آزمون شبیه ساز امتحان نهایی ماز

شبیه ساز امتحانات نهایی

دوازدهم ریاضی

گروه آموزشی ماز

پیش‌بینی امتحان نهایی

خرداد ماه ۱۴۰۳

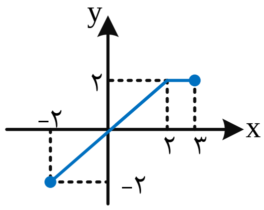
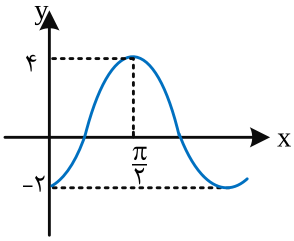
ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	حسابان	۲	۱۳۰

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه آموزشی ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.** **الف) دورهٔ تناوب تابع $y=3\sin^2(\pi x)$ برابر ۲ است.** **ب) حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}$ برابر یک است.** **پ) خط $x=1$ مماس قائم منحنی $y=\sqrt[3]{1-x}$ است.** **ت) اگر $f(x)=\sin 2x$ باشد، آن‌گاه $f''(\frac{\pi}{4})=-4$ است.**	۱
۲	**نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x)=1-2f(\frac{x}{2})$ را رسم کنید و سپس برد تابع g را تعیین کنید.**  	۱
۳	**نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & x<1\\ 4x-x^2 & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید و تعیین کنید در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟**	۱
۴	**چندجمله‌ای $f(x)=x^3+ax^2+b+a$ بر $(x+1)(x-2)$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ را به دست آورید.**	۱
۵	**قسمتی از نمودار تابع $y=a\cos(bx)+c$ به صورت مقابل است. مقادیر a، b و c را به دست آورید.**  	۱
۶	**معادلهٔ $2\cos^2 x-\cos x=0$ را حل کنید و جواب‌های آن در بازهٔ $[0,2\pi]$ به دست آورید.**	۱
۷	**اگر $\tan\alpha=2$ و $\tan(\beta-\alpha)=3$ باشد، مقدار $\tan\beta$ را بیابید.**	۰/۷۵
۸	**حدود توابع زیر را تعیین کنید.** **الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{3-[2x]}{x^2-4x+4}$** **ب) $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2-x+1}{3-x^2}+\frac{2}{x})$** **پ) $\lim_{x\to+\infty}(3+x^2-2x^3)$**	۱/۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۹	مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{x^۲-۲x}{x^۲-۵x+۶}$ را بیابید و نمودار تابع در اطراف مجانب قائم آن را رسم کنید.	۱/۲۵
۱۰	به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x\lvert x^۲-۴\rvert$ را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\sin^۲(۳x).\cos x^۲$ ب) $g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+۱}$ پ) $h(x)=(۲x-\tan\sqrt{x})^۳$	۲/۲۵
۱۲	خط $y=۳x+۲$ در $x=۲$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $g(x)=x+\sqrt[۳]{x}$ باشد، مقدار $(gof)'(۲)$ را بیابید.	۱
۱۳	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲x^۲$ در بازهٔ $[۰,۴]$ را بیابید و تعیین کنید که چقدر از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=۱$ بیشتر است.	۱
۱۴	یک مستطیل با بیشترین مساحت ممکن در یک نیم‌دایره به شعاع ۴ سانتی‌متر محاط شده است. محیط این مستطیل را به دست آورید.	۱/۵
۱۵	اگر $A(۱,۲)$ نقطه عطف و $x=-۱$ طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ باشد، مقادیر a و b و c را بیابید.	۱/۵
۱۶	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=x-\frac{x^۲-۲x}{x-۳}$ را رسم کنید.	۲
	موفق باشید.	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه ساز امتحان نهایی ماز

شبیه ساز امتحانات نهایی

دوازدهم ریاضی

گروه آموزشی ماز

پاسخبرگ آزمون

پیش‌بینی امتحان نهایی

خردادماه ۱۴۰۳

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه آموزشی ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
	پاسخ‌های خود را به‌صورت دقیق، خوش‌خط و مرتب در این برگه وارد کنید.	
۱	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۲		۱
۳		۱
۴		۱
۵		۱

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۶		۱
۷		۰/۷۵
۸	الف) ب) پ)	۱/۵
۹		۱/۲۵

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱۰		۱/۲۵
۱۱	الف) ب) پ)	۲/۲۵
۱۲		۱
۱۳		۱

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱۴		۱/۵
۱۵		۱/۵
۱۶		۲
	موفق باشید.	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه ساز امتحان نهایی ماز

دوازدهم ریاضی

شبیه ساز امتحانات نهایی

پیش‌بینی امتحان نهایی

گروه آموزشی ماز

خردادماه ۱۴۰۳

پاسخنامهٔ تشریحی (حاوی راهنمای مصحّح)

درس	مسئول درس	ویراستاران
حسابان	مهرداد کیوان - حسین شفیع زاده	ارسلان حسنوند - سپهر متولی

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه آموزشی ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصحح شو:

پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:

اگه پاسخ کوتاه یه سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌ترِ جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشهٔ نهایی:

امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاورهٔ حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:

توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درس‌نامه‌هاش دقیقاً فاصلهٔ بین نمرهٔ خوب و نمرهٔ ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

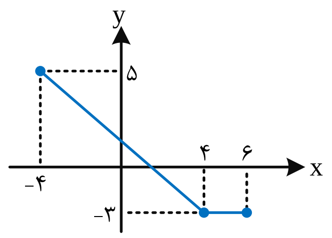
نکتهٔ طلایی:

با وجود «۲۰ شو»، که کلی درس‌نامهٔ مفصل داره، باز هم اگه نکتهٔ مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **حسابان ۲**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو! الف) نادرست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)	۱
۲	مصحح شو!	۱



(۰/۷۵)

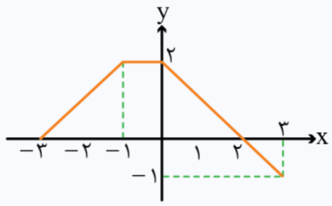
$R=[-۳,۵]$ (۰/۲۵)

خواص و ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها:

نمودار جدید $(a,k>۰)$		توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$		نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$		نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$		نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ)
$f(kx)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$\lvert f(x)\rvert$		ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$f(\lvert x\rvert)$		ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$\lvert y\rvert=f(x)$		ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

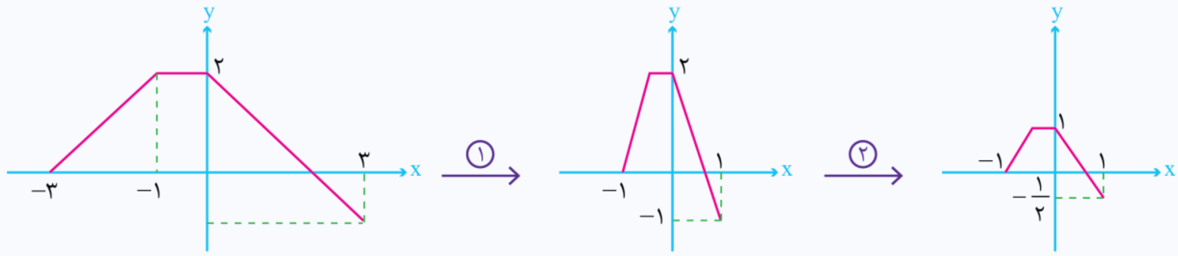
شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مثال: نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{2}f(3x)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



