دفترچه سؤال

تسلط بر نیم‌سال اول

تسلط بر نیم‌سال دوم

جمعه

۱۴۰۳/۱۲/۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

ماز

گروه آزمایشی ریاضی و فیزیک ـ پایهٔ دوازدهم
آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز ـ مرحله ۵

تعداد صفحه: ۸ مدت پاسخگویی: ۱۴۰ دقیقه

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	فارسی	۳	۳۰ دقیقه
۲	عربی، زبان قرآن	۲	۳۰ دقیقه
۳	حسابان	۲	۴۰ دقیقه
۴	هندسه	۱	۴۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

بودجه‌بندی دروس این آزمون

دروس عمومی		دروس اختصاصی	
فارسی ۳	عربی ۳	حسابان ۲	هندسه ۳
فصل ۳(از ابتدای درس ۷ تا پایان فصل)، فصل ۴ و فصل ۵ صفحه‌های ۵۴ تا ۹۹	درس‌های ۲ و ۳ صفحهٔ ۱۷ تا ۴۸	فصل ۳ و فصل ۴ (تا پایان مشتق‌پذیری و پیوستگی) صفحهٔ ۴۵ تا ۸۹	فصل ۱ (از ابتدای دترمینان و کاربردهای آن) و فصل ۲(تا پایان انتقال(محورها)) صفحهٔ ۲۷ تا ۵۴

استراتژی و هدف گذاری در آزمون‌های شبیه‌ساز نهایی ماز

اهداف کوتاه مدت:

- رسیدن به بودجه‌بندی آزمون بعد
- یادگیری تشریحی خواندن و تشریحی نوشتن

اهداف میان مدت:

- پیشروی و تسلط بر ۵۰ درصد مباحث نیمسال اول تا آذرماه
- پیشروی و تسلط کامل بر نیمسال اول تا بهمن ماه
- پیشروی و تسلط بر ۵۰ درصد مباحث نیمسال دوم تا ایام نوروز
- پیشروی و تسلط کامل بر نیمسال دوم در اردیبهشت ماه
- تجربهٔ شبیه‌ساز کامل امتحان نهایی در روز قبل از هر امتحان خردادماه

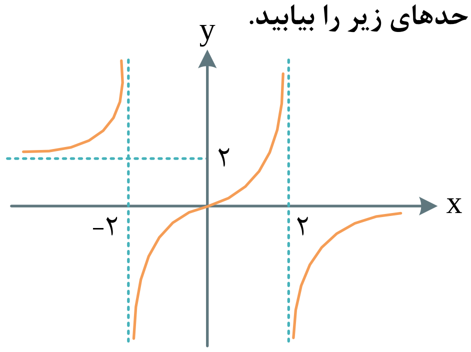
اهداف بلندمدت:

- تبدیل به یک دانش‌آموز حرفه‌ای در امتحان تشریحی و ۲۰ گرفتن
- تسلط بر نحوهٔ تشریحی‌نوشتن در حد یک مصحِّح آموزش و پرورش
- تمام اشتباهات احتمالی در امتحان نهایی رو قبل از امتحان نهایی تجربه کنید.

