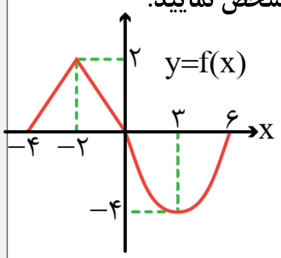
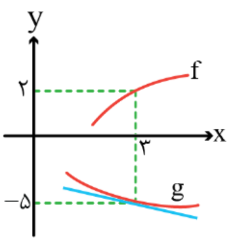
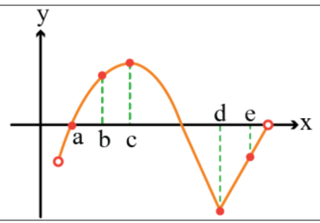
ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر دامنه و برد تابع $f(x)$، بازهٔ $[a,b]$ باشد در این‌صورت برد تابع $y=2f(x-1)+1$ با دامنهٔ تابع $y=-3f\left(\frac{x}{2}-1\right)+2$ برابر است. ب) اگر تابع f در یک بازه اکیداً صعودی باشد، در این بازه، صعودی نیز هست. پ) تابع $f(x)=\tan x$ در بازهٔ $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$، نه صعودی و نه نزولی است. ت) دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos^4 3x-\sin^4 3x$ برابر $\frac{\pi}{6}$ است.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) نمودار تابع $y=x^2$ در بازهٔ $[0,1]$، .... از نمودار تابع $y=x^3$ قرار دارد. ب) درجه تابع $y=2^8x\left(1-x^3\right)^2$ برابر .... است. پ) نقطه $(0,4)$ روی نمودار $y=2f(x+1)$ با نقطه .... روی نمودار $y=-4f\left(\frac{x}{2}-4\right)+1$ متناظر است. ت) حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}[1+\cos x]$ برابر .... است. ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)	۱
۳	با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $g(x)=-f(2x+1)$ را رسم نموده و دامنه و برد آن را مشخص نمایید. 	۰/۷۵
۴	مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $f(x)=3x^4+mx^3-2x+1$ بر $x+1$ برابر با ۳ است. باقی‌ماندهٔ این تقسیم را به‌دست آورید.	۰/۵
۵	جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^3 x=1+\cos x$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۶	مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x-2}{\|x\|+x}$ را مشخص کرده و نمودار تابع را در مجاورت مجانب قائم رسم کنید.	۰/۷۵
۷	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+2}{[\sin x]+1}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-4x^7+6x^2}{3x^3+7}$	۱
۸	با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^2(x)g(x)+5f^2(x)}{x-3}$ چند برابر $g'(3)$ است؟ 	۰/۵

گروه آموزشی ماز

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه	
نام و نام خانوادگی:	سوالات امتحان نهایی درس: حسابان ۲	رشته: ریاضی فیزیک

ردیف	سوالات	نمره
۹	خط $y=۳x-۲$ در نقطهٔ $x=۱$ بر منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ مماس است. حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲f^{۲}(x)-f(x)-۱}{x-۱}$ را بیابید.	۰/۷۵
۱۰	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه یا نقاطی که تابع f در آن بحرانی است. ب) طول نقطه یا نقاطی که در آن حاصل $f\times f'$ منفی باشد. 	۰/۷۵
۱۱	مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\sqrt{\sin x}$ ب) $y=\frac{۵\cos\sqrt{x}}{۱+\sin x}$ پ) $y=\left(\frac{\sqrt{x}-۱}{x^{۳}+۲}\right)^{۳}$ ت) $y=(\cos ۳x)f'(\sin x)$	۲
۱۲	مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x)=(۳x^{۲}+x-۴)[x]$ را در نقطهٔ $x_{۰}=۱$ به‌دست آورید.	۱
۱۳	با فرض این‌که تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $g(x)=f(\sin x)$ و $f'\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲f''\left(\frac{۱}{۲}\right)=-۴$ باشد، حاصل $g''\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ را به‌دست آورید.	۱
۱۴	اگر $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۴ & x\geq a\\ ۲x-۵ & x<a\end{cases}$ تابعی همواره پیوسته باشد، مشتق تابع $y=(fof)(x)$ را در $x=۳$ به‌دست آورید.	۰/۷۵
۱۵	گنجایش بشکه‌ای ۱۰۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقی‌مانده در بشکه از رابطهٔ $V=۱۰۰\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)^{۲}$ به‌دست آید: الف) آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ زمانی $[۰,۹۰]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای $-\frac{۱}{۲}\frac{L}{s}$ است؟	۰/۷۵
۱۶	نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+۳}{\sqrt{-x-۲}}$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۷	اگر تابع $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+x+d$ در نقطه $(۱,۴)$ دارای اکسترمم نسبی باشد مقادیر b و d را بیابید.	۱
۱۸	استوانه‌ای با حجم ماکزیمم را داخل کره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ واحد محاط می‌کنیم. حجم استوانه را به‌دست آورید.	۱
۱۹	در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ مقادیر a و b و c را چنان بیابید که نقطهٔ $(۰,۲)$ نقطهٔ عطف منحنی تابع بوده و نمودار تابع f، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.	۱
۲۰	جدول رفتار و نمودار تابع $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را رسم کنید.	۱/۷۵
	موفق باشید	۲۰

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	شما می‌توانید این پاسخبرگ را پرینت بگیرید و پاسخ‌های خود را در آن بنویسید، و سپس عکس یا فایل اسکن شده پاسخبرگ را در سایت آپلود کنید. در صورت عدم پرینت پاسخبرگ، می‌توانید پاسخ سوالات را در یک برگه A۴ سفید به صورت خوش‌خط و منظم بنویسید و سپس در سایت آپلود کنید.	
۱	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۲	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۳		۰/۷۵
۴		۰/۵
۵		۱/۵
۶		۰/۷۵

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه | پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی: | پاسخبرگ امتحان نهایی درس: حسابان ۲ | رشته: ریاضی فیزیک

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۷	الف) ب)	۱
۸		۰/۵
۹		۰/۷۵
۱۰	الف) .... ب)	۰/۷۵
۱۱	الف) ب)	۲

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	ادامه سوال ۱۱: پ) ت)	
۱۲		۱
۱۳		۱
۱۴		۰/۷۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۵	الف) ب)	۰/۷۵
۱۶		۱/۲۵
۱۷		۱
۱۸		۱

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۹		۱
۲۰		۱/۷۵
	موفق باشید	۲۰

سلام به همه مازی‌های عزیز

امسال امتحان نهایی شما به خاطر بحث تأثیر معدل توی کنکور اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده و عقل سلیم حکم می‌کنه که امتحان نهایی رو به شدت جدی بگیرین.

قبل از هر چیز لازمه که بدونیم برای درس حسابان ۲ و توی نوبت خرداد ماه، چه فصل‌هایی مهم‌ترن و به قول خارجیا important chapters کدوما هستن و بارم‌بندی اونا به چه صورتی هست، ببینید:

- حسابان ۲
  - فصل اول (تابع) : ۲/۵ نمره
  - فصل دوم (مثلثات): ۲ نمره
  - فصل سوم (حد): ۲/۵ نمره
  - فصل چهارم (مشتق): ۷ نمره
  - فصل پنجم (کاربرد مشتق): ۶ نمره

همون‌طور که می‌بینید، بین تمام فصل‌های کتاب، فصل‌های مشتق و کاربرد مشتق با داشتن ۱۳ نمره، بیش‌ترین بارم رو به خودشون اختصاص می‌دن و توصیه می‌شه که حتماً روی این دوتا فصل بیش‌تر تمرکز کنید.

(البته برای این‌که اون ۲۰ خوشگل رو بزنی به جیب نیازه که همه فصل‌ها رو جدی بگیری 😃)

حالا بریم که یه ذره ریزتر فصل‌های کتاب رو بررسی کنیم و ببینیم که چه سؤالاتی احتمال مطرح شدنشون زیاده...

فصل اول (تابع):

۱) از درس تبدیل نمودار تابع و انتقال اونا معمولاً یه سؤال رو داریم، اونم می‌تونه به این‌صورت باشه که نمودار یه تابع رو می‌دن و از ما می‌خوان که نمودار یه تابع دیگه رو که از انتقال تابع اولیه به‌دست میاد رو رسم کنیم و حتی خیلی وقتا به ما میگن که دامنه و برد تابع انتقال یافته رو هم به‌دست بیاریم.

۲) از بحث توابع یکنوا، احتمال اومدن تیپ‌های مختلف سؤالی وجود داره اما معمولاً به این شکل سؤال میاد که ضابطه یه تابع رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که نمودار اون رو رسم کنیم و صعودی و یا نزولی بودن تابع رو توی بازه‌های مختلف بررسی کنیم.

۳) از قسمت بخش‌پذیری و قاعده تقسیم هم معمولاً یه سؤال مستقیم میاد که برای جواب دادن به اون باید توجه کنیم که باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(ax+b)$ با $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ برابره و این‌که اگر چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(ax+b)$ بخش‌پذیر باشه اون‌وقت $p\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ می‌شه.

۴) یه چند تا اتحاد مهم هم توی صفحه ۲۰ کتاب درسی وجود داره که توصیه می‌شه اونارو هم بلد باشین و سعی کنین تمرین ۸ صفحه ۲۲ کتاب رو هم به کمک همین اتحادها حل کنین.

فصل دوم (مثلثات):

تیپ سؤال‌های این فصل تقریباً مشخصه و می‌شه گفت که پیچیدگی خاصی هم نداره، ببینید:

۱) ضابطه یه تابع مثلثاتی رو می‌دن و از ما می‌خوان که مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب اون رو به‌دست بیاریم.

۲) نمودار یه تابع مثلثاتی رو می‌دن و از ما می‌خوان که ضابطه اون تابع رو بنویسیم که توی این تیپ از سؤال‌ها هم باید به مقادیر ماکزیمم و مینیمم شکل و دوره تناوب اون دقت کنیم تا بتونیم مقادیر مجهول رو توی ضابطه تابع مشخص کنیم.

۳) از بحث معادله‌های مثلثاتی هم می‌شه گفت که تقریباً هر سال یه سؤال مستقیم داشتیم؛ به این‌صورت که یه معادله مثلثاتی رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که اون معادله رو حل کنیم. منظور از حل کردن یه معادله مثلثاتی اینه که بتونیم جواب‌های کلی اون رو به‌دست بیاریم فقط باید دقت کنید که تسلط به روابط مثلثاتی (مخصوصاً روابط مثلثاتی مربوط به زاویه‌های دو برابر کمان)، برای جواب دادن به این سؤال‌ها می‌تونه خیلی بهمون کمک کنه.

۴) از قسمت مربوط به تابع تانژانت و نمودار اون هم معمولاً به‌صورت درست یا نادرست و یا به‌صورت جای خالی سؤال میاد. فقط حواست به اتحاد مربوط به تانژانت مجموع و تفاضل دو تا زاویه که توی صفحه ۴۲ کتاب هستش باشه که احتمال داره ازش سؤال بیاد.

فصل سوم (حدهای نامتناهی و حد در بی‌نهایت):

۱) توی بعضی از سؤال‌های این فصل میان و به ما نمودار یه تابع مثل $f(x)$ رو می‌دن و از ما حد تابع f رو وقتی که x به سمت یه عدد خاص (مثل a) یا به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کنه می‌پرسن. مثلاً $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و ...

۲) برای رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$، باید به کمک هم‌ارزی پر توان، عبارت‌های پر توان رو توی صورت و مخرج کسر نگه داریم و بقیه عبارت‌ها رو حذف کنیم بعدش باید با توجه به کسری که باقی می‌مونه تصمیم بگیریم که حاصل حد چی می‌شه.

۳) توی بعضی از سؤال‌ها حد یه تابعی رو از ما می‌پرسن که توی ضابطه اون تابع، قدرمطلق و یا جزء صحیح حضور داره که برای جواب دادن به این نوع سؤال‌ها، قبل از هر چیز باید تکلیف جزء صحیح و قدرمطلق رو مشخص کنیم.

۴) سؤال مربوط به پیدا کردن مجانب افقی و مجانب قائم یه تابع هم معمولاً پای ثابت سؤالای امتحانیه! فقط دقت کنین که توی توابع کسری ریشه‌های مخرج کسر (البته در صورتی که ریشه صورت نباشن)، مجانب قائم تابع هستن و برای پیدا کردن مجانب (های) افقی تابع هم باید حد اون رو زمانی که $x \to \pm\infty$ میل می‌کنه به‌دست بیاریم.

فصل چهارم (مشتق):

۱) از قسمت مفاهیم اولیه مشتق اگر هم سؤالی مطرح بشه می‌تونه به این صورت باشه که نموداری رو به ما بدن و از ما علامت شیب خط مماس بر منحنی (یا همون علامت مشتق) رو توی نقاط مختلف بپرسن.

۲) پای ثابت سؤالای امتحان نهایی، یه سؤال از مشتق‌گیریه؛ به این صورت که ضابطه چندتا تابع رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که مشتق اون توابع رو به‌دست بیاریم (فقط حواستون باشه که اگر توی صورت سؤال به ما گفته باشن که "ساده کردن مشتق الزامی نیست" نیازی نیست که ضابطه تابع مشتق رو ساده کنیم.)

۳) یکی دیگه از سؤال‌هایی که از این فصل می‌تونه مطرح بشه، سؤالی مربوط به بحث مشتق‌پذیریه؛ می‌دونیم که اگه تابع f تو نقطه مثلاً $x=a$ مشتق‌پذیر باشه اولاً تابع f توی $x=a$ باید پیوسته باشه و ثانیاً مشتق چپ و مشتق راست تابع f توی نقطه $x=a$ باید باهم برابر باشن.

۴) مباحث آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای هم می‌تونن کاندیدای طرح سؤال باشن به این صورت که ضابطه یه تابع (یا معادله حرکت یک متحرک یا رابطهٔ مربوط به رشد یک توده باکتری و ...) رو به ما می‌دن و از ما آهنگ تغییر متوسط و یا لحظه‌ای اون رو می‌پرسن. فقط دقت کنید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f توی لحظه $x=a$ برابره با $f'(a)$، و آهنگ تغییر متوسط تابع f توی بازه $[a,b]$ برابره با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

۵) اگه توی یه سؤالی از ما نمودار تابع مشتق رو بخوان اول میایم و از تابع موردنظر مشتق می‌گیریم و بعدش نمودار تابع مشتق رو رسم می‌کنیم فقط حواستون باشه نقطه‌هایی که تابع موردنظر توی اونا مشتق‌پذیر نباشه، توی دامنه تابع f' وجود ندارن.

فصل پنجم (کاربرد مشتق):

۱) عمده سؤال‌های این فصل مربوط می‌شه به حالتی که ضابطه یه تابعی رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که مختصات نقاط اکسترمم نسبی و یا نقاط اکسترمم مطلق اون رو به‌دست بیاریم (البته بعضی وقتا توی صورت سؤال قید می‌کنه که جدول تغییرات تابع رو هم رسم کنیم) که برای حل این تیپ از سؤال‌ها گام اول اینه که نقاط بحرانی تابع رو به‌دست بیاریم.