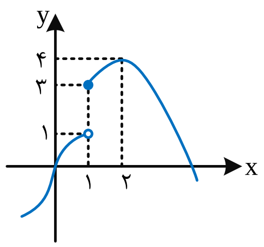
پاسخ: برای رسم نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{2}f(3x)$، ابتدا باید نمودار تابع f را با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای محور x ها منقبض کرده و سپس نمودار حاصل را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور y ها منقبض کنیم به عبارتی:

$$f(x)\xrightarrow[(1)]{\text{انقباض طولی } \frac{1}{3} \text{ برابر}} f(3x)\xrightarrow[(2)]{\text{انقباض عرضی } \frac{1}{2} \text{ برابر}} \frac{1}{2}f(3x)$$



دامنه تابع g : $[-1,1]$ برد تابع g : $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

۳ مصحح شو! ۱



(۰/۵)

$(-\infty,2]$ اکیداً صعودی (۰/۲۵)

$[2,+\infty)$ اکیداً نزولی (۰/۲۵)

۴ مصحح شو! ۱

$$\begin{cases} f(-1)=0 \Rightarrow 2a+b-1=0 & (0/25) \\ f(2)=0 \Rightarrow 5a+b+8=0 & (0/25) \end{cases}$$

$\Rightarrow a=-3 \ , \ b=7 \ \ (0/25)$

$R=f(1)=2 \ \ (0/25)$

یادگیری بیشتر:

به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

به کمک اتحاد بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر n **فرد** باشد:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

- اگر n **زوج** باشد:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1})$$

شبیه ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

مثال: هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته‌شده تجزیه کنید.

الف) x^6-1 با عامل $(x+1)$:

$$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

ب) x^6-1 با عامل $(x-1)$:

$$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

مثال: چندجمله‌ای x^5+32 را برحسب عامل $(x+2)$ تجزیه کنید.

$$x^5+32=x^5+2^5 \Rightarrow \begin{cases} n=5 \\ a=2 \end{cases}$$

$$x^5+32=(x+2)\left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)$$

نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax+b)$، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است. در نتیجه اگر $f(-\frac{b}{a})=0$ باشد به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax+b)$ بخش‌پذیر است.

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)=x^2+kx-1$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد مقدار k را بیابید:

چون باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر ۲ است پس $f(-1)=2$ است در نتیجه:

$$f(-1)=2 \to (-1)^2+k(-1)-1=2 \Rightarrow 1-k=3 \Rightarrow k=-2$$

مثال: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

$$\begin{cases} f(2)=0 \to 8+4a+2b+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9 \qquad (*) \\ f(-1)=0 \to -1+a-b+1=0 \Rightarrow a-b=0 \to a=b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} 4a+2b=-9 \xrightarrow{a=b} 4a+2a=-9 \Rightarrow 6a=-9 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}\ ,\ b=-\frac{3}{2}$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=8x^3-4x^2+2$ را بر $2x+1$ به دست آورید:

$$2x+1=0 \to x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=8(-\frac{1}{2})^3-4(-\frac{1}{2})^2+2=-1-1+2=0$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(2x+1)$ برابر صفر است.

مثال: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد.

$$P(x)=x^3+ax^2+bx-2$$

می‌دانیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است، یعنی:

$$P(2)=0 \Rightarrow 8+4a+2b-2=0 \Rightarrow 4a+2b=-6 \Rightarrow 2a+b=-3$$

از طرفی باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)$ برابر ۳ است، یعنی:

$$P(-1)=3 \Rightarrow -1+a-b-2=3 \Rightarrow a-b=6$$

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \\ a-b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱		۵

مصحح شو!

$$\begin{cases}\max = c+|a| = ۴ \ (۰/۲۵) \\ \min = c-|a| = -۲ \ (۰/۲۵)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=۱ \\ |a|=۳ \Rightarrow a=-۳\end{cases} \ (۰/۲۵)$$

$$T = \pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲ \ (۰/۲۵)$$

هرآنچه باید در مورد توابع مثلثاتی بدونید!!!

نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y = a\sin(bx+d)+c$ و $y = a\cos(bx+d)+c$ ، داریم:

بیش‌ترین مقدار: $|\cos$ یا $\sin$ ضریب$| +$ مقدار ثابت $\Rightarrow \max = |a|+c$

کم‌ترین مقدار: $-|\cos$ یا $\sin$ ضریب$| +$ مقدار ثابت $\Rightarrow \min = -|a|+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a| = \dfrac{\max - \min}{۲} \\ c = \dfrac{\max + \min}{۲}\end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{۲\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y = a\tan(bx)+c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید:

$$\bullet\ y = -۳\cos ۲\pi x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \dfrac{۲\pi}{|۲\pi|} = ۱ \\ \max = |a|+c = |-۳|+۱ = ۳+۱ = ۴ \\ \min = -|a|+c = -|-۳|+۱ = -۳+۱ = -۲ \end{cases}$$

$$\bullet\ y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \dfrac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = ۴ \\ \max = |a|+c = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱+\sqrt{۳} \\ \min = -|a|+c = -|-۱|+\sqrt{۳} = -۱+\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\bullet\ y = ۱ - ۲\sin\left(-\frac{\pi}{۳}x\right) \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \dfrac{۲\pi}{\left|-\frac{\pi}{۳}\right|} = ۶ \\ \max = |a|+c = |-۲|+۱ = ۲+۱ = ۳ \\ \min = -|a|+c = -|-۲|+۱ = -۲+۱ = -۱ \end{cases}$$

مثال: معادله یک تابع سینوسی $y = a\sin(bx)+c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۲} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-۴,۴]$ است یعنی:

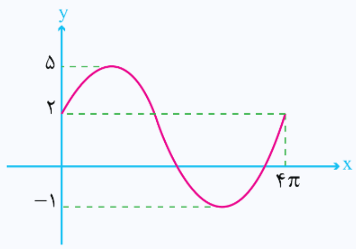
$$\begin{cases} \max = |a| + c = ۴ \\ \min = -|a| + c = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = ۴ \\ -|a| + c = -۴ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \xrightarrow{|a|+c=۴} |a| = ۴ \Rightarrow a = \pm ۴$$

حال:

$$\begin{cases} a = \pm ۴ \\ b = \pm \pi \\ c = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = \pm ۴\sin(\pm \pi x) \Rightarrow \begin{cases} y = ۴\sin(\pi x) \\ y = -۴\sin(-\pi x) \\ y = ۴\sin(-\pi x) \\ y = -۴\sin(\pi x) \end{cases}$$

مثال: نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a\sin bx + c$ است. مقادیر a، b و c را مشخص کرده و ضابطه تابع را بنویسید:

مطابق شکل می‌توان گفت:



$$\begin{cases} \text{دوره تناوب} = ۴\pi \\ \text{بیشترین مقدار} = ۵ \\ \text{کمترین مقدار} = -۱ \\ f(۰) = ۲ \\ ab > ۰ \end{cases}$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = ۵ \\ \min = -|a| + c = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = ۵ \\ -|a| + c = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲c = ۴ \Rightarrow c = ۲ \xrightarrow{|a|+c=۵} |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

$$\begin{cases} a = \pm ۳ \\ b = \pm\frac{۱}{۲} \\ c = ۲ \end{cases} \Rightarrow y = \pm ۳\sin(\pm\frac{۱}{۲}x) + ۲ \Rightarrow \begin{cases} y = ۳\sin(\frac{۱}{۲}x) + ۲ \checkmark \\ y = -۳\sin(-\frac{۱}{۲}x) + ۲ \checkmark \\ y = ۳\sin(-\frac{۱}{۲}x) + ۲ \times \quad (ab < ۰) \\ y = -۳\sin(\frac{۱}{۲}x) + ۲ \times \quad (ab < ۰) \end{cases}$$

راستی! طبق نمودار تابع $y = a\sin bx + c$ که سؤال داده، چون $f(۰) = ۲$ هست پس از همونجا می‌تونستیم بگیم که $c = ۲$ می‌شه. ولی توی امتحان سعی کن که راه‌حل کامل و تشریحی رو بنویسی.

۶

مصحح شو!

$$\cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (۰/۲۵) \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳} \quad (۰/۲۵)$$

۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حالا نوبت به معادلات مثلثاتی رسید...

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x)=\sin g(x)$:

$$\sin f(x)=\sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2k\pi+g(x) \\ f(x)=2k\pi+\pi-g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x=0$	$x=k\pi$
$\sin x=1$	$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$
$\sin x=-1$	$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

مثال: معادله مثلثاتی $\sin 2x=\sin x$ را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+x \\ 2x=2k\pi+\pi-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha-\sin\alpha+1=1$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

می‌دانیم که $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ است، پس:

$$\left(1-2\sin^2\alpha\right)-\sin\alpha+1=1 \Rightarrow 2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2}, \quad k\in\mathbb{Z} \\ \sin\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6} \ , \ k\in\mathbb{Z} \\ \alpha=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

ابتدا طرفین معادله را در 2 ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin 2x=2\sin x\cos x$ داریم:

$$2\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{6} \ , \ k\in\mathbb{Z} \\ x=k\pi+\frac{\pi}{3} \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x)=\cos g(x)$:

$$\cos f(x)=\cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2k\pi+g(x) \\ f(x)=2k\pi-g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x=0$	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$
$\cos x=1$	$x=2k\pi$
$\cos x=-1$	$x=(2k+1)\pi$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x\left(۲\cos x-۹\right)=۵$ را حل کنید.

$$۲\cos^{۲}x-۹\cos x-۵=۰ \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x=۵ \xrightarrow{-۱\le \cos x\le ۱} \text{غ ق ق} \\ \cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳} \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \\ x=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳} \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos ۲x-\cos x+۱=۰$ را حل کنید.

می‌دانیم که $\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱$ است پس:

$$\cos ۲x-\cos x+۱=۰ \Rightarrow (۲\cos^{۲}x-۱)-\cos x+۱=۰ \Rightarrow ۲\cos^{۲}x-\cos x=۰$$

$$\Rightarrow \cos x(۲\cos x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \ , \ k\in\mathbb{Z} \\ \cos x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

۷ ۰/۷۵

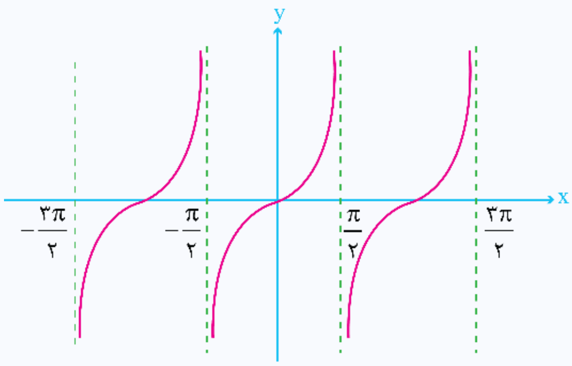
مصحح شو!

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{۱+\tan\beta\tan\alpha} \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{۳=\frac{\tan\beta-۲}{۱+۲\tan\beta}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \tan\beta=-۱ \ (۰/۲۵)$$

۲۰ شو

تابع $\tan x$:



- دامنه تابع $y=\tan x$ به صورت $\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$ یا $\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\ne k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$ است. $(k\in\mathbb{Z})$
- دوره تناوب تابع $y=\tan x$ به صورت $T=\pi$ است.
- تابع $y=\tan x$ در هر بازه به صورت $\left((۲k-۱)\frac{\pi}{۲} , (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\right)$ اکیداً صعودی است.

نکته: جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\tan f(x)=\tan g(x)$ به صورت $f(x)=k\pi+g(x)$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

مثال: معادله $\tan ۵x=\tan ۲x$ را حل کنید:

$$۵x=k\pi+۲x \Rightarrow ۵x-۲x=k\pi \Rightarrow ۳x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳} \ , k\in\mathbb{Z}$$

نکته: اتحادهای مثلثاتی زیر را به خاطر بسپارید:

- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$

شبیه ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

مثال: مقدار $\tan ۱۵^\circ$ را به دست آورید:

$$\tan(۱۵^\circ)=\tan(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\frac{\tan ۴۵^\circ-\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan ۴۵^\circ \tan ۳۰^\circ}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}\times\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}=\frac{۹-۳\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}+۳}{(۳)^۲-(\sqrt{۳})^۲}=\frac{۱۲-۶\sqrt{۳}}{۹-۳}=\frac{۱۲-۶\sqrt{۳}}{۶}=۲-\sqrt{۳}$$

۸

۱/۵

مصحح شو!

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۳-[۲x]}{(x-۲)^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty \quad (۰/۵)$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{x^۲}{-x^۲}+\frac{۲}{x})=-۱+۰=-۱ \quad (۰/۵)$

پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-۲x^۳)=-\infty \quad (۰/۵)$

ایستگاه حد:

در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این‌صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{\text{عدد}+}{۰^+}=+\infty$	$\frac{\text{عدد}-}{۰^-}=+\infty$	$\frac{\text{عدد}+}{۰^-}=-\infty$	$\frac{\text{عدد}-}{۰^+}=-\infty$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۵^-}\frac{۲x}{x-۵}=\frac{۲\times ۵}{۵^- -۵}=\frac{۱۰}{۰^-}=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}=\frac{۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱}{\left(۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱\right)^۲}=\frac{-۲+۱}{(-۱+۱)^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

توجه: وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

- $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{[x]}{\sin x}=\frac{[۰^-]}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{[۳^-]-۳}{۳^- -۳}=\frac{۲-۳}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲}{|x-۳|}=\frac{۲}{|۳-۳|}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

- $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})}\dfrac{[x]}{|3x+1|}=\dfrac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3(-\frac{1}{3})+1\right|}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 5x+[-x]}{2x}=\dfrac{\sin(0^+)+[-(0^+)]}{0^+}=\dfrac{0^++[0^-]}{0^+}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}$

برای محاسبه این حد، ابتدا حد چپ و حد راست تابع $y=\tan x$ را در $x=\dfrac{\pi}{2}$ به صورت جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}=\dfrac{(\frac{\pi}{2}+1)}{(\infty)}=0$$

