم کنیم:

- ۱- دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

- ۲- محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات را در صورت وجود تعیین می‌کنیم.

- ۳- رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را مشخص می‌کنیم.

- ۴- مجانب‌های افقی و قائم تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

- ۵- f' را به دست آورده و با تعیین علامت آن بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها صعودی و یا نزولی است را معین می‌کنیم.

- ۶- نقاط بحرانی و اکسترمم‌های تابع (نسبی و مطلق) را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

- ۷- f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع را در بازه‌های مختلف مشخص می‌کنیم.

- ۸- نقطه عطف تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

- ۹- جدولی رسم می‌کنیم و اطلاعات حاصل از f ، f' و f'' را که به دست آورده‌ایم درون آن پیاده می‌کنیم.

- ۱۰- نمودار تابع را به کمک اطلاعات مراحل قبل رسم می‌کنیم. (اگر لازم شد از یه سری نقاط کمکی دیگه هم استفاده می‌کنیم).



جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9$ را رسم کنید.

پاسخ:

۱- به دست آوردن دامنه تابع:

$$D_f = \mathbb{R}$$

۲- محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -9 \\ y = 0 \Rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

فرض کنیم نمی‌دونیم جوابش چی میشه!

۳- رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty \end{cases}$$

۴- این تابع مجانب افقی و قائم ندارد. (پس الکی دنبالش نمی‌گردیم!)

۵- f' و f'' را به دست آورده و به کمک آن‌ها نقاط بحرانی و تقعر تابع را (در صورت وجود) مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x \xrightarrow{f'(x)=0} -3x(x-4) = 0$$

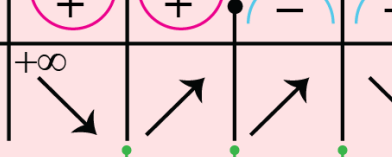
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \xrightarrow{f} f(0) = -9 \\ x = 4 \xrightarrow{f} f(4) = 23 \end{cases}$$

نقاط $(0, -9)$ و $(4, 23)$ ، نقاط بحرانی‌اند.

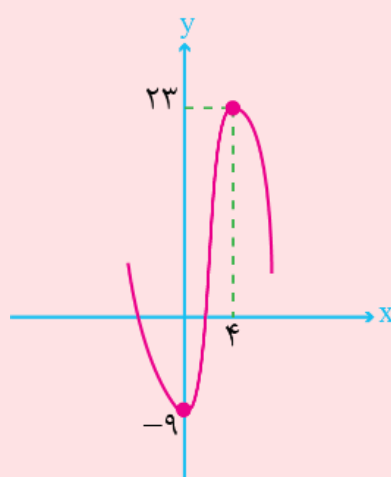
$$f''(x) = -6x + 12 \xrightarrow{f''(x)=0} -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{f} f(2) = 7$$

۶- حال جدول تغییرات را رسم کرده و f' و f'' را تعیین علامت می‌کنیم:

X	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$		
f'	-	•	+	+	•	-	
f''	+		+		-		-
f	$+\infty$					$-\infty$	



min عطف max



توجه شود که f'' در دو طرف $x = 2$ تغییر علامت می‌دهد و بنابراین نقطه $(2, 7)$ نقطه عطف است.



◀ تابع هموگرافیک و ویژگی‌های آن:

۱- تابع به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ باشد را یک تابع هموگرافیک می‌نامیم.

- اگر $c = 0$ باشد این تابع به یک تابع خطی تبدیل می‌شود.
- اگر $ad - bc = 0$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

۲- دامنه تابع هموگرافیک به صورت $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ و برد آن هم به صورت $R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ است.

۳- تابع هموگرافیک، در کل دامنه خود نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) است.

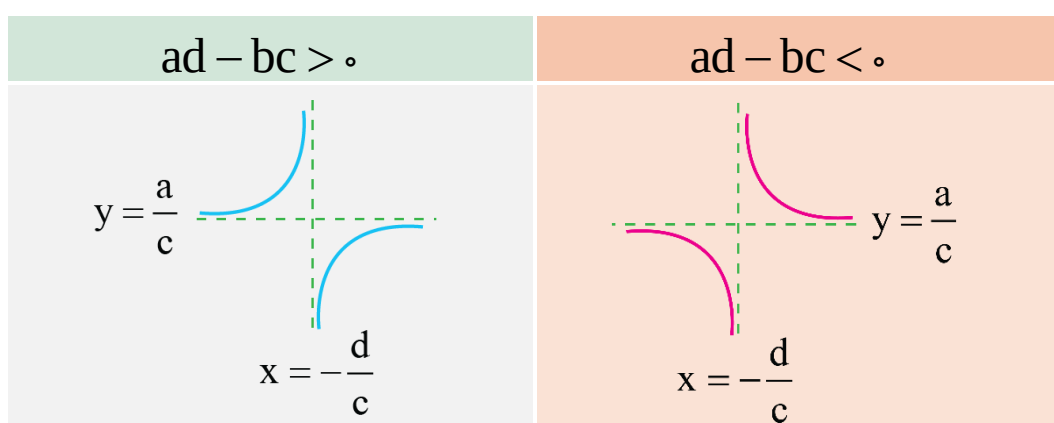
۴- این تابع دارای مجانب افقی $y = \frac{a}{c}$ و مجانب قائم $x = -\frac{d}{c}$ است.

۵- مشتق یک تابع هموگرافیک برابر است با: $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

رسم نمودار یک تابع هموگرافیک:

برای رسم یک تابع هموگرافیک مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- ابتدا ریشه عبارت مخرج کسر را پیدا می‌کنیم که همان مجانب قائم تابع است. $(x = -\frac{d}{c})$
 - سپس حاصل حد تابع را در $\pm\infty$ پیدا می‌کنیم که همان مجانب افقی تابع است. $(y = \frac{a}{c})$
 - محل برخورد تابع با محورهای مختصات را (در صورت وجود) پیدا می‌کنیم:
- $$\begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } x \text{ ها} \\ f(0) \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها} \end{cases}$$
- از تابع مشتق گرفته و با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.
 - با توجه به علامت مشتق و به کمک جدول زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:





مثال

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$ را رسم کنید.