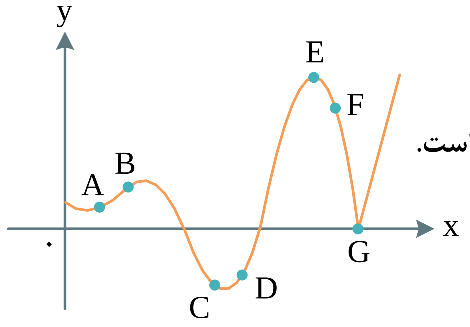
ماز

به نام خدا

سوالات آزمون نهایی درس: **حسابان ۲**	تعداد صفحه: **۲**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۱۲/۰۳**	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. آزمو ن وی ای پی الف) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و $L<0$ باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ است. ب) حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-[x]}{\lvert x\rvert}$ برابر $-\infty$ است. پ) اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$ باشد آن‌گاه شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱، برابر ۲ است. ت) تابع $f(x)=\lvert x^2-4\rvert$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است.	۲
۲	هریک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) حد تابع $f(x)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$ وقتی $x=+\infty$ برابر .... است. ب) اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه، f در a .... است. پ) اگر $f(0)=0$ و $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$ باشد آن‌گاه $f'(0)$ برابر .... است. ت) حاصل $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{x-1}{\tan x}$ برابر .... است.	۲
۳	با توجه به نمودار تابع f، حاصل حدهای زیر را بیابید.  الف) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=$ ب) $\lim_{x\to 2} f(x)=$ پ) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}=$ ت) $\lim_{x\to -\infty} fof(x)=$	۱
۴	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to(-3)^-}\frac{\sin(3+x)}{x^2+6x+9}$ ب) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+\cos x}{1-\cos x}$ پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{4x^2+1}}$	۳.۷۵
۵	نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{2-x}{2x+\lvert x\rvert}$ را در مجاورت مجانب قائم آن رسم کنید.	۱.۷۵

سوالات آزمون نهایی درس: **حسابان ۲**	تعداد صفحه: **۲**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۱۲/۰۳**	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره
۶	مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{1+2x^2}{1-x^2}$ را به‌دست آورید.	۱.۵
۷	با توجه به نمودار f، نقاط خواسته شده را بیابید. الف) نقطه یا نقاطی که مشتق تابع در آن برابر صفر است. ب) نقطه یا نقاطی که مشتق تابع در آن مقداری منفی است. پ) نقطه یا نقاطی که مقدار تابع در آن منفی و مشتق تابع در آن مثبت است. ت) نقطه یا نقاطی که تابع در آن مشتق‌پذیر نیست. 	۱.۲۵
۸	خط گذرنده از دو نقطه $(-1,2)$ و $(2,4)$، بر منحنی پیوسته $y=g(x)$ در نقطه $x=5$ مماس است. اگر منحنی توابع f و g در این نقطه برهم مماس باشند، حاصل $\lim_{x\to 5}\frac{f^2(x)-7f(x)+6}{x-5}$ را به‌دست آورید.	۲.۲۵
۹	اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-x \ ; & x\geq 1 \\ ax-a \ ; & x<1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a را به‌دست آورید.	۱.۲۵
۱۰	معادله نیم مماس چپ تابع $f(x)=(x-3)[x]$ را در نقطه‌ای به طول $x=3$ واقع بر منحنی بنویسید.	۱.۲۵
۱۱	نشان دهید خط $x=1$ مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt{\lvert x-1\rvert}$ است.	۲
	موفق باشید.	۲۰

به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	تعداد صفحه: **۴**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	**دوره دوم متوسطه – دوازدهم**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۱۲/۰۳**	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش‌خط و مرتب در این برگه وارد کنید.	
۱	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۲
۲	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۲
۳	الف) ب) پ) ت)	۱
۴	الف) ب) پ)	۳.۷۵

به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	تعداد صفحه: **۴**	رشته:	**ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع:	
نام و نام خانوادگی:	**دوره دوم متوسطه – دوازدهم**	تاریخ آزمون:	**۱۴۰۳/۱۲/۰۳**	مدت زمان:	**۴۰ دقیقه**

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش‌خط و مرتب در این برگه وارد کنید.	
۵		1.۷۵
۶		1.۵
۷	الف) ب) پ) ت)	1.۲۵

به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	تعداد صفحه: **۴**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	**دوره دوم متوسطه – دوازدهم**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۱۲/۰۳**	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش‌خط و مرتب در این برگه وارد کنید.	
۸		۲.۲۵
۹		۱.۲۵

به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	تعداد صفحه: **۴**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	**دوره دوم متوسطه – دوازدهم**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۱۲/۰۳**	مدت زمان: **۴۰ دقیقه**