نقاط بحرانی چیا بودن؟
- نقاطی که تابع توی اونا مشتق‌پذیر نیست.
- نقاطی که مشتق تابع توی اونا برابر صفره.
- نقاط ابتدا و انتهای بازه

حالا اگه از ما مختصات نقاط اکسترمم نسبی رو پرسیدن، جدول تغییرات تابع رو رسم می‌کنیم و از روی اون نظر می‌دیم و اگه از ما نقاط اکسترمم مطلق رو پرسیدن، مقدار تابع رو به ازای طول نقاط بحرانی به‌دست میاریم و بیش‌ترین مقدار رو به عنوان ماکزیمم مطلق و کم‌ترین مقدار رو هم به عنوان مینیمم مطلق معرفی می‌کنیم فقط باید حواستون به بازه‌ای که صورت سؤال داده هم باشه و نقاط بحرانی که توی بازه گفته شده وجود ندارن رو باید از بازی کنار بزاریم.

۲) در مسائل مربوط به بهینه‌سازی هم قدم اول اینه که با استفاده از اطلاعات سؤال بتونیم رابطه مرتبط با متغیرها رو به‌دست بیاریم (به درسنامه‌ای که توی پاسخنامه گذاشتیم مراجعه کن).

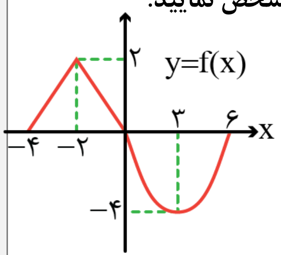
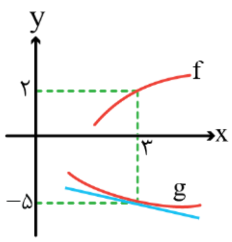
۳) برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن یه تابع به کمک مشتق، باید تابع مشتق رو تعیین علامت بکنیم و به کمک اون صعودی یا نزولی بودن یه تابع رو توی بازه‌های مختلف مشخص بکنیم.

۴) یکی دیگه از سؤال‌هایی که احتمال اومدنش زیاده اینه که ضابطه یه تابع رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که جهت تقعر نمودار اون تابع رو مشخص کنیم و نقاط عطف اون تابع رو (البته در صورت وجود) به‌دست بیاریم که توی این مواقع هم باید f'' رو تعیین علامت بکنیم.

۵) از بحث رسم نمودار توابع هم به احتمال بسیار زیاد یدونه سؤال رو می‌بینید که اونم به این صورت مطرح می‌شه که ضابطه یه تابع (معمولاً تابع درجه سوم یا تابع هموگرافیک) رو به ما می‌دن و از ما می‌خوان که جدول رفتار و نمودار اون تابع رو رسم کنیم که اگه می‌خوای از پس این تیپ از سؤال بربیای بهت پیشنهاد می‌کنیم که درسنامه این سؤال رو از پاسخنامه آزمون بخونی.

و اما توصیه‌های پایانی...

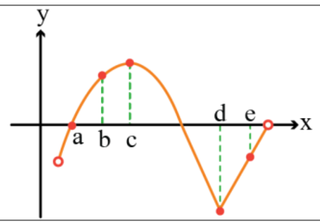
- ✓ قبل از تحویل پاسخ‌نامه امتحانی، حتماً حتماً یه بار دیگه جواب‌هایی که دادی رو چک کن تا یه وقت خدای نکرده جایی اشتباه نکرده باشی.
- ✓ برای جواب دادن به سؤال‌ها به هیچ عنوان از روش‌های سریع و اصطلاحاً روش‌های تستی استفاده نکن و سعی کن پاسخ تشریحی رو به‌صورت کامل بنویسی (البته توی سؤال‌هایی که چهارگزینه‌ای هستن اگه راه بده می‌تونی ازشون استفاده کنی یا زمانی که می‌خوای جوابی که به‌دست آوردی رو چک کنی که درسته یا نه هم می‌تونی از این روش‌ها استفاده کنی).
- ✓ سعی کن که هیچ سؤالی رو بدون جواب نذاری.

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر دامنه و برد تابع $f(x)$، بازهٔ $[a,b]$ باشد در این‌صورت برد تابع $y=2f(x-1)+1$ با دامنهٔ تابع $y=-3f\left(\frac{x}{2}-1\right)+2$ برابر است. ب) اگر تابع f در یک بازه اکیداً صعودی باشد، در این بازه، صعودی نیز هست. پ) تابع $f(x)=\tan x$ در بازهٔ $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$، نه صعودی و نه نزولی است. ت) دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos^4 3x-\sin^4 3x$ برابر $\frac{\pi}{6}$ است.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) نمودار تابع $y=x^2$ در بازهٔ $[0,1]$، .... از نمودار تابع $y=x^3$ قرار دارد. ب) درجه تابع $y=2^8x\left(1-x^3\right)^2$ برابر .... است. پ) نقطه $(0,4)$ روی نمودار $y=2f(x+1)$ با نقطه .... روی نمودار $y=-4f\left(\frac{x}{2}-4\right)+1$ متناظر است. ت) حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}[1+\cos x]$ برابر .... است. ([ ]، نماد جزء صحیح است.)	۱
۳	با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $g(x)=-f(2x+1)$ را رسم نموده و دامنه و برد آن را مشخص نمایید. 	۰/۷۵
۴	مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $f(x)=3x^4+mx^3-2x+1$ بر $x+1$ برابر با ۳ است. باقی‌ماندهٔ این تقسیم را به‌دست آورید.	۰/۵
۵	جواب کلی معادله مثلثاتی $2cox^3x=1+\cos x$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۶	مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x-2}{\lvert x\rvert+x}$ را مشخص کرده و نمودار تابع را در مجاورت مجانب قائم رسم کنید.	۰/۷۵
۷	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2}{[\sin x]+1}$ ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^7+6x^2}{3x^3+7}$	۱
۸	با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x\to 3}\frac{f^2(x)g(x)+5f^2(x)}{x-3}$ چند برابر $g'(3)$ است؟ 	۰/۵

گروه آموزشی ماز

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه | پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی: | سوالات امتحان نهایی درس: حسابان ۲ | رشته: ریاضی فیزیک

ردیف	سوالات	نمره
۹	خط $y=3x-2$ در نقطهٔ $x=1$ بر منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ مماس است. حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f^2(x)-f(x)-1}{x-1}$ را بیابید.	۰/۷۵
۱۰	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه یا نقاطی که تابع f در آن بحرانی است. ب) طول نقطه یا نقاطی که در آن حاصل $f\times f'$ منفی باشد.  	۰/۷۵
۱۱	مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\sqrt{\sin x}$ ب) $y=\frac{5\cos\sqrt{x}}{1+\sin x}$ پ) $y=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^3+2}\right)^3$ ت) $y=(\cos 3x)f'(\sin x)$	۲
۱۲	مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x)=(3x^2+x-4)[x]$ را در نقطهٔ $x_0=1$ به‌دست آورید.	۱
۱۳	با فرض این‌که تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $g(x)=f(\sin x)$ و $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2f''\left(\frac{1}{2}\right)=-4$ باشد، حاصل $g''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ را به‌دست آورید.	۱
۱۴	اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & x\geq a\\ 2x-5 & x<a\end{cases}$ تابعی همواره پیوسته باشد، مشتق تابع $y=(fof)(x)$ را در $x=3$ به‌دست آورید.	۰/۷۵
۱۵	گنجایش بشکه‌ای ۱۰۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقی‌مانده در بشکه از رابطهٔ $V=100\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ به‌دست آید: الف) آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ زمانی $[0,90]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای $-\frac{1}{2}\frac{L}{s}$ است؟	۰/۷۵
۱۶	نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{-x-2}}$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۷	اگر تابع $f(x)=x^3+bx^2+x+d$ در نقطه $(1,4)$ دارای اکسترمم نسبی باشد مقادیر b و d را بیابید.	۱
۱۸	استوانه‌ای با حجم ماکزیمم را داخل کره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ واحد محاط می‌کنیم. حجم استوانه را به‌دست آورید.	۱
۱۹	در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ مقادیر a و b و c را چنان بیابید که نقطهٔ $(0,2)$ نقطهٔ عطف منحنی تابع بوده و نمودار تابع f، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.	۱
۲۰	جدول رفتار و نمودار تابع $y=x^3-3x^2+1$ را رسم کنید.	۱/۷۵
	موفق باشید	۲۰

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۲	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۳		۰/۷۵
۴		۰/۵
۵		۱/۵
۶		۰/۷۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۷	الف) ب)	۱
۸		۰/۵
۹		۰/۷۵
۱۰	الف) .... ب)	۰/۷۵
۱۱	الف) ب)	۲

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	ادامه سوال ۱۱: پ) ت)	
۱۲		۱
۱۳		۱
۱۴		۰/۷۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۵	الف) ب)	۰/۷۵
۱۶		۱/۲۵
۱۷		۱
۱۸		۱

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۹		۱
۲۰		۱/۷۵
	موفق باشید	۲۰

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱	(see below)	۱

نکته۱:

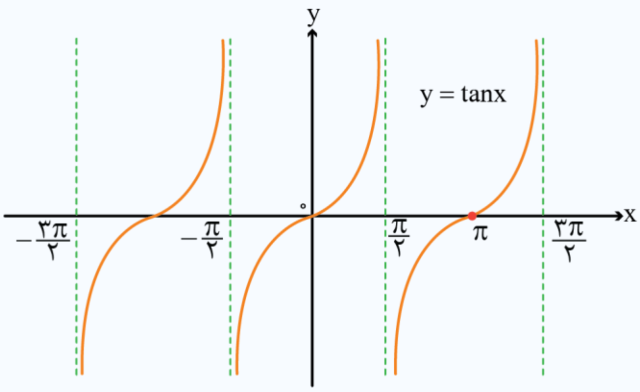
در فرایند رسم تابع $y=af\left(bx+c\right)+d$ ، از روی تابع $f\left(x\right)$ ، ترتیب مراحل به‌صورت زیر است:

الف) تأثیرات روی دامنه:
- ۱) تأثیر عدد ثابت c
- ۲) تأثیر ضریب x $\left(b\right)$

ب) تأثیرات روی برد:
- ۱) تأثیر ضریب f $\left(a\right)$
- ۲) تأثیر عدد ثابت d

نکته۲:

نمودار $y=\tan x$



دوره تناوب: $T=\pi$

دامنه: $\mathbb{R}-\left\{\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}\right\}$

برد: $\mathbb{R}$

تابع $y=\tan x$ ، در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود، اکیداً صعودی است.

روابط مثلثاتی مهم:

$$\sin 2x=\begin{cases}2\sin x\cos x\\ \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\end{cases}$$

$$\cos 2x=\begin{cases}\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^4 x-\sin^4 x\\ 2\cos^2 x-1 \Rightarrow 1+\cos 2x=2\cos^2 x\\ 1-2\sin^2 x \Rightarrow 1-\cos 2x=2\sin^2 x\\ \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\end{cases}$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{cases} y = a\sin^n(bx+c)+d \\ y = a\cos^n(bx+c)+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} & \text{فرد باشد } n \\ T = \dfrac{\pi}{|b|} & \text{زوج باشد } n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a\tan^n(bx+c)+d \\ y = a\cot^n(bx+c)+d \end{cases} \xrightarrow{\text{چه زوج باشد و چه فرد } n} T = \dfrac{\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases} y = |a\sin(bx+c)| \\ y = |a\cos(bx+c)| \end{cases} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{|b|}$$

مثال:

$$y = \sin ۲x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

$$y = \cos^۲ ۴x \Rightarrow T = \frac{\pi}{۴}$$

$$y = |۵\sin ۳x| \Rightarrow T = \frac{\pi}{۳}$$

$$y = ۲\sin ۲x\cos ۲x \Rightarrow y = \sin ۴x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

در مورد یکنوایی توابع:

صعودی	$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$
نزولی	$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$
اکیداً صعودی	$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$
اکیداً نزولی	$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$

تابع ثابت در یک بازه، هم‌صعودی و هم نزولی است.

مثال:

مجموعه جواب نامعادله $\log(x+۱) \le \log(۲x-۳)$ را به دست آورید:

چون تابع $y = \log x$، تابعی اکیداً صعودی است بنابراین با برداشتن لگاریتم از طرفین نامعادله فوق، جهت نامعادله عوض نمی‌شود، یعنی:

$$\log(x+۱) \le \log(۲x-۳) \Rightarrow (x+۱) \le (۲x-۳) \Rightarrow x-۴ \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۴$$

مثال:

مجموعه جواب نامعادله $(\frac{۱}{۳})^{۲x+۱} \le (\frac{۱}{۲۷})$ را به دست آورید:

$$(\frac{۱}{۳})^{۲x+۱} \le (\frac{۱}{۲۷}) \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{۲x+۱} \le (\frac{۱}{۳})^۳$$

چون تابع $y = (\frac{۱}{۳})^x$، تابعی اکیداً نزولی است پس با برداشتن پایه‌ها از طرفین نامساوی فوق، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$۲x+۱ \ge ۳ \Rightarrow ۲x \ge ۲ \Rightarrow x \ge ۱$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

پاسخ تشریحی:

الف) نادرست (۰/۲۵)

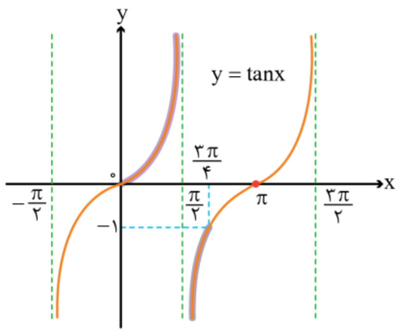
$$y = f(x) \Rightarrow \text{دامنه} = \text{برد} = [a,b]$$
$$y = 2f(x-1)+1 \Rightarrow \text{برد} = [2a+1, 2b+1]$$
$$y = -3f\left(\frac{x}{2}-1\right)+2 \Rightarrow \text{دامنه} = [2(a+1), 2(b+1)]$$

ب) درست (۰/۲۵)

تابع اکیداً یکنوا، یکنوا هم است.

پ) درست (۰/۲۵)

هر تابع در بازه‌ای که شامل مجانب قائمش باشد، نه صعودی و نه نزولی است.