نکته: در محاسبه $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots}\ ;\ (m,n\in\mathbb{N})$، حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت با حالت مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\dfrac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.	صفر

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{6x^3-11x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{6x^3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^7}{2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4)=-2(-\infty)^4=-2(+\infty)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+4}{x^3+x-8}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^2}=\dfrac{5}{(-\infty)^2}=\dfrac{5}{+\infty}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5}=\dfrac{3+\frac{1}{+\infty}}{\frac{4}{+\infty}-5}=\dfrac{3+0}{0-5}=-\dfrac{3}{5}$

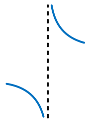
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)=-2(-\infty)^3=-2(-\infty)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{4x+2}{5-x}-\dfrac{8}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{4x}{-x}-\dfrac{8}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{-x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x}=-4-0=-4$

شبیه ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ مصحح شو! ۱/۲۵

$$f(x)=\frac{x(x-۲)}{(x-۲)(x-۳)}=\frac{x}{x-۳}\ (۰/۲۵)$$



$x=۳$

$(۰/۵)$

مجانب قائم: $x=۳$ $(۰/۲۵)$

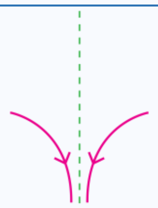
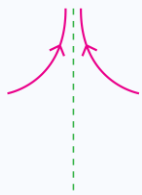
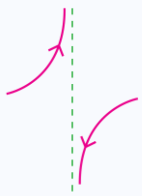
مجانب افقی: $y=۱$ $(۰/۲۵)$

حالا مجانب‌ها رو خوب یاد بگیرید...

مجانب‌ها

- قائم
  - خط $x=a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$
  - کاندیدهای مجانب قائم
    - در توابع کسری ریشه‌های مخرج کسر که ریشه صورت کسر نباشند.
    - خطوط $x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲a}$ در توابع $y=\tan(ax)$
- افقی ← خط $y=L$ را مجانب افقی تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$
- مایل ← در محدوده کتاب درسی نیست.

رفتار تابع در نزدیکی مجانب قائم:

 $x=a$	 $x=a$	 $x=a$	 $x=a$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

رفتار تابع در نزدیکی مجانب افقی:

			
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L^-$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L^-$

مثال: اگر خط $y=۲$ مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{ax^۲+۱}{۲x^۲-۳x}$ باشد، مقدار a را بیابید.

خط $y=۲$ مجانب افقی تابع f است یعنی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۲$ است، پس:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲+۱}{۲x^۲-۳x}=۲\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲}{۲x^۲}=۲\Rightarrow\frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=۴$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

مثال: مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید.

ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را می‌یابیم:

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

چون $x=1$ و $x=-1$ ، هیچ‌کدام ریشه صورت کسر نیستند بنابراین هر دو مجانب قائم تابع هستند.

حال حد تابع را زمانی که $x\to\pm\infty$ میل می‌کند به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x^2}{x^2-1}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$$

و $y=-2$ نیز تنها مجانب افقی این تابع است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

ابتدا ریشه مخرج کسر را می‌یابیم:

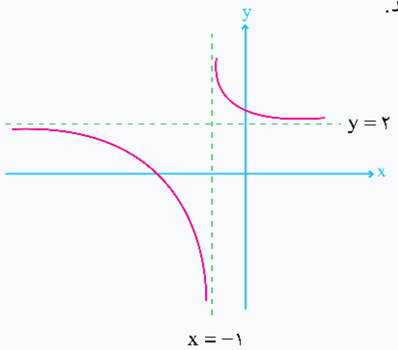
$$x^3+x=0\to x(x^2+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \checkmark\\ x^2=-1 & \times\end{cases}$$

چون $x=0$ ریشه صورت کسر نیست پس مجانب قائم تابع f است. حال برای این‌که رفتار تابع f را در اطراف $x=0$ بدانیم باید حاصل حد تابع را زمانی که $x\to 0^+$ و $x\to 0^-$ میل می‌کند پیدا کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^3+x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^3+x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(a+1)x+7}{2x+b}$ به صورت مقابل باشد آن‌گاه مقدار $a+b$ را پیدا کنید.



همان‌طور که از شکل تابع مشخص است خط $x=-1$ مجانب قائم و خط $y=2$ مجانب افقی تابع هستند یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(a+1)x+7}{2x+b}=2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(a+1)x}{2x}=2\Rightarrow\frac{a+1}{2}=2\Rightarrow a=3$$

و چون $x=-1$ مجانب قائم تابع است پس می‌توان گفت که $x=-1$ ریشه مخرج است پس:

$$2x+b=0\xrightarrow{x=-1}-2+b=0\Rightarrow b=2$$

در نتیجه حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=3+2=5$$

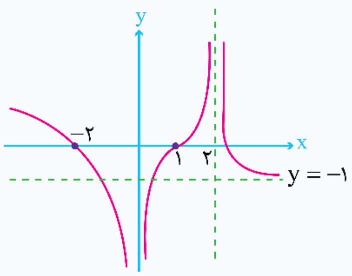
مثال: نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد.

الف) $f(1)=f(-2)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

پ) خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.

نمودارهای مختلفی با شرایط گفته شده می‌توان رسم کرد که یکی از آن‌ها به صورت مقابل است.



شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱/۲۵

مصحح شو!

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(x^۲-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(x+۲)}{۱}=۸\quad (۰/۵)$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x(x^۲-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x(x+۲)}{۱}=-۸\quad (۰/۵)$$

چون $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$، پس در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است. (۰/۲۵)

۲۰ شو

مشتق‌پذیری:

تابع f را در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی: $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشد، یعنی: $f'_+(a)=f'_-(a)$

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+۳ & x\geq -۱\\ ۲x+۶ & x<-۱\end{cases}$ را در $x=-۱$ بررسی کنید.

اول پیوستگی تابع f را در $x=-۱$ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases}f(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}x^۲+۳=۴\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}۲x+۶=۴\end{cases}$$

تابع f در $x=-۱$ پیوسته است حال باید ببینیم که مشتق چپ و راست تابع در $x=-۱$ با هم برابرند یا خیر.

$$\begin{cases}f'_+(x)=۲x\to f'_+(-۱)=-۲\\ f'_-(x)=۲\to f'_-(-۱)=۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(-۱)\neq f'_-(-۱)$$

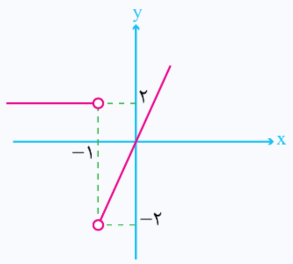
پس تابع f در $x=-۱$، پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است.

حالا اگه تو این سؤال از ما ضابطه تابع مشتق رو بخوان چی؟

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۳ & x\geq -۱\\ ۲x+۶ & x<-۱\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}۲x & x>-۱\\ ۲ & x<-۱\end{cases}\qquad (*)$$

آقا! چرا توی قسمت (*) علامت مساوی رو نذاشتیم؟ گفتیم که تابع f توی $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست پس $x=-۱$ نمی‌تونه توی دامنه تابع مشتق حضور داشته باشه.