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش‌خط و مرتب در این برگه وارد کنید.	
۱۰		۱.۲۵
۱۱		۲
	موفق باشید.	۲۰

دفترچه پاسخ

تسلط بر نیم‌سال اول

تسلط بر نیم‌سال دوم

جمعه

۱۴۰۳/۱۲/۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

ماز

گروه آزمایشی ریاضی و فیزیک ـ پایهٔ دوازدهم
آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز ـ مرحله ۵

درس	مسئول درس	ویراستاری
فارسی	حسن وسکری ـ فاطمه عباسی ـ علیرضا جعفری	حمزه نوری ـ فاطمه حمیدی
عربی، زبان قرآن	هاله کریمی ـ محمدعلی تابانفر	کیارش پورمهدی ـ مریم آقایاری
حسابان	محدثه شیخعلی ـ سیدجواد نظری	حمیدرضا ولی‌پور ـ نرجس تیمناک
هندسه	سوگند روشنی ـ سید جواد نظری	

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصحح شو:

پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:

اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌ترِ جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:

امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاورۀ حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:

توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصلۀ بین نمرۀ خوب و نمرۀ ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکتۀ طلایی:

با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامۀ مفصل داره، باز هم اگه نکتۀ مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: **حسابان ۲**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
دوره دوم متوسطه – دوازدهم تاریخ آزمون: **۱۴۰۳/۱۲/۰۳**	ساعت شروع: مدت زمان: **۴۰ دقیقه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی	**گروه آموزشی ماز**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	(see below)	۲

مصحّح شو:

الف) نادرست (۰/۵)　ب) نادرست (۰/۵)　پ) درست (۰/۵)　ت) نادرست (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) نادرست است. (مرتبط با صفحه ۵۲)

این گزاره زمانی درست است که مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a، مثبت باشد.

۲۰ شو

قضیه: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = ۰$ در این صورت:

الف) اگر $L > ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L < ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) نادرست است. (مرتبط با کار درکلاس صفحه ۵۳) می‌دانیم زمانی که $x \to ۰^-$، داریم:

$$\begin{cases} [x] = [۰^-] = -۱ \\ |x| = -x \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{x-[x]}{|x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x-(-۱)}{-x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x+۱}{-x} = \frac{۰+۱}{-(۰^-)} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

محاسبهٔ حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم. چند مثال ببینید:

- $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{[x]}{\sin x} = \dfrac{[۰^-]}{۰^-} = \dfrac{-۱}{۰^-} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{[x]-۳}{x-۳} = \dfrac{[۳^-]-۳}{۳^- - ۳} = \dfrac{۲-۳}{۰^-} = \dfrac{-۱}{۰^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲}{|x-۳|} = \dfrac{۲}{|۳-۳|} = \dfrac{۲}{|۰|} = \dfrac{۲}{۰^+} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{۱}{۳}\right)} \dfrac{[x]}{|۳x+۱|} = \dfrac{\left[-\frac{۱}{۳}\right]}{\left|۳\left(-\frac{۱}{۳}\right)+۱\right|} = \dfrac{-۱}{۰^+} = -\infty$

پ) درست است. (مرتبط با صفحه ۷۷) میخوای دلیلش رو بدونی ۲۰شو رو دریاب!

۲۰ شو

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آن‌که این حد موجود و متناهی باشد، حد بالا را در صورت وجود مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ت) نادرست است. (مرتبط با مثال صفحه ۸۶)

$$f(x)=\left|x^۲-۴\right|$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\left|x^۲-۴\right|-۰}{x-۲}$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\left|x^۲-۴\right|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{\left|x^۲-۴\right|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۴-x^۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(۲-x)(۲+x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}(-۲-x)=-۴$$

چون $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$ است. بنابراین $f'(۲)$ موجود نیست.