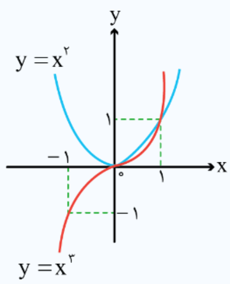
ت) نادرست (۰/۲۵)

$$f(x) = \cos^4 3x - \sin^4 3x = (\cos^2 3x - \sin^2 3x)\overbrace{(\cos^2 3x + \sin^2 3x)}^{1}$$
$$f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x = \cos 6x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

۲ | | ۱

نکته‌های مهم:

در مقایسه توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ داریم:



- در بازه $(0,1)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(-\infty, 0)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(1, +\infty)$: نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

نکته:

هر تابع به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

مثال:

توابع زیر نمونه‌ای از توابع چندجمله‌ای هستند:

$y = \sqrt{2}x - x^2$ (چندجمله‌ای درجه دوم)

$y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x^2$ (چندجمله‌ای درجه ۵)

ردیف	پاسخنامه	نمره

نکاتی در مورد جزء صحیح: اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه:

$$n \le x < n+۱ \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] > n \Rightarrow x \ge n+۱ \qquad [x] < n \Rightarrow x < n$$

$$[x] \ge n \Rightarrow x \ge n \qquad [x] \le n \Rightarrow x < n+۱$$

مثال:

$$[x] \ge -۲ \Rightarrow x \ge -۲$$

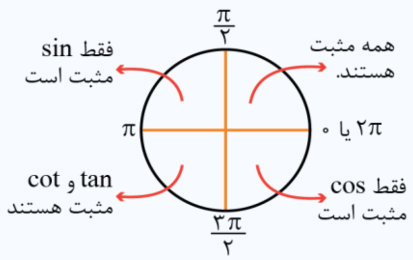
$$[x] < ۴ \Rightarrow x < ۴$$

$$[x] \le ۴ \Rightarrow x < ۵$$

$$-۱ < [x] \le ۳ \Rightarrow ۰ \le x < ۴$$

$$-۱ \le [x] < ۳ \Rightarrow -۱ \le x < ۳$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی:



پاسخ تشریحی:

الف) بالاتر (۰/۲۵)

اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بزرگ‌تری برسند مقدارشان کوچک‌تر می‌شود.

$$x \in (۰,۱) \Rightarrow x^۲ > x^۳$$

ب) درجه ۷ (۰/۲۵)

پ) $(۱۰,-۷)$ (۰/۲۵)

$$y = ۲f(x+۱) \ , \ A(۰,۴)$$

$$x \to x-۵ \Rightarrow y = ۲f(x-۴) \ , \ A_۱(۵,۴)$$

$$x \to \frac{x}{۲} \Rightarrow y = ۲f\left(\frac{x}{۲}-۴\right) \ , \ A_۲(۱۰,۴)$$

$$f \to -۲f \Rightarrow y = -۴f\left(\frac{x}{۲}-۴\right) \ , \ A_۳(۱۰,-۸)$$

$$f \to f+۱ \Rightarrow y = -۴f\left(\frac{x}{۲}-۴\right)+۱ \ , \ A_۴(۱۰,-۷)$$

ت) صفر (۰/۲۵)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} [۱+\cos x] = ۱+\left[\cos \frac{\pi}{۲}^+\right] = ۱+\left[۰^-\right] = ۱-۱ = ۰$$

ردیف	پاسخنامه	نمره
۳		۰/۷۵

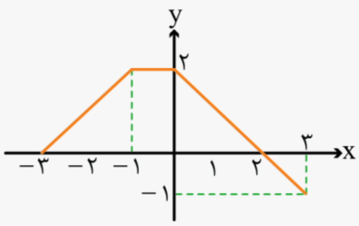
نکته:

در جدول زیر خلاصه‌ای از خواص و ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها آورده شده است.

نمودار جدید $(a,k>۰)$		توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$		نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$		نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$		نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ)
$f(kx)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k>۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$۰<k<۱$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$\|f(x)\|$		ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$f(\|x\|)$		ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$\|y\|=f(x)$		ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال:

نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}f(۳x)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.

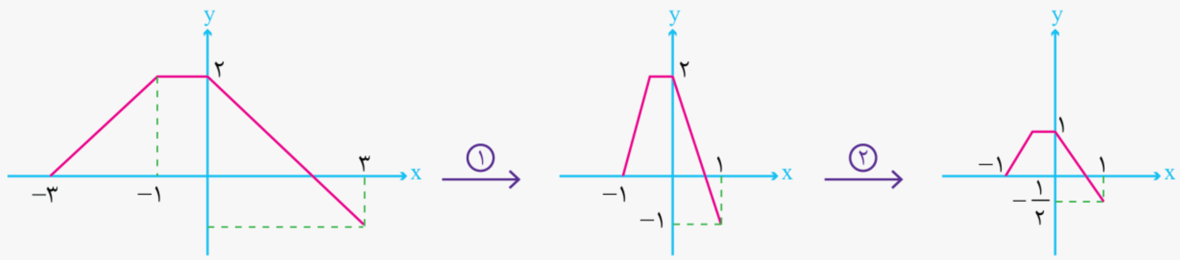


پاسخ:

برای رسم نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}f(۳x)$، ابتدا باید نمودار تابع f را با ضریب $\frac{۱}{۳}$ در راستای محور x ها منقبض کرده و سپس نمودار حاصل را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور y ها منقبض کنیم به عبارتی:

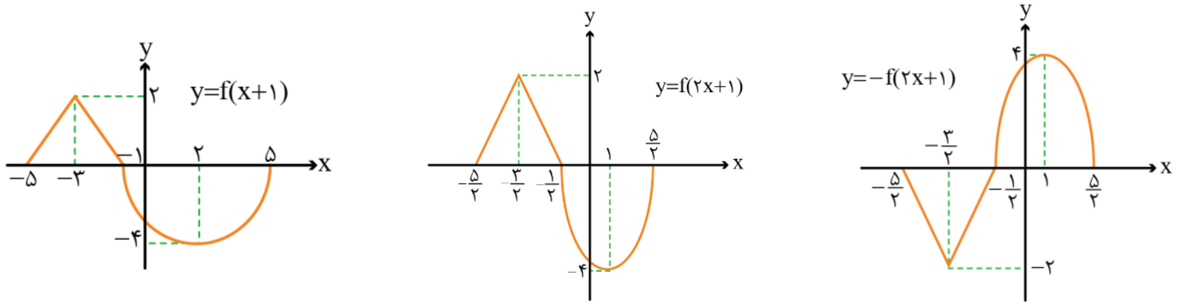
$$f(x)\xrightarrow[(۱)]{\text{انقباض طولی } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}} f(۳x)\xrightarrow[(۲)]{\text{انقباض عرضی } \frac{۱}{۲} \text{ برابر}} \frac{۱}{۲}f(۳x)$$

ردیف	پاسخنامه	نمره



دامنه تابع g : $[-۱,۱]$ برد تابع g : $\left[-\frac{۱}{۲},۱\right]$

پاسخ تشریحی:



دامنه= $\left[-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲}\right]$ (۰/۲۵)

برد= $[-۲,۴]$ (۰/۲۵)

۴	**نکته:**	۰/۵

نکته:

به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}+\cdots+a^{n-۲}x+a^{n-۱})$$

به کمک اتحاد بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر n **فرد** باشد:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}-\cdots-a^{n-۲}x+a^{n-۱})$$

- اگر n **زوج** باشد:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}-\cdots+a^{n-۲}x-a^{n-۱})$$

مثال:

هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته‌شده تجزیه کنید.

الف) $x^۶-۱$ با عامل $(x+۱)$:

$$x^۶-۱=(x+۱)(x^۵-x^۴+x^۳-x^۲+x-۱)$$

ب) $x^۶-۱$ با عامل $(x-۱)$:

$$x^۶-۱=(x-۱)(x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$$

مثال:

چندجمله‌ای $x^۵+۳۲$ را برحسب عامل $(x+۲)$ تجزیه کنید.

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$x^5+32=x^5+2^5 \Rightarrow \begin{cases} n=5 \\ a=2 \end{cases}$$

$$x^5+32=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

نکته:

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax+b)$، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است. در نتیجه اگر $f(-\frac{b}{a})=0$ باشد به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax+b)$ بخش‌پذیر است.

مثال:

اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)=x^2+kx-1$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد مقدار k را بیابید:

چون باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر ۲ است پس $f(-1)=2$ است در نتیجه:

$$f(-1)=2 \to (-1)^2+k(-1)-1=2 \Rightarrow 1-k=3 \Rightarrow k=-2$$

مثال:

مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

$$\begin{cases} f(2)=0 \to 8+4a+2b+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9 \quad (*) \\ f(-1)=0 \to -1+a-b+1=0 \Rightarrow a-b=0 \to a=b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} 4a+2b=-9 \xrightarrow{a=b} 4a+2a=-9 \Rightarrow 6a=-9 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}\ ,\ b=-\frac{3}{2}$$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=8x^3-4x^2+2$ را بر $2x+1$ به دست آورید:

$$2x+1=0 \to x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=8(-\frac{1}{2})^3-4(-\frac{1}{2})^2+2=-1-1+2=0$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(2x+1)$ برابر صفر است.

مثال:

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد.

$$P(x)=x^3+ax^2+bx-2$$

می‌دانیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است، یعنی:

$$P(2)=0 \Rightarrow 8+4a+2b-2=0 \Rightarrow 4a+2b=-6 \Rightarrow 2a+b=-3$$

از طرفی باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)$ برابر ۳ است، یعنی:

$$P(-1)=3 \Rightarrow -1+a-b-2=3 \Rightarrow a-b=6$$

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \\ a-b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=3x^4+mx^3-2x+1$$

$$f(x) \,\big|\, x+1 \quad \Rightarrow \quad f(x)=(x+1)Q(x)+r$$

مجموع ضرایب خارج قسمت برابر ۳ است، یعنی $Q(1)=3$

پس:

$$x=1 \Rightarrow f(1)=2Q(1)+r \xrightarrow{f(1)=2+m} 2+m=2(3)+r$$

$$\Rightarrow m=4+r$$

باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x+1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow r=f(-1)=3-m+2+1=6-m \qquad (0/25)$$

$$\Rightarrow m+r=6 \xrightarrow{m=4+r} 4+r+r=6 \Rightarrow r=1 \ \text{باقی‌مانده} \qquad (0/25)$$

۵ | ۱/۵

نکته‌های مهم:

نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$، داریم:

بیش‌ترین مقدار: |ضریب sin یا cos| + مقدار ثابت $\Rightarrow \max=|a|+c$

کم‌ترین مقدار: −|ضریب sin یا cos| + مقدار ثابت $\Rightarrow \min=-|a|+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a|=\dfrac{\max-\min}{2} \\ c=\dfrac{\max+\min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب}=\frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$$

نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y=a\tan(bx)+c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T=\frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

مثال:

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید:

$$\bullet\ y=-3\cos 2\pi x+1 \Rightarrow \begin{cases} T=\dfrac{2\pi}{|b|}=\dfrac{2\pi}{|2\pi|}=1 \\ \max=|a|+c=|-3|+1=3+1=4 \\ \min=-|a|+c=-|-3|+1=-3+1=-2 \end{cases}$$

$$\bullet\ y=\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{2}x \Rightarrow \begin{cases} T=\dfrac{2\pi}{|b|}=\dfrac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|}=4 \\ \max=|a|+c=|-1|+\sqrt{3}=1+\sqrt{3} \\ \min=-|a|+c=-|-1|+\sqrt{3}=-1+\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\bullet\ y = ۱ - ۲\sin\left(-\frac{\pi}{۳}x\right) \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \dfrac{۲\pi}{\left|-\dfrac{\pi}{۳}\right|} = ۶ \\ \max = |a| + c = |-۲| + ۱ = ۲ + ۱ = ۳ \\ \min = -|a| + c = -|-۲| + ۱ = -۲ + ۱ = -۱ \end{cases}$$

مثال:

معادله یک تابع سینوسی $y = a\sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۲} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$$

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-۴,۴]$ است یعنی:

$$\begin{cases} \max = |a| + c = ۴ \\ \min = -|a| + c = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = ۴ \\ -|a| + c = -۴ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \xrightarrow{|a|+c=۴} |a| = ۴ \Rightarrow a = \pm۴$$

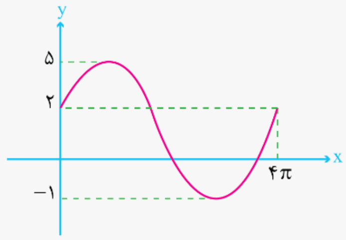
حال:

$$\begin{cases} a = \pm۴ \\ b = \pm\pi \\ c = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = \pm۴\sin(\pm\pi x) \Rightarrow \begin{cases} y = ۴\sin(\pi x) \\ y = -۴\sin(-\pi x) \\ y = ۴\sin(-\pi x) \\ y = -۴\sin(\pi x) \end{cases}$$

مثال:

نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a\sin bx + c$ است. مقادیر a، b و c را مشخص کرده و ضابطه تابع را بنویسید:

مطابق شکل می‌توان گفت:



$$\begin{cases} \text{دوره تناوب} = ۴\pi \\ \text{بیشترین مقدار} = ۵ \\ \text{کمترین مقدار} = -۱ \\ f(۰) = ۲ \\ ab > ۰ \end{cases}$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = ۵ \\ \min = -|a| + c = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = ۵ \\ -|a| + c = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲c = ۴ \Rightarrow c = ۲ \xrightarrow{|a|+c=۵} |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm۳$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

$$\begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm \frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 3\sin(\pm \frac{1}{2}x) + 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3\sin(\frac{1}{2}x) + 2 \checkmark \\ y = -3\sin(-\frac{1}{2}x) + 2 \checkmark \\ y = 3\sin(-\frac{1}{2}x) + 2 \times \quad (ab < 0) \\ y = -3\sin(\frac{1}{2}x) + 2 \times \quad (ab < 0) \end{cases}$$

راستی! طبق نمودار تابع $y = a\sin bx + c$ که سؤال داده، چون $f(0) = 2$ هست پس از همونجا می‌تونستیم بگیم که $c = 2$ می‌شه. ولی توی امتحان سعی کن که راه‌حل کامل و تشریحی رو بنویسی.