پاسخ:

$$f(x) = \frac{2x+1}{-x+1} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

ابتدا مجانب‌های تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\text{مجانِب افقی تابع: } y = \frac{a}{c} \Rightarrow y = -2 \quad \text{مجانِب قائم تابع: } x = -\frac{d}{c} \Rightarrow x = 1$$

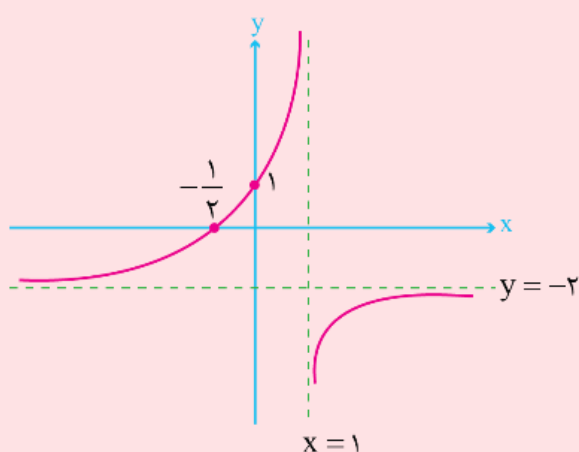
حال از تابع مشتق گرفته و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{3}{(-x+1)^2} \Rightarrow f'(x) \neq 0 \Rightarrow \text{تابع } f \text{ نقطه بحرانی ندارد}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		+
f	-2 ↗		↗ -2

و محل برخورد تابع f با محورهای مختصات برابر است با:

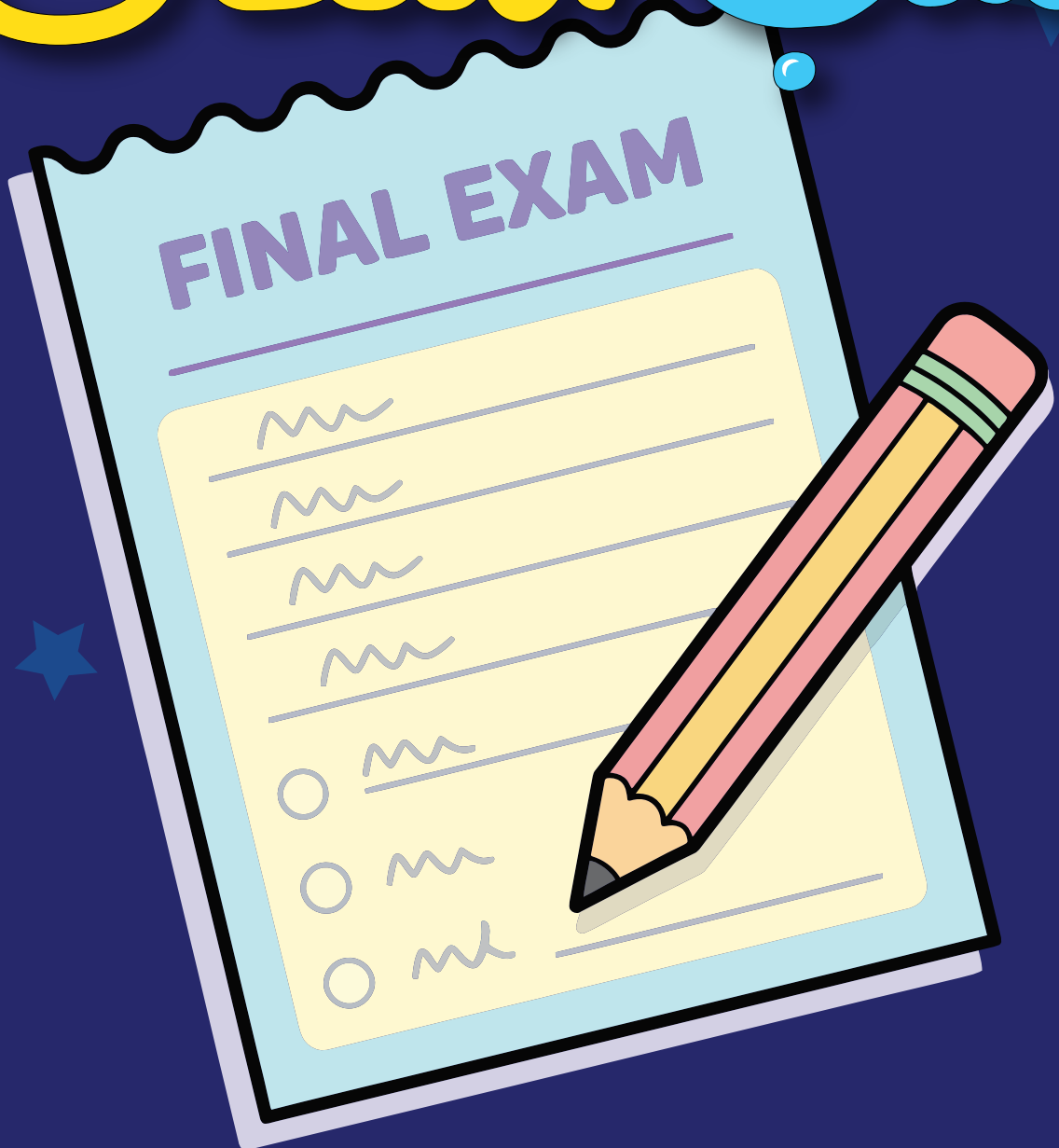
$$f(x) = \frac{2x+1}{-x+1} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$



و چون $ad - bc > 0$ است لذا نمودار تابع f به صورت مقابل است:



تشریحی نویسی شب امتحان



حسابان دوازدهم ریاضی



تشریحی نویسی

نکات مهم امتحانات تشریحی درس حسابان دوازدهم

درس حسابان برای بسیاری از دانش آموزان، درسی چالشی و گاهی دلهره آور به نظر می رسد؛ اما حقیقت این است که حسابان، برخلاف تصور رایج، درسی قابل پیش بینی، قانون مند و قابل اعتماد است.

اگر مسیر مطالعه آن را درست انتخاب کنید، می تواند یکی از نمره سازترین و مطمئن ترین درس های امتحان نهایی و کنکور باشد.

دانش آموزانی که یاد می گیرند ریاضی را گام به گام و با منطق درست بخوانند، معمولاً نه تنها در امتحان نهایی به نمره ۲۰ می رسند، بلکه در کنکور نیز به راحتی از صدها داوطلب جلو می افتند؛ چراکه اکثر دانش آموزان این درس را با ترس و عجله مطالعه می کنند، نه با برنامه و فهم اصولی.