۲	مصحّح شو: الف) $\frac{۱}{۲}$ (۰/۵) ب) پیوسته (۰/۵) پ) -۱ (۰/۵) ت) صفر (۰/۵)	۲

مصحّح شو:

الف) $\frac{۱}{۲}$ (۰/۵) ب) پیوسته (۰/۵) پ) -۱ (۰/۵) ت) صفر (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) $\frac{۱}{۲}$ (مرتبط با مثال صفحه ۶۲ قسمت «ب»)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}}{۲-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to +\infty}۱+\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۱}{\sqrt{x}}}{\lim\limits_{x\to +\infty}۲-\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}}=\frac{۱+\frac{۱}{+\infty}}{۲-\frac{۱}{+\infty}}=\frac{۱+۰}{۲-۰}=\frac{۱}{۲}$$

ب) پیوسته (مرتبط با صفحه ۸۶)

۲۰ شو

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است.

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

پ) (-۱) (مرتبط با مثال صفحه ۷۹)

به کمک تعریف مشتق، داریم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}\overset{f(۰)=۰}{=\!=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=-۱$$

تعریف دیگری از مشتق

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

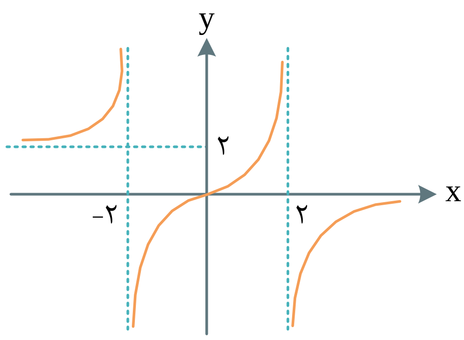
ت) صفر (مرتبط با صفحه ۵۳)

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\frac{x-۱}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{۲}-۱}{+\infty}=۰$$

۳

مصحّح شو:

(مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۶۹) باتوجه به نمودار تابع f، داریم:



الف) $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty$ $(۰/۲۵)$

ب) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x)=$ وجود ندارد $(۰/۲۵)$

پ) $\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\lim_{x\to ۲^+} f(x)}=\frac{۱}{-\infty}=۰$ $(۰/۲۵)$

ت) $\left\{\begin{array}{l}x\to-\infty: f(x)\to ۲^+\\ x\to ۲^+: f(x)\to-\infty\end{array}\right.\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty$ $(۰/۲۵)$

۱

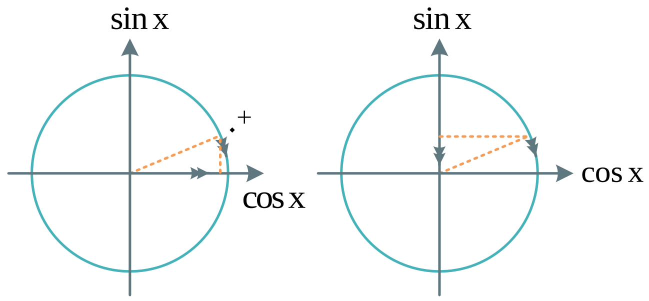
۴

مصحّح شو:

الف) (مرتبط با مثال صفحه ۵۴)

$$\lim_{x\to-۳^-}\frac{\sin(۳+x)}{x^۲+۶x+۹}=\lim_{x\to-۳^-}\underbrace{\frac{\sin(۳+x)}{(x+۳)(x+۳)}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim_{x\to-۳^-}\frac{\sin(۳+x)}{۳+x}\times\lim_{x\to-۳^-}\frac{۱}{۳+x}}_{(۰/۵)}=\underbrace{۱\times\frac{۱}{۰^-}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{-\infty}_{(۰/۲۵)}$$

ب) (مطابق با کار درکلاس ۲ صفحه ۵۵) با توجه به دایره مثلثاتی داریم:



$x\to ۰^+ : \cos x\to ۱^-$ $\quad$ $x\to ۰^+ : \sin x\to ۰^+$

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x+\cos x}{۱-\cos x}=\frac{۰+۱}{\underbrace{۱-۱^-}_{(۰/۲۵)}}=\frac{\overbrace{۱}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{۰^+}_{(۰/۲۵)}}=+\infty\ (۰/۲۵)$$