حالا بیاین نمودار تابع مشتق رو هم رسم کنیم:



مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^۲-۴|$ را در $x=-۲$ بررسی کنید.

اول از همه باید پیوستگی تابع f رو در $x=-۲$ بررسی کنیم (خودت بررسیش کن). در مرحله بعد باید برابری مشتق چپ و راست رو توی $x=-۲$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases}f'_+(-۲)=\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{-(x^۲-۴)}{x+۲}=\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{-(x-۲)(x+۲)}{x+۲}=+۴\\ f'_-(-۲)=\lim\limits_{x\to -۲^-}\dfrac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim\limits_{x\to -۲^-}\dfrac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=\lim\limits_{x\to -۲^-}\dfrac{(x^۲-۴)}{x+۲}=\lim\limits_{x\to -۲^-}\dfrac{(x+۲)(x-۲)}{x+۲}=-۴\end{cases}$$

$\Rightarrow f'_+(-۲)\neq f'_-(-۲)\Rightarrow$ $f'(-۲)$ موجود نیست $\Rightarrow$ تابع f در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۱ | ۲/۲۵

مصحح شو!

الف) $f'(x)=۶\sin(۳x)\cos(۳x)\times\cos x^۲-۲x\sin x^۲\sin^۲(۳x)$ (۰/۷۵)

ب) $g'(x)=\dfrac{(۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^۲+۱)-۲x(x-\sqrt{x})}{(x^۲+۱)^۲}$ (۰/۷۵)

پ) $h'(x)=۳(۲x-\tan\sqrt{x})^۲\times(۲-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+\tan^۲\sqrt{x}))$ (۰/۷۵)

قواعد مشتق‌گیری:

- $y=c\,;\,c\in\mathbb{R}\to y'=۰$
- $y=ax+b\to y'=a$
- $y=kf(x)\to y'=kf'(x)$
- $y=\sqrt[n]{x^m}\to y'=\dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y=f(x)\pm g(x)\to y'=f'(x)\pm g'(x)$
- $y=f(x)\times g(x)\to y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
- $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}\to y'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}\ ,\ (g(x)\neq ۰)$
- $y=(f(x))^n\to y'=nf'(x)(f(x))^{n-۱}$
- $y=\sqrt[n]{(f(x))^m}\to y'=\dfrac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$
- $y=(fog)(x)=f(g(x))\to y'=g'(x)f'(g(x))$
- $y=\sin x\to y'=\cos x$
- $y=\sin(f(x))\to y'=f'(x)\cos(f(x))$
- $y=\cos x\to y'=-\sin x$
- $y=\cos(f(x))\to y'=-f'(x)\sin(f(x))$
- $y=\tan x\to y'=۱+\tan^۲ x$
- $y=\tan(f(x))\to y'=f'(x)\left(۱+\tan^۲(f(x))\right)$

مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر:

- $f(x)\xrightarrow{\text{مشتق اول}}f'(x)\xrightarrow{\text{مشتق دوم}}f''(x)$

مثال: مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

- $y=\dfrac{۹x+۱}{x-x^۲}\to y'=\dfrac{۹(x-x^۲)-(۱-۲x)(۹x+۱)}{(x-x^۲)^۲}$
- $y=\dfrac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}\to y'=\dfrac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^۲-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^۲}$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

- $y=(\sqrt{3x+2})(x^3+1) \rightarrow y'=\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^3+1)+(3x^2)(\sqrt{3x+2})$
- $y=(-3x^2+x)^5(2x) \rightarrow y'=5(-6x+1)(-3x^2+x)^4(2x)+(2)(-3x^2+x)^5$
- $y=\sin(3x^2) \rightarrow y'=6x\cos(3x^2)$
- $y=\cos^3(2x) \rightarrow y'=-6\cos^2(2x)\big(\sin(2x)\big)$
- $y=\sin^3 x+\cos^2 x \rightarrow y'=3\sin^2 x\cos x+2\cos x(-\sin x)$
- $y=3\tan^2 x+\cos x^2 \rightarrow y'=6\tan x(1+\tan^2 x)+2x(-\sin x^2)$
- $y=\cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) \rightarrow y'=-\sin\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\times\dfrac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}$
- $y=3x(x^2-6x)^3+\cos 2x \rightarrow y'=\left[3(x^2-6x)^3+\left(3(2x-6)(x^2-6x)^2\right)\times 3x\right]-2\sin 2x$
- $y=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x^2+\sqrt{x}} \rightarrow y'=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(x^2+\sqrt{x}\right)-\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)^2}$
- $y=\dfrac{1-\sin x}{\cos x} \rightarrow y'=\dfrac{-\cos x(\cos x)-(-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$

مثال: اگر $f(x)=\sin^2 x-\cos 2x$ مقدار $f''(\frac{\pi}{6})$ را حساب کنید.

$$f'(x)=2\sin x\cos x+2\sin 2x=\sin 2x+2\sin 2x=3\sin 2x$$

$$f''(x)=6\cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f''(\frac{\pi}{6})=6\cos\frac{\pi}{3}=3$$

مثال: اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$ ، $f'(2)=1$ ، $g(2)=-3$ و $g'(2)=2$ باشند، مطلوبست محاسبه موارد زیر:

- $(fg)'(2)=(f'g+g'f)(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=\big(1\times(-3)\big)+(2\times 3)=-3+6=3$
- $(f+g)'(2)=(f'+g')(2)=f'(2)+g'(2)=1+2=3$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)=\left(\dfrac{f'g-g'f}{g^2}\right)(2)=\dfrac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=\dfrac{\big(1\times(-3)\big)-(2\times 3)}{(-3)^2}=\dfrac{-3-6}{9}=-1$

۱۲

مصحح شو!

$f'(2)=3\ (0/25)\ ,\ f(2)=8$

$$\underbrace{g'(x)=1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{(0/25)} \Rightarrow g'(8)=\frac{13}{12}\ (0/25)$$

$$(gof)'(2)=f'(2).g'\big(f(2)\big)=3\times\frac{13}{12}=\frac{13}{4}\ (0/25)$$

۱

شبیه ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

یادآوری کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع همون مشتق تابع هست؟!!

مشتق تابع $f(x)$ در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با انتخاب $x-a=h$ داریم:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال: اگر $f(x)=۱-۲x^۲$ باشد، $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۱-۲x^۲+۱}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۲(۱-x)(۱+x)}{x+۱}=۴$$

مثال: با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}+۱$ را در نقطهٔ $x=۱$ محاسبه کنید.

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}+۱)-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$$

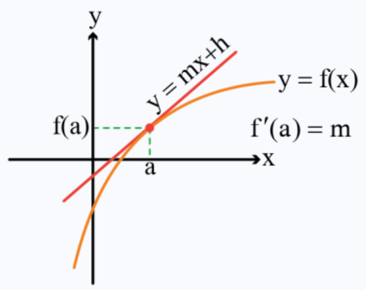
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۵$ به‌دست آورید.

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt{x-۱}-۲}{x-۵}\times\frac{\sqrt{x-۱}+۲}{\sqrt{x-۱}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{x-۵}{(x-۵)(\sqrt{x-۱}+۲)}=\lim_{x\to ۵}\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

نکته: شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در $x=a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطهٔ تماس هم در تابع و هم در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند.