هدف از راهنمای تشریحی نویسی، ارائه یک مسیر روشن، عملی و استاندارد برای رسیدن به نمره کامل در امتحان نهایی است.

بخش اول: سبک و ساختار امتحان

اولین قدم برای گرفتن نمره کامل، آشنایی دقیق با ساختار آزمون است.

امتحان نهایی معمولاً در یک برگه پشت و رو برگزار می شود و شامل ۱۷ الی ۱۸ سؤال به ترتیب شامل موارد زیر است:

سوالات درست - نادرست

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، آن گاه $f'(a)$ وجود ندارد.

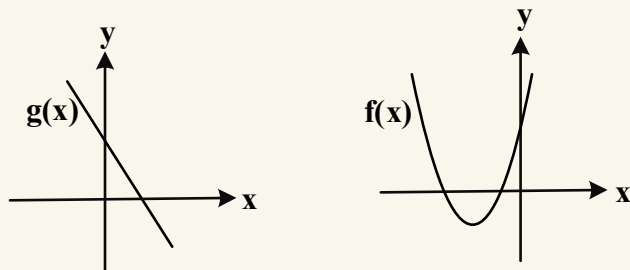
سوالات کامل کردنی (جای خالی)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر $f(x) = \cos(2x)$ باشد، مقدار $f''(\frac{\pi}{8})$ برابر است.

سوالات جورکردنی

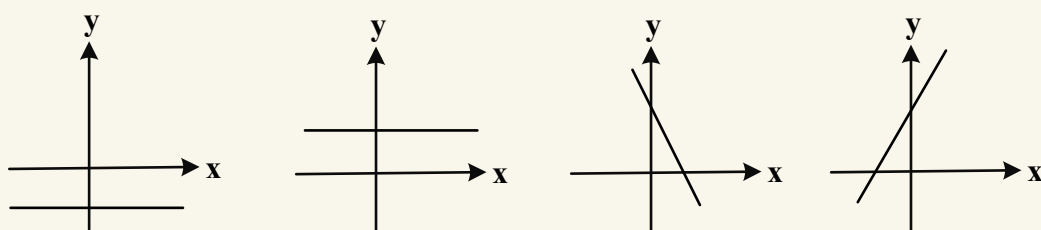
نمودار توابع f و g به صورت زیر است:



(ب)

(الف)

نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید، سپس شماره مربوط به آن را در پاسخ برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)





سوالات چهارگزینه‌ای

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

$$\text{الف) تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases} \text{ کدام وضعیت را دارد؟}$$

- (۱) ماکزیمم مطلق دارد ولی مینیمم مطلق ندارد. (۲) مینیمم مطلق دارد ولی ماکزیمم مطلق ندارد.
(۳) هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد. (۴) نه ماکزیمم مطلق و نه مینیمم مطلق دارد.

سوالات تشریحی

مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ را در بازه $[-3, 2]$ به دست آورید.

میانگین زمان پاسخ‌گویی برای هر سؤال حدود ۵ تا ۶ دقیقه است، بنابراین شناخت الگوی سؤال‌ها کمک می‌کند بتوانی مدیریت زمان را دقیق‌تر انجام دهی.

بارمبندی حسابان (۲)، پایه دوازدهم سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

فصل	نوبت دوم خرداد، شهریور و دی‌ماه
فصل ۱	۳
فصل ۲	۳
فصل ۳	۳
فصل ۴	۵/۵
فصل ۵	۵/۵

بخش دوم: آموزش پاسخ‌نویسی درست و اصولی در امتحان نهایی

در امتحان نهایی، فقط دانستن و حل سوال کافی نیست؛ بلکه نحوه نوشتن پاسخ‌ها، نظم ذهنی، و دقت در انتقال دانسته‌ها به پاسخ‌برگ امتحانی به همان اندازه اهمیت دارد.

گاهی دانش‌آموز مفهوم سوال را درک می‌کند و پاسخ صحیح را نیز می‌داند ولی به دلیل خط ناخوانا، حذف مراحل حل یا ننوشتن فرمول‌ها، بخشی از نمره را از دست می‌دهد.

در این بخش، اصول طلایی پاسخ‌نویسی را مرور می‌کنیم تا برگه امتحانت مثل پاسخ‌برگ یک دانش‌آموز حرفه‌ای بدرخشد.

۱-۲ صورت سؤال را دقیق بخوان.

همیشه قبل از نوشتن، یک‌بار با دقت صورت سؤال را بخوان. در ریاضی، هر کلمه در سؤال معنا دارد؛ گاهی یک واژه کوچک مثل «حداقل»، «بیشترین»، یا «در نقطه خاص» مسیر حل را تغییر می‌دهد. برای سؤالات چندبخشی، دور شماره هر قسمت خط بکش و مطمئن شو هیچ بخش را جا نمی‌اندازی. خواندن دقیق صورت سوال، اولین قدم برای درست نوشتن است.

۲-۲ از روش‌های تستی در پاسخ تشریحی استفاده نکن.

یکی از اشتباهات رایج این است که دانش‌آموز سعی می‌کند سؤال تشریحی را با روش تستی حل کند. در امتحان نهایی، مصحح به دنبال دیدن مراحل و منطق توست، نه فقط جواب نهایی. روش‌های تستی معمولاً کوتاه و بدون توضیح‌اند و در تصحیح تشریحی نمره‌ای به این روش‌ها تعلق نمی‌گیرد.



۳-۲ در سوالاتی که نیاز به نوشتن فرمول یا رابطه خاصی دارند، حتماً آنها را در پاسخبرگ بنویس.

در بسیاری از سؤالات، بخشی از نمره مخصوص نوشتن فرمول یا رابطه خاصی است. در تصحیح رسمی، به این مرحله گاهی تا نیم نمره تعلق می‌گیرد.

۴-۲ از بدخطی و ریزنویسی پرهیز کن.

مرتب‌نویسی یعنی احترام به تلاش خودت. ریزنویسی یا اعداد فشرده باعث می‌شود مصحح نتواند مراحل را به‌درستی دنبال کند.

۵-۲ پاسخ را ابتدا در برگه چرک‌نویس حل کن.