۳.۷۵

پ) (صفحه کار درکلاس ۳ صفحه ۶۶) **روش اول:** بیش‌ترین توانِ x در زیر رادیکال، ۲ است. بنابراین از x^2 زیر رادیکال فاکتور می‌گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{4x^2+1}}=\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right)}}{x+\sqrt{x^2\left(4+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}\right)}}}^{(0/5)}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2}}{x+\sqrt{4x^2}}}_{(0/25)}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+|x|}{x+2|x|}}_{(0/25)}\xrightarrow[|x|=x]{x\to+\infty}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+x}{x+2x}}_{(0/25)}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}}_{(0/25)}$$

روش دوم: هم‌ارزی پرتوان:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{4x^2+1}}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2}}{x+\sqrt{4x^2}}}_{(0/5)}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+|x|}{x+2|x|}}_{(0/25)}$$

$$\xrightarrow[|x|=x]{x\to+\infty}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+x}{x+2x}}_{(0/5)}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}}_{(0/25)}$$

۱- حد نامتناهی

نکته: در محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty$	$\frac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty$	$\frac{-\text{عدد}}{0^-}=+\infty$	$\frac{+\text{عدد}}{0^+}=+\infty$

۲- محاسبه حد توابع کسری در بی‌نهایت

در محاسبه $(m,n\in\mathbb{N})\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیش‌ترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیش‌تر است.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کم‌تر باشد.	صفر

مصحّح شو:

۵ (مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۵۸) ابتدا ریشه مخرج را پیدا می‌کنیم: $f(x)=\dfrac{۲-x}{۲x+|x|}$ ۱.۷۵

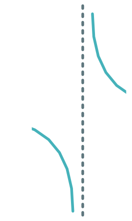
$$۲x+|x|=۰ \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰: ۲x+x=۰ \Rightarrow ۳x=۰ \Rightarrow x=۰ \\ x<۰: ۲x-x=۰ \Rightarrow x=۰ \end{cases}$$

پس $x=۰$، تنها ریشه مخرج است. بنابراین خط $x=۰$ مجانب قائم تابع است. (۰/۲۵) حال رفتار تابع f را در مجاورت $x=۰$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲-x}{۲x+|x|} \underset{|x|=x}{\overset{x\to ۰^+}{=\!=}} \underbrace{\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲-x}{۲x+x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲-x}{۳x}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲-x}{۲x+|x|} \underset{|x|=-x}{\overset{x\to ۰^-}{=\!=}} \underbrace{\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲-x}{۲x-x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲-x}{x}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب قائم (یعنی $x=۰$) به‌صورت مقابل است:



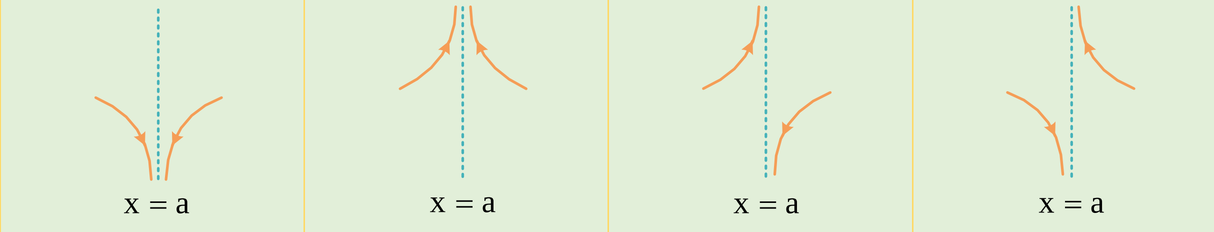
$x=۰$

رسم صحیح شکل، (۰/۵)

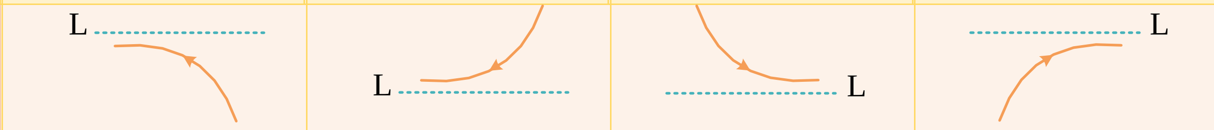
حالا مجانب‌ها رو خوب یاد بگیرید...