نکته:

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

جواب کلی	معادله
$x = k\pi$	$\sin x = 0$
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sin x = 1$
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\sin x = -1$

مثال:

معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال:

معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

می‌دانیم که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ است، پس:

$$(1 - 2\sin^2\alpha) - \sin\alpha + 1 = 1 \Rightarrow 2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال:

معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

ردیف	پاسخنامه	نمره

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$ داریم:

$$۲\sin x\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته:

معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲k\pi + g(x) \\ f(x) = ۲k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = ۰$	$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$
$\cos x = ۱$	$x = ۲k\pi$
$\cos x = -۱$	$x = (۲k+۱)\pi$

مثال:

معادله مثلثاتی $\cos x(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید.

$$۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x = ۵ \xrightarrow{-۱\le \cos x \le ۱} \text{غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \quad , \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال:

معادله مثلثاتی $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

می‌دانیم که $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ است پس:

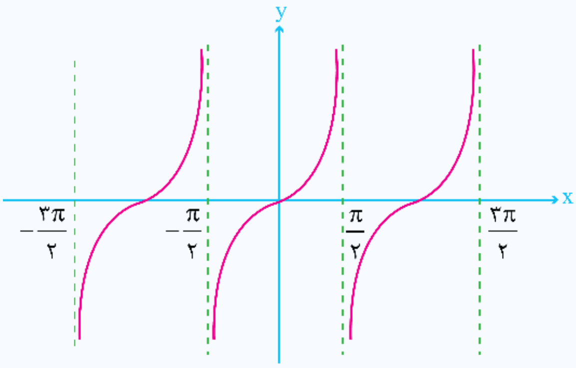
$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\cos^۲ x - ۱) - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \ , \ k\in\mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

نکته‌های مهم:

تابع $\tan x$:



- دامنه تابع $y=\tan x$ به صورت $\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$ یا $\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$ است. $(k\in\mathbb{Z})$
- دوره تناوب تابع $y=\tan x$ به صورت $T=\pi$ است.
- تابع $y=\tan x$ در هر بازه به صورت $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\,,\,(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است.

نکته: جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\tan f(x)=\tan g(x)$ به صورت $f(x)=k\pi+g(x)$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

مثال:

معادله $\tan 5x=\tan 2x$ را حل کنید:

$$5x=k\pi+2x\Rightarrow 5x-2x=k\pi\Rightarrow 3x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

نکته:

اتحادهای مثلثاتی زیر را به خاطر بسپارید:

- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

مثال:

مقدار $\tan 15^\circ$ را به دست آورید:

$$\tan(15^\circ)=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\times\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{9-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3}{(3)^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{12-6\sqrt{3}}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$$

پاسخ تشریحی:

$$2\cos^3 x=1+\cos x\ \Rightarrow\ 2\cos^3 x-\cos x-1=0 \qquad (0/25)$$

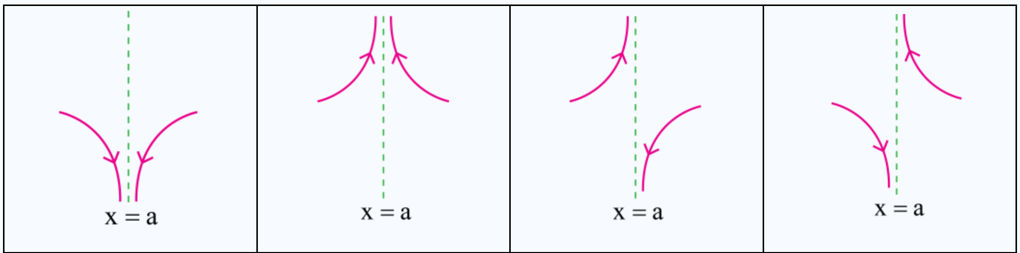
$$(\cos x-1)\left(2\cos^2 x+2\cos x+1\right)=0 \qquad (0/5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \quad (0/25) \quad \Rightarrow x = 2k\pi ,\ k \in \mathbb{Z} \quad (0/25) \\ 2\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad (0/25) \end{cases}$$

۶ — **مجانب‌ها** — ۰/۷۵

- مجانب‌ها
  - قائم
    - خط $x = a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
    - کاندیدهای مجانب قائم
      - در توابع کسری ریشه‌های مخرج کسر که ریشه صورت کسر نباشند.
      - خطوط $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2a}$ در توابع $y = \tan(ax)$
  - افقی ← خط $y = L$ را مجانب افقی تابع f می‌گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$
  - مایل ← در محدوده کتاب درسی نیست.

• رفتار تابع در نزدیکی مجانب قائم:



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

• رفتار تابع در نزدیکی مجانب افقی:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L^-$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L^+$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L^+$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L^-$

مثال:

اگر خط $y = 2$ مجانب افقی تابع $f(x) = \dfrac{ax^2+1}{2x^2-3x}$ باشد، مقدار a را بیابید.

خط $y = 2$ مجانب افقی تابع f است یعنی $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$ است، پس:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2+1}{2x^2-3x} = 2 \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2}{2x^2} = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

نمره	پاسخنامه	ردیف

مثال:

مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید.

ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را می‌یابیم:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

چون $x=1$ و $x=-1$، هیچ‌کدام ریشه صورت کسر نیستند بنابراین هر دو مجانب قائم تابع هستند.

حال حد تابع را زمانی که $x \to \pm\infty$ میل می‌کند به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x^2}{x^2-1}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$$

و $y=-2$ نیز تنها مجانب افقی این تابع است.

مثال:

نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

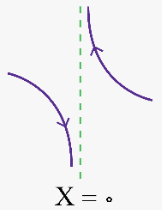
ابتدا ریشه مخرج کسر را می‌یابیم:

$$x^3+x=0 \to x(x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \ \checkmark \\ x^2=-1 \ \times \end{cases}$$

چون $x=0$ ریشه صورت کسر نیست پس مجانب قائم تابع f است. حال برای این‌که رفتار تابع f را در اطراف $x=0$ بدانیم باید حاصل حد تابع را زمانی که $x \to 0^+$ و $x \to 0^-$ میل می‌کند پیدا کنیم:

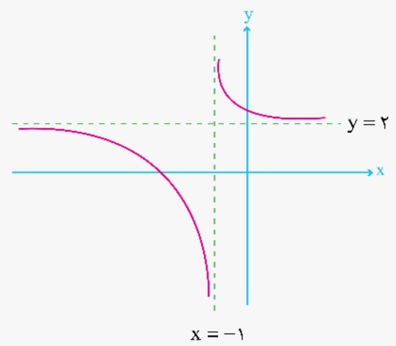
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^3+x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^3+x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$



مثال:

اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{(a+1)x+7}{2x+b}$ به صورت مقابل باشد آن‌گاه مقدار $a+b$ را پیدا کنید.



همان‌طور که از شکل تابع مشخص است خط $x=-1$ مجانب قائم و خط $y=2$ مجانب افقی تابع هستند یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(a+1)x+7}{2x+b}=2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(a+1)x}{2x}=2 \Rightarrow \frac{a+1}{2}=2 \Rightarrow a=3$$

و چون $x=-1$ مجانب قائم تابع است پس می‌توان گفت که $x=-1$ ریشه مخرج است پس:

$$2x+b=0 \xrightarrow{x=-1} -2+b=0 \Rightarrow b=2$$

در نتیجه حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=3+2=5$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

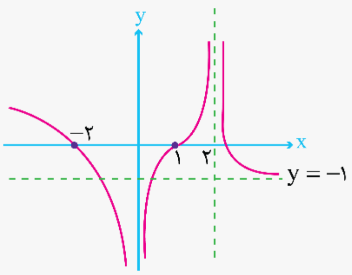
نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد.

الف) $f(۱)=f(-۲)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=+\infty$

پ) خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.

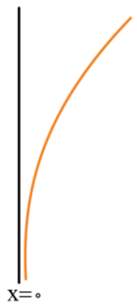
نمودارهای مختلفی با شرایط گفته شده می‌توان رسم کرد که یکی از آن‌ها به صورت مقابل است.



پاسخ تشریحی:

$|x|+x=۰ \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow x\le ۰ \Rightarrow D_f=(۰,+\infty)$

$x=۰$ مجانب قائم (۰/۲۵)



$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x-۲}{۲x}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty$ (۰/۲۵)

رسم شکل (۰/۲۵)

۷ | | ۱

نکته:

در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این‌صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$)خواهد بود.

توجه:

برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{+\text{عدد}}{۰^+}=+\infty$	$\frac{-\text{عدد}}{۰^-}=+\infty$	$\frac{+\text{عدد}}{۰^-}=-\infty$	$\frac{-\text{عدد}}{۰^+}=-\infty$

مثال:

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۵^-}\frac{۲x}{x-۵}=\frac{۲\times ۵}{۵^- -۵}=\frac{۱۰}{۰^-}=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}=\frac{۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱}{\left(۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱\right)^۲}=\frac{-۲+۱}{(-۱+۱)^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

ردیف	پاسخنامه	نمره

توجه: وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x]}{\sin x}=\dfrac{[0^-]}{0^-}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{[x]-3}{x-3}=\dfrac{[3^-]-3}{3^--3}=\dfrac{2-3}{0^-}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{|x-3|}=\dfrac{2}{|3-3|}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to (-\frac{1}{3})}\dfrac{[x]}{|3x+1|}=\dfrac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3(-\frac{1}{3})+1\right|}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 5x+[-x]}{2x}=\dfrac{\sin(0^+)+[-(0^+)]}{0^+}=\dfrac{0^++[0^-]}{0^+}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}$

برای محاسبه این حد، ابتدا حد چپ و حد راست تابع $y=\tan x$ را در $x=\dfrac{\pi}{2}$ به صورت جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}=\dfrac{(\frac{\pi}{2}+1)}{(\infty)}=0$$

نکته:

در محاسبه $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots}\ ;\ (m,n\in\mathbb{N})$ ، حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت با حالت مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\dfrac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.	صفر

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{6x^3-11x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{6x^3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^7}{2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4)=-2(-\infty)^4=-2(+\infty)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+4}{x^3+x-8}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^2}=\dfrac{5}{(-\infty)^2}=\dfrac{5}{+\infty}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4}{x}-5}=\dfrac{3+\dfrac{1}{+\infty}}{\dfrac{4}{+\infty}-5}=\dfrac{3+0}{0-5}=-\dfrac{3}{5}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)=-2(-\infty)^3=-2(-\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{4x+2}{5-x}-\dfrac{8}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{4x}{-x}-\dfrac{8}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{-x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x}=-4-0=-4$

پاسخ تشریحی:

الف) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+2}{[\sin x]+1}=\dfrac{0+2}{\left[\sin\left(0^-\right)\right]+1}=\dfrac{2}{\left[0^-\right]+1}=\dfrac{2}{-1+1}=\dfrac{2}{0}=$ تعریف نشده $\rightarrow$ حد ندارد (۰/۵)

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^7+6x^2}{3x^3+7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^7\left(-4+\dfrac{6}{x^5}\right)}{x^3\left(3+\dfrac{7}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{4}{3}x^4=-\infty$ (۰/۵)

۸	**پاسخ تشریحی:**	۰/۵

$$\lim_{x\to3}\frac{f^2(x)g(x)+5f^2(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f^2(x)\left(g(x)+5\right)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{f^2(x)\left(g(x)-g(3)\right)}{x-3}=f^2(3)\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

(۰/۲۵)

$$=f^2(3)g'(3)=4g'(3)$$ (۰/۲۵)

۹	**نکته:**	۰/۷۵

مشتق تابع $f(x)$ در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با انتخاب $x-a=h$ داریم:

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

اگر $f(x)=1-2x^2$ باشد، $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1-2x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(1-x)(1+x)}{x+1}=4$$

مثال:

با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}+1$ را در نقطهٔ $x=1$ محاسبه کنید.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

مثال:

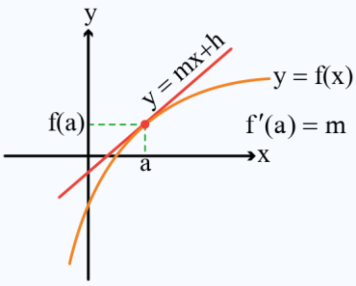
با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x=5$ به‌دست آورید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\times\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

نکته:

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در $x=a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطهٔ تماس هم در تابع و هم در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند.



مثال:

با استفاده از تعریف، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+3$ را در نقطهٔ $x=1$ به‌دست آورید.

$$m=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$$

$$y-6=4(x-1)\Rightarrow y=4x+2$$

پاسخ تشریحی:

خط $y=3x-2$ بر $f(x)$ در $x=1$ مماس است. اگر $x=1$ را در خط جایگذاری کنیم $y=1$ می‌شود. این یعنی $f(1)=1$.

شیب خط مماس برابر ۳ است، پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطه تماس برابر است با: $f'(1)=3$

$f(1)=1$

$f'(1)=3$ (۰/۲۵)

ردیف	پاسخنامه	نمره
	$\lim_{x\to1}\frac{2f^2(x)-f(x)-1}{x-1}=\frac{2f^2(1)-f(1)-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ $=\lim_{x\to1}\frac{(f(x)-1)(2f(x)+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}\times\lim_{x\to1}(2f(x)+1)$ (۰/۲۵) $=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\underbrace{(2f(1)+1)}_{3}=3f'(1)=3(3)=9$ (۰/۲۵)	
۱۰	(see below)	۰/۷۵

نکته:

اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد، نقاط بحرانی تابع f عبارتند از:

- نقاط ابتدا و انتهای بازه
- نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.
- نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است.

مثال:

نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$4-x^2\geq0 \Rightarrow x^2\leq4 \Rightarrow -2\leq x\leq2$$

می‌دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، جزء نقاط بحرانی‌اند پس $x=2$ و $x=-2$ بحرانی‌اند.

از طرفی می‌دانیم در نقاطی که مشتق تابع برابر صفر باشد، آن نقاط نیز جزء نقاط بحرانی‌اند، لذا:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتند از: $x=0$، $x=+2$ و $x=-2$

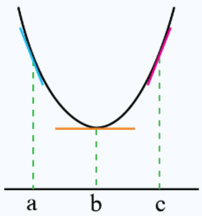
نکته:

در بعضی از سؤالات از ما می‌خواهند که شیب خط مماس بر نمودار تابع در چند نقطه را با هم مقایسه کنیم و یا اینکه درباره علامت مشتق در یک نقطه سؤالاتی مطرح می‌شود که برای پاسخ دادن به این سؤالات توجه به موارد زیر می‌تواند کمک‌کننده باشد:

- در بازه‌هایی که تابع f صعودی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع مثبت است پس در آن بازه $f'>0$ است.
- در بازه‌هایی که تابع f نزولی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع منفی است پس در آن بازه $f'<0$ است.
- در نقاطی از تابع f که شیب خط مماس بر نمودار تابع صفر است (مماس افقی است)، $f'=0$ است.

یه مثال ببینیم:

$$\begin{cases}f'(a)<0\\f'(b)=0\\f'(c)>0\end{cases}$$

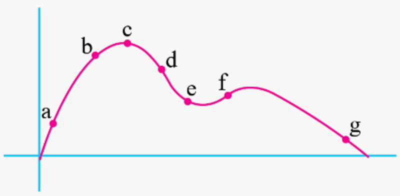


یادتون باشه که:

$f'(x_0)=$ مشتق تابع f در $x_0=$ شیب خط **مماس** بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=x_0$

مثال:

نقاط a، b، c، d، e، f و g روی منحنی شکل زیر قرار گرفته‌اند. شیب خطوط مماس بر منحنی در این نقاط را با هم مقایسه کنید.