نوشتن مستقیم روی برگه اصلی خطرناک است، چون ممکن است در پایان متوجه اشتباه شوی که باعث کثیفی و خط خوردگی بیش از حد پاسخبرگ می‌شود. بنابراین بهترین راهکار این است که ابتدا پاسخ احتمالی را در چرک‌نویس بنویسی و وقتی مطمئن شدی مسیر حل درست است، پاسخ را با خط خوش در پاسخبرگ بنویس. در انتهای حل هر سوال، پاسخ نهایی را در یک کادر قرار بده یا با خودکار پرننگ‌تر مشخص کن تا بهتر دیده شود.

۶-۲ مدیریت زمان را جدی بگیر.

سؤال‌ها را یک‌بار سریع مرور کن و تشخیص بده کدام راحت‌تر است. از سؤال‌های ساده‌تر شروع کن تا اعتمادبه‌نفس پیدا کنی و کنار سؤال‌های دشوار علامت‌گذاری کن و بعد از اینکه همه سؤال‌های ساده را حل کردی به آن‌ها برگرد.

توجه داشته باشید که در ریاضی، اگر ۱۵ دقیقه را روی یک سؤال سخت وقت بگذاری، ممکن است دو سؤال ساده‌تر را از دست بدهی.

یاد بگیر زمان را بین سوالات تقسیم کنی، نه اینکه با اضطراب دنبال سؤال‌ها بدوی.

۷-۲ خوش‌خط و استاندارد بنویس.

لزومی ندارد زیبا باشد، فقط باید خوانا و منظم باشد. به عنوان مثال اعداد منفی را واضح بنویس، توان‌ها را بالاتر قرار بده، و از نمادهای درست استفاده کن.

بخش سوم: جمع‌بندی اشتباهات رایج که باید از آن‌ها پرهیز کنیم.

۱. مراحل حل را به صورت کامل بنویسید و هیچ مرحله‌ای را جا نیندازید (جامپ نکنید) چرا که در اکثر مواقع، به مسیر حل نمره تعلق می‌گیرد و نه جواب نهایی!

۲. اگر سوالی نیاز به نوشتن فرمول دارد، حتماً فرمول را در پاسخنامه وارد کنید.

۳. سعی کنید که با تمرین زیاد، اشتباهات محاسباتی خود را کاهش دهید. جابه‌جایی یک علامت منفی با مثبت، کل مسیر حل و حتی جواب نهایی را تغییر می‌دهد.

۴. اگر سوالی نیاز به رسم شکل، جدول و یا نمودار داشته باشد، حتماً آن را با دقت و وسواس کامل در پاسخبرگ وارد کنید.



۵. جواب نهایی را داخل کادر قرار دهید و یا زیر آن خط بکشید.

در نهایت یادتان باشد که در امتحانات تشریحی (برخلاف آزمون تستی)، فقط پاسخ درست ملاک نیست بلکه به مسیر حل و نحوه رسیدن به جواب، نمره تعلق می‌گیرد. امتحان تشریحی یعنی شما باید استدلال، فرمول، مراحل حل و نتیجه‌گیری را به روشنی بنویسید.

با آرزوی موفقیت

گروه ریاضی ماز



امتحانات نهایی آموزش و پرورش

فرورداد ماه ۱۴۰۳

فرورداد ماه ۱۴۰۴

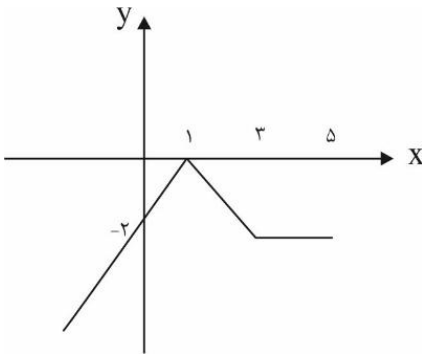
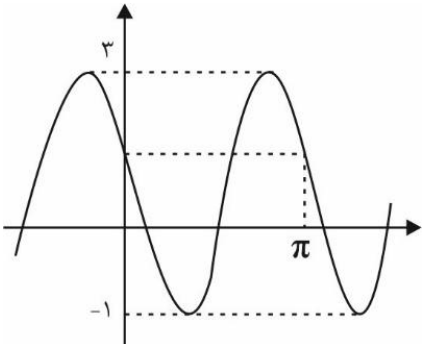
@konkurbanks / @Tahlilazemoon

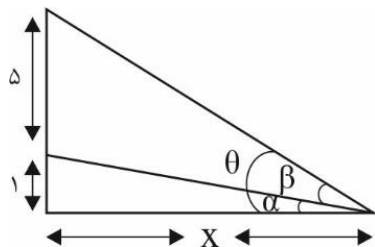


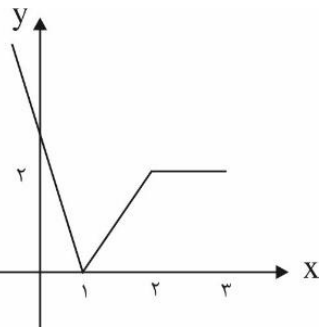
فروردین ماه ۱۴۰۳

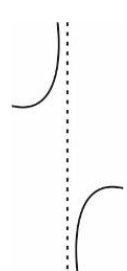


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

سؤالات آزمون نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۷
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران	نام و نام خانوادگی:
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است. ب) اگر $x = c$ طول یک نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.			
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی کند. ب) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ برابر است. پ) اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$ ، خط مماس بر نمودار f در $x = 4$ ، محور y ها را در نقطه ای به عرض قطع می کند.			
۳	نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است، نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید. 			
۴	الف) اگر چند جمله ای $p(x) = x^3 + mx + 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید. ب) چند جمله ای $x^5 - 1$ را طوری تجزیه کنید که $x - 1$ یک عامل آن باشد.			
۵	نمودار داده شده در شکل زیر مربوط به تابع با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. با فرض $a > 0$ ، مقادیر a ، b و c را به دست آورید. 			