مثال: با استفاده از تعریف، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ را در نقطهٔ $x=۱$ به‌دست آورید.

$$m=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۳)}{x-۱}=۴$$

$$y-۶=۴(x-۱)\ \Rightarrow\ y=۴x+۲$$

۱۳

مصحح شو!

$$\text{متوسط}=\frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\frac{۳۴}{۴}=\frac{۱۷}{۲}\quad(۰/۲۵)$$

$$\text{لحظه‌ای}=f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۴x\quad(۰/۲۵)$$

$f'(۱)=۴/۵\ (۰/۲۵)\Rightarrow$ ۴ واحد بیشتر (۰/۲۵)

۱

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir سنجش کلاد

۲۰شو آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع:

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ را وقتی متغیر از $x_۱=۲$ به $x_۲=۷$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f = \frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۴}}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

مثال: معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ برحسب متر در بازه $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ باهم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [۰,۵] = \frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=\frac{(۲۵-۵+۱۰)-(۱۰)}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

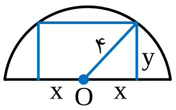
$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } x=t = f'(t)=۲t-۱$$

می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[۰,۵]$ باهم برابر باشند، پس:

$$۲t-۱=۴ \Rightarrow ۲t=۵ \Rightarrow t=\frac{۵}{۲}$$

۱۴

مصحح شو!



$x^۲+y^۲=۱۶$ (۰/۲۵)

$S=۲xy=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}$ (۰/۲۵)

$S'=۲\sqrt{۱۶-x^۲}-\frac{۴x^۲}{۲\sqrt{۱۶-x^۲}}$ (۰/۲۵)

$S'=۰ \Rightarrow ۱۶-x^۲-x^۲=۰$

$\Rightarrow x=۲\sqrt{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y=۲\sqrt{۲}$ (۰/۲۵)

$\text{محیط}=۴x+۲y=۱۲\sqrt{۲}$ (۰/۲۵)

۱/۵

۲۰شو حل مسائل بهینه‌سازی:

برای حل مسائل بهینه‌سازی:

۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به‌دست می‌آوریم.

۲) رابطه به‌دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل کنیم.

۳) سپس از رابطه تک متغیره به‌دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به‌دست می‌آوریم.

٤) حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.

مثال: دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

۱) کمیتی که قرار است بهینه شود، حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی است یعنی قرار است $p=xy$ کم‌ترین باشد.

۲) با توجه به مسئله می‌دانیم که تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است یعنی $y-x=۱۰$ است حال باید رابطه به‌دست آمده در مرحله قبل را تک‌متغیره کنیم:

$$\begin{cases} p=xy \\ y-x=۱۰ \to y=۱۰+x \end{cases} \Rightarrow p=x(۱۰+x)=x^۲+۱۰x$$

شبیه ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حال از رابطه تک‌متغیره $p=x^۲+۱۰x$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به‌دست می‌آوریم:

$$p'=۰ \Rightarrow ۲x+۱۰=۰ \Rightarrow x=-۵ \xrightarrow{y=۱۰+x} y=۵$$

مثال: می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن ۲۷π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

می‌خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کم‌ترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می‌دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه‌ای که قرار است بهینه شود برابر است با:

$$S=\underbrace{\pi r^۲}_{\text{سطح قاعده}}+\underbrace{۲\pi rh}_{\text{سطح جانبی}} \qquad (*)$$

از طرفی طبق اطلاعات مسئله می‌دانیم که حجم قوطی برابر ۲۷π مترمکعب است یعنی:

$$v=\pi r^۲h=۲۷\pi \Rightarrow r^۲h=۲۷$$

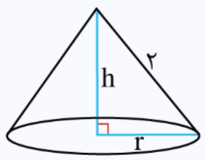
حال باید به کمک $r^۲h=۲۷$، رابطه (*) را به‌صورت تک‌متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم:

$$\begin{cases} S=\pi r^۲+۲\pi rh \\ r^۲h=۲۷ \Rightarrow h=\dfrac{۲۷}{r^۲} \end{cases} \Rightarrow S=\pi r^۲+۲\pi r\left(\frac{۲۷}{r^۲}\right)=\pi r^۲+\frac{۵۴\pi}{r}$$

$$\Rightarrow S'=۲\pi r-\frac{۵۴\pi}{r^۲}=۰ \Rightarrow ۲\pi r^۳=۵۴\pi \Rightarrow r=۳ \xrightarrow{h=\frac{۲۷}{r^۲}} h=۳$$

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر ۲ را حول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه‌اش دوران می‌دهیم تا یک مخروط به‌دست آید. ارتفاع مخروط را طوری بیابید که بیش‌ترین حجم را داشته باشد.

مطابق شکل طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$۴=h^۲+r^۲ \Rightarrow r^۲=۴-h^۲$$

حجم مخروط برابر است با:

$$v=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$$

$$v=\frac{۱}{۳}\pi\left(۴-h^۲\right)h=\frac{\pi}{۳}\left(۴h-h^۳\right) \quad , \quad ۰<h<۲$$

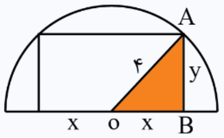
ماکزیمم مقدار تابع v، در نقطهٔ بحرانی آن رخ می‌دهد، پس مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v'(h)=\frac{\pi}{۳}\left(۴-۳h^۲\right)=۰ \Rightarrow h^۲=\frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{۰<h<۲} h=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال: یک مستطیل درون یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد طول و عرض مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

با توجه به شکل مقابل، اگر طول مستطیل را برابر $۲x$ و عرض آن را برابر y فرض کنیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:



$$OA^۲=OB^۲+AB^۲ \Rightarrow ۱۶=x^۲+y^۲ \qquad (۱)$$

از طرفی رابطه‌ای که قرار است بهینه شود مساحت مستطیل است:

$$S=(۲x)(y)=۲xy \qquad (۲)$$

حال به کمک روابط ۱ و ۲، یک رابطه تک‌متغیره می‌سازیم:

$$x^۲+y^۲=۱۶ \to y=\sqrt{۱۶-x^۲} \xrightarrow{S=۲xy} S(x)=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}$$

حال برای اینکه مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد باید از رابطه $S(x)$، مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$S'(x)=\frac{-۴(x^۲-۸)}{\sqrt{۱۶-x^۲}}\xrightarrow{S'(x)=۰}x=۲\sqrt{۲}\xrightarrow{y=\sqrt{۱۶-x^۲}}y=۲\sqrt{۲}$$

و بیشترین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{max}=(۲x)(y)=۲(۲\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})=۱۶$$

۱۵ — ۱/۵

مصحح شو!

$$\begin{cases}f'(x)=۳x^۲+۲ax+b \quad (۰/۲۵)\\ f''(x)=۶x+۲a \quad (۰/۲۵)\end{cases}$$

$$f''(۱)=۰\Rightarrow a=-۳ \quad (۰/۵)$$

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow b=-۹ \quad (۰/۲۵)$$

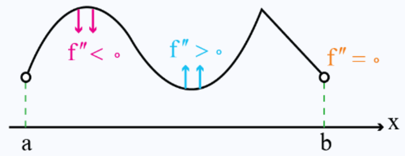
$$f(۱)=۲\Rightarrow c=۱۳ \quad (۰/۲۵)$$

جهت تقعر منحنی:

جهت تقعر منحنی:

با فرض اینکه $f''(x)$ به ازای هر x از بازه (a,b)، موجود باشد:

- اگر به ازای هر x از بازه (a,b)، $f''(x)>۰$ باشد آن‌گاه تقعر تابع f در این بازه **رو به بالا** است.
- اگر به ازای هر x از بازه (a,b)، $f''(x)<۰$ باشد آن‌گاه تقعر تابع f در این بازه **رو به پایین** است.
- اگر به ازای هر x از بازه (a,b)، $f''(x)=۰$ باشد آن‌گاه این آزمون بی‌نتیجه است.