ردیف	پاسخنامه	نمره
	$m_a, m_b, m_f > 0 \to m_a > m_b > m_f$ $m_c = 0$ $m_d, m_e, m_g < 0 \to m_g > m_e > m_d$ $\Rightarrow m_a > m_b > m_f > m_c > m_g > m_e > m_d$ **پاسخ تشریحی:** الف) d و c (۰/۵) نقطه c، طول اکسترمم نسبی با مشتق صفر و نقطه d، طول نقطه گوشه‌ای است که تابع f در آن مشتق‌ناپذیر است. بنابراین این دو نقطه، نقاط بحرانی تابع f هستند. ب) e (۰/۲۵) با توجه به نمودار داده شده مشخص است که مقدار تابع در نقاط b و c مثبت است و مقدار تابع در نقاط d و e منفی است، یعنی: $\begin{cases} f(b), f(c) > 0 \\ f(d), f(e) < 0 \end{cases}$ از طرفی می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه با مشتق تابع در آن نقطه برابر است، پس: $\begin{cases} f'(a), f'(b) > 0 \\ f'(e) > 0 \\ f'(c) = 0 \end{cases}$ حال ما دنبال نقطه‌ای هستیم که در آن $ff' < 0$ باشد یعنی از بین f و f' یکی مثبت و دیگری منفی باشد که تنها نقطه e این ویژگی را دارد.	
۱۱	**قواعد مشتق‌گیری:** • $y = c\,;\, c \in \mathbb{R} \to y' = 0$ • $y = ax + b \to y' = a$ • $y = kf(x) \to y' = kf'(x)$ • $y = \sqrt[n]{x^m} \to y' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$ • $y = f(x) \pm g(x) \to y' = f'(x) \pm g'(x)$ • $y = f(x) \times g(x) \to y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ • $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \to y' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \ (g(x) \neq 0)$ • $y = (f(x))^n \to y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$ • $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \to y' = \dfrac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$ • $y = (fog)(x) = f(g(x)) \to y' = g'(x)f'(g(x))$ • $y = \sin x \to y' = \cos x$ • $y = \sin(f(x)) \to y' = f'(x)\cos(f(x))$	۲

ردیف	پاسخنامه	نمره

- $y=\cos x \to y'=-\sin x$
- $y=\cos(f(x)) \to y'=-f'(x)\sin(f(x))$
- $y=\tan x \to y'=1+\tan^2 x$
- $y=\tan(f(x)) \to y'=f'(x)\left(1+\tan^2(f(x))\right)$

مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر

- $f(x)\xrightarrow{\text{مشتق اول}}f'(x)\xrightarrow{\text{مشتق دوم}}f''(x)$

مثال:

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

- $y=\dfrac{9x+1}{x-x^2} \to y'=\dfrac{9(x-x^2)-(1-2x)(9x+1)}{(x-x^2)^2}$
- $y=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2} \to y'=\dfrac{(2x-3)(-3x+2)-(-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$
- $y=(\sqrt{3x+2})(x^3+1) \to y'=\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^3+1)+(3x^2)(\sqrt{3x+2})$
- $y=(-3x^2+x)^5(2x) \to y'=5(-6x+1)(-3x^2+x)^4(2x)+(2)(-3x^2+x)^5$
- $y=\sin(3x^2) \to y'=6x\cos(3x^2)$
- $y=\cos^3(2x) \to y'=-6\cos^2(2x)(\sin(2x))$
- $y=\sin^3 x+\cos^2 x \to y'=3\sin^2 x\cos x+2\cos x(-\sin x)$
- $y=3\tan^2 x+\cos x^2 \to y'=6\tan x(1+\tan^2 x)+2x(-\sin x^2)$
- $y=\cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) \to y'=-\sin\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\times\dfrac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}$
- $y=3x(x^2-6x)^3+\cos 2x \to y'=\left[3(x^2-6x)^3+\left(3(2x-6)(x^2-6x)^2\right)\times 3x\right]-2\sin 2x$
- $y=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x^2+\sqrt{x}} \to y'=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(x^2+\sqrt{x}\right)-\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)^2}$
- $y=\dfrac{1-\sin x}{\cos x} \to y'=\dfrac{-\cos x(\cos x)-(-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$

مثال:

اگر $f(x)=\sin^2 x-\cos 2x$ مقدار $f''(\frac{\pi}{6})$ را حساب کنید.

ردیف	پاسخنامه	نمره
	$f'(x)=2\sin x\cos x+2\sin 2x=\sin 2x+2\sin 2x=3\sin 2x$ $f''(x)=6\cos 2x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}}f''(\frac{\pi}{6})=6\cos\frac{\pi}{3}=3$ **مثال:** اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$، $f'(2)=1$، $g(2)=-3$ و $g'(2)=2$ باشند، مطلوبست محاسبه موارد زیر: • $(fg)'(2)=(f'g+g'f)(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=(1\times(-3))+(2\times3)=-3+6=3$ • $(f+g)'(2)=(f'+g')(2)=f'(2)+g'(2)=1+2=3$ • $\left(\frac{f}{g}\right)(2)=\left(\frac{f'g-g'f}{g^2}\right)(2)=\frac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=\frac{(1\times(-3))-(2\times3)}{(-3)^2}=\frac{-3-6}{9}=-1$ **پاسخ تشریحی:** الف) $y=\sqrt{\sin x}$ $y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (۰/۵) ب) $y=\frac{5\cos\sqrt{x}}{1+\sin x}$ $y'=\frac{\frac{-5}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,(1+\sin x)-\cos x\left(5\cos\sqrt{x}\right)}{(1+\sin x)^2}$ (۰/۵) پ) $y=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^3+2}\right)^3$ $y'=3\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^3+2}\right)^2\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3+2)-3x^2(\sqrt{x}-1)}{(x^3+2)^2}\right)$ (۰/۵) ت) $y=(\cos 3x)f'(\sin x)$ $y'=-3\sin 3x f'(\sin x)+(\cos x f''(\sin x)(\cos 3x))$ (۰/۵)	
۱۲	**نکته:** تابع f را در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه: ۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی: $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ ۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشد، یعنی: $f'_+(a)=f'_-(a)$ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & x\ge -1\\ 2x+6 & x<-1\end{cases}$ را در $x=-1$ بررسی کنید. اول پیوستگی تابع f را در $x=-1$ بررسی می‌کنیم. $\begin{cases}f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}x^2+3=4\\ \lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}2x+6=4\end{cases}$	۱

ردیف	پاسخنامه	نمره

تابع f در $x=-1$ پیوسته است حال باید ببینیم که مشتق چپ و راست تابع در $x=-1$ با هم برابرند یا خیر.

$$\begin{cases} f'_+(x)=2x \to f'_+(-1)=-2 \\ f'_-(x)=2 \to f'_-(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-1)\neq f'_-(-1)$$

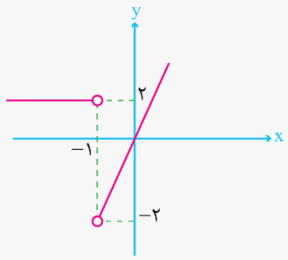
پس تابع f در $x=-1$، پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است.

حالا اگه تو این سؤال از ما ضابطه تابع مشتق رو بخوان چی؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq -1 \\ 2x+6 & x<-1 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} 2x & x>-1 \\ 2 & x<-1 \end{cases} \quad (*)$$

آقا! چرا توی قسمت (*) علامت مساوی رو نذاشتیم؟ گفتیم که تابع f توی $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست پس $x=-1$ نمی‌تونه توی دامنه تابع مشتق حضور داشته باشه.

حالا بیاین نمودار تابع مشتق رو هم رسم کنیم:



مثال:

به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^2-4\right|$ را در $x=-2$ بررسی کنید.

اول از همه باید پیوستگی تابع f رو در $x=-2$ بررسی کنیم (خودت بررسیش کن). در مرحله بعد باید برابری مشتق چپ و راست رو توی $x=-2$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases} f'_+(-2)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\left|x^2-4\right|-0}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-(x^2-4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-(x-2)(x+2)}{x+2}=+4 \\ f'_-(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\left|x^2-4\right|-0}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{(x^2-4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=-4 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'_+(-2)\neq f'_-(-2) \Rightarrow$ موجود نیست $f'(-2) \Rightarrow$ تابع f در $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است.

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=\left(3x^2+x-4\right)[x] \Rightarrow f(1)=0 \qquad (0/25)$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \qquad (0/25)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(3x^2+x-4\right)[x]-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(3x+4)[x]}{x-1} \qquad (0/25)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}(3x+4)[x]=(3+4)\left[1^+\right]=7 \qquad (0/25)$$

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱۳	**نکته:** اگر u تابعی برحسب x و $y=f(u)$ باشد آن‌گاه: $y'=u'f'(u)$ ، $y=f^n(u) \Rightarrow y'=nf^{n-1}(u)\times u'f'(u)$ **مثال:** $y=f\left(\sqrt{x}+4x^2\right) \Rightarrow y'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+8x\right)f'\left(\sqrt{x}+4x^2\right)$ ، $y=f^3\left(3x^4\right) \Rightarrow y'=3f^2\left(3x^4\right)\left(12x^3\right)f'\left(3x^4\right)$ **مثال:** با فرض این‌که تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $g(x)=f^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)$ ، $f'(2)=f(2)=2$ باشد، حاصل $g'(1)$ را به‌دست آورید. $g(x)=f^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)\quad,\quad f'(2)=f(2)=2$ $g'(x)=2f\left(x^2+\sqrt{x}\right)\times\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\times f'\left(x^2+\sqrt{x}\right)$ $x=1 \Rightarrow g'(1)=5f(2)f'(2)=5(2)(2)=20$ **پاسخ تشریحی:** $g(x)=f(\sin x)$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4\ ,\ f''\left(\frac{1}{2}\right)=-2$ (۰/۲۵) $g'(x)=\cos x\, f'(\sin x)$ (۰/۲۵) $g''(x)=-\sin x\, f'(\sin x)+\cos^2 x\, f''(\sin x)$ (۰/۲۵) $x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow g''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}f'\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\frac{\pi}{6}f''\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $g''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}(-4)+\frac{3}{4}(-2)$ $=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)	۱
۱۴	**پاسخ تشریحی:** توابع مربوط به ضابطه‌های داده شده در دامنه‌شان پیوسته هستند، برای این‌که f همواره پیوسته باشد باید پیوستگی f را در $x=a$ بررسی کنیم. $f(a)=a^2-4$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(x^2-4\right)=a^2-4$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(2x-5)=2a-5$ $\Rightarrow a^2-4=2a-5 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow a=1$ (۰/۲۵)	۰/۷۵

ردیف	پاسخنامه	نمره
	$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ & , x\ge ۱ \\ ۲x-۵ & , x<۱\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & , x\ge ۱ \\ ۲ & , x<۱\end{cases}$ (۰/۲۵) تابع f در $x=۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. بنابراین: $y=(fof)(x)=f(f(x)) \Rightarrow y'=f'(x)f'(f(x))$ $x=۳ \Rightarrow y'=f'(۳)f'\left(\underbrace{f(۳)}_{۵}\right)=۶f'(۵)=۶\times۱۰=۶۰$ (۰/۲۵)	
۱۵	**نکته:** آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ **مثال:** آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ را وقتی متغیر از $x_۱=۲$ به $x_۲=۷$ تغییر می‌کند به دست آورید. f آهنگ تغییر متوسط تابع $=\dfrac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\dfrac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\dfrac{\sqrt{۹}-\sqrt{۴}}{۵}=\dfrac{۱}{۵}$ **نکته:** آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با: $f'(a)$ **مثال:** معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^{۲}-t+۱۰$ برحسب متر در بازه $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ باهم برابرند؟ $[۰,۵]$ سرعت متوسط در بازه $=\dfrac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=\dfrac{(۲۵-۵+۱۰)-(۱۰)}{۵}=\dfrac{۲۰}{۵}=۴$ $x=t$ سرعت لحظه‌ای در لحظه $=f'(t)=۲t-۱$ می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[۰,۵]$ باهم برابر باشند، پس: $۲t-۱=۴ \Rightarrow ۲t=۵ \Rightarrow t=\dfrac{۵}{۲}$ **پاسخ تشریحی:** الف) $v(۰)=۱۰۰ \quad , \quad v(۹۰)=۱۰۰\left(۱-\dfrac{۹۰}{۱۰۰}\right)^{۲}=۱$ آهنگ تغییر متوسط $=\dfrac{v(۹۰)-v(۰)}{۹۰-۰}$ (۰/۲۵) $=\dfrac{۱-۱۰۰}{۹۰}=\dfrac{-۹۹}{۹۰}=\dfrac{-۱۱}{۱۰}$ (۰/۲۵)	۰/۷۵

ردیف	پاسخنامه	نمره
	ب) $v' = 100 \times 2\left(1-\frac{t}{100}\right)\left(\frac{-1}{100}\right) = -2\left(1-\frac{t}{100}\right)$ $-2\left(1-\frac{t}{100}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1-\frac{t}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 75\ s$ (۰/۲۵)	
۱۶	**پاسخ تشریحی:** ابتدا دامنه تابع را به‌دست می‌آوریم: $f(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{-x-2}}$ $-x-2>0 \Rightarrow x<-2 \Rightarrow D_f = (-\infty,-2)$ (۰/۲۵) حال نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را می‌یابیم: $f'(x) = \frac{2x\sqrt{-x-2} + \frac{x^2+3}{2\sqrt{-x-2}}}{-x-2}$ (۰/۲۵) $f'(x) = \frac{4x(-x-2)+x^2+3}{2(-x-2)\sqrt{-x-2}} = \frac{-3x^2-8x+3}{2(-x-2)\sqrt{-x-2}} = 0$ $-3x^2-8x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 & \text{ق ق} \quad (0/25) \\ x=\frac{1}{3} & \text{غ ق ق} \quad (0/25) \end{cases}$ ریشه مخرج مشتق: $-x-2=0 \Rightarrow x=-2$ غ ق ق (۰/۲۵) بنابراین تابع $f(x)$ فقط یک نقطه بحرانی در $x=-3$ دارد.	۱/۲۵
۱۷	**نکته:** برای پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی یک **تابع پیوسته** به روش زیر عمل می‌کنیم: ۱) دامنه تابع را به‌دست می‌آوریم. ۲) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم. ۳) جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم. ٤) حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم: • اگر علامت f' در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است. • اگر علامت f' در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است. • اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهارنظر کرد. **توجه:** هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترمم نسبی نیست. **مثال:** در تابع $f(x) = x^3+3x^2-9x-10$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $D_f = \mathbb{R}$ برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f، مشتق آن را به‌دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x)=0$ را حل کنیم: $f'(x) = 3x^2+6x-9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$	۱

بنابراین $x=۱$ و $x=-۳$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \longrightarrow \text{طول } max \text{ نسبی} \\ x=۱ \longrightarrow \text{طول } min \text{ نسبی} \end{cases}$$

$$f(x)=x^۳+۳x^۲-۹x-۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \to f(-۳)=۱۷ \Rightarrow A(-۳,۱۷) \to max \text{ نسبی} \\ x=۱ \to f(۱)=-۱۵ \Rightarrow B(۱,-۱۵) \to min \text{ نسبی} \end{cases}$$

نکته:

با فرض این‌که تابع $y=f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه (a,b)، نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این‌صورت:

$$\left.\begin{matrix} f'(a)=۰ \\ f(a)=b \end{matrix}\right\}$$

مثال:

اگر نقطه $(۲,۱)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید.