سؤالات آزمون نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۷	
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		نام و نام خانوادگی:	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			
ردیف		سوالات (پاسخنامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
۶		معادله $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.					
۷		نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه x به صورت زیر است.  $\tan \beta = \frac{5x}{x^2 + 6}$					
۸		حدهای زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.) (الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2}$ (ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1)$					
۹		مجانبات قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x^3+2x}$ را به دست آورده و سپس وضعیت نمودار تابع را در نزدیکی مجانب قائم آن نمایش دهید.					
۱۰		مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.					
۱۱		اگر $f'(1) = 3$، $g'(1) = 5$، $f(1) = 1$، مقدار مشتق $(f+g)$ of در $x = 1$ را به دست آورید.					
۱۲		مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (الف) $f(x) = (x^3 + 1)^2 (\sqrt{3x+2})$ (ب) $g(x) = \sin^2 3x + \tan(x^2)$					
۱۳		جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می آید. (t برحسب ثانیه) (الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[3, 4]$ را به دست آورید. (ب) لحظه ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر 20 m/s است.					
۱۴		مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[-1, 3]$ را به دست آورید.					
۱۵		مقادیر a، b و c را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طوری به دست آورید که در نقطه $(3, -1)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $x = 1$ طول نقطه عطف آن باشد.					
۱۶		جدول رفتار و نمودار تابع $y = (x+2)(x-4)^2$ را رسم کنید.					

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: حسابان ۲	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۷
تعداد صفحه: ۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران	
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳			
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری	نمره	
۱	الف) درست (صفحه ۲۲) (۰/۲۵) ب) نادرست (صفحه ۱۱۶) (۰/۲۵)	۰/۵	
۲	الف) چهارم (صفحه ۲۱) (۰/۲۵) ب) $-\infty$ (صفحه ۵۰) (۰/۲۵) پ) ۹- (صفحه ۸۳)	۰/۷۵	
۳	دامنه: $(-\infty, 3]$ (۰/۲۵) برد: $[0, +\infty)$ (۰/۲۵) رسم نمودار: (۰/۷۵) (صفحه ۱۲)	۱/۲۵	
۴	الف) $p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -5$ (۰/۲۵) $p(-1) = 6$ (۰/۲۵) ب) $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ (۰/۵) (صفحه ۲۰ و ۲۲)	۱/۲۵	
۵	(صفحه ۲۸) $\begin{cases} c = 1 & (0/25) \\ a = 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2 & (0/25) \end{cases} \quad T = \pi = \frac{2\pi}{ b } \Rightarrow b = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱	
۶	روش اول: $\begin{cases} 2x = 2k\pi + x & (0/25) \\ 2x = 2k\pi + \pi - x & (0/25) \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi & (0/25) \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} & (0/25) \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ روش دوم: $\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi & (0/25) \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} & (0/5) \end{cases}$ (صفحه ۳۹)	۱	
ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم			

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۷		رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: حسابان ۲	
ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران			مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		تعداد صفحه: ۴
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳			
نمره	راهنمای نمره‌گذاری				ردیف
۱	(صفحه ۴۳) $\tan \beta = \tan (\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{6}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{6}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\frac{5}{x}}{\frac{x^2 + 6}{x^2}} = \frac{5x}{x^2 + 6}$ (۰/۲۵) $\downarrow$ (۰/۵) (۰/۲۵) (اگر دانش آموز از مفهوم شیب و رابطه $\tan \beta = \left \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right$ در حل مسئله استفاده کند، بارم این قسمت تعلق گیرد.)				۷
۱/۵	(صفحه ۵۳) الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (۰/۵) (صفحه ۶۶) ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$ (۰/۵) (صفحه ۶۵) پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$ (۰/۵)				۸
۱/۲۵	$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty \quad (0/25) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty \quad (0/25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ مجانب قائم } (0/25)$ (صفحه ۵۷) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x^3 + 2x} = 0 \Rightarrow y = 0$ مجانب افقی (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۲۵) 				۹
۱/۵	(۰/۲۵) f پیوسته است $\left. \begin{aligned} f'_-(\cdot) \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} &= \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{ x - \cdot}{x} = -1 \quad (0/5) \\ f'_+(\cdot) \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} &= \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x^2 - \cdot}{x} = \cdot \quad (0/5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(\cdot) \neq f'_+(\cdot) \text{ مشتق ناپذیر } (0/5)$ (صفحه ۱۰۱)				۱۰
ادامه پاسخها در صفحه سوم					

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۷
تعداد صفحه: ۴		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳				
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری			نمره
۱۱	$((f+g) \circ f)'(1) = \underbrace{f'(1)}_{(0/25)} \times \underbrace{(f+g)'(f(1))}_{(0/25)} = \underbrace{f'(1)}_{(0/25)} \times \underbrace{(f'(1) + g'(1))}_{(0/25)} = 3 \times 8 = 24$			۰/۷۵
(صفحه ۹۵ و ۹۶)				
۱۲	$\text{الف) } f'(x) = \underbrace{2 \times 3x^2}_{(0/25)} \underbrace{(x^3 + 1)}_{(0/25)} \underbrace{\left(\sqrt{3x+2}\right)}_{(0/25)} + \underbrace{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}_{(0/25)} \underbrace{(x^3 + 1)^2}_{(0/25)}$ $\text{ب) } g'(x) = \underbrace{2 \times 3 \cos 3x \sin 3x}_{(0/5)} + \underbrace{2x \left(1 + \tan^2(x^2)\right)}_{(0/5)}$ ↓ (اگر دانش‌آموزی به صورت $3 \sin 6x$ بنویسد، (۰/۵) نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.)			۲
۱۳	$\text{الف) روش اول: } \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 75}{1} = 5 \quad (0/25)$ $\text{روش دوم: } h'(3/5) = \underbrace{-10 \cdot (3/5)}_{(0/25)} + \underbrace{40}_{(0/25)} = 5 \quad (0/25)$ $\text{ب) } h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2 \quad (0/25)$			۱/۵
(صفحه ۱۰۷)				
۱۴	$f(-1) = 11 \quad (0/25)$ $f(2) = -16 \quad (0/25)$ $f(3) = -9 \quad (0/25)$ $\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \times (0/25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11 \quad (0/25)$			۱/۵
(صفحه ۱۲۵)				
۱۵	$f(3) = -1 \Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1 \quad (0/25)$ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \quad (0/25)$ $f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \quad (0/25)$ $\left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{a = -3}_{(0/25)}, \underbrace{b = -9}_{(0/25)}, \underbrace{c = 26}_{(0/25)}$			۱/۵
(صفحه ۱۲۶ و ۱۳۶)				
ادامه پاسخ‌ها در صفحه چهارم				