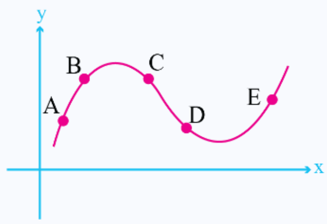
مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید. در کدام‌یک از نقاط مشخص‌شده در نمودار:

الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی‌اند؟ C

ب) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است؟ D

ج) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو مثبت‌اند؟ E

د) $f'(x)$ مثبت و $f''(x)$ منفی است؟ A و B



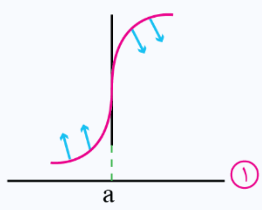
نقطه عطف:

نقطه $(a,f(a))$ را نقطه عطف تابع f می‌گوییم هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشد:

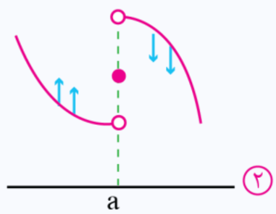
۱) تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته باشد.

۲) نمودار تابع f در این نقطه خط مماس واحد (افقی، مایل و یا قائم) داشته باشد.

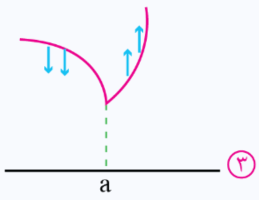
۳) جهت تقعر تابع f در این نقطه تغییر کند $\xleftarrow{\text{یعنی}}$ خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(a,f(a))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.



$x=a$، نقطه عطف است



$x=a$ نقطه عطف نیست
(دلیل: عدم پیوستگی)



$x=a$ نقطه عطف نیست
(دلیل: عدم وجود مماس واحد)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir
شبیه‌ساز امتحانات نهایی

توجه مهم: اگر نقطه $(a,f(a))$ نقطهٔ عطف تابع f باشد در این صورت یا $f''(a)$ وجود ندارد و یا اینکه $f''(a)=0$ است.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

- در نقطه عطف علامت f'' تغییر می‌کند. درست
- هر نقطه‌ای که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطه عطف است. نادرست. (به شکل شماره ۲ و ۳ در بالا نگاه کن)
- هر نقطه‌ای که در آن f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است. نادرست
- یک تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد. درست (ممکن است f'' بیش از یک ریشه داشته باشد و در آن‌ها تغییر علامت دهد.)
- تابع اکیداً صعودی، نقطه عطف ندارد. نادرست (به شکل شماره ۱ در بالا نگاه کن)

پیدا کردن نقطه عطف: برای پیدا کردن نقطه (نقاط) عطف تابع f، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا نقاط بحرانی تابع مشتق (f') را پیدا می‌کنیم.

۲) سپس از بین نقاط پیدا شده در مرحله ۱، نقاطی را به عنوان نقطه عطف معرفی می‌کنیم که هر سه شرط زیر را داشته باشند:

- تابع f در آن پیوسته باشد.
- تابع f در آن مماس واحد داشته باشد.
- تابع f'' در آن تغییر علامت دهد.

مثال: جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x)=x^3+3x^2+1$ را مشخص کنید.

$$f'(x)=3x^2+6x \to f''(x)=6x+6 \xrightarrow{f''=0} 6x+6=0 \Rightarrow x=-1$$

حال جدول تعیین علامت f'' را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	•	$+$

همان‌طور که می‌بینید، f'' در $x=-1$، تغییر علامت می‌دهد از طرفی می‌دانیم که تابع f، تابعی همواره پیوسته و مشتق پذیر است پس نقطه به طول $x=-1$، نقطه عطف تابع است.

$$y=x^3+3x^2+1 \xrightarrow{x=-1} y=3$$

مختصات نقطه عطف : $(-1,3)$

مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را در دامنه‌اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

$$D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \to f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

با توجه به ضابطه تابع f'' می‌توان گفت که تابع f در $x=1$ پیوسته است و همچنین اگر $x>1$ باشد آن‌گاه $f''<0$ بوده و جهت تقعر منحنی رو به پایین است و اگر $x<1$ باشد $f''>0$ بوده و جهت تقعر منحنی رو به بالاست پس جهت تقعر تابع f در $x=1$ عوض می‌شود از طرفی از فصل مشتق می‌دانیم که این تابع در $x=1$ دارای مماس قائم است بنابراین $x=1$ نقطه عطف تابع f است. ببینید:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	ت.ن	$-$

مثال: ابتدا جهت تقعر تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده و سپس وجود نقطه عطف آن را بررسی کنید.

$$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2} \to f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''	1	$-$ $-\infty$		$+\infty$ $+$	1

همان‌طور که می‌بینید، در بازه $(1,+\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه $(-\infty,1)$ تقعر رو به پایین است از طرفی این تابع نقطه عطف ندارد و $x=1$ نیز در دامنه تعریف تابع قرار ندارد.

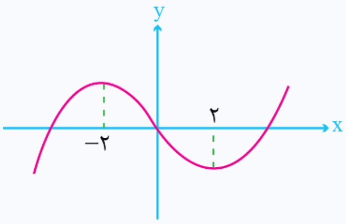
نکته: اگر نقطه (a,b)، یک نقطه عطف تابع f باشد، داریم:

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f''(a)=0 \end{cases}$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

مثال: اگر $(\cdot,\cdot)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطه $y = x^{3} + ax^{2} + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a ، b و c را پیدا کنید:

چون نقطه $(\cdot,\cdot)$ نقطه عطف تابع است پس:



$f(\cdot) = \cdot \Rightarrow c = \cdot$

$f''(\cdot) = \cdot \to f'(x) = ۳x^{۲} + ۲ax + b \to f''(x) = ۶x + ۲a \xrightarrow{f''(\cdot)=\cdot} ۲a = \cdot \Rightarrow a = \cdot$

از طرفی با توجه به شکل مشخص است که در $x = ۲$ و $x = -۲$ ، مماس افقی داریم، پس:

$f'(۲) = \cdot \to f'(x) = ۳x^{۲} + ۲ax + b \xrightarrow{a=\cdot} f'(x) = ۳x^{۲} + b$

$\xrightarrow{f'(۲)=\cdot} ۳(۴) + b = \cdot \to b = -۱۲$

۱۶ ۲

مصحح شو!