چون نقطه $(۲,۱)$، نقطه اکسترمم نسبی تابع f است پس اولاً $f(۲)=۱$ و ثانیاً $f'(۲)=۰$ است:

$$f(۲)=۱ \Rightarrow ۸+۴b+d=۱ \Rightarrow ۴b+d=-۷$$

$$f'(۲)=۰ \longrightarrow f'(x)=۳x^۲+۲bx \xrightarrow{f'(۲)=۰} ۱۲+۴b=۰ \Rightarrow b=-۳ \xrightarrow{۴b+d=-۷} d=۵$$

نکته:

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق تابع f به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

۲) مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی به‌دست می‌آوریم.

۳) از بین مقادیر به‌دست آمده در مرحله ۲، بیش‌ترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق و کم‌ترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع f معرفی می‌کنیم.

توجه: در بعضی از سؤالات، از روش رسم نمودار نیز می‌توان برای تعیین اکسترمم‌های تابع کمک گرفت.

مثال:

اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^۳-۳x+۷$ را در بازه $[-۱,۳]$ در صورت وجود تعیین کنید.

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[-۱,۳]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

پس $x=۳$ و $x=-۱$ (نقاط ابتدا و انتهای بازه) و $x=۱$، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. حال باید مقدار تابع f را به ازای نقاط بحرانی به‌دست بیاوریم:

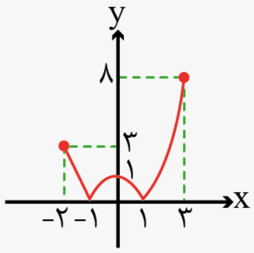
$$f(x)=x^۳-۳x+۷ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \longrightarrow f(۱)=۱-۳+۷=۵ \to min \text{ مطلق} \\ x=-۱ \longrightarrow f(-۱)=-۱+۳+۷=۹ \\ x=۳ \longrightarrow f(۳)=۲۷-۹+۷=۲۵ \to max \text{ مطلق} \end{cases}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

نمودار تابع $f(x)=\left|x^2-1\right|$ را در بازه $[-2,3]$ رسم کرده و باتوجه به آن نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را تعیین کنید.

باتوجه به نمودار زیر:



نقطه $(-1,0)$: نقطه مینیمم مطلق / نقطه مینیمم نسبی

نقطه $(0,1)$: نقطه ماکزیمم نسبی

نقطه $(1,0)$: نقطه مینیمم مطلق / نقطه مینیمم نسبی

نقطه $(3,8)$: نقطه ماکزیمم مطلق

پاسخ تشریحی:

$f(x)=x^3+bx^2+x+d$

$f'(x)=3x^2+2bx+1 \xrightarrow{(1,4)\ \text{اکسترمم نسبی}} f'(1)=0$

$3+2b+1=0 \Rightarrow b=-2 \qquad (0/5)$

$f(x)=x^3-2x^2+x+d$

$f(1)=4 \Rightarrow 1-2+1+d=4 \Rightarrow d=4 \qquad (0/5)$

۱۸ — ۱

برای حل مسائل بهینه‌سازی:

۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به‌دست می‌آوریم.

۲) رابطه به‌دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل کنیم.

۳) سپس از رابطه تک متغیره به‌دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به‌دست می‌آوریم.

٤) حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.

مثال:

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

۱) کمیتی که قرار است بهینه شود، حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی است یعنی قرار است $p=xy$ کم‌ترین باشد.

۲) باتوجه به مسئله می‌دانیم که تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است یعنی $y-x=10$ است حال باید رابطه به‌دست آمده در مرحله قبل را تک‌متغیره کنیم:

$$\begin{cases} p=xy \\ y-x=10 \rightarrow y=10+x \end{cases} \Rightarrow p=x(10+x)=x^2+10x$$

حال از رابطه تک‌متغیره $p=x^2+10x$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به‌دست می‌آوریم:

$p'=0 \Rightarrow 2x+10=0 \Rightarrow x=-5 \xrightarrow{y=10+x} y=5$

مثال:

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن ۲۷π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

می‌خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کم‌ترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می‌دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه‌ای که قرار است بهینه شود برابر است با:

$$S = \underbrace{\pi r^۲}_{\text{سطح قاعده}} + \underbrace{۲\pi rh}_{\text{سطح جانبی}} \qquad (*)$$

از طرفی طبق اطلاعات مسئله می‌دانیم که حجم قوطی برابر ۲۷π مترمکعب است یعنی:

$$v = \pi r^۲ h = ۲۷\pi \Rightarrow r^۲ h = ۲۷$$

حال باید به کمک $r^۲h = ۲۷$، رابطه (*) را به‌صورت تک‌متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم:

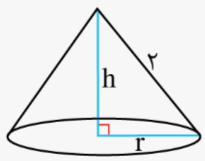
$$\begin{cases} S = \pi r^۲ + ۲\pi rh \\ r^۲ h = ۲۷ \Rightarrow h = \dfrac{۲۷}{r^۲} \end{cases} \Rightarrow S = \pi r^۲ + ۲\pi r\left(\frac{۲۷}{r^۲}\right) = \pi r^۲ + \frac{۵۴\pi}{r}$$

$$\Rightarrow S' = ۲\pi r - \frac{۵۴\pi}{r^۲} = ۰ \Rightarrow ۲\pi r^۳ = ۵۴\pi \Rightarrow r = ۳ \xrightarrow{h=\frac{۲۷}{r^۲}} h = ۳$$

مثال:

مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر ۲ را حول یکی از اضلاع زاویهٔ قائم‌اش دوران می‌دهیم تا یک مخروط به‌دست آید. ارتفاع مخروط را طوری بیابید که بیش‌ترین حجم را داشته باشد.

مطابق شکل طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$۴ = h^۲ + r^۲ \Rightarrow r^۲ = ۴ - h^۲$$

حجم مخروط برابر است با:

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi\left(۴ - h^۲\right)h = \frac{\pi}{۳}\left(۴h - h^۳\right) \quad , \quad ۰ < h < ۲$$

ماکزیمم مقدار تابع v، در نقطهٔ بحرانی آن رخ می‌دهد، پس مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v'(h) = \frac{\pi}{۳}\left(۴ - ۳h^۲\right) = ۰ \Rightarrow h^۲ = \frac{۴}{۳}$$

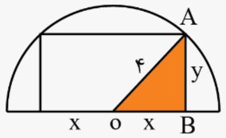
$$\xrightarrow{۰<h<۲} h = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

یک مستطیل درون یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد طول و عرض مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

با توجه به شکل مقابل، اگر طول مستطیل را برابر $2x$ و عرض آن را برابر y فرض کنیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:



$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow 16 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

از طرفی رابطه‌ای که قرار است بهینه شود مساحت مستطیل است:

$$S = (2x)(y) = 2xy \qquad (2)$$

حال به کمک روابط ۱ و ۲، یک رابطه تک‌متغیره می‌سازیم:

$$x^2 + y^2 = 16 \to y = \sqrt{16 - x^2} \xrightarrow{S=2xy} S(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$$

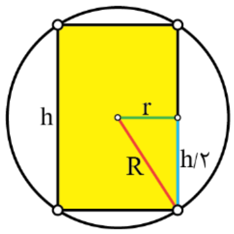
حال برای اینکه مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد باید از رابطه $S(x)$، مشتق گرفته و آن را تعیین علامت کنیم:

$$S'(x) = \frac{-4(x^2 - 8)}{\sqrt{16 - x^2}} \xrightarrow{S'(x)=0} x = 2\sqrt{2} \xrightarrow{y=\sqrt{16-x^2}} y = 2\sqrt{2}$$

و بیشترین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{max} = (2x)(y) = 2(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 16$$

پاسخ تشریحی:



$$r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \xrightarrow{R=\sqrt{3}} r^2 = 3 - \frac{h^2}{4} \quad (0/25)$$

$$v = \pi r^2 h = \pi h\left(3 - \frac{h^2}{4}\right) = \pi\left(3h - \frac{h^3}{4}\right) \quad (0/25)$$

$$v'(h) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h = 2 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2} \Rightarrow v = 4\pi \quad (0/25)$$

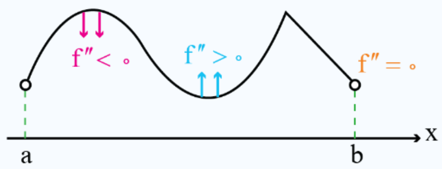
---

۱۹ — نمره: **۱**

جهت تقعر منحنی:

با فرض اینکه $f''(x)$ به ازای هر x از بازه (a,b)، موجود باشد:

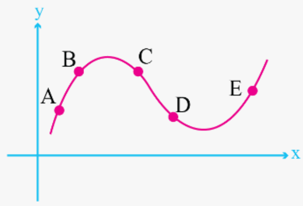
- اگر به ازای هر x از بازه (a,b)، $f''(x) > 0$ باشد آن‌گاه تقعر تابع f در این بازه **رو به بالا** است.
- اگر به ازای هر x از بازه (a,b)، $f''(x) < 0$ باشد آن‌گاه تقعر تابع f در این بازه **رو به پایین** است.
- اگر به ازای هر x از بازه (a,b)، $f''(x) = 0$ باشد آن‌گاه این آزمون بی‌نتیجه است.



ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

شکل زیر را در نظر بگیرید. در کدام‌یک از نقاط مشخص‌شده در نمودار:



الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی‌اند؟ C

ب) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است؟ D

ج) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو مثبت‌اند؟ E

د) $f'(x)$ مثبت و $f''(x)$ منفی است؟ A و B

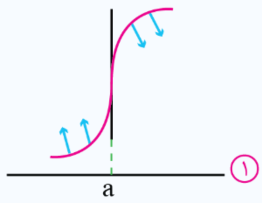
نقطه عطف:

نقطه $(a, f(a))$ را نقطه عطف تابع f می‌گوییم هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشد:

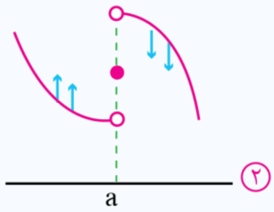
۱) تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته باشد.

۲) نمودار تابع f در این نقطه خط مماس واحد (افقی، مایل و یا قائم) داشته باشد.

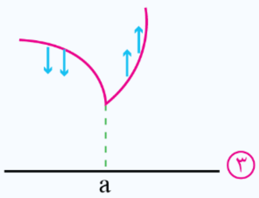
۳) جهت تقعر تابع f در این نقطه تغییر کند $\xleftarrow{\text{یعنی}}$ خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(a, f(a))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.



$x=a$ ، نقطه عطف است



$x=a$ نقطه عطف نیست
(دلیل: عدم پیوستگی)



$x=a$ نقطه عطف نیست
(دلیل: عدم وجود مماس واحد)

توجه مهم: اگر نقطه $(a, f(a))$ نقطهٔ عطف تابع f باشد در این صورت یا $f''(a)$ وجود ندارد و یا اینکه $f''(a)=0$ است.

مثال:

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

- در نقطه عطف علامت f'' تغییر می‌کند. درست
- هر نقطه‌ای که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطه عطف است. نادرست. (به شکل شماره ۲ و ۳ در بالا نگاه کن)
- هر نقطه‌ای که در آن f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است. نادرست
- یک تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد. درست (ممکن است f'' بیش از یک ریشه داشته باشد و در آن‌ها تغییر علامت بدهد.)
- تابع اکیداً صعودی، نقطه عطف ندارد. نادرست (به شکل شماره ۱ در بالا نگاه کن)

پیداکردن نقطه عطف:

برای پیدا کردن نقطه (نقاط) عطف تابع f ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا نقاط بحرانی تابع مشتق (f') را پیدا می‌کنیم.

۲) سپس از بین نقاط پیدا شده در مرحله ۱، نقاطی را به عنوان نقطه عطف معرفی می‌کنیم که هر سه شرط زیر را داشته باشند:

- تابع f در آن پیوسته باشد.
- تابع f در آن مماس واحد داشته باشد.
- تابع f'' در آن تغییر علامت بدهد.

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را مشخص کنید.

$f'(x)=۳x^{۲}+۶x \to f''(x)=۶x+۶ \xrightarrow{f''=۰} ۶x+۶=۰ \Rightarrow x=-۱$

حال جدول تعیین علامت f'' را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-۱	$+\infty$
f''	$-$		$+$

همان‌طور که می‌بینید، f'' در $x=-۱$، تغییر علامت می‌دهد از طرفی می‌دانیم که تابع f، تابعی همواره پیوسته و مشتق پذیر است پس نقطه به طول $x=-۱$، نقطه عطف تابع است.

$y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱ \xrightarrow{x=-۱} y=۳$

$(-۱,۳)$: مختصات نقطه عطف

مثال:

جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ را در دامنه‌اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

$D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}} \to f''(x)=\dfrac{-۲}{۹\sqrt[۳]{(x-۱)^{۵}}}$

با توجه به ضابطه تابع f'' می‌توان گفت که تابع f در $x=۱$ پیوسته است و همچنین اگر $x>۱$ باشد آن‌گاه $f''<۰$ بوده و جهت تقعر منحنی رو به پایین است و اگر $x<۱$ باشد $f''>۰$ بوده و جهت تقعر منحنی رو به بالاست پس جهت تقعر تابع f در $x=۱$ عوض می‌شود از طرفی از فصل مشتق می‌دانیم که این تابع در $x=۱$ دارای مماس قائم است بنابراین $x=۱$ نقطه عطف تابع f است. ببینید:

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	$+$	ت.ن	$-$

مثال:

ابتدا جهت تقعر تابع $y=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ را مشخص کرده و سپس وجود نقطه عطف آن را بررسی کنید.

$D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$

$f'(x)=\dfrac{-۲}{(x-۱)^{۲}} \to f''(x)=\dfrac{۴}{(x-۱)^{۳}}$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	۱ $-$ $-\infty$		$+\infty$ $+$ ۱

همان‌طور که می‌بینید، در بازه $(۱,+\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه $(-\infty,۱)$ تقعر رو به پایین است از طرفی این تابع نقطه عطف ندارد و $x=۱$ نیز در دامنه تعریف تابع قرار ندارد.

نکته:

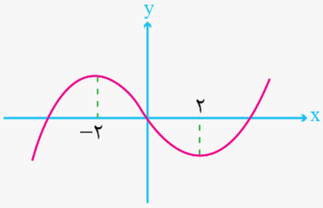
اگر نقطه (a,b)، یک نقطه عطف تابع f باشد، داریم:

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f''(a)=۰ \end{cases}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

مثال:

اگر $(0,0)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطه $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید:



چون نقطه $(0,0)$ نقطه عطف تابع است پس:

$f(0)=0 \Rightarrow c=0$

$f''(0)=0 \to f'(x)=3x^2+2ax+b \to f''(x)=6x+2a \xrightarrow{f''(0)=0} 2a=0 \Rightarrow a=0$

از طرفی با توجه به شکل مشخص است که در $x=2$ و $x=-2$، مماس افقی داریم، پس:

$f'(2)=0 \to f'(x)=3x^2+2ax+b \xrightarrow{a=0} f'(x)=3x^2+b$

$\xrightarrow{f'(2)=0} 3(4)+b=0 \to b=-12$

پاسخ تشریحی:

$f(0)=2 \Rightarrow c=2$ (۰/۲۵)

$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a$ (۰/۲۵)

$f''(0)=0 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0$ (۰/۲۵)

$f(2)=0 \Rightarrow 8+0+2b+2=0 \Rightarrow b=-5$ (۰/۲۵)

۲۰ — ۱/۷۵

مراحل رسم نمودار توابع:

برای رسم نمودار یک تابع باید همه و یا بعضی از مراحل زیر را انجام داده و به کمک آن‌ها جدول رفتار تابع را تشکیل دهیم و سپس نمودار تابع را رسم کنیم:

۱) دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
۲) محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات را در صورت وجود تعیین می‌کنیم.
۳) رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را مشخص می‌کنیم.
۴) مجانب‌های افقی و قائم تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.
۵) f' را به دست آورده و با تعیین علامت آن بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها صعودی و یا نزولی است را معین می‌کنیم.
۶) نقاط بحرانی و اکسترمم‌های تابع (نسبی و مطلق) را در صورت وجود به دست می‌آوریم.
۷) f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع را در بازه‌های مختلف مشخص می‌کنیم.
۸) نقطه عطف تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.
۹) جدولی رسم می‌کنیم و اطلاعات حاصل از f، f' و f'' را که به دست آورده‌ایم درون آن پیاده می‌کنیم.
۱۰) نمودار تابع را به کمک اطلاعات مراحل قبل رسم می‌کنیم (اگر لازم شد از یه سری نقاط کمکی دیگه هم استفاده می‌کنیم)

مثال:

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=-x^3+6x^2-9$ را رسم کنید:

۱) به‌دست آوردن دامنه تابع:

$D_f=\mathbb{R}$

۲) محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات:

$\begin{cases} x=0 \to y=-9 \\ y=0 \to -x^3+6x^2-9=0 \Rightarrow \end{cases}$ فرض کنیم نمی‌دونیم جوابش چی میشه!

نمره	پاسخنامه	ردیف

۳) رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty \end{cases}$$

۴) این تابع مجانب افقی و قائم ندارد. (پس الکی دنبالش نمی‌گردیم!)

۵) f' و f'' را به دست آورده و به کمک آن‌ها نقاط بحرانی و تقعر تابع را (در صورت وجود) مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=-3x^2+12x \xrightarrow{f'(x)=0} -3x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \xrightarrow{f} f(0)=-9 \\ x=4 \xrightarrow{f} f(4)=23 \end{cases}$$

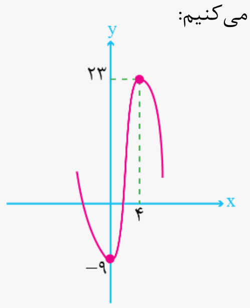
نقاط $(0,-9)$ و $(4,23)$، نقاط بحرانی‌اند.

$$f''(x)=-6x+12 \xrightarrow{f''(x)=0} -6x+12=0 \Rightarrow x=2 \xrightarrow{f} f(2)=7$$

۶) حال جدول تغییرات را رسم کرده و f' و f'' را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$ تا ۰	۰ تا ۲	۲ تا ۴	۴ تا $+\infty$
f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f''	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$+\infty \searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow -\infty$

min (در ۰)، عطف (در ۲)، max (در ۴)



توجه شود که چون f'' در دو طرف $x=2$ تغییر علامت می‌دهد بنابراین نقطه $(2,7)$ نقطه عطف است.

تابع هموگرافیک و ویژگی‌های آن:

۱) تابع به فرم $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ باشد را یک تابع هموگرافیک می‌نامیم.

- اگر $c=0$ باشد این تابع به یک تابع خطی تبدیل می‌شود.
- اگر $ad-bc=0$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

۲) دامنه تابع هموگرافیک به صورت $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$ و برد آن هم به صورت $R_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ است.

۳) تابع هموگرافیک، در کل دامنه خود نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) است.

۴) این تابع دارای مجانب افقی $y=\dfrac{a}{c}$ و مجانب قائم $x=-\dfrac{d}{c}$ است.

۵) مشتق یک تابع هموگرافیک برابر است با: $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

رسم نمودار یک تابع هموگرافیک:

برای رسم یک تابع هموگرافیک مراحل زیر را طی می‌کنیم:

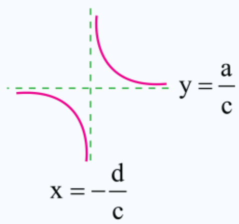
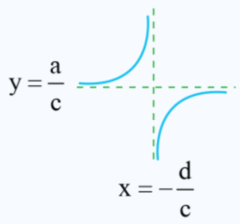
- ابتدا ریشه عبارت مخرج کسر را پیدا می‌کنیم که همان مجانب قائم تابع است. $(x=-\dfrac{d}{c})$
- سپس حاصل حد تابع را در $\pm\infty$ پیدا می‌کنیم که همان مجانب افقی تابع است. $(y=\dfrac{a}{c})$

ردیف	پاسخنامه	نمره

• محل برخورد تابع با محورهای مختصات را (در صورت وجود) پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=۰ \rightarrow \text{محل برخورد با محور } x\text{ها} \\ f(۰) \rightarrow \text{محل برخورد با محور } y\text{ها} \end{cases}$$

• از تابع مشتق گرفته و با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.
• با توجه به علامت مشتق و به کمک جدول زیر، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$ad-bc<۰$	$ad-bc>۰$
	

مثال:

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{۱-x}$ را رسم کنید:

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{-x+۱}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$

ابتدا مجانب‌های تابع را پیدا می‌کنیم:

مجانب قائم تابع : $x=-\frac{d}{c} \Rightarrow x=۱$

مجانب افقی تابع : $y=\frac{a}{c} \Rightarrow y=-۲$

حال از تابع مشتق گرفته و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

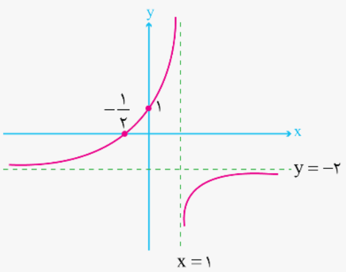
x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	-۱	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	-۱

$$f'(x)=\frac{۳}{(-x+۱)^۲} \Rightarrow f'(x)\neq ۰ \Rightarrow$$ تابع f نقطه بحرانی ندارد

و محل برخورد تابع f با محورهای مختصات برابر است با:

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{-x+۱} \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \rightarrow y=۱ \\ y=۰ \rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

و چون $ad-bc>۰$ است لذا نمودار تابع f به صورت زیر است:



ردیف	پاسخنامه	نمره

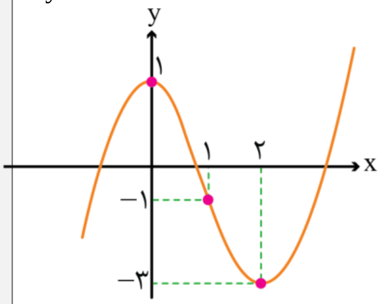
پاسخ تشریحی:

$y = x^۳ - ۳x^۲ + ۱ \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$y' = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۲$ (۰/۵)

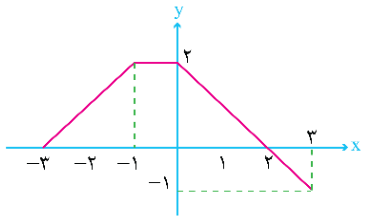
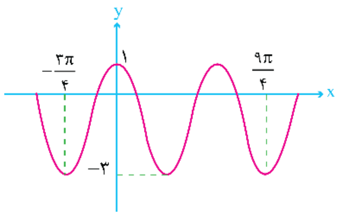
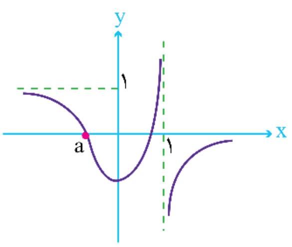
$y'' = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$ نقطه عطف (۰/۲۵)

x		۰		۱		۲	
y′	+	۰	−		−	۰	+
y″	−		−	۰	+		+
y	↗	۱ max	↘	−۱ عطف	↘	−۳ min	↗



رسم شکل (۰/۵) نمره و رسم جدول تعیین علامت (۰/۵) نمره

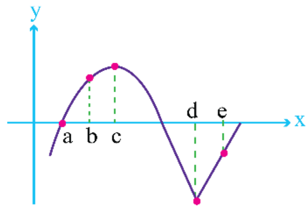
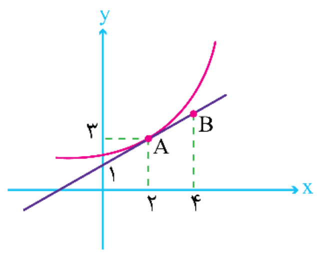
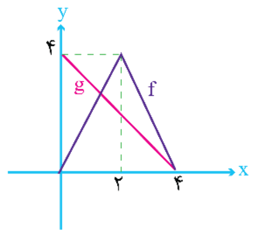
	موفق باشید	۲۰

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع تانژانت در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی است. ب) اگر $x=c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد آن‌گاه $f'(c)=0$ است.	۰/۵
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) چندجمله‌ای $P(x)=(2-x)^2(x+1)^3$ یک چندجمله‌ای از درجه .... است. ب) اگر علامت f' بر بازه‌ای مثبت باشد آن‌گاه تابع f بر آن بازه .... است.	۰/۵
۳	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{2}f(3x)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. 	۱
۴	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & ; \ -2\le x<-1 \\ -x-1 & ; \ -1\le x<1 \\ x^2-1 & ; \ 1\le x \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.	۱
۵	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد.	۱
۶	چندجمله‌ای x^5+32 را برحسب عامل $(x+2)$ تجزیه کنید.	۰/۲۵
۷	نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y=a\cos bx+c$ است مقادیر a، b و c را محاسبه کرده و ضابطه آن را مشخص کنید. 	۱/۵
۸	معادله مثلثاتی $\sin 2x-\cos x=0$ را حل کنید.	۱/۲۵
۹	نمودار تابع f به صورت مقابل است حدود خواسته شده را محاسبه کنید.  الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=$ ج) $\lim\limits_{x\to -\infty} (fof)(x)=$ د) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{-x}{f(x)}=$	۱

گروه آموزشی ماز

نمونه سوال دی ماه — پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی: — سوالات امتحان نهایی درس: حسابان — رشته: ریاضی فیزیک

ردیف	سوالات	نمره
۱۰	حدهای زیر را در صورت وجود بیابید: الف) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \frac{[x]-2}{\lvert 3x-1\rvert}$ ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{4x^3-2x+1}$	۱
۱۱	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۱۲	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه‌ای که تابع f در آن مشتق‌پذیر نیست. ب) طول نقطه‌ای که در آن حاصل $f\times f'$ منفی است. 	۰/۵
۱۳	در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه $x=2$ داده شده است: الف) مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ را بیابید. ب) معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه A را بنویسید. 	۰/۵
۱۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^3-2x+1}$ ب) $g(x)=\cos^2(-3x+1)$ ج) $h(x)=(4x^2-5x)^3(\sqrt{x}+1)$	۲
۱۵	تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; x>1 \\ x^2-2x & ; x\le 1\end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a-b$ را بیابید.	۱
۱۶	نمودار تابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x)=\frac{x+f(x)}{x-g(x)}$ باشد، حاصل $h'(3)$ را بیابید. 	۱
۱۷	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1\le t\le 4$ چقدر است؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=4$ چقدر است؟	۱
۱۸	اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ مشخص کنید.	۱/۲۵

ردیف	سوالات	نمره
۱۹	اگر نقطه $A(-1,1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x)=ax^3+bx^2+2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.	۱
۲۰	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{3x+6}{x-2}$ را رسم کنید.	۱/۷۵
	موفق باشید.	۲۰

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱ — الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) — **۰/۵**

۲ — الف) درجه ۵ (۰/۲۵) — **۰/۵**

$$P(x)=(۲-x)^۲(x+۱)^۳=\underbrace{\underbrace{(۴-۴x+x^۲)}_{\text{درجه ۲}}\underbrace{(x^۳+۳x^۲+۳x+۱)}_{\text{درجه ۳}}}_{\text{درجه ۵}}$$

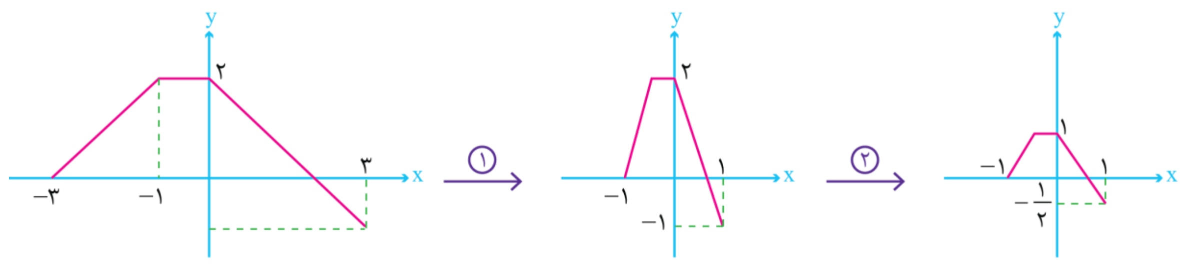
ب) اکیداً صعودی (۰/۲۵)

۳ — **۱**

پاسخ تشریحی:

برای رسم نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}f(۳x)$، ابتدا باید نمودار تابع f را با ضریب $\frac{۱}{۳}$ در راستای محور xها منقبض کرده و سپس نمودار حاصل را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور yها منقبض کنیم به عبارتی:

$$f(x)\xrightarrow[(۱)]{\text{انقباض طولی } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}}f(۳x)\xrightarrow[(۲)]{\text{انقباض عرضی } \frac{۱}{۲} \text{ برابر}}\frac{۱}{۲}f(۳x)$$



(۰/۲۵) (۰/۲۵)

دامنه تابع g: $[-۱,۱]$ (۰/۲۵)