- مجانب‌ها
  - قائم
    - خط $x=a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$
    - کاندیدهای مجانب قائم
      - در توابع کسری ریشه‌های مخرج کسر که ریشه صورت کسر نباشند.
      - خطوط $x=(۲k+۱)\dfrac{\pi}{۲a}$ در توابع $y=\tan(ax)$
  - افقی ← خط $y=L$ را مجانب افقی تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$
  - مایل ← در محدوده کتاب درسی نیست.

رفتار تابع در نزدیکی مجانب قائم



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L^-$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L^+$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L^+$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L^-$

---

۶ — (۱.۵)

مصحّح شو:

(مرتبط با مثال صفحه ۶۷، تمرین ۴ صفحه ۶۹) برای پیدا کردن مجانب افقی تابع، حد تابع را در $\pm\infty$ پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲} = \overbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲}{-x^۲}}^{(۰/۲۵)} = -۲ \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین خط افقی $y=-۲$، مجانب افقی تابع است. برای پیدا کردن مجانب قائم تابع، ریشهٔ (های) مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{۱-x^۲=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

$x=\pm۱$ ریشه صورت نیستند، پس خطوط قائم $x=۱$ و $x=-۱$، مجانب‌های قائم تابع هستند. در نهایت:

مجانب افقی: $y=-۲ \quad (۰/۲۵)$

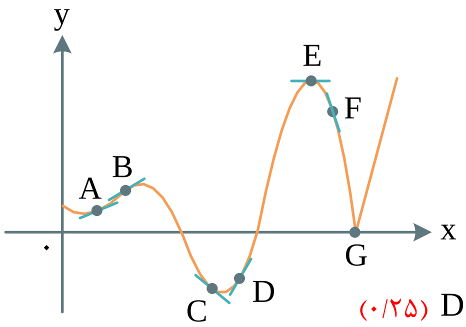
مجانب‌های قائم: $\begin{cases} x=۱ & (۰/۲۵) \\ x=-۱ & (۰/۲۵) \end{cases}$

---

۷ — (۱.۲۵)

مصحّح شو:

(مرتبط با تمرین ۷ صفحه ۸۲) با توجه به نمودار تابع f، داریم:



الف) نقطه‌ای که مشتق تابع در آن برابر صفر است: نقطه E (۰/۲۵)

ب) نقاطی که مشتق تابع در آن مقداری منفی است:

نقطه C (۰/۲۵)، نقطه F (۰/۲۵)

پ) نقطه‌ای که مقدار تابع در آن منفی و مشتق تابع در آن مثبت است: نقطه D (۰/۲۵)

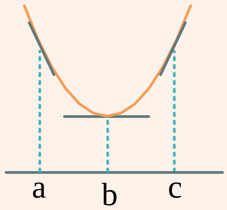
ت) نقطه‌ای که تابع در آن مشتق‌پذیر نیست: نقطه G (۰/۲۵)

خط مماس

در بعضی از سؤالات از ما می‌خواهند که شیب خط مماس بر نمودار تابع در چند نقطه را باهم مقایسه کنیم و یا این‌که درباره علامت مشتق در یک نقطه سؤالاتی مطرح می‌شود که برای پاسخ دادن به این سؤالات توجه به موارد زیر می‌تواند کمک کننده باشد:

- در بازه‌هایی که تابع f صعودی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع مثبت است، پس در آن بازه $f'>0$ است.
- در بازه‌هایی که تابع f نزولی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع منفی است، پس در آن بازه $f'<0$ است.
- در نقاطی از تابع f که شیب خط مماس بر نمودار تابع صفر است (مماس افقی است)، $f'=0$ است.

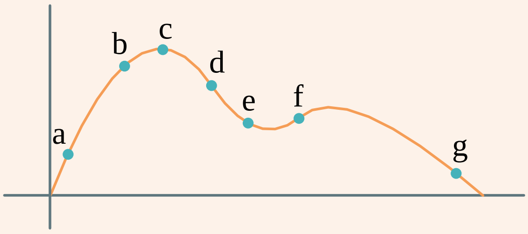
یه مثال ببینیم:



$$\begin{cases} f'(a)<0 \\ f'(b)=0 \\ f'(c)>0 \end{cases}$$

$f'(x_0)=$ مشتق تابع f در $x=x_0$ = شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=x_0$

مثال: نقاط a، b، c، d، e، f و g روی منحنی شکل زیر قرار گرفته‌اند. شیب خطوط مماس بر منحنی در این نقاط را باهم مقایسه کنید.



$$m_a, m_b, m_f > 0 \Rightarrow m_a > m_b > m_f$$

$$m_c = 0$$

$$m_d, m_e, m_g < 0 \Rightarrow m_g > m_e > m_d$$

$$\Rightarrow m_a > m_b > m_f > m_c > m_g > m_e > m_d$$

---

۸ — **۲.۲۵**

مصحّح شو:

(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۸۳) ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه $(-1,2)$ و $(2,4)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$m=\frac{4-2}{2+1}=\frac{2}{3} \quad (0/25)$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \xrightarrow[m=\frac{2}{3}]{(2,4)\in y} y-4=\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow \overbrace{y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}}^{(0/25)}$$

حال مختصات نقطه تماس را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} \xrightarrow{x=5} y=6 \Rightarrow \overset{(0/25)}{A(5,6)}$$

چون هر دو منحنی f و g در نقطه $A(5,6)$ بر هم مماس می‌باشند، داریم:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f^2(x)-7f(x)+6}{x-5}=\underbrace{\lim_{x\to 5}\frac{(f(x)-6)(f(x)-1)}{x-5}}_{(0/5)}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-6}{x-5}\times\lim_{x\to 5}f(x)-1\overset{f(5)=6}{=\!=}\underbrace{\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}\times\lim_{x\to 5}f(x)-1}_{(0/5)}$$

$$=\underbrace{\underbrace{f'(5)}_{\text{شیب خط مماس در } x=5}\times(f(5)-1)}_{(0/25)}=\frac{2}{3}\times(6-1)=\frac{2}{3}\times 5=\frac{10}{3}\quad (0/25)$$

---

۹ — بارم: ۱.۲۵

مصحّح شو:

(مرتبط با صفحه ۸۶ و ۸۷) برای این‌که تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-x & ; & x\ge 1\\ ax-a & ; & x<1\end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، ابتدا باید در این نقطه، شرط پیوستگی برقرار باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2-x=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}ax-a=a-a=0\end{cases}$$

بنابراین تابع f در $x=1$، پیوسته است. (۰/۲۵) از طرفی باید $f'_+(1)=f'_-(1)$ باشد به عبارت دیگر:

$$\begin{cases}f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x^2-x)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}x=1 \quad (0/25)\\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(ax-a)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}a=a \quad (0/25)\end{cases}$$

$$\underbrace{f'_+(1)=f'_-(1)}_{(0/25)}\Rightarrow\underbrace{a=1}_{(0/25)}$$

مشتق‌پذیری

تابع f را در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و باهم برابر باشد، یعنی: $f'_+(a)=f'_-(a)$

---

۱۰ — بارم: ۱.۲۵

مصحّح شو:

(مرتبط با صفحه ۸۶) تابع $f(x)=(x-3)[x]$ در $x=3$ پیوسته است، زیرا:

$$\underbrace{\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^-}f(x)=f(3)=0}_{(0/25)}$$

حال شیب نیم‌مماس چپ در $x=۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۳)[x]-۰}{x-۳}}_{(۰/۲۵)}=\lim_{x\to ۳^-}[x]=[۳^-]=۲\quad (۰/۲۵)$$

با توجه به این‌که $f(۳)=۰$ است بنابراین معادله نیم‌مماس چپ به‌صورت زیر خواهد بود:

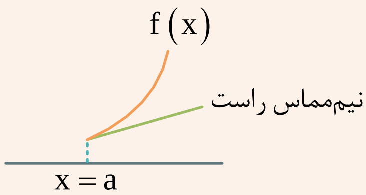
$$y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow[m=f'_-(۳)=۲]{(۳,۰)\in f}\underbrace{y-۰=۲(x-۳)\ \text{ یا }\ y=۲x-۶}_{(۰/۲۵)}$$

نیم‌مماس‌های چپ و راست

مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ از راست پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق راست تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که در سمت راست $x=a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌مماس راست می‌گوییم.

$$\begin{cases} f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\\[2mm] f'_+(a)=\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{cases}$$



$x=a$ شیب نیم‌مماس راست در $=f'_+(a)$

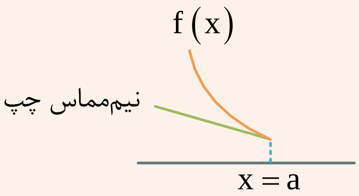
نکته: شرط لازم برای وجود مشتق راست در نقطه $x=a$، این است که تابع f در این نقطه از راست پیوسته باشد. به عبارت دیگر اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی راست نداشته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق راست تعریف نمی‌شود.

نکته: معادله نیم‌مماس راست در نقطه $x=a$ برابر است با: $y-f(a)=f'_+(a)(x-a)$

مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق چپ تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که در سمت چپ $x=a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌مماس چپ می‌گوییم.

$$\begin{cases} f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\\[2mm] f'_-(a)=\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{cases}$$



$x=a$ شیب نیم‌مماس چپ در $=f'_-(a)$

نکته: شرط لازم برای وجود مشتق چپ در نقطه $x=a$، این است که تابع f در این نقطه از چپ پیوسته باشد. به عبارت دیگر اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی چپ نداشته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق چپ تعریف نمی‌شود.

نکته: معادله نیم‌مماس چپ در نقطه $x=a$ برابر است با: $y-f(a)=f'_-(a)(x-a)$

۱۱	مصحّح شو: (مرتبط با صفحه ۸۶) تابع $f(x)=\sqrt{\lvert x-۱\rvert}$ در $x=۱$ پیوسته است، چرا که: $\underbrace{\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=f(۱)=۰}_{(۰/۲۵)}$	۲

حال مشتق‌های چپ و راست تابع f را در $x=1$ به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{f'_{+}(1)=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{\sqrt{|x-1|}-0}{x-1}}_{(0/25)}\ \underset{|x-1|=x-1}{\overset{x\to 1^{+}}{=}}\ \underbrace{\lim_{x\to 1^{+}}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}}_{(0/25)}$$

$$=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{0^{+}}=+\infty \quad (0/25)$$

$$\underbrace{f'_{-}(1)=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{\sqrt{|x-1|}-0}{x-1}}_{(0/25)}\ \underset{|x-1|=-(x-1)}{\overset{x\to 1^{-}}{=}}\ \underbrace{\lim_{x\to 1^{-}}\frac{\sqrt{1-x}}{-\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}}}_{(0/25)}$$

$$=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{0^{+}}=-\infty \quad (0/25)$$

چون تابع f در $x=1$ پیوسته است و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی دارد بنابراین خط $x=1$ مماس قائم بر منحنی تابع f است. (۰/۲۵)

مماس قائم

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

موفق باشید.