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۷																																	
تعداد صفحه: ۴		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران																																			
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش																																			
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳				پرورش																																			
ردیف		راهنمای نمره‌گذاری																																					
نمره																																							
۱۶		$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) ↓ اگر دانش آموزی مشتق را به صورت $(x-4)(3x) = (x-4)^2 + 2(x+2)(x-4)$ بنویسد، بارم این قسمت تعلق گیرد. $y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۵) <table><tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td>۰</td><td>۲</td><td>۴</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>+</td><td>۰</td><td>-</td><td>-</td><td>۰</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>∩</td><td>∩</td><td>∪</td><td>∪</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>۳۲</td><td>۱۶</td><td>۰</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>ماکزیمم</td><td>عطف</td><td>مینیمم</td><td></td></tr></table> (صفحه ۱۳۹)						X	$-\infty$	۰	۲	۴	$+\infty$	y	+	۰	-	-	۰	+	y		∩	∩	∪	∪		y	$-\infty$	۳۲	۱۶	۰	$+\infty$			ماکزیمم	عطف	مینیمم	
X	$-\infty$	۰	۲	۴	$+\infty$																																		
y	+	۰	-	-	۰	+																																	
y		∩	∩	∪	∪																																		
y	$-\infty$	۳۲	۱۶	۰	$+\infty$																																		
		ماکزیمم	عطف	مینیمم																																			
۲۰		جمع بارم																																					

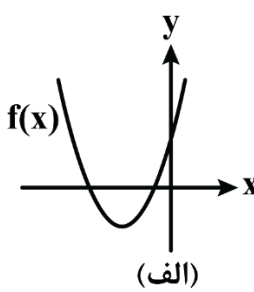
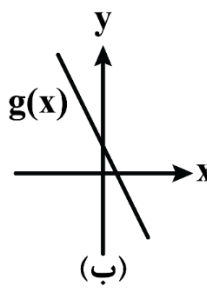
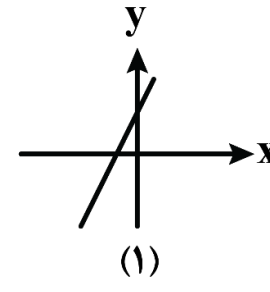
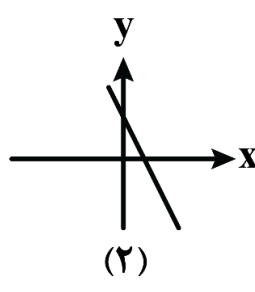
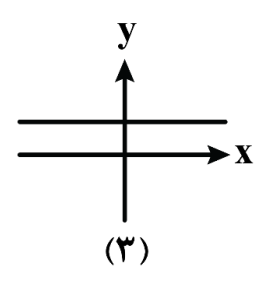
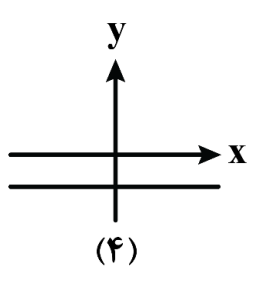
@konkurbanks / @Tahlilazemoon



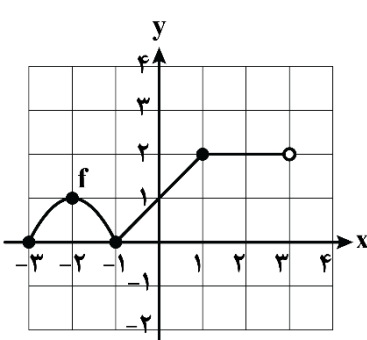
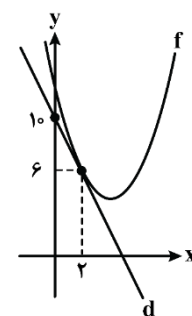
فردا د ماه ۱۴



SanjeshCloud
بنده • تگرام
www.SanjeshCloud.ir

سؤالات آزمون نهایی درس: حسابان (۲)		پایه: دوازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		نام و نام خانوادگی:	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴							
ردیف		سوالات (پاسخ برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
۱		درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $f(x) = (1-x)^3$، تابعی اکیداً نزولی است. ب) دامنهٔ تابع $y = \tan x$، برابر با مجموعهٔ $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است.					
۲		جاهای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز کامل کنید. ([] نماد جزء صحیح است.) الف) مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x=1$، برابر است. (صفر، یک) ب) نقطه‌ای به طول $x=2$، نقطهٔ تابع $f(x) = [x]$ است. (ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی)					
۳		کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$ را در همسایگی $x=0$ نمایش می‌دهد؟ (شمارهٔ شکل مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید.)  (۱)  (۲)  (۳)  (۴)					
۴		نمودار توابع f و g به صورت زیر است.  (الف)  (ب) نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. سپس شمارهٔ مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)  (۱)  (۲)  (۳)  (۴)					

صفحه ۱ از ۳

سؤالات آزمون نهایی درس: حسابان (۲)		پایه: دوازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		نام و نام خانوادگی:	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴							
ردیف		سؤالات (پاسخ برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
۵		نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع $g(x) = 3f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$ باشد، آن گاه: الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید. ب) اگر $A = (-2, 1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آن گاه نقطه متناظر A روی نمودار تابع g را بنویسید. 					
۶		مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش پذیر و باقی مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۲ باشد.					
۷		دوره تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = 2 - 3\sin 4x$ را به دست آورید.					
۸		جوابهای کلی معادله مثلثاتی $2 + 3\sin x = \cos 2x$ را به دست آورید.					
۹		اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ و $\tan \beta = -1$ باشد، آن گاه مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنید.					
۱۰		حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. ([نماد جزء صحیح است.)					
		الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 5x + 2}{7x^3 + 3x^2}$					
۱۱		مجانبهای قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{5x + 2}{x^2 - 4}$ را در صورت وجود به دست آورید. (راه حل نوشته شود).					
۱۲		مطابق شکل روبه‌رو، خط d بر نمودار تابع f در نقطه $(2, 6)$ مماس است. حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h}$ را به دست آورید. 					
۱۳		مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)					
		الف) $f(x) = (1 + \sin 5x)^3$ ب) $g(x) = (x^3 - 5x)(\sqrt{x^2 + 1})$					
۱۴		به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.					
صفحه ۲ از ۳							

سؤالات آزمون نهایی درس: حسابان (۲)		پایه: دوازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		نام و نام خانوادگی:	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴							
سؤالات (پاسخ برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.						نمره	
ردیف							
۱۵		الف) اگر f تابعی پیوسته با دامنه اعداد حقیقی باشد و $f(3) = 8 + f(1)$ ، آن گاه آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازه $[1, 3]$ به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه ای تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x = 27$ ، به دست آورید.					
۱۶		مقادیر اکستریم های مطلق تابع $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ را در بازه $[-3, 2]$ به دست آورید.					
۱۷		مقادیر a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ طوری به دست آورید که $x = 2$ ، طول نقطه اکستریم نسبی و $x = 0$ ، طول نقطه عطف این تابع باشد.					
۱۸		جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ را رسم کنید.					
		موفق باشید					
۲۰							
صفحه ۳ از ۳							

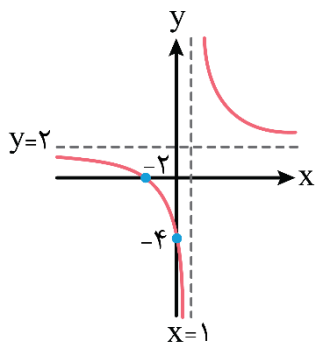
تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸		رشته: ریاضی و فیزیک		پایه: دوازدهم		راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: حسابان (۲)	
ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران				مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		تعداد صفحه: ۶	
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴					
نمره	راهنمای نمره‌گذاری					ردیف	
۰/۵	(الف درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۷)					۱	
۰/۵	(ب نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۳۲)						
۰/۵	(الف صفر (۰/۲۵) (صفحه ۹۲)					۲	
۰/۲۵	(ب ماکزیمم نسبی (۰/۲۵) (صفحه ۱۱۴)						
۰/۲۵	شکل شماره (۴) (۰/۲۵) (صفحه ۵۸)					۳	
۰/۵	(الف نمودار شماره (۱) (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۰)					۴	
۰/۵	(ب نمودار شماره (۴) (۰/۲۵) (صفحه ۱۰)						
۱/۵	الف (الف) (صفحه ۱۰) $D_g = [-۶, ۶]$ (۰/۵)					۵	
	(ب) $R_g = [۱, ۷]$ (۰/۵)						
	توضیحات جهت نمره‌گذاری:						
	در صورتی که باز یا بسته بودن بازه‌ها، دقیق مشخص نشود، برای هر مورد (۰/۲۵) کسر گردد.						
۱/۲۵	(صفحه ۱۳)					۶	
	$\begin{cases} p(-۲) = ۰ \\ p(۱) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۷ \\ a - b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۵}{۳} \\ b = \frac{۱۱}{۳} \end{cases}$						
	توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر با استفاده از قضیه تقسیم (چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای)، دستگاه معادلات فوق حاصل شود و به درستی مقادیر a و b به دست آید، به تناسب نمره تعلق گیرد.						
۰/۵	(صفحه ۲۷)					۷	
	$\max = -۳ + ۲ = ۵$ (۰/۲۵) , $T = \frac{۲\pi}{ ۴ } = \frac{\pi}{۲}$ (۰/۲۵)						
	توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر مقادیر ماکزیمم و دوره تناوب نمودار تابع از طریق روش هندسی (رسم نمودار تابع و مشخص کردن دقیق دوره تناوب و ماکزیمم) مشخص شود، به تناسب نمره تعلق گیرد.						
۱/۵	(ص ۳۷)					۸	
	$\underbrace{۲ + ۳ \sin x = ۱ - ۲ \sin^۲ x}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۲ \sin^۲ x + ۳ \sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow$						
	$\begin{cases} \sin x = -۱ & (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} & (۰/۲۵) \\ \sin x = -\frac{۱}{۲} & (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} & (۰/۲۵) \\ x = (۲k + ۱)\pi + \frac{\pi}{۶} & (۰/۲۵) \end{cases} \end{cases}$						
	توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر معادله از طریق روش هندسی حل شود (رسم نمودار توابع و مشخص کردن دقیق محل تلاقی) به تناسب نمره تعلق گیرد.						
صفحه ۱ از ۶							

راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: حسابان (۲)	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸
تعداد صفحات: ۶	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش	
ردیف	راهنمای نمره گذاری	نمره	
۹	(صفحه ۴۲) روش اول: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{2}{3} + (-1)}{1 - (\frac{2}{3})(-1)} = \frac{-1}{5} \quad (0/25)$ روش دوم: $\tan \beta = -1 \Rightarrow \beta = k\pi - \frac{\pi}{4}$ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \begin{cases} \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} & k = 2, 4, \dots \\ \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} & k = 1, 3, \dots \end{cases}$ $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{-1}{5} \quad (0/25)$ $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{-1}{5} \quad (0/25)$ توضیحات جهت نمره گذاری: اگر با استفاده از دیگر روابط مثلثاتی به جواب برسد، به تناسب نمره تعلق گیرد.	۰/۷۵	
۱۰	الف) روش اول: (صفحه ۵۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cdot+} = +\infty \quad (0/25)$ روش دوم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{[x]}{\sin x} + \cot x \right) = +\infty + \infty = +\infty \quad (0/25)$ ب) روش اول: (صفحه ۶۶) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 5x + 2}{7x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3}{7x^3} = \frac{-4}{7} \quad (0/5)$ توضیحات جهت نمره گذاری: اگر فقط عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3}{7x^3}$ در پاسخ برگ نوشته شود، (۰/۲۵) تعلق گیرد.	۱/۲۵	
	صفحه ۲ از ۶		

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: حسابان (۲)		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸
تعداد صفحات: ۶		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری			
۱۱	۱/۵ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Delta x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Delta x}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{مجانبات افقی} \quad (۰/۲۵)$ (صفحه ۶۹) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\Delta x + 2}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^-} = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\Delta x + 2}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^+} = +\infty \quad (۰/۲۵)$ در نتیجه، خط $x = 2$ مجانب قائم تابع است. (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\Delta x + 2}{x^2 - 4} = \frac{-8}{0^+} = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\Delta x + 2}{x^2 - 4} = \frac{-8}{0^-} = +\infty \quad (۰/۲۵)$ در نتیجه خط $x = -2$ مجانب قائم تابع است. (۰/۲۵) توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر با محاسبهٔ ریشه‌های مخرج (که ریشهٔ صورت نیست)، به مجانب قائم بودن $x = \pm 2$ اشاره شود، (۰/۵) نمره تعلق گیرد.			
۱۲	۰/۷۵ (صفحه ۷۷) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{2h} = \frac{-1}{3} f'(2) = \frac{-1}{3} \left(\frac{6-10}{2-0} \right) = \frac{2}{3}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)			
۱۳	۱/۷۵ (الف) (صفحه ۹۶) $f'(x) = (3) (\Delta \cos \Delta x) (1 + \sin \Delta x)^2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (ب) روش اول: (صفحه ۹۶) $g'(x) = (3x^2 - 5) (\sqrt{x^2 + 1}) + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) (x^3 - 5x)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) روش دوم: $g'(x) = (3x^2 - 5) (\sqrt{x^2 + 1}) + \left(\frac{1}{2} \right) (2x) (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (x^3 - 5x)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)			
صفحه ۳ از ۶				

تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: حسابان (۲)
ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران			تعداد صفحات: ۶
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴			ردیف
نمره	راهنمای نمره گذاری		
۱/۲۵	روش اول: (ص ۱۰۰) $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad (۰/۲۵)$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x - 4}{x - 1} = 4 \quad (۰/۲۵)$ با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$، نتیجه می شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵) روش دوم: $\left\{ \begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h + 2 = 2 \quad (۰/۲۵) \\ f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4(1+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4h}{h} = 4 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right.$ با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$، نتیجه می شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵) توضیحات جهت نمره گذاری: اگر از طریق رسم نمودار و مشخص کردن نقطه گوشه ای جواب حاصل شود یا از طریق استفاده از دستوره های مشتق (قضیه های مشتق گیری)، مشتق ناپذیر بودن تابع در $x = 1$ مشخص شود، (۰/۵) نمره تعلق گیرد. اگر فقط به جمله (تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر نیست) اشاره کند، (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.		
۱	الف) روش اول: (صفحه ۱۱۰) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(1) + 8 - f(1)}{2} = 4$ روش دوم: $f(3) - f(1) = 8$؛ (۰/۲۵) در نتیجه: ب) روش اول: $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$ $g(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{27}$ روش دوم: صفحه ۴ از ۶		

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: حسابان (۲)		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸																								
تعداد صفحه: ۶		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه																										
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش																										
ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران																												
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری			نمره																								
۱۶	(صفحه ۱۱۶) $f'(x) = -2x^2 - 2x + 4 \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{f'=0} x = -2, x = 1 \quad (۰/۲۵)$ در نتیجه، نقاط $x = -2$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع هستند. $f(1) = \frac{10}{3} \quad (۰/۲۵), \quad f(-2) = \frac{-17}{3} \quad (۰/۲۵)$ $f(-3) = -2 \quad (۰/۲۵), \quad f(2) = \frac{-1}{3} \quad (۰/۲۵)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر $y = \frac{10}{3}$ و مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر $y = \frac{-17}{3}$ است. توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر با رسم دقیق شکل، مقادیر اکسترمم‌های مطلق به صورت دقیق مشخص شود، به تناسب نمره تعلق گیرد.			۲																								
۱۷	(صفحه ۱۳۱) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad (۰/۲۵)$ $f''(x) = 6x + 2a \quad (۰/۲۵)$ $\begin{cases} f''(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = 0 \quad (۰/۲۵), \quad b = -12 \quad (۰/۲۵)$			۱/۲۵																								
۱۸	تعیین محل برخورد با محورها (به صورت جبری، به صورت مختصاتی، در جدول رفتار و یا بر روی نمودار) هر کدام (۰/۲۵) تعلق گیرد. $x = 0 \Rightarrow f(0) = -4, y = 0 \Rightarrow x = -2$ مشخص کردن هریک از مجانب‌ها (از طریق تعریف، فرمول، در جدول یا بر روی نمودار) هر کدام (۰/۲۵) تعلق گیرد. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+4}{x-1} = 2$ یا $y = \frac{c}{a} = 2$، در نتیجه: $y = 2$ مجانب افقی تابع است. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{x-1} = -\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{x-1} = +\infty$ یا $x = \frac{-d}{c} = 1$، در نتیجه: $x = 1$ مجانب قائم است. (صفحه ۱۴۱) <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>f''</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>f</td><td>2</td><td>-4</td><td>-4</td><td>$+\infty$</td><td>2</td></tr></table>			x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	f'	-	-	-	-	-	f''	-	-	-	0	+	f	2	-4	-4	$+\infty$	2	۲
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$																							
f'	-	-	-	-	-																							
f''	-	-	-	0	+																							
f	2	-4	-4	$+\infty$	2																							
صفحه ۵ از ۶																												

تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۸	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: حسابان (۲)
تعداد صفحه: ۶	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
ردیف	راهنمای نمره گذاری	نمره	
	محاسبه مشتق اول و تعیین علامت آن در جدول (۰/۲۵)	$f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2}$ $f''(x) = \frac{12}{(x-1)^3}$ 	محاسبه مشتق دوم، تعیین علامت آن و مشخص کردن جهت تقعر در جدول (۰/۲۵) رسم صحیح هر شاخه از نمودار (۰/۲۵)
با عرض سلام و ادب همکاران گرامی با تشکر از زحمات شما؛ لطفاً هنگام تصحیح اوراق به موارد زیر نیز توجه بفرمایید: ۱- برای ایجاد عدالت در تصحیح اوراق امتحانی دانش آموزان، راهنمای نمره گذاری (قابل استناد) ملاک اصلی برای تخصیص نمره به مراحل حل هریک از سؤالات می باشد. ۲- در صورتی که در حل سؤالی در یکی از مراحل حل، خطایی رخ داده باشد - بعضاً محاسباتی - اگر پس از آن خطا بقیه مراحل حل به درستی انجام شده باشد، فقط نمره خطای انجام شده کسر گردد و نمرات بقیه مراحل روند درست حل، مانند راهنمای نمره گذاری (قابل استناد) منظور گردد. با تقدیر و تشکر و آرزوی سلامتی برای همه شما عزیزان			
صفحه ۶ از ۶			