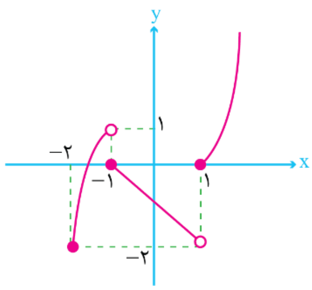
برد تابع g: $[-\frac{۱}{۲},۱]$ (۰/۲۵)

۴ — **۱**

پاسخ تشریحی:

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

رسم شکل (۰/۲۵)



این تابع:

در بازه $[-۲,-۱)$، صعودی است. (۰/۲۵)

در بازه $[-۱,۱)$، نزولی است. (۰/۲۵)

در بازه $[۱,+\infty)$، صعودی است. (۰/۲۵)

۵ — **۱**

پاسخ تشریحی:

$$P(x)=x^۳+ax^۲+bx-۲$$

می‌دانیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است، یعنی:

$$P(۲)=۰\Rightarrow ۸+۴a+۲b-۲=۰\Rightarrow ۴a+۲b=-۶\Rightarrow ۲a+b=-۳ \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x+۱)$ برابر ۳ است، یعنی:

$$P(-۱)=۳\Rightarrow -۱+a-b-۲=۳\Rightarrow a-b=۶ \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases}۲a+b=-۳\\ a-b=۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱ & (۰/۲۵)\\ b=-۵ & (۰/۲۵)\end{cases}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

۶ — نمره: **۰/۲۵**

پاسخ تشریحی:

$$x^{۵}+۳۲=x^{۵}+۲^{۵}\Rightarrow\begin{cases}n=۵\\a=۲\end{cases}$$

$$x^{۵}+۳۲=(x+۲)(x^{۴}-۲x^{۳}+۴x^{۲}-۸x+۱۶)\qquad(۰/۲۵)$$

۷ — نمره: **۱/۵**

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل، داریم:

$$\begin{cases}\text{دو دوره تناوب}=\frac{۹\pi}{۴}+\frac{۳\pi}{۴}=۳\pi\\ \text{بیشترین مقدار}=۱\\ \text{کمترین مقدار}=-۳\\ f(۰)>۰\end{cases}$$

$$۲T=۳\pi\to\overbrace{T=\frac{۳\pi}{۲}}^{(۰/۲۵)}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow|b|=\frac{۴}{۳}\to\overbrace{b=\pm\frac{۴}{۳}}^{(۰/۲۵)}$$

$$\begin{cases}\max=|a|+c=۱\\ \min=-|a|+c=-۳\end{cases}\Rightarrow\underbrace{\begin{cases}|a|+c=۱\\-|a|+c=-۳\end{cases}}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{(+)}۲c=-۲\to\underset{(۰/۲۵)}{c=-۱}\xrightarrow{|a|+c=۱}|a|=۲\Rightarrow\underbrace{a=\pm۲}_{(۰/۲۵)}$$

$$\begin{cases}a=\pm۲\\ b=\pm\frac{۴}{۳}\\ c=-۱\end{cases}\Rightarrow\ y=\pm۲\cos(\pm\frac{۴}{۳}x)-۱\Rightarrow\begin{cases}y=۲\cos(\frac{۴}{۳}x)-۱\ \checkmark\\ y=-۲\cos(-\frac{۴}{۳}x)-۱\ \times\\ y=۲\cos(-\frac{۴}{۳}x)-۱\ \checkmark\\ y=-۲\cos(\frac{۴}{۳}x)-۱\ \times\end{cases}\qquad(۰/۲۵)$$

چون چون مقدار $f(۰)$، مثبت است پس ضابطه‌های دوم و چهارم غیرقابل قبول هستند.

توجه: در صورت نوشتن فقط یکی از ضابطه‌های درست، به شما نمره تعلق می‌گیرد.

۸ — نمره: **۱/۲۵**

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ است، پس:

$$\sin ۲x-\cos x=۰\Rightarrow ۲\sin x\cos x-\cos x=۰\Rightarrow\cos x(۲\sin x-۱)=۰$$

$$\begin{cases}\overbrace{\cos x=۰}^{(۰/۲۵)}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\qquad(۰/۲۵)\\ ۲\sin x-۱=۰\Rightarrow\underbrace{\sin x=\frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\qquad(۰/۲۵)\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\qquad(۰/۲۵)\end{cases}\end{cases}$$

۹ — نمره: **۱**

پاسخ تشریحی:

الف) $\lim\limits_{x\to(۱)^{+}}f(x)=-\infty\qquad(۰/۲۵)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۰\qquad(۰/۲۵)$

ردیف	پاسخنامه	نمره

برای محاسبه $\lim\limits_{x\to-\infty}(fof)(x)$ ، یا همان $\lim\limits_{x\to-\infty}f(f(x))$ ، از تابع درونی شروع می‌کنیم. به عبارت دیگر ابتدا باید $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ را به دست بیاوریم که می‌شود:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1^-$$

سپس باید حد تابع بیرونی را زمانی که $x\to1^-$ میل می‌کند به دست بیاوریم:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty$$

پس:

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(fof)(x)=+\infty \qquad (0/25)$

ت) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{-x}{f(x)}=\dfrac{-a}{0^-}\xrightarrow{a<0}\dfrac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty \qquad (0/25)$

ردیف ۱۰ — نمره: ۱

پاسخ تشریحی:

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{[x]-2}{|3x-1|}=\dfrac{\left[\frac{1}{3}\right]-2}{\left|3(\frac{1}{3})-1\right|}=\dfrac{0-2}{0^+}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty \qquad (0/5)$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{4x^3-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{\pm\infty}=0 \qquad (0/5)$

ردیف ۱۱ — نمره: ۱

پاسخ تشریحی:

ابتدا ریشه‌های مخرج کسر تابع $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x^2+x}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{2x^2+x=0}_{(0/25)}\Rightarrow x(2x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\overbrace{x=0}^{(0/25)}\ \checkmark\\ \underbrace{x=-\frac{1}{2}}_{(0/25)}\ \times\end{cases}$$

از طرفی چون $x=-\frac{1}{2}$ ریشه صورت کسر است پس $x=0$ تنها مجانب قائم تابع f است. حال برای پیدا کردن مجانب افقی تابع، باید حد آن را زمانی که $x\to\pm\infty$ میل می‌کند بیابیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-1}{2x^2+x}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=2}_{(0/25)}$$

بنابراین $y=2$ نیز مجانب افقی تابع است.

توجه: اگر نتوانید تشخیص دهید که $x=-\frac{1}{2}$ مجانب قائم تابع f نیست، نمره به شما تعلق نمی‌گیرد.

ردیف ۱۲ — نمره: ۰/۵

پاسخ تشریحی:

الف) d (۰/۲۵) ← (طول نقطه گوشه‌ای است و تابع f در آن مشتق‌ناپذیر است)

ب) e (۰/۲۵)

با توجه به نمودار داده شده مشخص است که مقدار تابع در نقاط b و c مثبت است و مقدار تابع در نقاط d و e منفی است، یعنی:

$$\begin{cases}f(b),f(c)>0\\ f(d),f(e)<0\end{cases}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره
	از طرفی می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه با مشتق تابع در آن نقطه برابر است، پس: $\begin{cases} f'(a),f'(b)>0 \\ f'(e)>0 \\ f'(c)=0 \end{cases}$ حال ما دنبال نقطه‌ای هستیم که در آن $ff'<0$ باشد یعنی از بین f و f' یکی مثبت و دیگری منفی باشد که تنها نقطه e این ویژگی را دارد.	
۱۳	**پاسخ تشریحی:** الف) می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x=2$، با مشتق تابع در این نقطه برابر است از طرفی با توجه به شکل مشخص است که خط مماس بر منحنی تابع از نقاط $(0,1)$ و $(2,3)$ عبور می‌کند، پس: $\text{شیب خط مماس}=f'(2)\Rightarrow \frac{3-1}{2-0}=f'(2)\Rightarrow f'(2)=1 \quad (0/25)$ ب) با داشتن شیب خط مماس و مختصات یک نقطه از آن، معادله خط مماس را تشکیل می‌دهیم: $\begin{cases} m=1 \\ A(2,3) \end{cases}\Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-3=(1)(x-2)\Rightarrow \underbrace{y=x+1}_{(0/25)}$	
۱۴	**پاسخ تشریحی:** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^3-2x+1}\to y'=\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^3-2x+1)}^{(0/25)}-\overbrace{(3x^2-2)(\sqrt{x})}^{(0/25)}}{\underbrace{(x^3-2x+1)^2}_{(0/25)}}$ $g(x)=\cos^2(-3x+1)\to y'=\underbrace{-3\times 2\cos(-3x+1)}_{(0/25)}\underbrace{(-\sin(-3x+1))}_{(0/25)}$ $h(x)=(4x^2-5x)^3(\sqrt{x}+1)\to y'=\underbrace{3(4x^2-5x)^2(8x-5)(\sqrt{x}+1)}_{(0/5)}+\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2-5x)^3}_{(0/25)}$	۲
۱۵	**پاسخ تشریحی:** ابتدا باید تابع f در $x=1$ پیوسته باشد: $\begin{cases} f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2-2x)=1-2=-1 \\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(ax+b)=a+b \end{cases}\Rightarrow a+b=-1 \quad (0/25)$ حال باید مشتق چپ و راست تابع f در $x=1$ با هم برابر باشد: $\begin{cases} f'_+(x)=a\to f'_+(1)=a \quad (0/25) \\ f'_-(x)=2x-2\to f'_-(1)=0 \quad (0/25) \end{cases}\Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0)\Rightarrow a=0$ می‌دانیم $a+b=-1$ است پس: $b=-1$ $\Rightarrow a-b=0-(-1)=1 \quad (0/25)$	۱

ردیف	پاسخنامه	نمره

ردیف ۱۶ — نمره: ۱

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه توابع f و g را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x & ۰\le x\le ۲\\ -۲x+۸ & ۲\le x\le ۴\end{cases}\qquad g(x)=-x+۴$$

حال از ضابطه تابع h مشتق گرفته و $x=۳$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$h(x)=\frac{x+f(x)}{x-g(x)}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{(۱+f'(x))(x-g(x))-(۱-g'(x))(x+f(x))}{(x-g(x))^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۳} h'(۳)=\frac{(۱+f'(۳))(۳-g(۳))-(۱-g'(۳))(۳+f(۳))}{(۳-g(۳))^۲}\qquad (*)\qquad (۰/۲۵)$$

$$g(x)=-x+۴\xrightarrow{g'} g'(x)=-۱\Rightarrow\begin{cases}g(۳)=۱\\ g'(۳)=-۱\end{cases}\qquad (۰/۲۵)$$

$$f(x)=\begin{cases}۲x & ۰\le x\le ۲\\ -۲x+۸ & ۲\le x\le ۴\end{cases}\xrightarrow{f'} f'(x)=\begin{cases}۲ & ۰\le x<۲\\ -۲ & ۲<x\le ۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(۳)=-۲\\ f(۳)=۲\end{cases}\qquad (۰/۲۵)$$

مقادیر به دست آمده را در رابطه (*) جایگذاری کرده و حاصل خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$h'(۳)=\frac{(۱+(-۲))(۳-۱)-(۱-(-۱))(۳+۲)}{(۳-۱)^۲}=\frac{-۲-۱۰}{۴}=\frac{-۱۲}{۴}=-۳\qquad (۰/۲۵)$$

ردیف ۱۷ — نمره: ۱

پاسخ تشریحی:

آهنگ تغییر متوسط جرم توده باکتری $=\overbrace{\dfrac{m(۴)-m(۱)}{۴-۱}}^{(۰/۲۵)}=\dfrac{۱۳۰-۳}{۴-۱}=\dfrac{۱۲۷}{۳}\qquad (۰/۲۵)$

آهنگ رشد جرم توده باکتری در $t=۴$ $=\underbrace{m'(t)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^۲}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{t=۴} f'(۴)=\dfrac{۱}{۴}+۹۶\qquad (۰/۲۵)$

ردیف ۱۸ — نمره: ۱/۲۵

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x\to\underbrace{f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\begin{cases}x=۱ & (۰/۲۵)\\ x=-۲ & (۰/۲۵)\end{cases}$$

از طرفی $x=-۲$ در بازه گفته شده یعنی $[-۱,۳]$ قرار ندارد لذا نقاط بحرانی تابع در بازه گفته شده عبارتند از: $x=۱$، $x=۳$ و $x=-۱$

در نتیجه:

$$\begin{cases}f(۱)=-۷\to\overbrace{(۱,-۷)}^{(۰/۲۵)}\to \text{نقطه min مطلق}\\ f(۳)=۴۵\to\underbrace{(۳,۴۵)}_{(۰/۲۵)}\to \text{نقطه max مطلق}\\ f(-۱)=۱۳\end{cases}$$

ردیف	پاسخنامه	نمره

ردیف ۱۹ — نمره ۱

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم نقطهٔ $A(-1,1)$ نقطه عطف تابع f است پس:

$$\begin{cases} f(-1)=1 \\ f''(-1)=0 \end{cases}$$

$$f(x)=ax^3+bx^2+2 \to f'(x)=3ax^2+2bx \to f''(x)=6ax+2b$$

$$f(-1)=1 \to -a+b+2=1 \Rightarrow -a+b=-1 \qquad (0/25)$$

$$f''(-1)=0 \to -6a+2b=0 \to b=3a \qquad (0/25)$$

$$-a+b=-1 \xrightarrow{b=3a} -a+3a=-1 \to \underbrace{a=-\frac{1}{2}}_{(0/25)} \xrightarrow{b=3a} \underbrace{b=-\frac{3}{2}}_{(0/25)}$$

ردیف ۲۰ — نمره ۱/۷۵

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=\frac{3x+6}{x-2}$$

مجانب قائم تابع : $x=-\frac{d}{c} \Rightarrow x=2 \qquad (0/25)$

مجانب افقی تابع : $y=\frac{a}{c} \Rightarrow y=3 \qquad (0/25)$

$f'(x)=\frac{-12}{(x-2)^2}<0 \quad (0/25) \quad \Rightarrow f'(x)\neq 0 \Rightarrow$ تابع f نقطه بحرانی ندارد

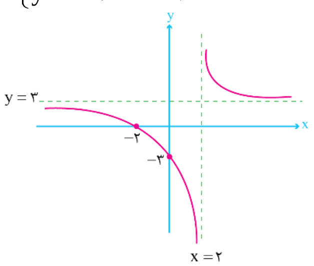
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$-$		$-$
f	$1 \searrow$		$\searrow 1$

$(0/5)$

محل برخورد تابع f با محورهای مختصات:

$$\begin{cases} x=0 \to y=-3 \\ y=0 \to x=-2 \end{cases}$$

و چون $ad-bc<0$ است پس نمودار تابع به صورت زیر است:



$(0/5)$

نمره ۲۰

موفق باشید