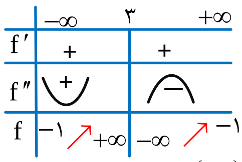
$f(x) = \dfrac{-x}{x-۳}$

مجانب قائم : $x = ۳$ $(\cdot/۲۵)$

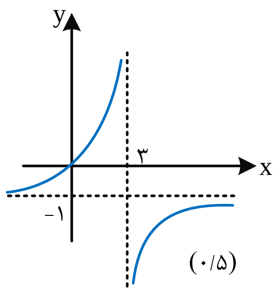
مجانب افقی : $y = -۱$ $(\cdot/۲۵)$

$f'(x) = \dfrac{۳}{(x-۳)^{۲}}$ $(\cdot/۲۵)$

$f''(x) = \dfrac{-۶}{(x-۳)^{۳}}$ $(\cdot/۲۵)$



$(\cdot/۵)$



$(\cdot/۵)$

مراحل رسم نمودار توابع:

برای رسم نمودار یک تابع باید همه و یا بعضی از مراحل زیر را انجام داده و به کمک آن‌ها جدول رفتار تابع را تشکیل دهیم و سپس نمودار تابع را رسم کنیم:

۱) دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

۲) محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات را در صورت وجود تعیین می‌کنیم.

۳) رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را مشخص می‌کنیم.

۴) مجانب‌های افقی و قائم تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

۵) f' را به دست آورده و با تعیین علامت آن بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها صعودی و یا نزولی است را معین می‌کنیم.

۶) نقاط بحرانی و اکسترمم‌های تابع (نسبی و مطلق) را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

۷) f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع را در بازه‌های مختلف مشخص می‌کنیم.

۸) نقطه عطف تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

۹) جدولی رسم می‌کنیم و اطلاعات حاصل از f ، f' و f'' را که به دست آورده‌ایم درون آن پیاده می‌کنیم.

۱۰) نمودار تابع را به کمک اطلاعات مراحل قبل رسم می‌کنیم (اگر لازم شد از یه سری نقاط کمکی دیگه هم استفاده می‌کنیم)

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^{۳} + ۶x^{۲} - ۹$ را رسم کنید:

۱) به‌دست آوردن دامنه تابع:

$D_f = \mathbb{R}$

۲) محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات:

$\begin{cases} x = \cdot \to y = -۹ \\ y = \cdot \to -x^{۳} + ۶x^{۲} - ۹ = \cdot \Rightarrow \end{cases}$ فرض کنیم نمی‌دونیم جوابش چی میشه!

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳) رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^{۳}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^{۳}) = -\infty \end{cases}$$

۴) این تابع مجانب افقی و قائم ندارد. (پس الکی دنبالش نمی‌گردیم!)

۵) f' و f'' را به دست آورده و به کمک آن‌ها نقاط بحرانی و تقعر تابع را (در صورت وجود) مشخص می‌کنیم:

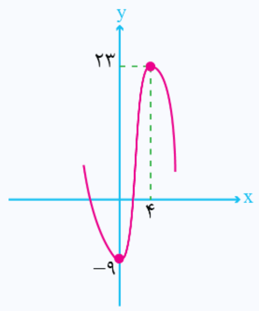
$$f'(x) = -۳x^{۲} + ۱۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \xrightarrow{f} f(۰) = -۹ \\ x = ۴ \xrightarrow{f} f(۴) = ۲۳ \end{cases}$$

نقاط $(۰,-۹)$ و $(۴,۲۳)$، نقاط بحرانی‌اند.

$$f''(x) = -۶x + ۱۲ \xrightarrow{f''(x)=۰} -۶x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow{f} f(۲) = ۷$$

۶) حال جدول تغییرات را رسم کرده و f' و f'' را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۲		۴		$+\infty$
f'		$-$	●	$+$		$+$	●	$-$	
f''		$+$		$+$	●	$-$		$-$	
f	$+\infty$	↘		↗		↗		↘	$-\infty$
			min		عطف		max		



توجه شود که چون f'' در دو طرف $x = ۲$ تغییر علامت می‌دهد بنابراین نقطه $(۲,۷)$ نقطه عطف است.

تابع هموگرافیک و ویژگی‌های آن:

۱) تابع به فرم $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq ۰$ و $ad - bc \neq ۰$ باشد را یک تابع هموگرافیک می‌نامیم.

- اگر $c = ۰$ باشد این تابع به یک تابع خطی تبدیل می‌شود.
- اگر $ad - bc = ۰$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

۲) دامنه تابع هموگرافیک به صورت $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$ و برد آن هم به صورت $R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ است.

۳) تابع هموگرافیک، در کل دامنه خود نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) است.

۴) این تابع دارای مجانب افقی $y = \dfrac{a}{c}$ و مجانب قائم $x = -\dfrac{d}{c}$ است.

۵) مشتق یک تابع هموگرافیک برابر است با: $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^{۲}}$

رسم نمودار یک تابع هموگرافیک:

برای رسم یک تابع هموگرافیک مراحل زیر را طی می‌کنیم:

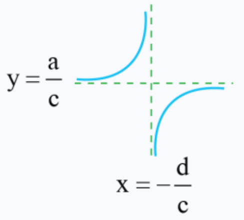
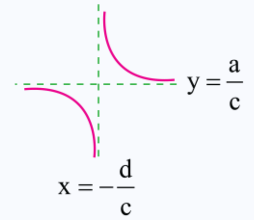
- ابتدا ریشه عبارت مخرج کسر را پیدا می‌کنیم که همان مجانب قائم تابع است. $(x = -\dfrac{d}{c})$
- سپس حاصل حد تابع را در $\pm\infty$ پیدا می‌کنیم که همان مجانب افقی تابع است. $(y = \dfrac{a}{c})$
- محل برخورد تابع با محورهای مختصات را (در صورت وجود) پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = ۰ \to \text{محل برخورد با محور } x\text{ها} \\ f(۰) \to \text{محل برخورد با محور } y\text{ها} \end{cases}$$

- از تابع مشتق گرفته و با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

• با توجه به علامت مشتق و به کمک جدول زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$ad-bc>0$	$ad-bc<0$
	

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{2x+1}{1-x}$ را رسم کنید:

$$f(x)=\frac{2x+1}{-x+1}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

ابتدا مجانب‌های تابع را پیدا می‌کنیم:

مجانب قائم تابع : $x=-\frac{d}{c}\Rightarrow x=1$

مجانب افقی تابع : $y=\frac{a}{c}\Rightarrow y=-2$

حال از تابع مشتق گرفته و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

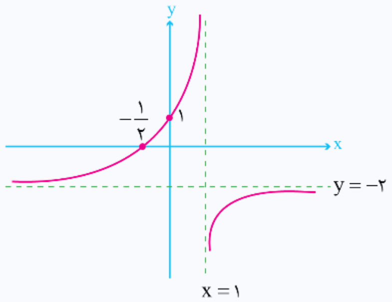
$f'(x)=\frac{3}{(-x+1)^2}\Rightarrow f'(x)\neq 0\Rightarrow$ تابع f نقطه بحرانی ندارد

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

و محل برخورد تابع f با محورهای مختصات برابر است با:

$$f(x)=\frac{2x+1}{-x+1}\Rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow y=1\\ y=0\rightarrow x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

و چون $ad-bc>0$ است لذا نمودار تابع f به صورت زیر است:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir